УДК 517.957+512.7

МАТРИЧНЫЕ КОНЕЧНОЗОННЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Б. А. Дубровин

ВВЕДЕНИЕ

До сравнительно недавнего времени (до конца 1973 г.) в спектральной теории операторов с периодическими коэффициентами практически отсутствовали примеры, где спектр и собственные функции таких операторов можно было бы явно вычислить (через какие-либо специальные функции). Отсутствовали какие бы то ни было эффективные методы нахождения коэффициентов операторов по спектральным данным. Для операторов с почти периодическими коэффициентами эти вопросы никогда и не ставились.

Ситуация изменилась, когда в 1974 году в цикле работ С. П. Новикова, Б. А. Дубровина, В. Б. Матвеева, А. Р. Итса [34, 18, 12, 23] и П. Лакса [48, 49] был введен и изучен класс «конечнозонных» периодических и квазипериодических потенциалов оператора Шрёдингера (Штурма—Лиувилля, Хилла). На базе этого класса была сформулирована и реализована программа построения широкого класса решений уравнения Кортевега—де Фриза (КдФ). (Некоторые результаты этих исследований были получены также Маккином и ван Мербеке в 1975 году [52]. Как было строго доказано позднее В. А. Марченко и И. В. Островским [31], множество периодических конечнозонных потенциалов плотно в пространстве периодических функций с данным периодом.) В этих работах была установлена связь спектральной теории операторов с периодическими коэффициентами с алгебраической геометрией, теорией конечномерных вполне интегрирумых систем и теорией нелинейных уравнений типа КдФ. Обобщение этой теории на пространственно двумерные (2+1)-системы было осуществлено И. М. Кричевером [27, 28]. Подход Кричевера дает также чрезвычайно методологически удобное и прозрачное изложение алгеброгеометрической процедуры построения упомянутых выше конечнозонных решений уравнения КдФ и его многочисленных аналогов.

Перечисленные работы составили основу периодического аналога метода обратной задачи в теории нелинейных уравнений [15] (называемого также методом «конечнозонного интегрирования» или «алгебро-геометрического интегрирования»). Суть этого метода (для случая систем с одной пространственной переменной) состоит в следующем:

1) нахождение (алгебро-геометрическим методом) широкой совокупности точных решений исследуемого нелинейного уравнения, конечнозонных с точки зрения спектральной теории соответствующих линейных операторов с периодическими или квазипериодическими коэффициентами;

2) изучение спектральных свойств операторов с общими гладкими периодическими коэффициентами и аппроксимируемости произвольного периодического решения гладкими конечнозонными решениями.

Следует признать, что до самого последнего времени эта программа конечнозонного интегрирования в полном объеме была осуществлена лишь для уравнения Кортевега—де Фриза и связанного с ним оператора Шрёдингера. Дело в том, что почти все нелинейные уравнения, интегрируемые методом обратной задачи (нелинейное уравнение Шрёдингера, уравнение sine-Gordon, уравнения нелинейного взаимодействия волновых пакетов и др.), ассоциированы со спектральной теорией матричных линейных дифференциальных операторов, которые зачастую даже не являются самосопряженными. Хотя построить комплексные алгеброгеометрические решения этих уравнений сравнительно несложно (см. [14, 21, 22, 24, 11]), попытки выделить из них вещественные гладкие решения наталкивались на серьезные трудности. Возникающие здесь задачи вещественной алгебраической геометрии оказались совершенно неразработанными (первые серьезные продвижения в решении этих задач в применении к нелинейному уравнению Шрёдингера, двумерному оператору Шрёдингера и к уравнению sine-Gordon были сделаны И. В. Чередником [38—41], хотя полученные в этих работах результаты и далеки от эффективности). Точно так же почти ничего не было известно о спектральных свойствах несамосопряженных операторов с периодическими коэффициентами, т. е. о свойствах возникающих римановых поверхностей и об аналитических свойствах блоховских собственных функций, мероморфных на этих поверхностях.*

Первые серьезные применения конечнозонных решений и конечнозонных операторов — в задачах статистической физики, развитии нелинейного аналога метода ВКБ и др. — сделали особенно актуальным доведение до конца конечнозонного интегрирования ряда нелинейных уравнений, имеющих важные фи-

---

* В частности, правильная постановка вопроса о расположении полюсов блоховских функций была найдена только в самое последнее время в работе С. П. Новикова и Б. А. Дубровина [17].

зические приложения, и исследование спектра соответствующих линейных операторов. Это было сделано в ряде работ самого последнего времени: для уравнения sine-Gordon в работах [16, 17], для нелинейного уравнения Шрёдингера в [17]; плотность конечнозонных решений уравнения sine-Gordon в пространстве всех периодических решений доказана в [10]. В этих же работах впервые описаны спектральные свойства возникающих здесь несамосопряженных матричных операторов второго порядка. В настоящем обзоре мы приведем основные идеи этих работ. Мы приведем здесь также полученные автором на основе [11]* результаты о свойствах спектра матричных J-самосопряженных линейных пучков операторов более высокого порядка. Эти результаты до сих пор не публиковались.

Следует сказать несколько слов о нелинейных уравнениях, ассоциированных с матричными линейными операторами более высоких порядков. Первые примеры таких уравнений — уравнения нелинейного взаимодействия волновых пакетов («задача трех волн») — были найдены В. Е. Захаровым и С. В. Манаковым (см. в [35]). Впоследствии С. В. Манаков заметил [30], что стационарные уравнения задачи n волн совпадают с n-мерным обобщением (для алгебры Ли $so(n)$) уравнений Эйлера движения твердого тела с закрепленной точкой и поэтому также интегрируемы. Прямая проверка независимости и инволютивности построенных С. В. Манаковым интегралов n-мерных уравнений Эйлера была сделана А. С. Мищенко и А. Т. Фоменко в работе [33]. В этой же работе метод Манакова был использован для доказательства полной интегрируемости на других полупростых алгебрах Ли. В дальнейшем этот метод обобщался также и для некоторых неполупростых алгебр Ли [37]. Применения этих результатов для построения интегрируемых потоков на симметрических пространствах найдены в [3]. (Напомним [19, 25], что гамильтонова система с n степенями свободы называется вполне интегрируемой, если у нее есть n независимых попарно коммутирующих первых интегралов. Это понятие, возникшее в прошлом веке (в работах Лиувилля и Бура) на базе метода разделения переменных, оказалось применимым к более широкому классу систем, не допускающих, вообще говоря, разделения переменных (наиболее ярким примером служит задача С. В. Ковалевской — см. в [7]). Заметим, что, несмотря на полную интегрируемость таких систем, получение явных формул для их решений оказывается чрезвычайно сложной задачей; еще более сложным оказывается для них нахождение канонических переменных действие — угол (например, в задаче Ковалевской эти переменные вплоть до последнего времени не были вычислены). Все это ограничивает возможности применения таких интегрируемых систем для решения

* Основные идеи работы [11] изложены в гл. 3, § 2, обзора [15].

конкретных механических и физических задач. В связи с этим следует отметить, что для гамильтоновых систем, возникающих в теории конечнозонного интегрирования, можно не только строить коммутирующие интегралы, но и получать явные формулы для решений этих систем через тэта-функции римановых поверхностей. Переменные действия в этих системах относительно широкого класса скобок Пуассона, как это стало ясно после работы С. П. Новикова и А. П. Веселова [4], также допускают алгеброгеометрическое вычисление.]

В последнее время была опубликована серия работ Адлера и ван Мёрбеке [42, 43, 44], в которых изучалась алгебраическая структура инвариантных торов для найденных С. В. Манаковым интегрируемых уравнений Эйлера. (Случай алгебры Ли $so(4)$, где интегрируемость была доказана еще в работах [33, 9], более детально изучен в недавнем препринте Хайне (Haine, Geodesic flow on $SO(4)$ and abelian surfaces). Явных формул для решений в них получено не было. Вопрос о выделении «вещественных» решений авторами не ставился. Более сложные нелинейные уравнения, связанные с матричными операторами порядка выше второго, изучались в [11, 5], где строился также гамильтонов формализм для этих уравнений.

Как обнаружил автор, многомерные уравнения Эйлера оказались чрезвычайно интересными и с точки зрения возможных алгеброгеометрических приложений. Дело в том, что соответствующие римановы поверхности спектра ассоциированных матричных линейных операторов оказываются плоскими неособыми вещественными алгебраическими кривыми. Например, для уравнений Эйлера на $su(k)$ вещественные овалы этих кривых вложены друг в друга (т. е. образуют «гнездо» из $k/2$ овалов). Возможность применения спектральной теории матричных операторов к задаче о классификации плоских вещественных кривых подвергается сейчас тщательному анализу.

Обзор состоит из шести параграфов и приложения. В первых двух параграфах изложены простейшие идеи метода конечнозонного интегрирования в приложении к матричным операторам второго порядка и связанным с ними нелинейному уравнению Шрёдингера и к уравнению sine-Gordon. Материал этих параграфов основан на работах [21, 22, 24, 11, 16, 17]. В следующем параграфе мы разбираем основные примеры нелинейных уравнений, связанных с матричными операторами более высокого порядка. Простейшие спектральные свойства таких операторов с периодическими коэффициентами обсуждаются (следуя [11]) в § 4. Конечнозонные (комплексные) матричные операторы строятся в § 5. Мы следуем здесь в основном работам [11, 26], хотя для получения явных формул в хорошем виде методы этих работ пришлось во многом усовершенствовать. Наконец, в § 6 разобраны условия типа J-самосопряженности строящихся матричных конечнозонных линейных операторов и решений соответствующих нелинейных уравнений. Особенно подробно изучены условия «вещественности» для решений многомерных уравнений Эйлера в связи с появляющимися здесь плоскими алгебраическими кривыми. В приложении к обзору мы собрали, для удобства читателя, список основных определений из теории римановых поверхностей и тэта-функций; более подробно с этими понятиями можно познакомиться, например, по обзору [13].

Автор выражает благодарность О. Я. Виро, С. М. Натанзону и А. Н. Тюрину за ряд полезных обсуждений.

§ 1. Оператор Дирака и нелинейное уравнение Шрёдингера

Нелинейное уравнение Шрёдингера (НШ$_\pm$)

$$ir_t = -r_{xx} \pm 2|r|^2 r \tag{1.1}$$

получается из «комплексифицированной» системы

$$\left.\begin{aligned} ir_t &= -r_{xx} + 2r^2 q \\ iq_t &= q_{xx} - 2q^2 r \end{aligned}\right\} \tag{1.2}$$

редукцией $q = \pm\bar{r}$. Система (1.2) представляется как условия коммутирования λ-пучков [33]

$$[\partial_x - U,\ \partial_t - V] = 0, \tag{1.3}$$

где

$$U = U(\lambda) = i\lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 & -q \\ r & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.4}$$

$$V = V(\lambda) = 2i\lambda^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + 2i\lambda \begin{pmatrix} 0 & -q \\ r & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -q_x \\ r_x & 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} rq & 0 \\ 0 & -rq \end{pmatrix}. \tag{1.5}$$

Нам полезна будет также другая нормировка этого коммутационного представления, получающаяся из (1.3) очевидным преобразованием

$$\tilde{U} = C^{-1} U C,\ \tilde{V} = C^{-1} V C, \tag{1.6}$$

где

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}, \tag{1.7}$$

$$\tilde{U}(\lambda) = \lambda \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i(r-q) & r+q \\ r+q & i(q-r) \end{pmatrix}. \tag{1.8}$$

Введем в рассмотрение связанный с теорией уравнения НШ линейный матричный оператор, зависящий от спектрального параметра λ:

$$L(\lambda) = \partial_x - U(\lambda), \tag{1.9}$$

или, в другом представлении,

$$\tilde{L}(\lambda)=\partial_x-\tilde{U}(\lambda). \qquad (1.9')$$

При $q=\pm\bar{r}$ оператор L обладает симметрией

$$L^*(\bar{\lambda})=-J_\pm L(\lambda)J_\pm;\ J_-=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\ J_+=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}. \qquad (1.10)$$

Уравнение для «собственных функций» имеет вид:

$$L(\lambda)\psi=0,\ \psi=(\psi_1,\ \psi_2)^T, \qquad (1.11)$$

или

$$\tilde{L}(\lambda)\tilde{\psi}=0,\ \tilde{\psi}=(\tilde{\psi}_1,\ \tilde{\psi}_2)^T. \qquad (1.11')$$

Пусть коэффициенты r, q оператора $L(\lambda)$ периодичны с периодом T, $r(x+T)=r(x)$, $q(x+T)=q(x)$. Тогда на пространстве решений уравнения (1.11) действует оператор монодромии

$$\hat{T}\psi(x)=\psi(x+T). \qquad (1.12)$$

Если $Y(x,\ x_0,\ \lambda)=\begin{pmatrix}y_{11}(x,\ x_0,\ \lambda) & y_{12}(x,\ x_0,\ \lambda)\\ y_{21}(x,\ x_0,\ \lambda) & y_{22}(x,\ x_0,\ \lambda)\end{pmatrix}$ — фундаментальная матрица решений уравнения (1.11) с начальными условиями $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ в точке $x=x_0$, то матрица $\hat{T}(x_0,\ \lambda)$ оператора монодромии (1.12) в базисе $(y_{11},\ y_{21})^T$, $(y_{12},\ y_{22})^T$ имеет вид:

$$\hat{T}(x_0,\ \lambda)=\begin{pmatrix}\tau_{11}&\tau_{12}\\ \tau_{21}&\tau_{22}\end{pmatrix}=Y(x_0+T,\ x_0,\ \lambda).$$

Ее матричные элементы являются поэтому целыми функциями от спектрального параметра λ. Матрица $\hat{T}$ унимодулярна.

При $q=\pm\bar{r}$ для матрицы монодромии выполняются следующие условия унитарности:

$$q=\bar{r},\quad \hat{T}^*(\bar{\lambda})\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\hat{T}(\lambda)=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}, \qquad (1.13)$$

$$q=-\bar{r},\quad \hat{T}^*(\bar{\lambda})\,\hat{T}(\lambda)=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} \qquad (1.13')$$

(звездочка обозначает эрмитово сопряжение).

Уровни спектра периодической и антипериодической задач ищутся из условия

$$\Delta(\lambda)\equiv\frac{1}{2}\operatorname{Sp}\hat{T}(x_0,\lambda)=\pm 1. \qquad (1.14)$$

Отметим [21], что для случая $q=\bar{r}$ задача на собственные значения (1.11′) самосопряженная (для подходящих граничных условий — периодических или нулевых $\tilde{\psi}_1(0)=\tilde{\psi}_1(T)=0$). Периодическая задача (1.11) для $q=\bar{r}$ также самосопряжена, однако задача $\psi_1(0)=\psi_1(T)=0$ уже не является самосопряженной. Для случая $q=-\bar{r}$ (НШ$_-$) задача (1.11′) является J-самосопряженной, $J=\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}$. Таким образом, для самосопряженного случая $q=\bar{r}$ все уровни спектра (1.14) периодической и антипериодической задачи вещественны и уходят на $\pm\infty$ с асимптотикой $\lambda_n=\pi n/T$, $-\infty<n<\infty$. Для несамосопряженного случая $q=-\bar{r}$ ситуация устроена сложнее, и мы ее опишем ниже.

Блоховские собственные функции имеют вид

$$\hat{T}\psi_\pm(x)=\psi_\pm(x+T)=e^{\pm ipT}\psi_\pm(x), \tag{1.15}$$

где $p=p(\lambda)$ — квазиимпульс (блоховский закон дисперсии), определенный с точностью до периода обратной решетки, $p\mapsto p+2\pi n/T$. При произвольном значении λ имеются, вообще говоря, две различные блоховские функции ψ_+ и ψ_-, сливающиеся в одну в точках спектра периодической и антипериодической задач (нечетной кратности). Разрешенные зоны спектра определяются из условия вещественности квазиимпульса $p(\lambda)$. В самосопряженном случае $q=\bar{r}$ эти зоны образуют, вообще говоря, бесконечное семейство отрезков вещественной оси $-\infty<\lambda<\infty$ с концами в простых точках спектра периодической и антипериодической задач (см. рис. 1а). При $|n|\to\infty$ длины ла-

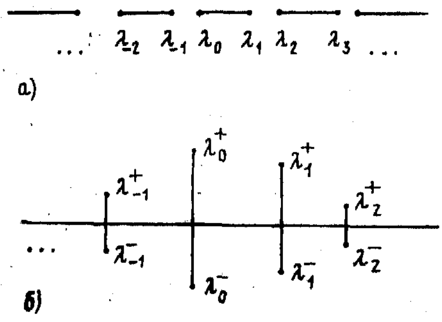

Рис. 1

кун быстро убывают; скорость убывания определяется гладкостью потенциала r. Рассмотрим теперь несамосопряженный случай $q=-\bar{r}$. Здесь матрица монодромии $\hat{T}(x_0, \lambda)$ унитарна при вещественных λ; поэтому вся вещественная ось является разрешенной зоной (собственные числа $e^{\pm ipT}$ унитарной матрицы по модулю равны единице). Целая функция $\Delta(\lambda)$ (1.14) обладает симметрией

$$\overline{\Delta(\lambda)}=\Delta(\bar{\lambda}), \tag{1.16}$$

поэтому уровни (1.14) спектра периодической и антипериодивеской задач расположены симметрично относительно вещественной оси. При этом все вещественные точки спектра четно кратно вырождены (иначе на вещественной оси были бы лакуны). Все простые точки ветвления расположены относительно вещественной оси симметричными парами λ_n^+, $\lambda_n^-=\overline{\lambda_n^+}$ с асимптотикой $\lambda_n^\pm=\pi n/T$ при больших n. Мнимые части $\lambda_n^\pm$ при $|n|\to\infty$ быстро убывают; скорость убывания определяется гладкостью потенциала r. Кроме вещественной оси, квазиимпульс $p(\lambda)$ принимает вещественные значения на некоторых дугах, соединяющих пары λ_n^+ и λ_n^- точек ветвления (на обоих листах римановой поверхности; см. рис. 1, б).

