

QUADERNI  
dell' ISTITUTO NAZIONALE di ALTA MATEMATICA  
GRUPPO NAZIONALE DI FISICA MATEMATICA

n. 59

**GIANFAUSTO DELL'ANTONIO**

**CAPITOLI SCELTI  
DI MECCANICA ANALITICA**

2000



Franco Cordin

CAPITOLI SCELTI DI MECCANICA ANALITICA

*Gianfausto Dell'Antonio*

Dipartimento di Matematica  
Università di Roma, La Sapienza

e

Laboratorio Interdisciplinare  
SISSA, Trieste



## INTRODUZIONE

Questa e' una collezione di approfondimenti su temi che sono stati trattati in modo piu' sommario nel mio libro *Elementi di Meccanica I: Meccanica Classica* pubblicato da Liguori nel 1995 e che nel seguito verrà indicato con [D].

I temi trattati sono in larga misura "classici"; la trattazione tuttavia si discosta in alcuni punti da quelle che possono essere trovate in testi di Meccanica, e puo' prestarsi ad individuare temi di ricerca.

In calce a ciascun Capitolo vengono dati riferimenti bibliografici corrispondenti, senza alcuna pretesa di completezza.

Parti di questo libro sono state da me utilizzate in insegnamenti del quarto anno al corso di laurea in Matematica o del Dottorato di Ricerca all'Università La Sapienza di Roma. Mi é gradito qui ringraziare per commenti e suggerimenti gli allievi dei vari corsi. Un ringraziamento va anche al Consiglio Scientifico del G.N.F.M. e in particolare al collega Tommaso Ruggeri per aver promosso la pubblicazione di questo manoscritto nell'ambito dei Quaderni del C.N.R.



## INDICE

### *1. IL PROBLEMA DEI DUE CORPI: ANALISI VARIAZIONALE*

- 1.1 Formulazione variazionale delle equazioni di Newton
- 1.2 Analisi variazionale
- 1.3 Comportamento vicino a una collisione
- 1.4 Restrizione a un sottospazio chiuso
- 1.5 Analisi del funzionale di Tonelli
- 1.6 Aggiunta di una forza attrattiva

### *2. OTTICA GEOMETRICA E STRUTTURE SIMPLETTICHE*

- 2.1 Introduzione
- 2.2 Ottica Gaussiana
- 2.3 Funzione Generatrice (Eiconale)
- 2.4 Funzione caratteristica e principio di Fermat
- 2.5 Ottica geometrica non lineare
- 2.6 Funzioni caratteristica e ottica non lineare
- 2.7 Aberrazioni

### *3. IL PROBLEMA DEGLI N CORPI*

- 3.1 Introduzione.
- 3.2 Soluzioni di collisione.
- 3.3 Configurazioni centrali per  $N \geq 3$ .
- 3.4 Studio delle configurazioni centrali.
- 3.5 Il problema dei tre corpi ristretto.
- 3.6 Stabilità nel problema dei tre corpi ristretto.
- 3.7 Sistemi dipendenti da un parametro; metodo di continuazione.
- 3.8 Continuazione nel problema dei tre corpi ristretto; orbite retrograde e di cometa.
- 3.9 Continuazione: soluzioni del problema dei tre corpi.

### *4. ELEMENTI DI TEORIA DELLA BIFORCAZIONE*

- 4.1 Considerazioni generali
- 4.2 Metodo di riduzione di Hilbert Schmidt
- 4.3 Biforcazione di un autovalore semplice
- 4.4 Biforcazione e stabilità lineare
- 4.5 Biforcazione di soluzioni periodiche
- 4.6 Il caso  $N=2$
- 4.7 Biforcazione di Hopf, caso generale
- 4.8 Il teorema del centro di Liapunov

