Условный экстремум:

$\varphi: U \to \mathbb{R}$, $f: U \to \mathbb{R}^m$

ищем min или max

$\varphi\big|_{f^{-1}(x)}$, $x \in \mathbb{R}^m$.

Положим $F = \begin{pmatrix} \varphi \\ f \end{pmatrix} : U \to \mathbb{R}^{m+1}$.

Если $u \in U$ точка экстремума, то $F(u) \in \partial F(U)$

В случае локального экстремума U – малая окрестность точки u.

$$F(u+v) = F(u) + F'_u v + \frac{1}{2} F''_u(v,v) + O(|v|^3)$$

Точка u - регулярная, если F'_u сюрьективно. В этом случае $\exists\ \Phi: O_u \to O_u$, т.ч. $F \circ \Phi = F(u) + F'_u$.

Следовательно, $F(u) \in F(O_u)$ для любой окрестности O_u.

Точка u - критическая, если F'_u не сюрьективно.

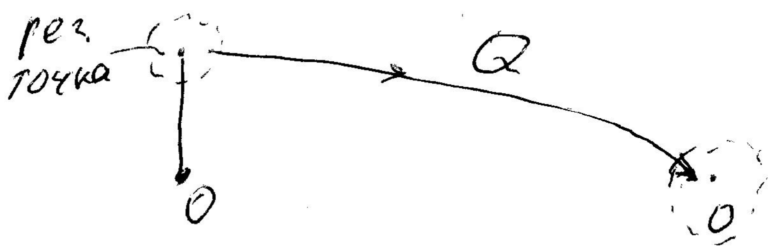
Значимая (не зависимая от замен переменных) часть F''_u есть $Hess_u F : \ker F'_u \to \operatorname{coker} F'_u$, где

$\operatorname{coker} F'_u = \mathbb{R}^{m+1} / \operatorname{im} F'_u$;

$Hess_u F(v) = F''_u(v,v) + \operatorname{im} F'_u$.

Пусть $Q:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^k$ – однородное квадратичное отображение.

Если $Q^{-1}(0)$ содержит регулярную точку, то Q сюрьективно, как и близкие к нему отображения (Q „существенно сюрьективно").



<u>Теорема.</u> Если $n \geq k^2$ и Q существенно сюрьективно, то $Q^{-1}(0) \neq 0$.

Это не верно для всех (n,k):

$p:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $p(z)=z^2$.

$$p : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C} \times \mathbb{R}, \quad p(z,w) = \begin{pmatrix} 2 z w \\ |z|^2 - |w|^2 \end{pmatrix}$$

– расслоение Хопфа.

Случай $k=1$: $\quad q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$\mathrm{ind}_{+(-)}\, q$ = число положительных (отрицательных) элементов в диагональной форме.

q сюръективно (знакопеременно) $\Longleftrightarrow$ оба индекса > 0.

Общий случай:

$$Q = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_k \end{pmatrix}, \qquad \omega = (\omega_1, \dots, \omega_k),\ |\omega| = 1$$

$$\omega Q = \sum_{i=1}^{k} \omega_i q_i$$

$$I_Q(\omega) = \mathrm{ind}_+(\omega q), \quad I_Q : S^{k-1} \to \mathbb{Z}_+$$

<u>Теорема.</u> Если $\exists\omega$, т.ч. $I_Q(\omega)=0$, то Q не сюръективно.
Если $k\leq 2$, то верно и обратное.