Рассмотрим теперь свойства блоховских функций. Для их однозначного определения нужно задать нормировку, полагая, например,

$$\psi_1|_{x=x_0}=1. \tag{1.17}$$

Имеет место простая

Лемма 1.1. При любых комплексных периодических функциях $r(x)$, $q(x)$ блоховская собственная функция продолжается (по λ) до однозначной мероморфной функции на двулистной римановой поверхности Γ вида:

$$w^2-2\Delta(\lambda)w+1=0, \tag{1.18}$$

имеющей точки ветвления в точках спектра (нечетной кратности) периодической и антипериодической задач (1.14). Полюсы функции ψ на поверхности Γ имеют вид:

$$\lambda=\gamma_i(x_0), \quad \tau_{12}(\gamma_i(x_0), x_0)=0, \tag{1.19}$$

$$w=w_i(x_0)=\tau_{22}(\gamma_i(x_0), x_0). \tag{1.19'}$$

Нули первой компоненты $\psi_1(x, x_0, \lambda)$ имеют вид, аналогичный (1.19), (1.19') с заменой $x_0\mapsto x$. При $\lambda\to\infty$ функция $\psi=\psi_\pm$ имеет экспоненциальную асимптотику $e^{\pm i\lambda(x-x_0)}$.

Доказательство леммы аналогично доказательству свойств блоховской собственной функции оператора Штурма—Лиувилля (см. [15], а также [35]).

Риманову поверхность Γ, на которой мероморфна блоховская функция, мы будем называть спектром оператора L, а расположенные на ней полюсы блоховской функции — дополнительным спектром этого оператора. Из (1.19) очевидно, что точки $\lambda=\gamma_i(x_0)$ дополнительного спектра являются собственными значениями оператора (1.11) на отрезке $[x_0, x_0+T]$ с нулевыми граничными условиями

$$\psi_1(x_0)=\psi_1(x_0+T)=0. \tag{1.20}$$

Из предыдущих рассмотрений вытекает, что в самосопряженном случае $q=\bar{r}$ все точки ветвления римановой поверхности Γ вещественны, а в несамосопряженном случае $q=-\bar{r}$ все точки ветвления невещественны и расположены симметричными относительно вещественной оси парами (см. рис. 1).

Аналогичные построения можно проделать для преобразованного уравнения (1.11′). Спектр — риманова поверхность Г, очевидно, получится тот же самый, что и выше, а дополнительный спектр $(\tilde{\gamma}_j(x_0),\ \tilde{w}_j(x_0))$ изменится. В частности, в самосопряженном случае $q=\bar{r}$ все точки $\lambda=\tilde{\gamma}_j(x_0)$ лежат на вещественной оси по одной в каждой лакуне (на одном из листов римановой поверхности). Это вытекает из того, что они являются уровнями спектра самосопряженной задачи

$$\tilde{\psi}_1(x_0)=\tilde{\psi}_1(x_0+T)=0. \qquad (1.20')$$

Расположение дополнительного спектра в несамосопряженном случае более сложно. Легко находится лишь асимптотика величин $\gamma_n(x_0)$:

$$\gamma_n(x_0)\sim\pi n/T, \quad |n|\to\infty.$$

Неэффективное соотношение на расположение дополнительного спектра γ_j дается условием унитарности (1.13′): для целых функций экспоненциального типа $1-\Delta^2(\lambda)$ и $\tau_{12}(\lambda)$, имеющих нули в точках ветвления римановой поверхности и в точках дополнительного спектра соответственно, выражение

$$1-\Delta^2(\lambda)-\tau_{12}(\lambda)\,\overline{\tau_{12}(\bar{\lambda})} \qquad (1.21)$$

должно быть полным квадратом некоторой целой функции (а именно, функции $\tilde{\Delta}=(\tau_{11}-\tau_{22})/2i$). Это соотношение можно переписать в виде: точки дополнительного спектра должны быть расположены на римановой поверхности Г в нулях «дифференциала второго рода» вида

$$\Omega=\left(1+\frac{\tilde{\Delta}(\lambda)}{\sqrt{1-\Delta^2(\lambda)}}\right)d\lambda, \qquad (1.21')$$

не имеющего особенностей в конечной части Г и на бесконечности имеющего асимптотику вида $d\lambda\,(1+O(\lambda^{-1}))$. Такая запись более удобна, так как в ней участвуют только точки ветвления поверхности Г (кратный спектр сокращается). Комплексно сопряженные точки $(\bar{\gamma}_l,\ \bar{w}_l)$ также являются нулями дифференциала Ω.

До сих пор мы говорили только о периодических потенциалах q, r. Можно ввести в рассмотрение и почти периодические потенциалы; в этом случае наличие у них собственной функции, мероморфной на двулистной римановой поверхности и обладающей на ней аналитическими свойствами типа описанных выше, является определением изучаемого класса потенциалов (потенциалы с «правильными аналитическими свойствами», ср. [15]).

Введенная выше риманова поверхность спектра имеет, вообще говоря, бесконечный род. Введем теперь центральное для дальнейшего понятие конечнозонных операторов (на примере операторов вида (1.9)).

Определение 1.1. Оператор $L(\lambda)$ называется конечнозонным, если он обладает собственной функцией, мероморфной (по λ) на римановой поверхности Γ конечного рода.

Определение 1.1′. Оператор $L(\lambda)$ называется конечнозонным, если найдется матрица

$$M=M(\lambda, x)=\begin{pmatrix} m_{11}(\lambda, x) & m_{12}(\lambda, x) \\ m_{21}(\lambda, x) & m_{22}(\lambda, x)\end{pmatrix}.$$

полиномиально зависящая от λ, коммутирующая с оператором $L(\lambda)$:

$$[L(\lambda),\ M(\lambda)]=0. \tag{1.22}$$

Имеет место

Теорема 1.1. Определения 1.1 и 1.1′ эквивалентны.

Сформулированное утверждение ва́жно и хорошо известно в теории конечнозонного интегрирования; оно появилось и было использовано впервые в работе С. П. Новикова [34] для случая оператора Шрёдингера (см. также [15]). Дадим здесь набросок доказательства того, что из определения 1.1′ вытекает определение 1.1. Введем характеристический многочлен

$$R(\lambda, \nu)=\det(i\nu-M(\lambda, x))=-\nu^2+\det M(\lambda, x) \tag{1.23}$$

матрицы $M(\lambda, x)$, не зависящий от x, в силу (1.22). Собственные векторы матрицы $M=M(\lambda, x)$ имеют вид:

$$M\xi=i\nu\xi,\quad \xi=\begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{i\nu-m_{11}(\lambda)}{m_{12}(\lambda)}\end{pmatrix},\quad \xi=\xi(\lambda, x) \tag{1.24}$$

и, поэтому, мероморфны на римановой поверхности Γ вида

$$R(\lambda, \nu)=-\nu^2+\det M(\lambda, x)=0. \tag{1.25}$$

Очевидно, двулистная (над λ-плоскостью) поверхность Γ алгебраическая, т. е. имеет конечный род. Рассмотрим функцию ψ, являющуюся общей собственной функцией коммутирующих операторов $L(\lambda)$ и $M(\lambda)$:

$$L(\lambda)\psi=0,\quad M(\lambda, x)\psi=i\nu\psi,\quad \psi=(\psi_1, \psi_2)^T \tag{1.26}$$

с условием нормировки

$$\psi_1|_{x=x_0}=1. \tag{1.26′}$$

Эта функция имеет вид:

$$\psi(x, x_0, \lambda)=Y(x, x_0, \lambda)\,\xi(\lambda, x_0). \tag{1.27}$$

Поэтому она мероморфна на римановой поверхности Γ. Ее аналитические свойства исследуются без труда.

Обратное следствие (вывод определения 1.1′ из определения 1.1) доказывается более сложно (см. [15]). Фактически, оно вытекает из того, что конечнозонные (в смысле определения 1.1) потенциалы являются решениями некоторых вполне определенных нелинейных дифференциальных уравнений.

Разберем теперь совсем простой, но важный пример. Пусть матрица $M(\lambda)$, коммутирующая с $L(\lambda)$, имеет вид:

$$M(\lambda)=(\lambda-\alpha)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & -q\\ r & 0\end{pmatrix}. \qquad (1.28)$$

Условие коммутации $[L(\lambda), M(\lambda)]=0$ приводит к следующим формулам для r, q:

$$r=r_0 e^{-2i\alpha x}, \quad q=q_0 e^{2i\alpha x}, \qquad (1.29)$$

где r_0, q_0 — константы. Рассмотрим несамосопряженный случай $q_0=-\bar{r}_0$. Положим $r_0=\rho_0 e^{-i\varphi_0}$. Риманова поверхность Γ — спектр оператора $L(\lambda)$ с коэффициентами вида (1.29) имеет вид:

$$\det|\nu-M(\lambda)|=\nu^2-(\lambda-\alpha)^2-\rho_0^2=0. \qquad (1.30)$$

Это двулистная поверхность рода 0. Ее точки ветвления $\lambda_\pm$ имеют вид:

$$\lambda_\pm=\alpha\pm i\rho_0. \qquad (1.31)$$

Имеется одна точка дополнительного спектра (γ, ν) (для нормировки (1.9′)) вида

$$\gamma(x_0)=\alpha+i\rho_0\sin(2\alpha x_0+\varphi_0), \quad \nu(x_0)=-i\rho_0\cos(2\alpha x_0+\varphi_0).$$

При изменении x_0 точка $(\gamma(x_0), \nu(x_0))$ бежит по циклу, склеенному из двух экземпляров отрезка $[\lambda_-, \lambda_+]$ по их концам (точкам ветвления). Ориентируем этот цикл так, чтобы при пересечении с вещественной осью λ на верхнем листе, где $\nu>0$, положительному направлению обхода отвечало бы убывание мнимой части λ. Обозначим так ориентированный цикл через a.

Рассмотрим более внимательно периодический случай, где $\alpha=\pi N/T$, T — период, N — целое число. Тогда можно считать, что риманова поверхность (1.30) с точками ветвления (1.31) получена из римановой поверхности $\nu^2=\lambda^2$ нулевого потенциала с $\rho_0=0$ раскрытием N-го двукратного собственного уровня $\lambda_N=\pi N/T$ периодической (или антипериодической) задачи. Обратим внимание, что при прохождении периода $[0, T]$ точка $(\gamma(x_0), \nu(x_0))$ накручивается на ориентированный цикл a со степенью $2N$. Другими словами, полюс блоховской функции, появляющийся при возмущении нулевого потенциала, помнит «место своего рождения» на оси λ через степень накручивания на соответствующий a-цикл. Ясно, что то же самое справедливо для любого периодического потенциала $r(x)$, в силу связности совокупности операторов (1.9) с $q=-\bar{r}$. Более точно, при прохождении периода $[0, T]$ полюсы $(\gamma_j(x_0), \nu_j(x_0))$ блоховской функции накручиваются на некоторые циклы a_j на римановой поверхности Γ, расположение каждого из этих циклов аналогично описанному выше расположению цикла a. В классах гомологий этих циклов можно выбрать такие представители (обозначим их также через a_j), которые при проекции на λ-плоскость переходят в попарно непересекающиеся дуги с концами в комплексно сопряженных парах точек ветвления $[\lambda_j^+, \lambda_j^- = \overline{\lambda_j^+}]$. Упорядочим эти циклы по их пересечению с вещественной осью λ и ориентируем аналогично тому, как выше был ориентирован цикл a. Тогда степени накручивания полюсов блоховской функции на соответствующие им a-циклы будут монотонно возрастать*.

Аналогичное утверждение справедливо и в почти периодическом случае, если правильно определить числа накручивания. Это можно использовать для однозначного определения классов гомологий a-циклов, по которым движутся полюсы блоховских функций на римановой поверхности (см. подробнее в [17]).

Наиболее характерные свойства конечнозонных потенциалов, разобранные выше на простейшем примере, остаются в силе и для общего конечнозонного потенциала. Приведем в заключение этого параграфа явные формулы для конечнозонных потенциалов оператора $L(\lambda)$ вида (1.9).

1) НШ$_+$. Риманова поверхность Γ рода g имеет в этом случае вид

$$\nu^2 = P_{2g+2}(\lambda) = \lambda^{2g+2} + \ldots, \tag{1.32}$$

где все нули $\lambda_1, \ldots, \lambda_{2g+2}$ многочлена $P_{2g+2}(\lambda)$ вещественны и различны. Пусть $\lambda_1 < \ldots < \lambda_{2g+2}$. Лакуны в спектре имеют вид $\lambda_{2j-1} < \lambda < \lambda_{2j}$, $1 \leqslant j \leqslant g+1$. Над каждой лакуной сидит ровно один полюс $(\tilde{\gamma}_j, \tilde{\nu}_j)$ блоховской функции оператора (1.9′). Обозначим через P_+, P_- бесконечноудаленные точки поверхности (1.35): $P_\pm = \{\lambda = \infty, \nu\lambda^{-g-1} = \pm 1\}$. Пусть канонический базис циклов $a_1, \ldots, a_g$, $b_1, \ldots, b_g$ имеет такой вид, как на рис. 2а. Под действием антиинволюции $\tau: (\lambda, \nu) \mapsto (\bar{\lambda}, \bar{\nu})$ этот базис преобразуется так:

$$\tau(a_i) = -a_i, \quad \tau(b_i) = b_i, \quad i = 1, \ldots, g. \tag{1.33}$$

Матрица периодов $B = (B_{jk})$ вещественна. Потенциал $r = \bar{q}$ имеет вид:

$$r(x) = r_0 \exp\left\{ix \int_{P_-}^{P_+} \Omega\right\} \frac{\theta(ixU + z_0 + \Delta)}{\theta(ixU + z_0)\,\varepsilon(P_+, P_-)}, \tag{1.34}$$

где $\Omega = \Omega_{P_+}^{(1)} - \Omega_{P_-}^{(1)}$ — нормированный абелев дифференциал второго рода с двойными полюсами в P_+, P_-; U — его вектор

* Для уравнения sine-Gordon аналогичное наблюдение было сделано в работе [51].

b-периодов, $\Delta = A(P_+) - A(P_-)$ (где A — отображение Абеля); $\varepsilon(P_+, P_-)$ — некоторая константа, зависящая только от римановой поверхности (ср. § 5 ниже), $|r_0| = 1$, z_0 — чисто мнимый вектор.

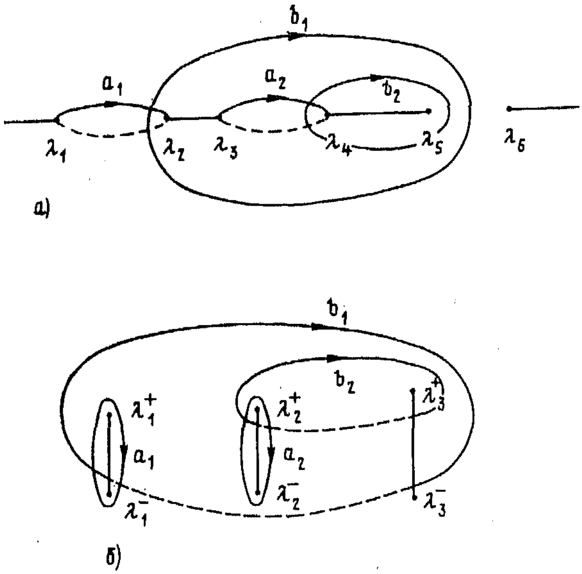

Рис. 2

2) НШ$_-$. Риманова поверхность Γ рода g имеет в этом случае вид (1.32), где все нули многочлена $P_{2g+2}(\lambda)$ невещественны, $\lambda_j^- = \overline{\lambda_j^+}$; $j = 1, \ldots, g+1$. Выберем базис циклов $a_1, \ldots, a_g$, $b_1, \ldots, b_g$ так, как показано на рис. 2б. Под действием антиинволюции $\tau: (\lambda, \nu) \mapsto (\bar\lambda, \bar\nu)$ эти циклы преобразуются следующим образом:

$$\tau(a_l) = -a_l, \quad \tau(b_l) = b_l + \sum_{k \neq l} a_k. \tag{1.35}$$

Матрица периодов обладает симметрией вида

$$\bar B = 2\pi i \begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 0 & \ldots & 1 \\ \vdots & & & \\ 1 & 1 & \ldots 1 & 0 \end{pmatrix} + B. \tag{1.36}$$

Потенциал $r = -\bar q$ имеет вид (1.34), где вектор z_0 может принимать такие значения:

$$z_0 = i r_0, \quad r_0 \in \mathbb{R}^g. \tag{1.37}$$

Гладкие решения уравнений НШ$_+$ и НШ$_-$ получаются из этих формул заменой

$$z_0 \mapsto z_0 + itV, \quad \exp ix \int_{P_-}^{P_+} \Omega \mapsto \exp\left\{ix \int_{P_-}^{P_+} \Omega + it \int_{P_-}^{Q} \Omega^{(2)}\right\},$$

где $\Omega^{(2)} = \Omega^{(2)}_{P_+} - \Omega^{(2)}_{P_-}$ — нормированный дифференциал второго рода с полюсами третьего порядка в точках P_+, P_-; V — его вектор b-периодов.

