А. А. Аграчев: краткий путеводитель по списку работ

В работах представлена самая разнообразная математика: и анализ, и геометрия, и топология, и алгебра, но мотивировкой всегда служат задачи математической теории управления; прежде всего, тесно связанные между собой задачи оптимального управления и управляемости, но также и задачи классификации управляемых систем относительно естественных групп преобразований. Большинство работ написаны в соавторстве с другими математиками, больше всего, с моим учителем Ревазом Валериановичем Гамкрелидзе.

Управляемая система рассматривается как взаимодействие некоммутирующих динамических систем. Такой угол зрения указывает естественное место теории управления в математике и естественный источник новых методов и приложений.

Первые серьёзные работы, составившие содержание кандидатской диссертации (см. [117, 116] в приложенном списке публикаций) касались поточечных условий оптимальности, прежде всего, для особых экстремалей. Эта тема получила дальнейшее развитие в [109, 98]. Опыт работы со сложными "пакетами вариаций" при разработке этих условий позволил построить общее *хронологическое исчисление*. Это исчисление (см. [115, 96]) связывает решение неавтономной эволюционной системы с коммутационными свойствами автономных систем, полученных "замораживанием времени" в правой части.

Чисто аналитическим следствием исчисления оказалось обобщение классической теоремы Коши–Ковалевской на случай разрывной по времени правой части и, соответственно, интегральная оценка для решения (см. [113]). Это исчисление имело также и алгебраическое продолжение: удалось выделить важный класс *хронологических алгебр*, рассмотренный в [114] и затем многократно переоткрытый под разными названиями. Элементами аддитивного базиса построенной в [114] свободной хронологической алгебры, являются корневые деревья.

Следующей важной темой стали общие квадратичные условия оптимальности, не только поточечные, но и "распределённые". Здесь были две главные задачи: 1) найти разумные условия, устойчивые к всевозможным вырождениям (неизбежным из-за наличия особых экстремалей); 2) научиться работать с векторными квадратичными отображениями, а не только со скалярными квадратичными формами. Решение каждой из этих задач завело достаточно далеко, а результаты составили основу докторской диссертации.

Для борьбы с вырождениями чрезвычайно эффективным оказался язык симплектической геометрии, ранее уже проявивший себя в гамильтоновой формулировке Принципа Максимума Понтрягина. А именно, каждой оптимальной понтрягинской экстремали сопоставляется *якобиева кривая* в лагранжевом грассманиане, а условия оптимальности пишутся в терминах индекса Маслова этих кривых, точнее, некоторой модификации индекса Маслова, определённой и для разрывных кривых и играющей роль своеобразной дискретной длины кривой на лагранжевом грассманиане. Также, как понтрягинские сопряжённые переменные заменяют дифференциал функции цены, когда дифференциала не существует, точки якобиевой кривой заменяют вторую производную функции цены. Эта теория и её приложения изложены в работах [106, 104, 95, 94, 93, 73, 72, 71, 51, 49, 40] (см. также лекционные заметки [28])

Теперь по поводу квадратичных отображений. Квадратичные условия оптимальности сводятся к условиям разрешимости некоторых систем квдратных уравнений и неравенствю Упомянутые выше индексы Маслова якобиевых кривых – суть индексы инерции квадратичных форм, входящих в систему. Найти условия разрешимости системы в терминах этих индексов и доступной дополнительной информации – отдельная весьма серьёзная топологическая проблема.

В работах [103, 102, 101, 97] решается гораздо более общая задача: вычисление чисел Бетти пространства решений произвольной системы квадратных уравнений и неравенств. Там построена некоторая спектральная последовательность, сходящаяся к гомологиям пространства решений; член E_2 этой спектральной последовательности использует только индексы инерции, а для вычисления дифференциалов нужны ещё некоторые естественные характеристические классы, определяемые системой.

Отдельная тема – *высшие вариации* управляемой системы, т.е. её полиномиальные аппроксимации произвольной степени. Здесь тоже следует выделить два существенно разных аспекта: алгебраический и аналитико-геометрический. Алгебраическому аспекту посвящена работа [91]. Дело в том, что член данной степени в разложении системы становится главным там, где предыдущие члены обращаются в ноль, и его алгебраическое выражение фактически определено с точностью до добавления произвольного полинома от предыдущих членов. Это порождает богатую алгебраическую структуру, связанную с высшими вариациями и изученную в упомянутой работе. Главный результат – полное описание симметрий высших вариаций и открытие фундаментального соотношения, связывающего тасовочное умножение с произведением в симметрической группе.