При $k\geq 3$ обратное неверно:

$$Q:\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}\longmapsto\begin{pmatrix} x_1x_2\\ x_2x_3\\ x_1x_3\end{pmatrix},$$

$$\overline{Q(\mathbb{R}^3)}=\left\{\begin{pmatrix} y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix} : y_1y_2y_3\geq 0\right\}.$$

Тем не менее:

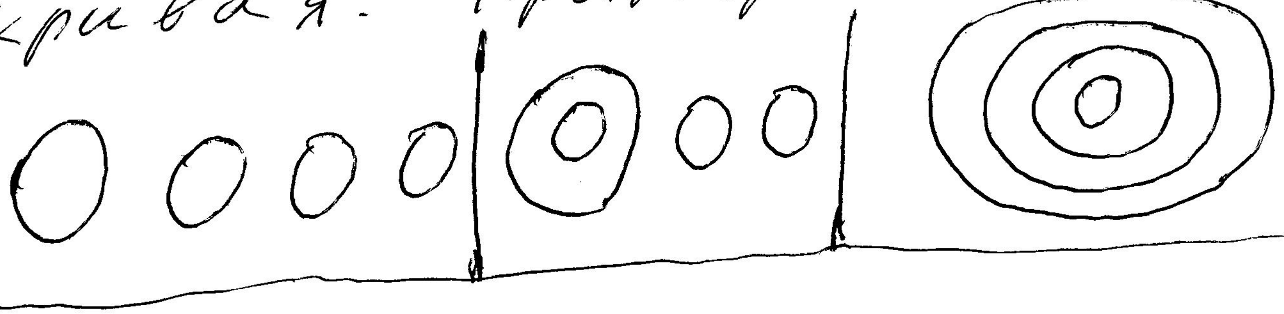
<u>Теорема.</u> Если $I_Q(\omega)\geq k$, $\forall\omega$, то $Q^{-1}(0)$ содержит регулярную точку.

Самое интересное находится в зазоре между этими теоремами

Положим $D_Q = \{\omega \in S^{k-1} : \det(\omega Q) = 0\}$ — это двукратное накрытие проективной алгебраической гиперповерхности степени n.

Заметим, что I_Q локально постоянна на $S^{k-1} \setminus D_Q$.

Случай $k=3$. Проекция D_Q в $\mathbb{RP}^2$ есть плоская алгебраическая кривая. Примеры:



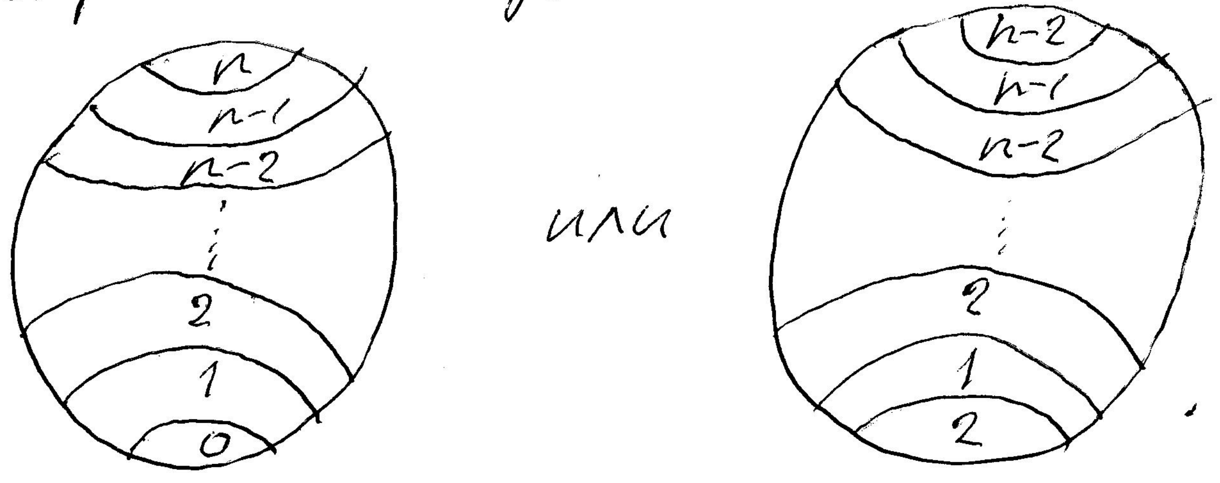
Классификация возможного расположения овалов есть предмет 16 проблемы Гильберта.