§ 2. Несамосопряженные операторы, связанные с уравнением sine-Gordon

Уравнение sine-Gordon (sG)

$$u_{tt} - u_{xx} + \sin u = 0 \tag{2.1}$$

допускает, как было обнаружено в работе [20], коммутационное представление Лакса

$$\dot{\mathscr{L}} = [\mathscr{A}, \mathscr{L}] \tag{2.2}$$

на матричных операторах четвертого порядка

$$\mathscr{L} = -\begin{pmatrix} i\sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \partial_x + \begin{pmatrix} \frac{iu}{4}\sigma_1 & \exp\frac{iu}{2}\sigma_3 \\ \exp\frac{iu}{2}\sigma_3 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.3}$$

$$\mathscr{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \partial_x + 2\begin{pmatrix} 0 & i\sigma_2 \exp\frac{iu}{2}\sigma_3 \\ i\left(\exp\frac{iu}{2}\sigma_3\right)\sigma_2 & 0 \end{pmatrix}; \tag{2.4}$$

здесь $v = u_t + u_x$; σ_1, σ_2, σ_3 — матрицы Паули,

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{2.5}$$

Оператор $\mathscr{L}$ является J-самосопряженным, $\mathscr{L}^* = J\mathscr{L}J$, где $J = \begin{pmatrix} \sigma_2 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix}$.

Спектральная задача $\mathscr{L}f = \lambda f$ для оператора (2.3) сводится к задаче

$$\tilde{L}(\lambda)\psi = 0, \quad \tilde{L}(\lambda) = \partial_x - \tilde{U}(\lambda), \tag{2.6}$$

$$\tilde{U}(\lambda) = -i\lambda\sigma_2 - \frac{iv}{4}\sigma_3 - \frac{1}{16i\lambda}(\cos u\sigma_2 - \sin u\sigma_1). \tag{2.7}$$

Представление Лакса (2.2) переписывается в виде условия коммутирования λ-пучков

$$[\partial_x - \tilde{U}(\lambda), \ \partial_t - \tilde{V}(\lambda)] = 0, \tag{2.8}$$

где

$$\tilde{V}(\lambda)=-i\lambda\sigma_2-\frac{iv}{4}\sigma_3+\frac{1}{16i\lambda}(\cos u\sigma_2-\sin u\sigma_1). \tag{2.9}$$

В конусных переменных $\xi=\frac{1}{2}(x+t)$, $\eta=\frac{1}{2}(x-t)$, где уравнение sG переписывается в виде

$$u_{\xi\eta}=\sin u, \tag{2.10}$$

более удобно пользоваться другой нормировкой коммутационного представления:

$$[\partial_\xi-U(\lambda),\ \partial_\eta-V(\lambda)]=0, \tag{2.11}$$

связанной с $\tilde{U}$, $\tilde{V}$ преобразованием типа (1.6): $U(\lambda)$ имеет вид (1.4) с $r=-q=\frac{1}{2}u_\xi$,

$$V(\lambda)=\frac{1}{4i\lambda}\begin{pmatrix}\cos u & -i\sin u\\ i\sin u & -\cos u\end{pmatrix}. \tag{2.12}$$

Несамосопряженность оператора $\tilde{L}(\lambda)$ здесь возникает из-за нетривиального вхождения спектрального параметра λ (фактически, из-за того, что исходный оператор $\mathscr{L}$ был несамосопряжен). Оператор $\tilde{L}(\lambda)$ обладает (при вещественных u, v) симметриями

$$\tilde{L}^*(\bar{\lambda})=-\tilde{L}(\lambda), \tag{2.13}$$

$$\tilde{L}^T(-\lambda)=-\sigma_1\tilde{L}(\lambda)\sigma_1. \tag{2.14}$$

Наличие второй симметрии (2.14) усложняет спектральные свойства оператора $\tilde{L}(\lambda)$, по сравнению со спектральными свойствами оператора $\tilde{L}(\lambda)$ из § 1.

Условия периодичности имеют вид:

$$u(x+T)=u(x)+2\pi Q,\quad v(x+T)=v(x), \tag{2.15}$$

где Q — целое число, называемое топологическим зарядом (т. е. $\exp iu$ — периодическая функция). Матрица монодромии $\hat{T}$ оператора $\tilde{L}(\lambda)$ унимодулярна и, в стандартном базисе решений с начальными условиями $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ в точке x_0, обладает свойством унитарности вида (1.13′). Учитывая симметрию (2.14), получаем вид матрицы монодромии:

$$\hat{T}=\hat{T}(x_0,\lambda)=\begin{pmatrix}a(x_0,\lambda^2) & \lambda b(x_0,\lambda^2)\\ -\lambda\bar{b}(x_0,\bar{\lambda}^2) & \bar{a}(x_0,\lambda^2)\end{pmatrix}, \tag{2.16}$$

где $a(x_0, z)$, $b(x_0, z)$ аналитичны по $z=\lambda^2$ всюду, кроме 0 и ∞, где у них существенные особенности экспоненциального типа.

Пусть

$$a_R(z)=\frac{1}{2}(a(x_0,z)+\bar{a}(x_0,\bar{z})),\quad z=\lambda^2, \tag{2.17}$$

— половина следа матрицы монодромии,

$$a_I(x_0, z) = \frac{1}{2i}(a(x_0, z) - \bar{a}(x_0, \bar{z})). \tag{2.18}$$

Спектр периодической и антипериодической задач расположен симметрично относительно вещественной и мнимой осей λ и имеет вид

$$\lambda_n = \pm\sqrt{z_n}, \quad 1 - a_R^2(z_n) = 0, \tag{2.19}$$

где точки z_n расположены симметрично относительно вещественной оси z. Все вещественные точки z_n с $z_n > 0$ четнократно вырождены. Остальные точки z_n расположены парами или комплексно сопряженными, z_n^+, $z_n^- = \overline{z_n^+}$, или оба числа z_n^+, z_n^- вещественны и отрицательны. При $n \to \infty$ точки $z_n^\pm$ имеют асимптотику [10, 51]

$$z_n^\pm = \frac{n^2\pi^2}{T^2} + \Delta_\infty + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \tag{2.20}$$

$$z_{-n}^\pm = 2^{-8}\left[\frac{T^2}{n^2\pi^2} + \frac{\Delta_0}{n^3} + O\left(\frac{1}{n^6}\right)\right],$$

где Δ_0, Δ_∞ — вещественные константы. Мнимые части величин $z_n^\pm$ малы при $|n| \to \infty$, скорость их убывания определяется гладкостью u.

В силу этих асимптотик, на отрицательной вещественной полуоси лежит лишь конечное число точек спектра периодической и антипериодической задач. Кроме того, отсюда же вытекает, что при больших $|n|$ все невещественные точки спектра простые.

Блоховские собственные функции $\psi_\pm$ определяются условиями

$$\tilde{L}(\lambda)\psi_\pm = 0, \quad \psi_\pm(x+T) = \exp[\pm ip(\lambda)T]\psi_\pm(x), \tag{2.20$'$}$$

где $p = T^{-1}\arccos a_R$ — квазиимпульс. Разрешенные зоны спектра получаются при вещественных $p(\lambda)$. Как и в § 1 (для случая $q = -\bar{r}$), из унитарности матрицы $\hat{T}$ получаем: вся вещественная ось λ является разрешенной зоной. На z-плоскости это означает, что вещественная полуось z от 0 до ∞ является разрешенной зоной.

Риманова поверхность $\tilde{\Gamma}$ блоховской функции $\psi_\pm(\lambda)$, нормированной условием $\psi_\pm^1|_{x=x_0} = 1$, имеет вид

$$\tilde{\mu}(\lambda^2) = \pm\sqrt{1 - a_R^2(\lambda^2)} \tag{2.21}$$

(спектр оператора $\tilde{L}(\lambda)$). Удобно ввести в рассмотрение другую риманову поверхность Γ вида

$$\mu(z) = \pm\sqrt{z(1 - a_R^2(z))}, \tag{2.22}$$

двулистно накрывающую z-плоскость (роль спектрального параметра в дальнейшем будет играть именно z).

Типичный вид римановой поверхности Γ изображен на рис. 3. Типичность здесь означает, что комплексно сопряженные пары точек ветвления $(z_n^+,\ z_n^- = \overline{z_n^+})$ и $(z_m^+,\ z_m^- \overset{*}{=} \overline{z_m^+})$ не сливаются. Заметим, что слияние таких пар в пространстве ри-

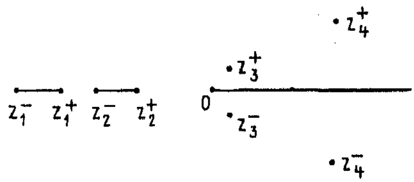

Рис. 3

мановых поверхностей данного рода происходит на подмножестве коразмерности 2.

Полюсы $(\gamma_n(x_0),\ \mu_n(x_0))$ блоховской функции на Γ имеют вид

$$b(x_0,\ \gamma_n(x_0)) = 0,\quad \mu_n(x_0) = -a_I(x_0,\ \gamma_n(x_0)) \tag{2.23}$$

(точки дополнительного спектра). При $|n| \to \infty$ имеем:

$$\gamma_n(x_0) \approx z_n^{\pm}. \tag{ .24}$$

Точки дополнительного спектра находятся во взаимно однозначном соответствии с парами z_n^+, z_n^-.

Пусть на отрицательной вещественной полуоси z имеется k вещественных зон спектра $[z_1^+,\ z_1^-], \ldots, [z_k^+,\ z_k^-]$. Тогда совокупность операторов $\tilde{L}(\lambda)$ с данным спектром Γ состоит из 2^k компонент связности [40, 10]. Эти компоненты можно занумеровать наборами $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k)$, где все $\sigma_i = \pm 1$. Тогда существуют k попарно различных целых чисел $q_1, \ldots, q_k$ таких, что топологический заряд Q потенциала u, отвечающего компоненте с номером σ, равен ([10])

$$Q = Q(\sigma) = \sum_{l=1}^{k} \sigma_l q_l. \tag{2.25}$$

Полный список вещественных конечнозонных решений уравнения sG вместе с явными тэта-функциональными формулами можно найти в [16] (сходные результаты независимо получены в [2]).

§ 3. Примеры нелинейных уравнений, связанных с матричными операторами высших порядков

Рассмотрим матричный $n \times n$ линейный оператор

$$L_A(\lambda) = i\partial_x + A\lambda - U_A. \tag{3.1}$$

Здесь

$$A = \operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_n) \tag{3.2}$$

— постоянная вещественная диагональная матрица n-го порядка. Будем считать величины a_i попарно различными. Матрица U_A имеет нулевые диагональные элементы.

Рассмотрим другой такой оператор

$$L_B(\lambda)=i\partial_t+B\lambda-U_B,\quad B=\mathrm{diag}(b_1,\ldots,b_n),\tag{3.3}$$

где матрицы B, U_B удовлетворяют условиям, аналогичным сформулированным выше. Условие коммутирования λ-пучков

$$[L_A(\lambda),\ L_B(\lambda)]=0\tag{3.4}$$

эквивалентно системе

$$[A,U_B]=[B,U_A],\tag{3.5}$$

$$U_{A_t}-U_{B_x}=i[U_A,U_B].\tag{3.6}$$

Уравнение (3.5) явно разрешается в виде

$$U_A=[A,V],\quad U_B=[B,V],\tag{3.7}$$

где диагональные элементы матрицы $V=V(x,\ t)$ также можно считать нулевыми. После этого получаем одно матричное нелинейное уравнение на функцию V:

$$[A,V_t]-[B,V_x]=i[[A,V],[B,V]].\tag{3.8}$$

Для приложений представляют интерес решения системы (3.8), удовлетворяющие «условиям вещественности»

$$V^*=-JVJ,\tag{3.9}$$

где звездочка обозначает эрмитово сопряжение, а J — диагональная матрица с единицами или минус единицами на диагонали,

$$J=\mathrm{diag}(\pm1,\ldots,\pm1).\tag{3.10}$$

Для операторов $L_A(\lambda)$, $L_B(\lambda)$ в этом случае имеет место симметрия

$$L_A^*(\bar\lambda)=JL_A(\lambda)J,\quad L_B^*(\bar\lambda)=JL_B(\lambda)J.\tag{3.11}$$

Будем называть симметрию (3.11) J-эрмитовостью операторных пучков $L_A(\lambda)$, $L_B(\lambda)$. Например, при $n=3$ (пусть $a_1>a_2>a_3$), $J=1$ или $J=\mathrm{diag}\ (-1,\ 1,\ 1)$, или $J=\mathrm{diag}\ (1,\ -1,\ 1)$, система (3.8) описывает различные типы взаимодействия трех волновых пакетов в среде с квадратичной нелинейностью [35]. Физически интересным оказывается также случай чисто мнимой матрицы $V=i\tilde V$, где уравнения (3.8) сводятся к уравнениям на чисто вещественную симметрическую матрицу $\tilde V$. Аналогичную интерпретацию система (3.8) с условиями вещественности типа (3.9) допускает и при $n>3$ [6, 35].

Другое важное применение этих уравнений, найденное С. В. Манаковым [30], — интегрирование уравнений Эйлера движения многомерного твердого тела [1]. Эти уравнения имеют вид

$$\dot{M}=[M, \Omega], \quad M=I\Omega+\Omega I, \tag{3.12}$$

где I — оператор инерции твердого тела,

$$I=\operatorname{diag}(I_1, \ldots, I_n). \tag{3.13}$$

Они получаются из (3.8), если положить

$$A=I^2, \quad B=I, \quad [I, V]=i\Omega, \tag{3.14}$$

причем зависимость от x отсутствует. Для приложений представляют интерес и общие решения системы (3.8) с условиями вещественности (3.9), не зависящие от x [35],

$$[A, V_t]=i[[A, V], [B, V]]. \tag{3.15}$$

§ 4. О спектральных свойствах матричных операторов с периодическими коэффициентами

Рассмотрим J-эрмитов оператор $L(\lambda)\equiv L_A(\lambda)$ вида (3.1) с периодическим потенциалом $U\equiv U_A$, $U(x+T)=U(x)$. Пусть $Y=Y(x, x_0, \lambda)$ — фундаментальная матрица решений уравнения

$$L(\lambda)Y=0, \quad Y|_{x=x_0}=1. \tag{4.1}$$

Рассмотрим матрицу монодромии $\hat{T}=\hat{T}(x_0, \lambda)=Y(x_0+T, x_0, \lambda)$. Для матрицы монодромии выполнено соотношение унитарности

$$\hat{T}^*(\bar{\lambda})J\hat{T}(\lambda)=J. \tag{4.2}$$

Пусть $J=\operatorname{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$, $\sigma_k=\pm 1$. Введем диагональную матрицу $\varepsilon=\operatorname{diag}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ такую, что

$$\varepsilon^2=J. \tag{4.3}$$

Как и в §§ 1, 2, доказывается, что блоховская собственная функция $\psi=(\psi^1, \ldots, \psi^n)^T$ с условием нормировки

$$(\varepsilon_1\psi^1+\ldots+\varepsilon_n\psi^n)_{x=x_0}=1 \tag{4.4}$$

мероморфна на римановой поверхности Γ вида

$$F(\lambda, \mu)=\det(\mu-\hat{T}(\lambda))=0. \tag{4.5}$$

Эта n-листная риманова поверхность Γ называется спектром оператора $L(\lambda)$ с периодическими коэффициентами. Отметим, что точки ветвления этой поверхности при $n>2$ уже не связаны, вообще говоря, со спектром периодической или антипериодической задач. Из симметрии (3.11) оператора $L(\lambda)$ вытекает «вещественность» этой римановой поверхности Γ:

Лемма 4.1. Риманова поверхность Γ вида (4.5) допускает антиголоморфную инволюцию τ вида

$$\tau(\lambda, \mu)=(\bar{\lambda}, \bar{\mu}^{-1}). \tag{4.6}$$

Доказательство. В силу (4.3), имеем:

$$0=\overline{F(\lambda,\ \mu)}=\det|\bar{\mu}-\hat{T}^*(\lambda)|=\det|\bar{\mu}-J\hat{T}^{-1}(\bar{\lambda})J|=$$
$$=(-1)^n\bar{\mu}^n\det\hat{T}^{-1}\det|\bar{\mu}^{-1}-\hat{T}(\bar{\lambda})|=\mathrm{const}\cdot F(\bar{\lambda},\ \bar{\mu}^{-1}).$$

Лемма доказана.