Аналитико-геометрический аспект рассмотрен в работах [105, 96, 48]. Главный результат здесь – построение специальных привилегированных координат, позволяющих выделить каноническую квазиоднородную полиномиальную аппроксимацию системы – неголономный аналог линеаризации.

К работам о высших вариациях примыкают статьи [108, 90, 88, 87], посвящённые условиям локальной управляемости гладких систем. Продолжение управляемой системы на пространства струй и систематическое использование быстро осциллирующих вариаций позволило получить наиболее сильные из известных достаточных условий локальной управляемости.

Целый ряд работ посвящён задаче глобальной управляемости для обладающих богатой симметрией систем из геометрии, механики и математической физики [111, 46, 44, 39, 38, 35, 27, 24, 18]. Быстро осциллирующие (причём сразу в нескольких шкалах) вариации оказались особенно эффективными при управлении уравнениями математической гидродинамики, а естественным следствием управляемости – регулярность решений стохастически возмущённых уравнений (см. [34]). В работе [39] об управляемости на унитарной и других компактных группах в качестве побочного результата найдены диаметры многообразий флагов.

Большой цикл работ посвящён субримановой геометрии: субриманово расстояние между двумя точками отличается от риманова наличием неголономных связей на допустимые кривые, соединяющие точки. В работах [84, 82, 78] получены необходимые и достаточные условия жёсткости и локальной минимальности (как слабой, так и сильной) анормальных субримановых геодезических. В работах [82, 80, 79, 75, 70, 63, 61, 60, 55, 21, 9, 2, 1] подробно изучаются трёхмерные субримановы пространства: их дифференциальные инварианты, нормальные формы, аналог формулы Гаусса–Боннэ, геометрические неравенства, типичные особенности сфер, каустик и волновых фронтов, а также фундаментальные решения уравнения теплопроводности для левоинвариантных субримановых метрик на трёхмерных унимодулярных группах.

В работах [75, 67, 64, 57] решен остававшийся долгое время открытым вопрос о субаналитичности субриманова расстояния для вещественноаналитических структур. В [75] приведён первый пример несубаналитичного расстояния, а в [57] – общие небходимые и достаточные условия субаналитичности. Другая старая задача, относящаяся к произвольным субримановым метрикам, решена в [30]. В этой работе показано, что функция субриманова расстояния – гладкая на открытом плотном подмножестве: в точки этого подмножества ведут только строго нормальные минимизирующие длину геодезические.

Как уже упоминалось, исследование второй вариации в задачах оптимального управления приводит к построению якобиевых кривых: специальных кривых в лагранжевом грассманиане, отвечающих оптимальным экстремалям. Лагранжев грассманиан есть однородное пространство симплектической группы; действие группы позволяет естественным образом определить *кривизну* кривой и различать кривые положительной и отрицательной кривизны. Наконец, кривизна задачи оптимального управления есть, по определению, кривизна якобиевой кривой, отвечающей экстремали, проходящей через эту точку. Для задачи минимизации длины кривой на римановом многообразии эта кривизна совпадает с обычной секционной кривизной, так что общая конструкция оказывается очень далёким обобщением римановой геометрии и, как и в римановом случае, даёт мощное средство для исследования гладких задач оптимального управления без решения дифференциальных уравнений. Эта теория развивается в работах [77, 68, 54, 52, 43, 36, 13, 7] и ещё далека от своего завершения. Среди недавних приложений можно упомянуть работы [20, 16, 15], посвящённые оптимальному синтезу для вариационных задач с бесконечным горизонтом и построению инвариантных лагранжевых многообразий механических систем с диссипацией.

Среди работ, не входящих в перечисленые циклы, можно упомянуть:

- самою первую студенческую заметку [118], где, грубо говоря, показано, что знаменитое представление Колмогорова непрерывных функций многих переменных в виде специальных суперпозиций функций одного переменного и сложения нельзя сильно упростить;

- работу [76], где построена теория Морса для непрерывных селекторов из нескольких гладких функций.

- работу [33], где получены нормальные формы для широкого класса афинных по управлению систем и предложен способ классификации задач с функциональными модулями.

- Работы [23, 17] о "задаче Монжа–Канторовича" и "слабой КАМ теореме" для управляемых систем.
- Работы [8, 5] о мере Хаусдорфа и топологии пространств путей в субримановых пространствах.
- В книге [47] изложены основы геометрической теории управления.

Здесь перечислены не все темы, представленные в списке публикаций, и не все статьи включены в этот список, но наиболее важные работы безусловно отмечены.