<u>Теорема</u>. Все типы кривых за исключением пустых кривых степени 2 mod 4 реализуются как D_a. Кривая D_a регулярна для всюду плотного открытого подмножества Q в пространстве квадратичных отображений.

Кривая степени n называется гиперболической, если это одно гнездо с максимальным $[\frac{n}{2}]$ числом овалов и, возможно, одной нестягиваемой компонентой (в случае нечётного n).

<u>Теорема</u> Пусть P_Q регулярна.

Q не сюръективна $\Longleftrightarrow$ P_Q гиперболическая, причём множества уровня функции I_Q устроены следующим образом:



<u>Общий случай.</u>

Система уравнений $Q(x)=0$ задаёт алгебраическое многообразие

$$V_Q = \{\bar{x} \in \mathbb{RP}^{n-1} : Q(x)=0\} \subset \mathbb{RP}^{n-1}.$$

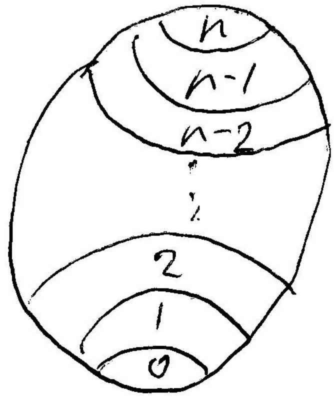
Положим $\Omega_i = \{\omega \in S^{k-1} : I_Q(\omega) \geq i\}$

<u>Теорема</u> $\exists$ когомологическая спектральная последовательность, сходящаяся к $H^*(\mathbb{R}P^{k-1}; V_Q)$, член E_2 которой имеет вид:

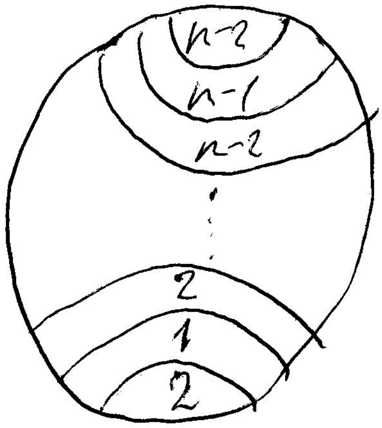
$$\begin{tikzcd}
H^0(\Omega_n) & H^1(\Omega_n) & H^2(\Omega_n) & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \\
H^0(\Omega_2) \arrow[drr] & H^1(\Omega_2) & H^2(\Omega_2) & \cdots \\
H^0(\Omega_1) & H^1(\Omega_1) & H^2(\Omega_1) & \cdots
\end{tikzcd}$$

Все когомологии — с коэффициентами из $\mathbb{Z}_2$.

Примеры (числа Бетти)



1	0	0
0	0	0
⋮	⋮	⋮
1	0	0
1	0	0
1	0	0



0	0	0
1	1	0
⋮	⋮	⋮
1	0	0
2	0	0
1	0	1

Дифференциал $d_2 : H^i(\Omega_j) \to H^{i+2}(\Omega_{j-1})$

использует дополнительную топологическую информацию

Пусть $\omega \in \Omega_j \setminus \Omega_{j+1}$,

тогда $\mathbb{R}^n = E_Q^+ \oplus E_Q^-$,

$\dim E_Q^+ = j$, $Q\big|_{E_Q^+} > 0$, $Q\big|_{E_Q^-} \leq 0$.

Пространства E_Q^+, $Q \in \Omega_j \setminus \Omega_{j+1}$, образуют векторное расслоение с базой $\Omega_j \setminus \Omega_{j+1}$.

Дифференциал $d_2 : H^i(\Omega_{j+1}) \to H^{i+2}(\Omega_j)$

использует 1-й класс Штифеля-Уитни этого расслоения.