Разрешенные зоны (ляпуновские зоны устойчивости) на римановой поверхности Г определены условием

$$|\mu(\lambda)|=1\Leftrightarrow \operatorname{Im} p(\lambda)=0 \tag{4.7}$$

($p(\lambda)=(iT)^{-1}\ln\mu(\lambda)$ — квазиимпульс). При этом блоховская функция будет ограничена на всей прямой. Из леммы 4.1 немедленно вытекает

Следствие. Пусть $J=1$. Тогда полный прообраз вещественной оси λ на поверхности Г является разрешенной зоной, на которой нет точек ветвления.

Доказательство. В силу (4.2), при $J=1$ и вещественных λ матрица $\hat{T}(\lambda)$ унитарна. Ее собственные значения всегда унимодулярны. Покажем, что при вещественных λ нет точек ветвления. Действительно, точки ветвления римановой поверхности Г могут возникать лишь при слиянии пары собственных чисел μ_i, μ_j матрицы $\hat{T}$. Но даже если такое слияние и происходит, то соответствующие собственные векторы остаются независимыми, т. е. ветвление не возникает (возникает особенность при вложении в $\mathbf{C}^2$). Следствие доказано.

Таким образом, при $J=1$ все точки ветвления римановой поверхности Г невещественны и расположены парами, симметричными относительно антиинволюции (4.6).

Риманова поверхность Г имеет при $n\to\infty$ n «бесконечно удаленных точек» $P_1,\ldots,P_n$, где при $P\to P_k$ ($\lambda\to\infty$) квазиимпульс $p(\lambda)\sim ia_k\lambda$ (напомним, что все числа a_k различны). Отметим, что эти точки неподвижны относительно антиинволюции τ (4.6). По аналогии с § 1, доказывается

Лемма 4.2. Полюсы на поверхности Г блоховской функции $\psi=(\psi^1,\ldots,\psi^n)^{\mathrm{T}}$, нормированной условием (4.4), находятся во взаимно однозначном соответствии с парами точек ветвления римановой поверхности Г. При $P\to P_k$ ($\lambda\to\infty$) функция ψ имеет асимптотику вида

$$\psi^j=\varepsilon_k^{-1}\left(\delta_k{}^j+\frac{v_k{}^j(x)}{\lambda}+O(\lambda^{-2})\right)e^{i\lambda a_k(x-x_0)},\quad j=1,\ldots,n. \tag{4.8}$$

Здесь $V=(v_k{}^j)$ определяется условием $[A,\ V]=U$ (см. § 3).

Рассмотрим далее более подробно конечнозонный случай, где, по определению, существует полиномиально зависящая от λ матрица $M=M(\lambda,\ x)$ такая, что

$$[L(\lambda),\ M(\lambda,\ x)]=0. \tag{4.9}$$

Можно считать, что матрица $M(\lambda)$ имеет вид

$$M(\lambda)=C\lambda^N+\text{младшие члены},\quad C=\operatorname{diag}(c_1, \ldots, c_n). \tag{4.10}$$

$$M^*(\bar{\lambda})=JM(\lambda)J. \tag{4.11}$$

Мы рассмотрим лишь случай, когда все числа $c_1, \ldots, c_n$ попарно различны. Коэффициенты характеристического многочлена матрицы $M(\lambda, x)$ являются «интегралами», т. е. не зависят от x. Они определяют спектр оператора $L(\lambda)$ (см. ниже формулу (4.12)), т. е. риманову поверхность Γ.

Определение. Гладкий потенциал $V=V(x)$ оператора $L(\lambda)$ называется сильно ограниченным, если для любой вещественной диагональной матрицы B уравнение (3.8) с начальным условием $V|_{t=0}=V(x)$ имеет гладкие ограниченные решения $V=V(x, t)$.

Для сильной ограниченности конечнозонного потенциала $V(x)$ с данным спектром Γ достаточно, чтобы описанные выше «интегралы» — коэффициенты уравнения поверхности Γ — задавали компактное многообразие в пространстве матриц V. Например, для $J=1$ любой гладкий потенциал будет сильно ограниченным. В дальнейшем мы будем рассматривать лишь сильно ограниченные конечнозонные потенциалы.

Имеет место

Лемма 4.3. Матрица $M(\lambda)$ коммутирует с матрицей монодромии $\hat{T}(\lambda)$.

Доказательство см. в [15]. Отсюда вытекает

Теорема 4.1. а) Риманова поверхность Γ вида (4.5) задается алгебраическим уравнением

$$R(\lambda, \nu)=\nu^n+r_1(\lambda)\nu^{n-1}+\ldots+r_n(\lambda)=\det|\nu-M(\lambda, x)|=0 \tag{4.12}$$

и, в частности, имеет конечный род $\left(\text{равный } N\dfrac{n(n-1)}{2}-(n-1),\right.$ в случае общего положения).

б) Антиинволюция (4.6) задается в координатах (λ, ν) равенством

$$\tau(\lambda, \nu)=(\bar{\lambda}, \bar{\nu}). \tag{4.13}$$

в) Риманова поверхность Γ с антиинволюцией τ относится к разделяющему типу.

Дадим набросок доказательства этой теоремы. Пункт а) вытекает из леммы 4.3, так как собственные векторы матрицы M будут блоховскими функциями (здесь мы используем то, что при больших λ собственные векторы матрицы $M(\lambda)$ попарно независимы в силу (4.10)). Поверхность (4.12) инвариантна относительно антиинволюции (4.13), в силу (4.11). Эта антиинволюция совпадает с антиинволюцией (4.6), так как $p=p(\lambda, \mu)$ веществен при вещественных λ, μ (это можно показать, см. [11], формулы (26), (32), 36)). Это доказывает пункт б). Для доказательства в) рассмотрим коммутирующий с $L(\lambda)$ оператор $\tilde{L}(\lambda)$ вида

$$\tilde{L}(\lambda)=i\partial_y+J\lambda-[J, V],\ [A, V]=U,\ [L(\lambda), \tilde{L}(\lambda)]=0. \quad (4.14)$$

Его блоховские функции мероморфны на той же самой поверхности Г. Для оператора $\tilde{L}(\lambda)$ (в периодическом случае) задача

$$\psi(y+T)=\exp i\tilde{p}T\psi(y) \quad (4.15)$$

самосопряжена. Поэтому при вещественных $\tilde{p}$ (т. е. в разрешенных зонах) собственное число λ обязательно вещественно. Таким образом, в этом случае разрешенные зоны совпадают с вещественными овалами $\{(\lambda, \nu)=(\bar{\lambda}, \bar{\nu})\}$ поверхности Г. Но эти разрешенные зоны задаются уравнением

$$\operatorname{Im}\tilde{p}=0, \quad (4.16)$$

где $\tilde{p}$ — квазиимпульс для оператора $\tilde{L}(\lambda)$ ($\operatorname{Im}\tilde{p}$ — однозначная функция на Г). Таким образом, вся риманова поверхность Г после удаления вещественной части распадается на две несвязные компоненты $\Gamma^+=\{\operatorname{Im}\tilde{p}>0\}$ и $\Gamma^-=\{\operatorname{Im}\tilde{p}<0\}$. Теорема доказана.

Замечание. Для $J=1$ оператор $\tilde{L}(\lambda)$ имеет вид $\tilde{L}(\lambda)=$ $=i\partial_y+\lambda$, $\tilde{p}=\lambda$. Уравнение $\operatorname{Im}\lambda=0$ в точности выделяет вещественные овалы поверхности Г (см. следствие из леммы 4.1).

Нетрудно показать, что дифференциал квазиимпульса $d\tilde{p}$ является абелевым дифференциалом на Г (ср. [15]). Он сохраняет знак на вещественной части поверхности Г и даже является всюду неотрицательным при естественной ориентации на этой вещественной части как края $\Gamma^+=\{\operatorname{Im}\tilde{p}>0\}$. В окрестностях точек $P_1, \ldots, P_n$ он имеет вид:

$$d\tilde{p}=\sigma_k d\lambda+\ldots, \quad P\to P_k. \quad (4.17)$$

Вывод. Знак дифференциала $d\lambda$ в окрестности точки P_k равен σ_k, $k=1, \ldots, n$.

Это утверждение определяет условие на выбор на поверхности Г спектрального параметра λ, приводящий к построению J-эрмитовых операторных пучков, $J=\operatorname{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$.

Рассмотрим теперь более подробно свойства блоховской функции ψ. Как уже говорилось, полюсы функции ψ находятся во взаимно однозначном соответствии с парами точек ветвления. Отсюда можно вывести, что количество полюсов ψ равно $g+n-1$, где g — род. Покажем, как можно получить необходимые условия на расположение этих полюсов.

Пусть $(\lambda, 1), \ldots, (\lambda, n)$ — точки поверхности Г, лежащие над точкой λ. Им отвечают n блоховских собственных функций $\psi_1(x, \lambda), \ldots, \psi_n(x, \lambda)$, нормированных, например, условием (4.4). Мы считаем, что λ отлична от точки ветвления, так что эти функции линейно независимы. Выстроим их координаты в матрицу $(\psi_i^j(x, \lambda))$. Пусть $(\varphi_i^j(x, \lambda))$ — обратная матрица.

Положим

$$\Psi_i^j(x, y, P) = \psi_k^j(x, \lambda)\,\varphi_i^k(y, \lambda), \quad P = (\lambda, k). \tag{4.18}$$

Это определение не зависит от первоначального упорядочения точек $(\lambda, 1), \ldots, (\lambda, n)$, а также от нормировки собственных функций. Матричнозначная функция $\Psi(x, y, P) = (\Psi_i^j(x, y, P))$, таким образом, является однозначной функцией на римановой поверхности Г. Отметим, что если

$$G(x, y, \lambda) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{n} \Psi(x, y, (\lambda, k)), & x \leqslant y \\ 0, & x > y, \end{cases} \tag{4.19}$$

то функция $G(x, y, \lambda)$ есть матрица Грина оператора $L(\lambda)$. Заметим, что столбцы матрицы $\Psi(x, y, P)$ являются собственными функциями для оператора $L(\lambda)$, отличающимися лишь нормировкой. Строки являются собственными функциями для формально сопряженного оператора

$$L^+(\lambda) = -i\partial_y + \lambda A - U^T. \tag{4.20}$$

Ранг матрицы Ψ равен единице.

Положим

$$g(x, P) = \Psi(x, x, P). \tag{4.21}$$

Лемма 4.4. Матричнозначная функция $g(x, P) = (g_i^j(x, P))$ на Г обладает следующими свойствами:

а) Значения функции $g(x, P)$ при фиксированном λ на разных листах поверхности Г являются системой проекторов для матрицы $M(\lambda)$, т. е. $g^2 = g$, $g(x, (\lambda, k))\,g(x, (\lambda, l)) = 0$ при $k \neq l$ (k, l — номера листов),

$$\sum_{k=1}^{n} g(x, (\lambda, k)) = 1, \quad \sum_{k=1}^{n} \nu(\lambda, k)\, g(x, (\lambda, k)) = M(\lambda). \tag{4.22}$$

б) Дифференциалы

$$\Omega_i^j(x; P) = g_i^j(x, P)\, d\lambda \tag{4.23}$$

мероморфны на Г, имеют полюсы только в бесконечно удаленных точках $P_1, \ldots, P_n$ римановой поверхности Г: $\Omega_i^i(x, P)$ имеет двойной полюс в точке P_i, а при $i \neq j$ $\Omega_i^j(x, P)$ имеет простые полюсы в точках P_i, P_j, причем

$$\Omega_i^i(x, P) = d\lambda\,(1 + O(\lambda^{-2})), \quad P \to P_i \tag{4.24}$$

$$\Omega_i^j(x, P) = \begin{cases} v_i^j(x)\,(\lambda^{-1} + O(\lambda^{-2}))\, d\lambda, & P \to P_j \\ -v_i^j(x)\,(\lambda^{-1} + O(\lambda^{-2}))\, d\lambda, & P \to P_i. \end{cases} \tag{4.25}$$

в) Пусть

$$S_k(\lambda) = r_k(\lambda) + r_{k-1}(\lambda)\,M(\lambda) + \ldots + M^k(\lambda), \quad k = 1, \ldots, n-1, \tag{4.26}$$

где многочлены $r_k(\lambda)$ определены в формуле (4.12). Тогда матрица $g(x, P)$ имеет вид

$$g(x, P)=\frac{\nu^{n-1}+S_1(\lambda)\nu^{n-2}+\ldots S_{n-1}(\lambda)}{R_\nu(\lambda, \nu)}. \tag{4.27}$$

Доказательство см. в [11].

Блоховские функции $\psi^j(x, P)$, нормированные условием (4.4) имеют вид

$$\psi^j(x, P)=\frac{\Psi_j{}^j(x, x_0, P)}{g_j(x_0, P)}, \tag{4.28}$$

где

$$g_j(x, P)=\sum_{l=0}^{n}\varepsilon_l g_j{}^l(x, P). \tag{4.29}$$

Аналогично, блоховские функции $\psi_1{}^+(y, P), \ldots, \psi_n{}^+(y, P)$ формально сопряженного оператора (4.20), нормированные условием

$$(\varepsilon_1\psi_1{}^+ + \ldots + \varepsilon_n\psi_n{}^+)_{y=x_0}=1, \tag{4.30}$$

имеют вид

$$\psi_j{}^+(y, P)=\frac{\Psi_j{}^j(x_0, y, P)}{g^j(x_0, P)}, \tag{4.31}$$

где

$$g^j(x, P)=\sum_{l=1}^{n}\varepsilon_l g_l{}^j(x, P). \tag{4.32}$$

Введем мероморфный дифференциал $\Omega=\Omega(x, P)$, полагая

$$\Omega(x, P)=\frac{g_j(x, P)\, g^j(x, P)}{g_j{}^j(x, P)}\, d\lambda=\sum_{k,l=1}^{n}\varepsilon_k\varepsilon_l g_k{}^l d\lambda. \tag{4.33}$$

Его свойства таковы:

а) Дифференциал Ω имеет двойные полюсы в точках $P_1, \ldots$ $\ldots, P_n$ вида

$$\Omega=\sigma_k d\lambda\,(1+O(\lambda^{-1})), \quad P\to P_k, \quad k=1, \ldots, n. \tag{4.34}$$

б) Дивизор нулей дифференциала $\Omega(x_0, P)$ имеет вид $D+$ $+D^+$, где D — полюсы функций ψ^j, а D^+ — полюсы функций $\psi_i{}^+$; степени дивизоров D и D^+ равны $g+n-1$.

Отметим, что дифференциал $\Omega=\Omega(x_0, P)$ связан с дифференциалами $\Omega_i{}^j$ вида (4.23) соотношениями

$$\psi^j(x, P)\,\psi_i{}^+(x, P)\,\Omega=\Omega_i{}^j(x, P). \tag{4.35}$$

Вернемся к получению необходимых условий J-эрмитовости конечнозонного операторного пучка $L(\lambda)$. В J-эрмитовом случае формально двойственные функции $\psi_j{}^+(x, \mathrm{P})$, нормированные условием (4.30), имеют вид

$$\psi_j^+(x, P) = \overline{\psi^j(x, \tau(P))}\sigma_j, \tag{4.36}$$

где черта обозначает комплексное сопряжение, а τ — антиинволюция (4.13). Поэтому дифференциал $\Omega(x, P)$ симметричный,

$$\overline{\Omega(x, \tau(P))} = \Omega(x, P), \tag{4.37}$$

и его дивизор нулей имеет вид

$$D + \tau(D). \tag{4.38}$$

Тем самым доказана

Теорема 4.2. Необходимые условия на расположение дивизора D полюсов блоховской функции ψ, нормированной условием (4.4), имеют вид: $D+\tau(D)$ есть дивизор нулей мероморфного дифференциала с двукратными полюсами в точках $P_1, \ldots, P_n$ и главными частями вида (4.34).

Отметим также, что дифференциалы $\Omega_i^j = g_i^j d\lambda$ обладают симметрией вида

$$\overline{\Omega_i^j(\tau(P))} = \sigma_i\sigma_j\Omega_j^i(P). \tag{4.39}$$

Это очевидно, вытекает из формулы (4.35).

Ниже будет показано, что это условие является также и достаточным.