4.9 Forme normali, trasformazione omologica.

## 5. *COMPLEMENTI SUI SISTEMI INTEGRABILI.*

5.1 Introduzione: metodo di Lax

5.2 Richiami di geometria simplettica.

5.3 Strutture di Poisson.

5.4 Strutture bihamiltoniane.

5.5 Condizioni di compatibilità; il tensore di Nijenhuis.

5.6 Il modello di Toda.

5.7 Il modello di Calogero

5.8 Scattering inverso: un esempio semplice

5.9 Scattering inverso nel modello di Calogero.

5.10 Riduzione di sistemi con simmetria: considerazioni generali

5.11 Un semplice esempio.

5.12 Struttura di Poisson associata a gruppi di Lie.

5.13 Un caso particolare:  $G = U(N)$ .

5.14 Il modello di Calogero come sistema ridotto.

## 6. *TEORIA ERGODICA*

6.1 Connessione con la Meccanica Statistica.

6.2 Sistemi dinamici.

6.3 Teoremi fondamentali della teoria ergodica.

6.4 Il modello degli Ehrenfest.

6.5 Ergodicità.

6.6 Mescolamento.

6.7 Trasformazioni unitarie. Proprietà spettrali.

6.8 Invarianti spettrali.

6.9 Entropia, considerazioni generali.

6.10 Entropia di un sistema dinamico.

6.11 Generatori.

6.12 Calcolo di entropie di trasformazioni.

6.13 Entropia e informazione.

## 7. *APPROSSIMAZIONE DI VINCOLI CON FORZE POTENZIALI*

7.1 Introduzione.

7.2 Un semplice esempio.

7.3 Caso generale.

7.4 Convergenza in media.

7.5 Dati compatibili

7.6 Codimensione 1 e dati non compatibili.



7.7 Lo specchio magnetico

7.8 Approssimazione di forze impulsive.



## I : IL PROBLEMA DEI DUE CORPI: ANALISI VARIAZIONALE

1.1 Formulazione variazionale delle equazioni di Newton.

1.2 Analisi variazionale.

1.3 Comportamento vicino a una collisione.

1.4 Restrizione a un sottospazio chiuso.

1.5 Analisi del funzionale di Tonelli.

1.6 Aggiunta di una forza attrattiva.

### 1.1 FORMULAZIONE VARIAZIONALE DELLE EQUAZIONI DI NEWTON

In questo Capitolo svolgeremo uno studio abbastanza dettagliato del problema dei due corpi dal punto di vista variazionale. Lo scopo é di mettere il luce, in un caso in cui la soluzione é completamente nota, metodologia ed eventuali difficoltà.

Un'analisi dello stesso tipo può essere effettuata per il problema degli  $N$  corpi, in particolare per la determinazione di soluzioni periodiche. Per questo problema molto meno é noto attraverso lo studio delle corrispondenti equazioni di Newton, e il metodo diretto del calcolo delle variazioni può essere utile per dimostrare esistenza ed eventualmente molteplicitá di soluzioni periodiche di periodo prefissato o di energia prefissata.

Richiamiamo brevemente la formulazione variazionale delle equazioni di Newton- Lagrange, in particolare relativamente alle soluzioni di periodo  $T$  prefissato e alle soluzioni periodiche di energia  $E$  prefissata. Ulteriori dettagli possono essere trovati su testi di Meccanica Analitica.

Consideriamo un sistema Newtoniano di  $N$  corpi, con masse  $m_1, \dots, m_N$ . Assumiamo che tutte le forze siano di natura potenziale e che non dipendano dal tempo.

Indichiamo il potenziale con

$$V(x) \quad x \equiv \{x_1, \dots, x_N\}, \quad R^3 \ni x_k \equiv \{x_{k,1}, x_{k,2}, x_{k,3}\} \quad 1.1$$

Le equazioni di Newton per questo sistema sono

$$m_k \ddot{x}_{k,\alpha} = \frac{\partial V(x)}{\partial x_{k,\alpha}}, \quad k = 1, \dots, N, \quad \alpha = 1, 2, 3 \quad 1.2$$

Esse verranno scritte nella forma abbreviata

$$M\ddot{x} = \nabla V(x) \quad 1.3$$

La matrice diagonale  $M$  verrà detta *matrice di masse*.

Le equazioni di Newton possono essere poste nella forma (lagrangiana) equivalente

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{k,\alpha}} = \frac{\partial L}{\partial x_{k,\alpha}}$$

o in forma abbreviata

$$\frac{d}{dt} \nabla_2 L(x, y) = \nabla_1 L(x, y), \quad y \equiv \dot{x} \quad 1.4$$

dove il suffisso 1 (risp. 2) indica che il gradiente riguarda il primo (rispettivamente il secondo) gruppo di variabili.

Per definizione la lagrangiana  $L(x, y)$  del sistema é

$$L(x, y, t) = \Theta(y) + V(x), \quad \Theta \equiv \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_k y_k^2 = \frac{1}{2} (y, My) \equiv \frac{1}{2} \langle y, y \rangle_M \quad 1.5$$

La funzione  $\Theta(\dot{x})$  é l'energia cinetica totale del sistema.  
Poiché  $V$  non dipende dal tempo, é conservata lungo ogni traiettoria regolare l'energia

$$E(x, \dot{x}) \equiv \Theta(\dot{x}) - V(x) \quad 1.6$$

La funzione  $-V(x)$  (energia potenziale) verrà indicata con il simbolo  $U(x)$ .  
Una funzione  $x(t)$  da  $R$  (o da un intervallo  $I$ ) a  $(R^3)^N$  che sia di classe  $C^2$  e per la quale (1.3) sia soddisfatta verrà chiamata *soluzione forte* o anche *soluzione classica* delle equazioni di Newton.