Рассмотрим теперь кососимметрический случай

$$U^T = -U, \quad V^T = V, \quad J = 1, \tag{4.40}$$

где матрицы U, V чисто мнимы. Оператор $L(\lambda)$ обладает в этом случае дополнительной симметрией

$$L^+(\lambda) = -L(-\lambda) \tag{4.41}$$

(напомним, что крест используется для обозначения формального сопряжения). Для матрицы монодромии $\hat{T}(\lambda)$ выполняется «соотношение ортогональности»

$$\hat{T}(\lambda)\hat{T}^T(-\lambda) = 1. \tag{4.42}$$

На римановой поверхности блоховской функции будет действовать голоморфная инволюция σ, где

$$\sigma(\lambda, \mu) = (-\lambda, \mu^{-1}). \tag{4.43}$$

Инволюция σ коммутирует с антиинволюцией τ. Точки $P_1, \ldots$ $\ldots, P_n$ неподвижны относительно инволюции $\sigma : \sigma(P_j) = P_j$. При нечетном n добавляется еще неподвижная точка $P_0 =$ $= (O, 1) \in \Gamma$.

В конечнозонном случае матрицу $M(\lambda)$ можно взять вида

$$M(\lambda) = C\lambda^{2k+1} + \ldots \quad M^T(-\lambda) = -M(\lambda). \tag{4.44}$$

В координатах (λ, ν) инволюция σ действует так:

$$\sigma(\lambda, \nu) = (-\lambda, -\nu). \tag{4.45}$$

Тогда риманова поверхность Γ вида (4.12) конечного рода

$g=(2k+1)\frac{n(n-1)}{2}-(n-1)$ накрывает двулистно риманову поверхность Γ_0 рода g_0, $\Gamma\to\Gamma_0=\Gamma/\sigma$, где

$$g_0=km(2m-1)+m^2-2m+1,\quad n=2m, \tag{4.46}$$

$$g_0=m(2km+k+m-1),\quad n=2m+1 \tag{4.47}$$

(все формулы даются для случая общего положения). Получим необходимые условия на расположение дивизора D полюсов блоховской функции. Имеет место

Теорема 4.3. Построенный выше дифференциал Ω вида (4.33) антисимметричен относительно инволюции σ:

$$\Omega(x,\sigma(P))=-\Omega(x,P). \tag{4.48}$$

Его нули имеют вид

$$D+\sigma(D). \tag{4.49}$$

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 4.2, и мы его опускаем. Отметим, что классы эквивалентности дивизоров, описанных в этой теореме, образуют многообразие Прима двулистного накрытия $\Gamma\to\Gamma_0$.

§ 5. Построение (комплексных) конечнозонных операторов

В предыдущем параграфе изучались спектральные свойства матричных операторов вида (3.1) с периодическими коэффициентами. В этом параграфе мы займемся решением «обратной задачи», т. е. восстановлением коэффициентов конечнозонного оператора по его спектру — римановой поверхности Γ, и дополнительному спектру — полюсам блоховской функции. При этом, как будет видно из дальнейшего, будут получаться, вообще говоря, квазипериодические коэффициенты. Эта ситуация характерна для решения обратных задач теории конечнозонных операторов [34].

Пусть Γ — произвольная риманова поверхность рода g. Фиксируем на ней n различных точек $P_1,\ldots,P_n$. Пусть $k_1^{-1},\ldots,k_n^{-1}$ — локальные параметры в окрестностях этих точек. Выберем произвольный неспециальный дивизор D степени $g+n-1$. Пусть $\psi^j=\psi^j(\mathrm{x},P)$ — функция Бейкера—Ахиезера (БА) с полюсами в точках этого дивизора и с асимптотикой при $P\to P_l$ вида

$$\psi^j(\mathrm{x},P)=\varepsilon_l^{-1}e^{ik_lx^l}\left(\delta_l^j+\frac{v_l^j}{k_l}+O(k_l^{-2})\right),\quad l=1,\ldots,n \tag{5.1}$$

(напомним, что такая функция по дивизору D определяется однозначно). Здесь $\mathrm{x}=(x^1,\ldots,x^n)$, $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n$ — числа вида (4.3). Справедлива

Лемма 5.1. Для функций ψ^j выполняются линейные уравнения

$$\frac{\partial\psi^j}{\partial x^l}=iv_l{}^j\psi^l,\ l\neq j. \qquad (5.2)$$

Доказательство этой леммы совершенно стандартно для теории функций БА (ср. [26]).

При $n=2$ уравнения (5.2) всегда совместны. При $n>2$ условия совместности записываются в следующем виде:

$$i\ \frac{\partial v_j{}^l}{\partial x^k}+v_k{}^l v_j{}^k=0,\ i\neq j,\ k\neq i,\ j. \qquad (5.3)$$

Эта система — простейшая, связанная с n-точечными функциями БА с $n>2$ (подобно тому, как уравнение Кадомцева—Петвиашвили является простейшим в теории одноточечных функций БА). При наложении дополнительного условия

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial v_j{}^l}{\partial x^k}=0 \qquad (5.4)$$

ограничение матрицы $V=(v_j{}^l)$ на 2-мерную плоскость вида

$$x^k=a_k x+b_k t,\quad k=1,\ldots,n, \qquad (5.5)$$

удовлетворяет уравнению (3.8). Для получения дополнительного условия (5.4) нужно потребовать, чтобы на поверхности Г существовала мероморфная функция $\lambda=\lambda(P)$ с полюсами первого порядка в точках $P_1,\ldots,P_n$ (и не имеющая других полюсов). Тогда функция λ реализует Г в виде n-листного накрытия комплексной плоскости. (Так получаются все n-листные накрытия). В этом случае в качестве $k_1,\ldots,k_n$ можно взять саму функцию λ. Тогда для функций ψ^j будет выполняться равенство

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\psi^j}{\partial x^k}=i\lambda\psi^j,\quad j=1,\ldots,n. \qquad (5.6)$$

Вывод. Для n-листных поверхностей Г ограничение функции ψ на прямую $x^k=a_k x$, $k=1,\ldots,n$, является собственной функцией оператора

$$L(\lambda)=i\partial_x+\lambda A-U,\quad U=[A,V],\quad L(\lambda)\psi=0. \qquad (5.7)$$

Пусть на поверхности Г, кроме функции λ, существует другая функция $\mu=\mu(P)$ с полюсами первого порядка в точках $P_1,\ldots,P_n$, причем

$$\mu=c_k\lambda+d_k+O(\lambda^{-1}),\quad P\to P_k. \qquad (5.8)$$

Тогда вектор ψ будет собственным для матрицы

$$M(\lambda)=\lambda C-[C,V]+D, \qquad (5.9)$$

$$C=\mathrm{diag}(c_1,\ldots,c_n),\quad D=\mathrm{diag}(d_1,\ldots,d_n), \qquad (5.10)$$

и риманова поверхность Г является плоской алгебраической кривой степени n, задаваемой уравнением

$$\det(\mu - M(\lambda)) = 0. \qquad (5.11)$$

Все эти факты являются совершенно стандартными для теории функций БА. Отметим, что если род поверхности Г равен $(n-1)(n-2)/2$, то плоская кривая (5.11) неособа. Построенная по плоской кривой $\Gamma \subset \mathbf{CP}^2$ степени n матрица $V = (v_j{}^i)$ будет удовлетворять комплексному уравнению типа Эйлера:

$$-i[C, V_x] + iD_x + [[A, V], [C, V] + D] = 0, \qquad (5.12)$$

где $x^k = a_k x$. Точки $P_1, \ldots, P_n$ получаются в пересечении кривой Г любой прямой в $\mathbf{CP}^2$. Выбор «спектрального параметра» λ на кривой Г эквивалентен выбору пучка прямых $\mathbf{CP}^2$ (одна из прямых этого пучка и пересекает кривую Г в точках $P_1, \ldots, P_n$). Для задания такого пучка необходимо фиксировать точку в $\mathbf{CP}^2$, не лежащую на Г. Таким образом, каждая плоская кривая Г степени n и точка в $\mathbf{CP}^2$, не лежащая на Г, задает однопараметрическое семейство уравнений вида (5.12) (коэффициенты C, D будут зависеть от выбора секущей прямой в пучке). Для того, чтобы матрица D обратилась в нуль, нужно, чтобы касательные к Г в точках $P_1, \ldots, P_n$ проходили через одну точку. Это налагает $n-1$ дополнительное условие на плоскую кривую Г.

Если потенциал V не зависит, к тому же, от x, то мы получаем стационарные решения уравнений (5.12). Для того, чтобы построить такие решения, на Г должна существовать третья функция с простыми полюсами в $P_1, \ldots, P_n$, не сводящаяся к λ, μ. На неособых плоских кривых таких функций не бывает.

Вывод. Стационарным решениям уравнений (5.12) типа Эйлера отвечают особые кривые Г.

Вернемся к случаю произвольной римановой поверхности Г. Определим формально двойственную функцию БА $\psi^+ = (\psi_1{}^+, \ldots, \psi_n{}^+)$ следующими условиями:

1) функции $\psi_j{}^+$ имеют асимптотики вида

$$\psi_j^+ = \psi_j^+(x, P) = \varepsilon_l^{-1} e^{-ik_l x^l}\left(\delta_j{}^l + \frac{v_j^{l+}}{k_l} + O\left(k_l^{-2}\right)\right), \quad P \to P_l; \qquad (5.13)$$

2) функции $\psi_j{}^+$ имеют полюсы в точках некоторого дивизора D^+ степени $g+n-1$.

3) Существует мероморфный дифференциал Ω с полюсами второго порядка в точках $P_1, \ldots, P_n$ вида

$$\Omega = \sigma_l dk_l\left(1 + O\left(k_l^{-1}\right)\right), \quad P \to P_l, \qquad (5.14)$$

такой, что его нули имеют вид $D + D^+$. Этим условием дивизор D^+ в случае общего положения определяется однозначно и называется дивизором, двойственным к D.

Определим мероморфные дифференциалы

$$\Omega_j{}^i(x, P) = \psi_j{}^+(x, P)\,\psi^i(x, P)\,\Omega, \quad i, j = 1, \ldots, n. \qquad (5.15)$$

На бесконечности эти дифференциалы имеют полюсы (и других особенностей не имеют). При $i \neq j$ дифференциал Ω_j^i имеет простые полюсы в точках P_i и P_j; при $i=j$ дифференциал Ω_i^i имеет двойной полюс в точке P_i. Из (5.1), (5.13), (5.14) легко извлекается, что

$$\Omega_j^i = \begin{cases} v_j^i \dfrac{dk}{k} + \ldots, & k=k_i, \quad P \to P_i, \\ v_j^{i^+} \dfrac{dk}{k} + \ldots, & k=k_j, \quad P \to P_j, \end{cases} \tag{5.16}$$

$$\Omega_i^i = dk(1+O(k^{-1})), \quad k=k_i, \quad P \to P_i. \tag{5.17}$$

Применяя к дифференциалу Ω_j^i теорему о вычетах, получаем:

$$v_j^{i^+} = -v_j^i. \tag{5.18}$$

Отметим, наконец, что ранг матрицы Ω_j^i вида (5.15) равен 1. Получим явные формулы для матриц Ω_j^i.

Лемма 5.1′. Матрицы дифференциалов $(\Omega_j^i(P))$, удовлетворяющих перечисленным выше условиям, образуют семейство размерности $g+n-1$. Каждая такая матрица определяется точкой якобиана $J(\Gamma)$ общего положения и набором ненулевых комплексных констант $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, определенных с точностью до множителя, и имеет вид

$$\Omega_j^i(P) = \frac{\lambda_i}{\lambda_j} \frac{\theta(A(P)-A(P_i)-z)\,\theta(A(P)-A(P_j)+z)}{\theta^2(z)\,E(P_i, P)\,E(P, P_j)\sqrt{dk_i^{-1}}\sqrt{dk_j^{-1}}}. \tag{5.19}$$

Доказательство утверждения леммы о размерности может быть легко выведено из теоремы Римана—Роха. Легко проверяется также, что матрица (5.19) имеет ранг 1 и нужного вида полюсы. Здесь вектор z связан с исходным дивизором D соотношением на якобиане $J(\Gamma)$

$$z \equiv A\left(D - \sum_{j=1}^{n} P_j\right) + \mathcal{K}. \tag{5.20}$$

Отметим также, что

$$-z \equiv A\left(D^+ - \sum_{j=1}^{n} P_j\right) + \mathcal{K}. \tag{5.20′}$$

В этих формулах $\mathcal{K}$ — римановы константы. Величины $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ имеют вид

$$\ln \lambda_j = \sum_{s=1}^{g+n-1} \int_{P_0}^{Q_s} \Omega_{Q_0 P_j} + \varkappa_j, \quad D = \sum_{s=1}^{g+n-1} Q_s, \quad j=1, \ldots, n, \tag{5.20″}$$

где Q_0 — произвольная точка поверхности Γ, $\Omega_{Q_0 P_j}$ — нормированные дифференциалы третьего рода с простыми полюсами в точках Q_0, P_j, а $\varkappa_j$ — несущественные константы.

Замечание. Отображение $D \mapsto (z, \lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ вида (5.20), (5.20″), где $\deg D = g+n-1$, является аналогом преобразования Абеля (см. приложение), определенным с помощью дифференциалов первого и третьего родов на $\Gamma \setminus (P_1 \cup \ldots \cup P_n)$ (ср. [46]). Набор параметров $(z, \lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, где $z \in \mathbf{C}^g$, определен неоднозначно с точностью до преобразований

$$\begin{gathered} z \mapsto z + 2\pi i N + BM, \\ \lambda_j \mapsto \lambda_j \exp \langle M, A(P_j) \rangle, \quad j = 1, \ldots, n, \end{gathered} \tag{5.21}$$

где $N, M \in \mathbf{Z}^g$. Это означает, что совокупность всех описанных выше матриц (Ω_j^l) расслаивается над якобианом $J(\Gamma)$ со слоем $(\mathbf{C}^*)^{n-1}$; соотношения (5.21) есть формулы перехода этого расслоения. По-другому можно объяснить [26] происхождение этого расслоения так: заменяя дивизор D на линейно эквивалентный дивизор $D' \sim D$, мы будем получать функции БА, отличающиеся на мероморфный множитель. Это приведет к изменению матриц (v_j^l) и (Ω_j^l) на подобные, $(v_j^l) \mapsto \Lambda^{-1}(v_j^l)\Lambda$, $(\Omega_j^l) \mapsto$ $\mapsto \Lambda^{-1}(\Omega_j^l)\Lambda$, где $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Классы линейной эквивалентности дивизоров и образуют якобиан $J(\Gamma)$.

Учтем теперь явно зависимость от $x = (x^1, \ldots, x^n)$.

Лемма 5.2. Пусть $U^{(1)}, \ldots, U^{(n)}$ — векторы периодов нормированных мероморфных дифференциалов $\Omega_{P_1}, \ldots, \Omega_{P_n}$ с двойными полюсами в точках $P_1, \ldots, P_n$, соответственно. Тогда зависимость параметров $(z, \lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ в (5.19) от $x^1, \ldots, x^n$ дается следующими формулами:

$$z = i \sum_{j=1}^{n} x^j U^{(j)} + z_0, \tag{5.22}$$

(z_0 — произвольный g-мерный вектор),

$$\lambda_j = \lambda_j^0 \exp \sum_{m \neq j} i x^m \gamma_j^m, \tag{5.23}$$

где

$$\gamma_l^m = -\frac{d}{d\left(k_m^{-1}\right)} \ln E(P, P_l)\,|_{P=P_m}, \tag{5.24}$$

λ_i^0, $i = 1, \ldots, n$ — произвольные ненулевые константы.

Доказательство. Дивизор нулей дифференциала Ω_{jl} вида (5.19) представляется в виде суммы $D^l + D_j$, где D^l, D_j — дивизоры степени g такие, что

$$A(D^l - P_l) = z - \mathcal{K}, \tag{5.25}$$

$$A(D_j - P_j) = -z - \mathcal{K} \tag{5.26}$$

($\mathcal{K}$ — римановы константы). Для точки z общего положения эти дивизоры неспециальные. Построим по ним функции БА φ^l и φ_j^+ соответственно, где

$$\varphi^l(x, P) = e^{ikx^j}(c_j^l + O(k^{-1})), \quad k = k_j, \quad P \to P_j, \tag{5.27}$$

$$\varphi_j^+(x, P) = e^{-ikx^l}\left(c_j^{+l} + O(k^{-1})\right), \quad k = k_l, \quad P \to P_l, \tag{5.28}$$

где $c_l^l = c_j^{+j} = 1$. Тогда

$$\Omega_j^l(x, P) = \varphi^l(x, P)\,\varphi_j^+(x, P)\,\Omega_j^l(P), \tag{5.29}$$

где $\Omega_j^l(x, P)$ имеет вид (5.15), а $\Omega_j^l(P)$ — (5.19), с заменой $(z, \lambda) \mapsto (z_0, \lambda_0)$. Для функций φ^l, φ_j^+ получаем:

$$\varphi^l(x, P) = \alpha^l(x) \exp\left(i \int_{P_0}^{P} \sum_{k=1}^{n} x_k \Omega_{P_k}\right) \frac{\theta(A(P) - A(P_l) + i\Sigma x_k U^{(k)} + z_0)}{\theta(A(P) - A(P_l) + z_0)} \tag{5.30}$$

$$\varphi_j^+(x, P) = \alpha_j^+(x) \exp\left(-i \int_{P_0}^{P} \sum_{k=1}^{n} x_k \Omega_{P_k}\right) \times$$

$$\times \frac{\theta(A(P) - A(P_j) - i\Sigma x_k U^{(k)} - z_0)}{\theta(A(P) - A(P_j) - z_0)}, \tag{5.31}$$

где $\alpha^l(x)$, $\alpha_j^+(x)$ — нормировочные множители, имеющие вид

$$(\alpha^l(x))^{-1} = \exp\left(-i \sum_{k=1}^{n} \tilde{\gamma}_k^l x^k\right) \frac{\theta\left(i \sum_{k=1}^{n} x^k U^{(k)} + z_0\right)}{\theta(z_0)}, \tag{5.32}$$

$$(\alpha_j^+(x))^{-1} = \exp\left(i \sum_{k=1}^{n} \tilde{\gamma}_k^j x^k\right) \frac{\theta\left(i \sum_{k=1}^{n} x^k U^{(k)} + z_0\right)}{\theta(z_0)}, \tag{5.33}$$

$$\tilde{\gamma}_k^l = \int_{P_0}^{P_l} \Omega_{P_k} \tag{5.34}$$

(при $k = l$ интеграл понимается в смысле главного значения). В выражение (5.29) вклад дадут только разности

$$\tilde{\gamma}_k^l - \tilde{\gamma}_k^j = \int_{P_j}^{P_l} \Omega_{P_k}. \tag{5.35}$$

Вычисляя этот интеграл через прим-форму $E(P, Q)$, получаем формулы (5.24). Отсюда и из (5.29) вытекает доказательство леммы.

Суммируя доказанные леммы, получаем:

Теорема 5.1. а) Совокупность комплексных конечнозонных операторов вида (5.2) с данным спектром Γ образует $(n-1)$-мерное расслоение вида (5.21) над якобианом $J(\Gamma)$.

б) Функции

$$v_j^l(\mathrm{x})=\frac{\lambda_l(\mathrm{x})}{\lambda_j(\mathrm{x})}\cdot\frac{\theta\left(A(P_j)-A(P_l)+i\sum\limits_{k=1}^{n}x^kU^{(k)}+z_0\right)}{\theta\left(i\sum\limits_{k=1}^{n}x^kU^{(k)}+z_0\right)E(P_l,\ P_j)\sqrt{dk_l^{-1}}\sqrt{dk_j^{-1}}} \tag{5.36}$$

$(i\neq j)$, где величины $\lambda_i(\mathrm{x})$ определены равенствами (5.23), являются коэффициентами этих конечнозонных операторов и, тем самым, решениями системы (5.3).

Напомним, что для n-листных римановых поверхностей Г эти функции при $x^k=a_hx$ дают все комплексные конечнозонные потенциалы операторов вида (3.1), (3.3) и, тем самым, все конечнозонные решения системы (3.8).

Замечания. Заменам локальных параметров

$$k_i\mapsto c_ik_i+\ldots,\quad i=1,\ldots,n, \tag{5.37}$$

отвечает группа преобразований исходной системы вида

$$v_j^l\mapsto c_jv_j^l,\quad x_j\mapsto c_j^{-1}x_j. \tag{5.38}$$

§ 6. Критерий J-эрмитовости строящихся конечнозонных операторных пучков. Плоские вещественные кривые, отвечающие решениям уравнений Эйлера

Теорема 6.1. Пусть Г — произвольная риманова поверхность рода g с антиинволюцией τ разделяющего типа. Пусть точки $P_1,\ldots,P_n$ неподвижны относительно τ. Выберем локальные параметры $k_1^{-1},\ldots,k_n^{-1}$ в окрестностях этих точек симметричными относительно τ,

$$\tau^*k_j=\overline{k}_j, \tag{6.1}$$

причем знак дифференциала dk_j^{-1} в окрестности точки P_j равен $\sigma_j=\pm1$, $j=1,\ldots,n$. Пусть параметры $(z_0,\lambda_1^0,\ldots,\lambda_n^0)$, определяющие согласно формулам (5.36), (5.23), (5.24), конечнозонный потенциал $V=(v_j^i)$, подчиняются следующим требованиям: 1) вектор $z_0\in J(\Gamma)$ имеет вид (П.36) приложения (базис циклов в $H_1(\Gamma)$ выбирается в виде(П.31), (П.32)); 2) константы $\lambda_1^0,\ldots$ $\ldots\lambda_n^0$ по модулю равны единице. Тогда формулы (5.36), (5.23), (5.24) определяют гладкий конечнозонный потенциал $V=(v_j^i)$ операторов (5.2) с условием J-эрмитовости

$$\overline{v}_j^l=-\sigma_l\sigma_jv_l^j. \tag{6.2}$$

В случае, когда на Г существует мероморфная функция λ с простыми полюсами в точках $P_1,\ldots,P_n$, где $k_j=\lambda$ в окрестности точки P_j, $j=1,\ldots,n$, перечисленные условия на риманову поверхность Г, антиинволюцию τ, расположение на Г точек $P_1,\ldots,P_n$, знаки $d\lambda$ в окрестностях точек P_j и значения параметров $(z_0,\lambda_1^0,\ldots,\lambda_n^0)$ являются также и необходимыми.

Доказательство. Докажем сначала достаточность условий теоремы. При перечисленных условиях для дифференциалов $\tilde{\Omega}_j^i = \Omega_j^i \sqrt{dk_i^{-1}} \sqrt{dk_j^{-1}}$ вида (5.19) имеет место симметрия вида

$$\overline{\tilde{\Omega}_j^i(\tau(P))} = \tilde{\Omega}_i^j(P), \quad i, \ j = 1, \ldots, n. \tag{6.3}$$

Это немедленно вытекает из явных формул (5.19), (5.23), (5.24), если использовать симметрию (П.34) тэта-функции и прим-формы (П.37). Для самих дифференциалов Ω_j^i, в силу условия на знаки $dk_1^{-1}, \ldots, dk_n^{-1}$, будет выполняться такое соотношение;

$$\overline{\Omega_j^i(\tau(P))} = \sigma_i \sigma_j \Omega_i^j(P). \tag{6.4}$$

Отсюда и из формул (5.16) для вычетов и вытекает (6.2).

Пусть теперь на Γ существует мероморфная функция λ с простыми полюсами в точках $P_1, \ldots, P_n$. Тогда из теоремы 4.1 сразу вытекают условия на риманову поверхность Γ, расположение точек $P_1, \ldots, P_n$ и знаки $d\lambda$ в окрестностях этих точек. Далее, из теоремы 4.2 вытекает линейная эквивалентность

$$D + \tau(D) \sim K + 2 \sum_{j=1}^{n} P_j. \tag{6.5}$$

В силу (5.20), это означает, что вектор z должен лежать на одной из мнимых компонент якобиана $J(\Gamma)$. То, что эта компонента имеет вид (П.36), вытекает из гладкости v_j^i (иначе были бы особенности за счет нулей $\theta(z)$; см. [46]). Покажем теперь, что константы $\lambda_1^0, \ldots, \lambda_n^0$ унимодулярны. Действительно, при $\lambda_i^0 = 1$, $i = 1, \ldots, n$, для дифференциалов Ω_j^i вида (5.19) заведомо выполняется симметрия (6.4). Степень неоднозначности определения матрицы (Ω_j^i) ранга 1 по величине z_0 заключается в преобразованиях вида $\Omega_j^i \mapsto \lambda_i^0 \Omega_j^i (\lambda_j^0)^{-1}$. Эти преобразования сохраняют симметрию (6.4), если и только если все константы λ_i^0 унимодулярны. Теорема доказана.

Аналогично получаются достаточные условия для симметрии матрицы v_j^i (косой симметрии $L^+(-\lambda) = -L(\lambda)$, $J=1$), а также их необходимость для римановых поверхностей Γ, являющихся n-листными накрытиями.

Теорема 6.2. Для получения симметричных матриц $V = (v_j^i)$ к перечисленным условиям на риманову поверхность Γ, расположение точек на ней, на знаки локальных параметров и на параметры $(z_0, \lambda_1^0, \ldots, \lambda_n^0)$ нужно добавить следующее: На поверхности Γ должна быть задана инволюция σ, где $\sigma\tau = \tau\sigma$, $\sigma(P_j) = P_j$, $j = 1, \ldots, n$. Вектор z_0 должен лежать на нечетной части якобиана $J(\Gamma)$, $\sigma(z_0) \equiv -z_0$ (многообразие Прима), и $(\lambda_i^0)^2 = 1$, $i = 1, \ldots, n$.

Достаточность этих условий может быть легко получена из явных формул (5.36) и элементарных свойств [46] римановых поверхностей с инволюцией и их тэта-функций. Необходимость (для n-листных накрытий) легко вытекает из результатов § 4.

При $J=1$ полученные условия можно сделать еще более эффективными, описав необходимые и достаточные условия на римановы поверхности Γ, дающие эрмитовы пучки операторов $L(\lambda)$. Разберем здесь в качестве примера простейшие конечнозонные операторы $L(\lambda)$, для которых матрица $M(\lambda)$, коммутирующая с $L(\lambda)$, имеет вид

$$M(\lambda)=\lambda C-[C, V]+D, \quad V^*=-V, \tag{6.6}$$

где $C=\operatorname{diag}(c_1, \ldots, c_n)$, $D=\operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n)$ — вещественные матрицы, $c_i \neq c_j$ при $i \neq j$. Как уже говорилось, коэффициенты $V=(v_j^i)$ оператора $L(\lambda)$ удовлетворяют уравнениям вида

$$i[C, V_x]-iD_x=[[A, V], [C, V]-D]. \tag{6.7}$$

При $D=0$ получаются найденные С. В. Манаковым интегрируемые уравнения Эйлера.

Риманова поверхность Γ спектра оператора $L(\lambda)$ имеет в этом случае вид

$$R(\lambda, \nu)=\det(\nu-M(\lambda))=0. \tag{6.8}$$

Это — плоская алгебраическая кривая степени n. Имеет место

Лемма 6.1. Для косоэрмитовой матрицы V общего положения все точки ветвления римановой поверхности Γ вида (6.8) невещественны и попарно различны.

Доказательство. Невещественность точек ветвления доказана выше (см. § 4). Несовпадение точек ветвления вытекает из того, что коэффициенты дискриминанта $\Delta(\lambda)$ многочлена $R(\lambda, \nu)$ ($\deg \Delta(\lambda)=n(n-1)$) независимы как функции от V.

Следствие. Для косоэрмитовой матрицы V общего положения плоская вещественная кривая Γ вида (6.8) неособа. Получающиеся плоские вещественные неособые кривые степени n принадлежат к одному изотопическому классу.

Доказательство. В силу леммы 6.1, n-листная риманова поверхность Γ вида (6.5) имеет, в случае общего положения, $n(n-1)$ точек ветвления. Ее род g равен тогда $g=(n-1)(n-2)/2$ по формуле Римана—Гурвица. Но плоская кривая степени n такого рода обязательно неособа (возникновение особенностей понижало бы род). Далее, возникновение особенности на вещественной оси может происходить лишь при слиянии пары собственных чисел ν_i, ν_j матрицы $M(\lambda)$ вида (6.6). Но при вещественных λ эта матрица эрмитова. Эрмитовы матрицы с совпадающими собственными числами имеют коразмерность 3 в пространстве всех эрмитовых матриц. Поэтому для общей однопараметрической деформации матрицы V у семейства матриц $M=M(\lambda)$ вида (6.6) (λ — вещественно) слияний собственных чисел происходить не будет. Слияние комплексно сопряженных пар точек ветвления происходит на подмногообразии коразмерности 2 в пространстве кривых вида (6.5). Это и означает, что общая однопараметрическая деформация одной кривой вида (6.8) в другую такую же будет давать неособые кривые. Следствие доказано.

Изучим теперь вопрос о расположении на $\mathbf{R}P^2$ вещественных компонент кривых вида (6.8) с $V^* = -V$ (согласно следствию, это расположение одинаково для всех кривых такого вида). Справедлива

Теорема 6.3. При $n=2m$ вещественные компоненты неособых кривых $\Gamma \subset \mathbf{R}P^2$ вида (6.8) состоят из m вложенных друг в друга овалов («гнездо» из m овалов). При $n=2m+1$, кроме гнезда из m овалов, имеется еще один односторонний цикл в $\mathbf{R}P^2$ («проективная прямая»).

Доказательство. Кривая (6.8) пересекает бесконечно удаленную прямую в $\mathbf{R}P^2$ в n различных точках $P_1, \ldots, P_n$, $P_j = \{\lambda = \infty,\ \nu/\lambda = c_j\}$. Учитывая отсутствие вещественных точек ветвления, мы получаем поэтому: каждая прямая $\lambda = \mathrm{const}$ на $\mathbf{R}P^2$ пересекает кривую Γ в n различных точках. Будем считать, что числа c_j упорядочены по убыванию: $c_1 > c_2 > \ldots > c_n$. Из сказанного выше вытекает, что ветвь кривой Γ, имеющая асимптотой при $\lambda \to +\infty$ прямую $\nu = c_i\lambda + d_i$, при $\lambda \to -\infty$ имеет асимптотой прямую $\nu = c_j\lambda + d_j$, где $j = n - i + 1$ (см. рис. 4). Отсюда, очевидно, вытекает утверждение теоремы.

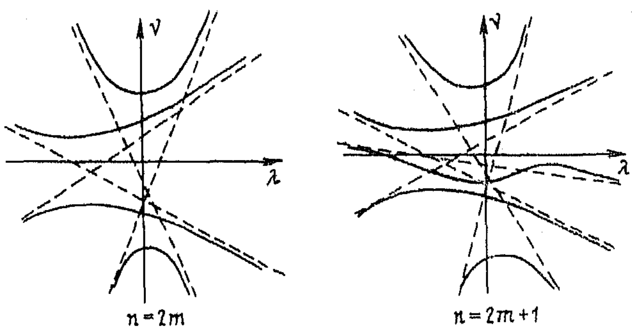

Рис. 4

Из доказательства также вытекает, что точки $P_1, \ldots, P_n$ расположены на вещественных компонентах кривой Γ следующим образом: при $n=2m$ пары точек P_j и P_{n-j+1} лежат на j-м овале (считая снаружи). При $n=2m+1$ расположение пар P_j и P_{n-j+1} при $j \neq m+1$ такое же, как и для четного n, а точка P_{m+1} одна лежит на односторонней компоненте кривой Γ. (Напомним, мы считаем, что числа $c_1, \ldots, c_n$ упорядочены; это определяет порядок точек $P_1, \ldots, P_n$).

Обратно, пусть Γ — плоская вещественная неособая кривая степени n с $[(n+1)/2]$ компонентами, расположенными так, как описано в теореме 6.1. Тогда соответствующая комплексная риманова поверхность Γ принадлежит к разделяющему типу [36]. Мы видели в § 5, что для представления плоской кривой степени n в виде (6.8) нужно выбрать на ней «спектральный параметр» λ, т. е. пучок прямых, проходящих через некоторую точку в $\mathbf{C}P^2$. Выберем эту точку в $\mathbf{R}P^2 \subset \mathbf{C}P^2$ лежащей внутри самого внутреннего овала кривой Γ. Координаты λ, ν в $\mathbf{R}P^2$ выберем так, чтобы эта точка лежала на несобственной прямой. Пусть $P_1, \ldots, P_n$ — несобственные точки кривой Γ, где при $P \to P_j$, $\lambda \to \infty$, $\nu = c_j\lambda + d_j + O(\lambda^{-1})$. Выберем базис циклов a_i, b_j на римановой поверхности Γ так, как описано в приложении для кривых разделяющего типа. Из теоремы 6.1 немедленно вытекает

Теорема 6.4. При перечисленных условиях на риманову поверхность Γ, выбор спектрального параметра λ на ней и точек $P_1, \ldots, P_n$, а также базис циклов типа (П.30), формулы (5.36) дадут коэффициенты эрмитова пучка операторов $L(\lambda)$ вида (5.7) при $x^k = a_k x$, где константы $\ln\lambda_1^0, \ldots, \ln\lambda_n^0$ *чисто мнимы*, вектор z_0 имеет вид

$$z_0 = (\zeta, r, \bar{\zeta}),\ \zeta \in \mathbf{C}^p,\ r \in \mathbf{R}^{g-2p},\quad \rho = \begin{cases} (k-1)^2, & n = 2k, \\ k(k-1), & n = 2k+1. \end{cases} \quad (6.9)$$

Напомним, что если точки $P_1, \ldots, P_n$ на кривой Γ таковы, что касательные в них пересекаются в одной точке, то матрица D может быть сделана нулевой подходящим выбором координаты ν.

Добавим теперь к условию косоэрмитовости V условие симметрии V. Тогда на плоской кривой Γ возникнет инволюция $\sigma: (\lambda, \nu) \quad (-\lambda, -\nu)$. Диагональная матрица D при этом автоматически равна нулю, если точки $P_1, \ldots, P_n$ неподвижны относительно σ. Плоские вещественные кривые с инволюцией σ, имеющей n точек ветвления при четном n и $n+1$ при нечетном n, классифицируются по числу чисто мнимых точек ветвления. При $n = 4k+2$, $4k+3$ всегда имеется одна пара мнимых точек ветвления W_0^+, $W_0^- = \tau(W_0)$. Кроме того, имеется k чисто мнимых четверок точек ветвления, расположенных симметрично относительно τ, $0 \leqslant 4k \leqslant n^2 - n - 2$. При $n = 4k$, $4k+1$ имеется k чисто мнимых четверок точек ветвления, $0 \leqslant 4k \leqslant n^2 - n$. Во всех случаях число k является топологическим инвариантом тройки (Γ, τ, σ), где τ — антиинволюция на поверхности Γ, σ — инволюция. Других топологических инвариантов (кроме степени) для плоских кривых Γ степени n с невещественными точками ветвления нет.

Плоские кривые Γ степени n с инволюцией описанного выше типа позволяют строить простейшие эрмитовы конечнозонные операторы $L(\lambda)$ с условием косой симметрии $L^+(-\lambda) = -L(\lambda)$. Коэффициенты этих операторов, как уже многократно отмечалось в настоящем обзоре, являются решениями уравнений Эйлера (3.15) для правоинвариантных метрик на группе $SO(n)$, найденных С. В. Манаковым [30]. Каждое инвариантное многообразие (инвариантный тор) таких систем определяет вещественную риманову поверхность Г с инволюцией σ вида (6.5), где коэффициенты многочлена $R(\lambda, \nu)$ являются интегралами системы (3.15). Каждое такое инвариантное многообразие изоморфно совокупности конечнозонных операторов $L(\lambda)$ со спектром Г. Это позволяет доказать, что инвариантные торы уравнений Эйлера на группе $SO(n)$ вида (3.15), отвечающие римановым поверхностям Г вида (6.8), изоморфны накрытиям над многообразием Прима поверхности Г с инволюцией σ. Доказательство этого утверждения, а также анализ явных формул для решений уравнений Эйлера на $SO(n)$ мы приведем в следующей работе.

ПРИЛОЖЕНИЕ. НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ РИМАНОВЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ И ТЭТА-ФУНКЦИЙ

Пусть Г — компактная риманова поверхность рода $g \geqslant 1$.* Если Г — риманова поверхность алгебраической функции $w = w(z)$, задаваемой уравнением

$$R(z, w) = w^n + a_1(z) w^{n-1} + \ldots + a_n(z) = 0, \qquad (\text{П.1})$$

где $R(z, w)$ — многочлен, то аффинная часть Г совпадает с комплексной алгебраической кривой (П.1) в $\mathbf{C}^2$ в случае, если эта кривая неособая (гладкая). Важный для нас пример — плоские кривые степени n, где степени многочленов $a_i(z)$ равны i $(i = 1, \ldots, n)$. Поверхность (П.1) n-листно накрывает z-плоскость при естественной проекции $(z, w) \mapsto z$, т. е. данному значению z отвечают n вообще говоря различных значений $w_1(z), \ldots, w_n(z)$ алгебраической функции $w(z)$, определяемых из уравнения (П.1). При слиянии некоторых из этих ветвей на поверхности Г образуются точки ветвления. Они определяются из следующей системы:

$$R(z, w) = 0, \quad R_w(z, w) = 0. \qquad (\text{П.2})$$

Для плоской неособой кривой степени n мы получим $n(n-1)$ точек ветвления. Род (количество ручек) такой римановой поверхности равен $g = (n-1)(n-2)/2$. В одномерных гомологиях $H_1(\Gamma) = \mathbf{Z} + \ldots + \mathbf{Z}$ ($2g$ слагаемых) можно выбрать базис циклов (замкнутых контуров) $a_1, \ldots, a_g, b_1, \ldots, b_g$ со следующими индексами пересечений

$$a_i \circ a_j = b_i \circ b_j = 0, \quad a_i \circ b_j = \delta_{ij}; \quad i, j = 1, \ldots, g. \qquad (\text{П.3})$$

Базис голоморфных дифференциалов (первого рода) на плоской неособой кривой степени n имеет вид

* В дальнейшем будут встречаться только компактные римановы поверхности, и мы не будем каждый раз об этом напоминать.

$$\eta_{ij}=\frac{z^i w^j}{R_w(z, w)}\,dz, \quad i+j\leqslant n-3. \tag{П.4}$$

Беря подходящие линейные комбинации $\sum c_{ij}\eta_{ij}$, мы получим канонический базис голоморфных дифференциалов

$$\omega_1, \ldots, \omega_g, \tag{П.5}$$

нормированных условиями

$$\oint_{a_k}\omega_j=2\pi i\delta_{jk}; \ j, \ k=1, \ldots, g. \tag{П.6}$$

Матрица $B=(B_{jk})$,

$$B_{jk}=\oint_{b_k}\omega_j; \ j, \ k=1, \ldots, g, \tag{П.7}$$

называется матрицей периодов римановой поверхности Г. Эта матрица симметрична и имеет отрицательно определенную вещественную часть. По этой матрице строится $2g$-мерный тор $T^{2g}=J(\Gamma)$, называемый многообразием Якоби (или якобианом) римановой поверхности Г: полагаем

$$J(\Gamma)=\mathbf{C}^g/\{2\pi iN+BM\,|\,N, M\in\mathbf{Z}^g\}. \tag{П.8}$$

Тэта-функция (Римана) поверхности Г строится по матрице периодов $B=B_{jk}$):

$$\theta(z)=\sum_{N\in\mathbf{Z}^g}\exp\left\{\frac{1}{2}\langle BN, N\rangle+\langle N, z\rangle\right\};$$

$$z=(z_1, \ldots, z_g), \tag{П.9}$$

$$N=(N_1, \ldots, N_g), \quad \langle N, z\rangle=\sum N_j z_j,$$

$$\langle BN, N\rangle=\sum B_{ij}N_iN_j.$$

При сдвиге аргумента z на вектор решетки периодов тэта-функция преобразуется по следующему закону:

$$\theta(z+2\pi iN+BM)=\exp\left\{-\frac{1}{2}\langle BM, M\rangle-\langle z, M\rangle\right\}\theta(z);$$

$$N, M\in\mathbf{Z}^g. \tag{П.10}$$

Часто используются также тэта-функции с характеристиками

$$\theta[\alpha, \beta](z)=\exp\left\{\frac{1}{2}\langle B\alpha, \alpha\rangle+\langle z+2\pi i\beta, \alpha\rangle\right\}\theta(z+2\pi i\beta+B\alpha);$$

$$\alpha, \beta\in\mathbf{R}^g. \tag{П.11}$$

Характеристики $[\alpha, \beta]$, для которых все координаты равны 0 или 1/2 (мы будем записывать это так: $2\alpha\in((\mathbf{Z}_2)^g$, $2\beta\in(\mathbf{Z}_2)^g$), называются полупериодами. Полупериод $[\alpha, \beta]$ четный, если $4\langle\alpha, \beta\rangle\equiv 0 \pmod 2$, и нечетный в противном случае.

Отображение Абеля римановой поверхности Г в ее многообразие Якоби $J(\Gamma)$, $A(P)=(A_1(P), \ldots, A_g(P))$, имеет вид

$$A_k(P)=\int_{P_0}^{P}\omega_k, \quad k=1, \ldots, g, \tag{П.12}$$

где P_0 — фиксированная точка на Г.

Дивизор на Г — это формальная целочисленная линейная комбинация точек Г:

$$D=\sum_{i=1}^{N} n_i P_i, \quad n_i \in \mathbf{Z}. \tag{П.13}$$

Например, для любой мероморфной на Г функции f определен дивизор (f) ее нулей $P_1, \ldots, P_n$ и полюсов $Q_1, \ldots, Q_m$ кратностей $p_1, \ldots, p_n$ и $q_1, \ldots, q_m$ соответственно $(p_1+\ldots+p_n= =q_1+\ldots+q_m)$

$$(f)=p_1P_1+\ldots+p_nP_n-q_1Q_1-\ldots-q_mQ_m \tag{П.14}$$

(такие дивизоры называются главными). Дивизоры образуют, очевидным образом, абелеву группу. Степенью дивизора $D= =\Sigma n_i P_i$ называется число

$$\deg D=\sum n_i. \tag{П.15}$$

Отображение Абеля (П.12) линейно продолжается на группу всех дивизоров.

Два дивизора называются линейно эквивалентными, если их разность есть главный дивизор. Согласно классической теореме Абеля, необходимые и достаточные условия линейной эквивалентности дивизоров D и D' имеют вид:

$$1)\ \deg D=\deg D', \quad 2)\ A(D)\equiv A(D') \tag{П.16}$$

Знак $\equiv$ здесь и далее будет использоваться для равенства на многообразии Якоби, т. е. равенства по модулю решетки периодов.

Пример. Дивизоры нулей и полюсов двух мероморфных на Г дифференциалов ω, ω' линейно эквивалентны. Этот класс дивизоров называется каноническим классом поверхности Г и обозначается через K ($\deg K=2g-2$).

Положительным (или эффективным) называется дивизор $D=\Sigma n_i P_i$, для которого все кратности n_i положительны. Два дивизора D, D' связаны неравенством $D\geqslant D'$, если, по определению, их разность $D-D'$ есть положительный дивизор. Отметим полезное свойство дивизоров степени $\geqslant g$: любой такой дивизор линейно эквивалентен положительному. Для положительных дивизоров $D=\Sigma n_i P_i$ представляет интерес размерность

$l(D)$ пространства таких мероморфных на Г функций f, для которых выполняется неравенство

$$(f) \geqslant -D. \qquad (\text{П}.17)$$

Это пространство состоит из тех мероморфных функций, которые могут иметь полюсы только в точках P_i кратности не выше n_i (в это пространство входят также константы). Для положительного дивизора общего положения размерность $l(D)$ имеет вид:

$$l(D) = \begin{cases} 1, & \deg D \leqslant g, \\ \deg D - g + 1, & \deg D \geqslant g. \end{cases} \qquad (\text{П}.18)$$

(вторая формула также справедлива для любого дивизора D, если $\deg D > 2g-2$). Дивизоры D, для которых $l(D) = \deg D - g + 1$, называются еще неспециальными.

Пример. Для n-листной римановой поверхности вида (П.1) дивизоры D_{z_0} вида $D_{z_0} = P_1 + \ldots + P_g$, $P_i = (z_0, w_i(z_0))$, $i = 1, \ldots, n$,—прообразы точки z_0, все линейно эквивалентны друг другу при разных z_0. Функция $f(z) = (z - z_0)^{-1}$ имеет полюсы первого порядка в точках дивизора D_{z_0}. Поэтому $l(D_{z_0}) \geqslant 2$. Для плоской кривой степени n будем иметь $l(D_{z_0}) \geqslant 3$ (на самом деле, в неособом случае всегда имеет место равенство). Действительно, возьмем $z_0 = \infty$, тогда функции z и w имеют полюсы не выше первого порядка в «бесконечноудаленных» точках поверхности Г. Неравенство $l(D) \geqslant 3$ для некоторого дивизора D степени n является характеристическим для плоских кривых степени n.

Фиксируем на поверхности Г некоторую точку P_0 и рассмотрим отображение Абеля, заданное на неупорядоченных наборах $(P_1, \ldots, P_g)$ точек Г, т. е. на g-й симметрической степени $S^g\Gamma$. Отображение Абеля определяет также отображение

$$A: S^g\Gamma \to J(\Gamma); \quad A(P_1, \ldots, P_g) = \sum_{j=1}^{g} A(P_j). \qquad (\text{П}.19)$$

Задача обращения этого отображения известна как задача обращения Якоби. Ее решение (Риман) дается на языке тэта-функций. Именно, если для вектора $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_g)$ функция $\theta(A(P) - \zeta)$ не равна тождественно нулю на римановой поверхности Г, то она имеет на Г ровно n нулей $P_1, \ldots, P_g$, дающих решение задачи обращения

$$A(P_1) + \ldots + A(P_g) \equiv \zeta - \mathcal{K}, \qquad (\text{П}.20)$$

где $\mathcal{K} = (\mathcal{K}_1, \ldots, \mathcal{K}_g)$ — так называемый вектор римановых констант [13], зависящий только от римановой поверхности, выбора на ней базиса циклов и начальной точки P_0. В этом случае дивизор $D = P_1 + \ldots + P_g$ неспециальный и точки $P_1, \ldots, P_g$

определяются из системы (П.20) однозначно с точностью до перестановки.

Отметим теперь некоторые свойства мероморфных дифференциалов на римановой поверхности. Для любого мероморфного дифференциала ω справедливо важное соотношение (теорема о вычетах)

$$\sum_{\omega(P)=\infty} \operatorname{Res}_P \omega = 0 \tag{П.21}$$

(суммирование ведется по всем полюсам ω).

Будем называть мероморфный дифференциал нормированным, если

$$\oint_{a_i} \omega = 0, \quad i = 1, \ldots, g. \tag{П.22}$$

Такая нормировка вместе с заданием полюсов и соответствующих главных частей определяет мероморфный дифференциал однозначно. Любой мероморфный дифференциал может *быть представлен в виде суммы некоторого голоморфного и* линейной комбинации следующих базисных мероморфных дифференциалов:

а) Абелевы дифференциалы второго рода $\Omega_Q^{(n)}$ имеют один полюс кратности $n+1$ в точке Q и главную часть вида $z^{-n-1}dz$ $(n \geqslant 1)$.

б) Абелевы дифференциалы третьего рода Ω_{PQ} имеют пару простых полюсов в точках P, Q с вычетами, соответственно, $+1$ и -1.

При вычислениях с мероморфными дифференциалами полезна их «производящая функция» — прим-форма поверхности Γ [46]. Если P, Q — точки Γ, z, w — локальные параметры в окрестностях этих точек, то полагаем

$$E(P, Q) = \varepsilon(P, Q)(dz)^{-\frac{1}{2}}(dw)^{-\frac{1}{2}} =$$
$$= \frac{\theta[\nu](A(P) - A(Q))}{\sqrt{\sum \omega_i(P)\theta_i[\nu](0)}\sqrt{\sum \omega_j(Q)\theta_j[\nu](0)}}. \tag{П.23}$$

Здесь $\nu \in \frac{1}{2}(\mathbf{Z}_2)^{2g}$ любой нечетный (см. выше) невырожденный (т. е. $\operatorname{grad}\theta[\nu](0) \neq 0$) полупериод (см. [46]); индексы i, j у тэта-функций означают дифференцирование по соответствующим переменным z_i, z_j; $\omega_1, \ldots, \omega_g$ — базисные голоморфные дифференциалы. Величина $E(P, Q) = -E(Q, P)$ однозначна (по каждому переменному) на рассеченной по циклам a_i римановой поверхности Γ, обращается в нуль только при $P = Q$; при обходе по циклу b_j она приобретает множитель

$$\exp\left(-\frac{1}{2}B_{jj}-\int_Q^P \omega_j\right). \qquad (П.24)$$

Для дифференциала третьего рода Ω_{PQ} получаем выражение

$$\Omega_{PQ}(X)=d\ln\frac{E(X,P)}{E(X,Q)} \quad (X\in\Gamma). \qquad (П.25)$$

Дифференциалы второго рода могут быть получены из следующего билинейного дифференциала

$$\omega(P,Q)=\omega(Q,P)=\left(\frac{d}{dz}\frac{d}{dw}\ln E(P,Q)\right)dz\,dw \qquad (П.26)$$

(z, w — локальные параметры в окрестностях точек P, Q). Тогда, например,

$$\Omega_Q^{(1)}(P)=\frac{\omega(P,Q)}{dw} \qquad (П.27)$$

и т. д. Укажем также полезное выражение для произвольного (не нормированного) дифференциала третьего рода ω_{PQ} с простыми полюсами в точках P, Q:

$$\omega_{PQ}=\frac{\theta(A(X)-A(P)-\zeta)\,\theta(A(X)-A(Q)+\zeta)}{E(X,P)\,E(Q,X)\sqrt{dz}\sqrt{dw}}, \qquad (П.28)$$

где $\zeta\in\mathbf{C}^g$ — произвольный вектор общего положения (если $\theta(\zeta)=0$, то дифференциал (П.28) превращается в голоморфный). Если точки P и Q сливаются, то (П.28) превращается в дифференциал второго рода с двойным полюсом в точке $P=Q$.

Основным алгеброгеометрическим инструментом в теории конечнозонных операторов и связанных с ними решений нелинейных уравнений являются функции Бейкера—Ахиезера (БА). Эти функции были введены И. М. Кричевером [27] на основе обобщения аналитических свойств блоховских собственных функций операторов с периодическими и почти периодическими коэффициентами. Дадим их общее определение и перечислим простейшие свойства.

Определение. Пусть $P_1,\ldots,P_n$ — точки на римановой поверхности Γ, $k_1^{-1},\ldots,k_n^{-1}$ — локальные параметры в окрестностях этих точек (где $k_i(P_i)=\infty$), $q_1(k),\ldots,q_n(k)$ — набор многочленов, D — дивизор на Γ. n-точечная (скалярная, ранга 1 — см. [29]) функция БА, задаваемая этими данными — это мероморфная на $\Gamma\setminus(P_1\cup\ldots\cup P_n)$ функция $\psi=\psi(P)$ такая, что: а) дивизор $\tilde{\psi}\geqslant -D$; б) при $P\to P_i$ произведение $\psi(P)\exp(-q_i(k_i(P)))$ аналитично ($i=1,\ldots,n$).

Если D — неспециальный дивизор степени N, то размерность пространства n-точечных функций БА с заданным видом существенных особенностей ($q_1,\ldots,q_n$) равна $N-g+1$ [26] для почти всех многочленов $q_1,\ldots,q_n$. В частности, если $D=Q_1+\ldots+\ldots+Q_g$ — неспециальный дивизор степени g, то соответствующая n-точечная функция БА существует и определяется однозначно с точностью до множителя. Она имеет вид

$$\psi(P)=c\exp\left(\sum_{j=1}^{n}\Omega_{q_j}\right)\frac{\theta\left(A(P)+\sum_{j=1}^{n}U^{(q_j)}-\zeta\right)}{\theta(A(P)-\zeta)}, \qquad (\text{П.29})$$

где Ω_{q_j} — нормированный абелев дифференциал второго рода с главной частью в точке P_j вида $dq_j(k_j)$, $U^{(q_j)}$ — его вектор b-периодов; $A(P)=\left(\int_{P_0}^{P}\omega_1,\ldots,\int_{P_0}^{P}\omega_g\right)$ — отображение Абеля (П.12); $\zeta=A(D)+\mathcal{K}$, $\mathcal{K}$ — вектор римановых констант; c — произвольный множитель.

Перечислим теперь важнейшие свойства вещественных римановых поверхностей. Риманова поверхность Γ называется вещественной, если на ней задана антиголоморфная инволюция (или, короче, антиинволюция) $\tau:\Gamma\to\Gamma$, $\tau^2=1$. Пусть антиинволюция τ имеет на Γ n неподвижных компонент (овалов), $0\leqslant n\leqslant g+1$. Возможны два случая: I) объединение вещественных овалов разделяет Γ на две компоненты Γ^+ и $\Gamma^-=\tau\Gamma^+$; II) объединение овалов не разделяет Γ. Поверхности типа I мы будем называть также поверхностями разделяющего типа, а типа II — неразделяющего типа.

На поверхности типа I (где $0<n$) можно выбрать базис циклов

$$a_1,\ b_1,\ldots,\ a_\rho,\ b_\rho;\ a_{\rho+1},\ b_{\rho+1},\ldots,\ a_{\rho+n-1},\ b_{\rho+n-1};$$
$$a_1',\ b_1',\ldots,\ a_\rho',\ b_\rho', \qquad (\text{П.30})$$

где $g=2\rho+n-1$, такой, что $a_{\rho+k}$, $k=1,\ldots,n-1$ — вещественные овалы,

$$a_i,\ b_i\in\Gamma^+,\ \tau(a_i)=a_i',\ \tau(b_i)=-b_i',\ (i=1,\ldots,\rho), \qquad (\text{П.31})$$

$$\tau(a_{\rho+k})=a_{\rho+k},\ \tau(b_{\rho+k})=-b_{\rho+k}\ (k=1,\ldots,n-1), \qquad (\text{П.32})$$

Антиинволюция τ порождает антиинволюцию на якобиане $J(\Gamma)$, которую мы обозначим той же буквой τ. В естественных координатах $z_1,\ldots,z_\rho$; $z_{\rho+1},\ldots,z_{\rho+n-1}$; $z_1',\ldots,z_\rho'$ действие τ на якобиане имеет вид

$$\tau(z_1,\ldots,z_\rho;\ z_{\rho+1},\ldots,z_{\rho+n-1};\ z_1',\ldots,z_\rho')=$$
$$=-(\bar{z}_1',\ldots,\bar{z}_\rho';\ \bar{z}_{\rho+1},\ldots,\bar{z}_{\rho+n-1};\ \bar{z}_1,\ldots,\bar{z}_\rho). \qquad (\text{П.33})$$

Тэта-функция поверхности Γ обладает симметрией

$$\theta(\tau(z))=\overline{\theta(z)}. \qquad (\text{П.34})$$

Мнимые компоненты якобиана $J(\Gamma)$ определяются условием

$$\tau(z)=-z. \qquad (\text{П.35})$$

Это — 2^{n-1} непересекающихся g-мерных вещественных торов. На одном из таких торов вида

$$z=(\zeta;\ \eta;\ \bar{\zeta}),\ \zeta\in\mathbf{C}^{\rho},\ \eta\in\mathbf{R}^{n-1} \tag{П.36}$$

функция $\theta(z)$ всегда положительна [46]. Прим-форма $E(P,\ Q)$ обладает симметрией

$$E(\tau(P),\ \tau(Q))=E(P,\ Q). \tag{П.37}$$

Вектор римановых констант будет вещественным, если начальную точку отображения Абеля взять вещественной.

На поверхности неразделяющего типа с n овалами $(0\leqslant n\leqslant g)$ можно всегда выбрать базис циклов a_i, b_j, преобразующийся под действием антиинволюции по закону

$$\tau(a_i)=a_i,\ i=1,\ldots,\ g,\ \tau(b_i)=\begin{cases}-b_i,\ 1\leqslant i\leqslant n,\\ -b_i+a_i,\ n+1\leqslant i\leqslant g.\end{cases} \tag{П.38}$$

Тэта-функция $\theta(z)$ таких римановых поверхностей обладает симметрией [16]

$$\overline{\theta(z)}=\theta(\bar{z}+\lambda), \tag{П.39}$$

где полупериод λ имеет вид

$$\lambda=\frac{1}{2}(0,\ldots,\ 0,\ 1,\ldots,1) \tag{П.40}$$

(нули на первых n местах).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арнольд В. И.*, Математические методы классической механики. М., Наука, 1974, 431 с. (РЖМат, 1975, 6Б433К)
2. *Белоколос Е. Д.*, *Энольский В. З.*, Обобщенный анзатц Лэмба. Теор. и мат. физ., 1982, *53*, № 2, 271—282 (РЖМат, 1983, 3Б755)
3. *Браилов А. В.*, Полная интегрируемость некоторых уравнений Эйлера и приложения. Докл. АН СССР, 1983, *268*, № 5, 1043—1046
4. *Веселов А. П.*, *Новиков С. П.*, О скобках Пуассона, согласованных с алгебраической геометрией и динамикой Кортевега-де Фриза на множестве конечнозонных потенциалов. Докл. АН СССР, 1982, *266*, № 3, 533—537 (РЖМат, 1983, 2Б1028)
5. *Гельфанд И. М.*, *Дикий Л. А.*, Резольвента и гамильтоновы системы. Функц. анализ и его прил., 1977, *11*, № 2, 11—27 (РЖМат, 1977, 11Б801)
6. *Гледзер Е. Б.*, *Должанский Ф. В.*, *Обухов А. М.*, Системы гидродинамического типа и их применение. М., Наука, 1981, 368 с.
7. *Голубев В. В.*, Лекции по интегрированию уравнений движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки. М., Гостехиздат, 1953, 287 с. (РЖМат, 1953, 739К)
8. *Гриффитс Ф.*, *Харрис Дж.*, Принципы алгебраической геометрии. Т. 1. М., Мир, 1982, 496 с. (РЖМат, 1983, 2А321К)

9. *Дикий Л. А.*, Замечания о гамильтоновых системах, связанных с группой вращений. Функц. анализ и его прил., 1972, *6*, № 4, с. 83—84 (РЖМат, 1973, 3Б336)
10. *Дубровин Б. А.*, Аналитические свойства спектральных данных для несамосопряженных линейных операторов, связанных с вещественными периодическими решениями уравнения sine-Gordon. Докл. АН СССР, 1982, *265*, № 4, 789—793 (РЖМат, 1982, 12Б783)
11. —, Вполне интегрируемые гамильтоновы системы, связанные с матричными операторами, и абелевы многообразия. Функц. анализ и его прил., 1977, *11*, № 4, 28—41 (РЖМат, 1978, 7Б910)
12. —, Периодическая задача для уравнения Кортевега-де Фриза в классе конечнозонных потенциалов. Функц. анализ и его прил., 1975, *9*, № 3, 41—51 (РЖМат, 1976, 1Б727)
13. —, Тэта-функции и нелинейные уравнения. Успехи мат. наук, 1981, *36*, № 2, 11—80 (РЖМат, 1981, 8А432)
14. —, *Кричевер И. М., Новиков С. П.*, Уравнение Шрёдингера в периодическом поле и римановы поверхности. Докл. АН СССР, 1976, *229*, № 1, 15—18 (РЖМат, 1977, 1Б537)
15. —, *Матвеев В. Б., Новиков С. П.*, Нелинейные уравнения типа Кортевега-де Фриза, конечнозонные линейные операторы и абелевы многообразия. Успехи матем. наук, 1976, *31*, № 1, 55—136 (РЖМат, 1976, 7Б972)
16. —, *Натанзон С. М.*, Вещественные двухзонные решения уравнения sine-Gordon. Фукц. анализ и его прил., 1982, *16*, № 1, 27—43 (РЖМат, 1982, 6Б160)
17. —, *Новиков С. П.*, Алгебро-геометрические скобки Пуассона для вещественных конечнозонных решений уравнения sine-Gordon и нелинейного уравнения Шрёдингера. Докл. АН СССР, 1982, *267*, № 6, 1295—1300 (РЖМат, 1983, 4Б366)
18. —, —, Периодические и условно периодические аналоги многосолитонных решений уравнения Кортевега-де Фриза. ЖЭТФ, 1974, *67*, № 12, 2131—2143
19. —, —, *Фоменко А. Т.*, Современная геометрия. Методы и приложения. М., Наука, 1979, 759 с. (РЖМат, 1980, 5А623К)
20. *Захаров В. Е., Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д.*, Полное описание решений sine-Gordon уравнения. Докл. АН СССР, 1974, *219*, № 6, 1334—1337 (РЖМат, 1975, 4Б629)
21. *Итс А. Р.*, Обращение гиперэллиптических интегралов и интегрирование нелинейных дифференциальных уравнений. Вестн. Ленингр. ун-та, 1976, № 7, 39—46 (РЖМат, 1976, 9Б324)
22. —, *Котляров В. П.*, Явные формулы для решений нелинейного уравнения Шрёдингера. Докл. АН УССР. Сер. 1976, *А*, № 11, 965—968 (РЖМат, 1977, 5Б293)
23. —, *Матвеев В. Б.*, Операторы Шрёдингера с конечнозонным спектром и N-солитонные решения уравнения Кортевега-де Фриза. Теор. и мат. физ., 1975, *23*, № 1, 51—68 (РЖМат, 1975, 9Б485)
24. *Козел В. А., Котляров В. П.*, Почти периодические решения уравнения $u_{tt}-u_{xx}+\sin u=0$. Докл. АН УССР, 1976, *А*, № 10, 878—881 (РЖМат, 1977, 4Б338)
25. *Козлов В. В.*, Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике. Успехи матем. наук, 1983, *38*, № 1, 3—67
26. *Кричевер И. М.*, Алгебраические кривые и коммутирующие матричные дифференциальные операторы. Функц. анализ и его прил., 1976, *10*, № 2, 75—76 (РЖМат, 1976, 11Б951)
27. —, Алгебро-геометрическое построение уравнений Захарова—Шабата и их периодических решений. Докл. АН СССР, 1976, *227*, № 2, 291—294 (РЖМат, 1976, 7Б501)
28. —, Методы алгебраической геометрии в теории нелинейных уравнений. Успехи мат. наук, 1977, *32*, № 6, 183—208 (РЖМат, 1978, 9Б687)

29. —, *Новиков С. П.*, Голоморфные расслоения над алгебраическими кривыми и нелинейные уравнения. Успехи мат. наук, 1980, *35*, № 6, 47—68 (РЖМат, 1981, 5А537)
30. *Манаков С. В.*, Замечание об интегрировании уравнений Эйлера динамики n-мерного твердого тела. Функц. анализ и его прил., 1976, *10*, № 4, 93—94 (РЖМат, 1977, 3Б764)
31. *Марченко В. А.*, Операторы Штурма — Лиувилля и их приложения. Киев, Наук. думка, 1977, 332 с. (РЖМат, 1978, 9Б632К)
32. *Мищенко А. С.*, Интегралы геодезических потоков на группах Ли. Функц. анализ и его прил., 1970, *4*, № 3, 73—77 (РЖМат, 1971, 1Б767)
33. —, *Фоменко А. Т.*, Уравнения Эйлера на конечномерных группах Ли. Изв. АН СССР. Сер. мат., 1978, *42*, 396—415 (РЖМат, 1978, 8Б857)
34. *Новиков С. П.*, Периодическая задача для уравнения Кортевега-де Фриза. Функц. анализ и его прил., 1974, *8*, № 3, 54—66 (РЖМат, 1975, 1Б962)
35. — (ред.), Теория солитонов. Метод обратной задачи. М., Наука, 1980, 319 с. (РЖМат, 1980, 8Б459К)
36. *Рохлин В. А.*, Комплексные топологические характеристики вещественных алгебраических кривых. Успехи мат. наук, 1978, *33*, № 5, 77—89 (РЖМат, 1979, 2А438)
37. *Трофимов В. В.*, Уравнения Эйлера на борелевских подалгебрах полупростых алгебр Ли. Изв. АН СССР. Сер. мат., 1979, *43*, № 3, 714—732 (РЖМат, 1979, 9А588)
38. *Чередник И. В.*, Алгебраические аспекты двумерных киральных полей. II. Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Алгебра. Топология. Геометрия., 1981, *18*, 73—150 (РЖМат, 1981, 6А406)
39. —, Дифференциальные уравнения для функций Бейкера — Ахиезера алгебраических кривых. Функц. анализ и его прил., 1978, *12*, № 3, 45—54 (РЖМат, 1978, 12Б161)
40. —, Об условиях вещественности в «конечнозонном интегрировании». Докл. АН СССР, 1980, *252*, № 5, 1104—1108 (РЖМат, 1980), 10Б868)
41. —, О регулярности «конечнозонных» решений интегрируемых матричных дифференциальных уравнений. Докл. АН СССР, 1982, *266*, № 3, 593—597 (РЖМат, 1983, 2Б378)
42. *Adler M., Moerbeke P. van*, Completely integrable systems, Euclidean Lie algebras and curves. Adv. Math., 1980, *38*, № 3, 267—317
43. —, —, Linearization of Hamiltonian systems, Jacobi varieties and representation theory. Adv. Math., 1980, *38*, № 3, 318—379 (РЖМат, 1981, 8А431)
44. —, —, The algebraic integrability of geodesic flow on SO(4). Invent. Math., 1982, *67*, № 2, 297—331 (РЖМат, 1983, 1А432)
45. *Dubrovin B. A., Krichever I. M., Novikov S. P.*, Topological and algebraic geometrical methods in modern mathematical phisics, II. In: Soviet Scientific Reviews, v. 3. New York, Harwood Acad. Publisher 1982.
46. *Fay J.*, Theta-functions on Riemann surfaces. Lect. Notes in math., Springer, 1973, *352*, 137 pp. (РЖМат, 1974, 8А485)
47. *Forest G., McLaughlin D. W.*, Spectral theory for the periodic sine-Gordon equation: a concrete viewpoint. J. Math. Phys., 1982, *23*, № 7, 1248
48. *Lax P. D.*, Periodic solutions of Korteweg-de Vries equation. Comm. Pure and Appl. Math., 1975, *28*, 141—188.
49. —, Periodic solutions of KdV equation. Lect. in Appl. Math. 1974, *15*, 85—96
50. *Matveev V. B.*, Abelian functions and solitons. Preprint № 373 Inst. Teor. Phys., Wroclaw, 1976.
51. *McKean H. P.*, The sine-Gordon and sinh-Gordon equations on the circle. Comm. Pure and Appl. Math., 1981, *34*, № 2, 197—257 (РЖМат, 1982, 1Б817)
52. —, *Moerbeke P. van*, The spectrum of Hill's equation. Invent. Math., 1975, *30*, № 3, 217—274 (РЖМат, 1976, 5Б758)