Se il potenziale ha delle singolarità (come é il caso del potenziale Newtoniano se le posizioni dei due punti materiali coincidono) la soluzione classica cessa di esistere quando la traiettoria entra nell'insieme singolare.

Poiché siamo interessati a soluzioni periodiche, e quindi definite per ogni  $t$ , conviene introdurre una classe di soluzioni *deboli*.

Indichiamo con  $\Delta_V$  l'insieme di configurazioni in corrispondenza alle quali il potenziale é singolare e assumiamo che  $V$  sia di classe  $C^2$  al di fuori di  $\Delta_V$ .

Per una traiettoria continua  $x(t)$  indichiamo con  $K_{x(\cdot)}$  l'insieme dei tempi "di collisione"

$$K_{x(\cdot)} \equiv \{t \in R : x(t) \in \Delta\}$$

Introduciamo allora la seguente definizione

**DEFINIZIONE**

La funzione  $x(\cdot) \in C([0, T], R^{3N})$  verrà detta *soluzione debole* delle equazioni di Newton se

- i) L'insieme  $K_{x(\cdot)} \cap [0, T]$  é al piú numerabile
- ii) Nel complemento di  $K_{x(\cdot)}$  la funzione  $x(t)$  é di classe  $C^2$  ed é una soluzione classica; esiste inoltre una costante  $E_0$  tale che

$$E(x(t), \dot{x}(t)) = E_0 \quad \forall t \notin K_{x(\cdot)}$$

La costante  $E_0$  verrà detta *energia della soluzione debole*. ♡

Le soluzioni classiche, di periodo o di energia prefissati, hanno una descrizione variazionale, che ricordiamo qui brevemente.

Iniziamo con il caso in cui é prefissato il periodo  $T$ .

Indichiamo con  $\Lambda_T^V$  il seguente sottoinsieme delle funzioni periodiche di periodo  $T$  e a valore in  $(R^3)^N$

$$\Lambda_T^V \equiv \{x(t+T) = x(t), \quad x(t) \in H^1((0, T), R^{3N}), \quad \int_0^T |V(x(t))| dt < +\infty\} \quad 1.8$$

dove  $H^1((0, T), R^{3N})$  é lo spazio di funzioni  $T$ -periodiche a valore in  $R^{3N}$  la cui derivata é a quadrato integrabile.

Consideriamo su  $\Lambda_T^V$  il funzionale

$$\Phi_T(x(\cdot)) \equiv \int_0^T [\Theta(\dot{x}(t)) + V(x(t))] dt \quad 1.9$$

che chiameremo Funzionale d'Azione (associato a condizioni al bordo periodiche di periodo  $T$ ).

Ricordiamo che se il funzionale  $\Phi_T$  é di classe  $C^1$ , i suoi punti critici sono quelli in cui il differenziale si annulla.

E' noto, e facilmente verificabile, che se  $V(x)$  é di classe  $C^1$  allora anche  $\Phi_T^V$  é differenziabile e i suoi punti critici sono precisamente le soluzioni classiche  $T$ -periodiche di (1.2). Infatti esse sono soluzioni perché punti critici del funzionale d'Azione, e sono periodiche di periodo  $T$  poiché tutti gli elementi dello spazio di funzioni considerato hanno questa proprietà.

Nel caso che consideriamo il potenziale ha delle singolarità; dunque in generale  $\Phi_T$  non é di classe  $C^1$  sul suo dominio di definizione. Ad esempio, nel problema degli  $N$ -corpi newtoniano ( $N \geq 2$ )  $\Phi_T$  é continuo ma non differenziabile in corrispondenza a traiettorie che presentano collisioni.

Si può estendere la definizione di punto critico in modo che le soluzioni deboli risultino essere anch'esse punti critici del funzionale d'Azione; in questa accezione più generale un punto critico é un punto in corrispondenza al quale cambia la topologia degli insiemi di livello del funzionale (ad esempio é punto critico un punto di massimo isolato anche se il funzionale non é differenziabile; grosso modo, il grafico del funzionale in un intorno del punto considerato potrebbe essere quello di un cono con vertice nel punto stesso).

E' tuttavia importante notare che non tutti i punti critici in questo senso generalizzato corrispondono a soluzioni deboli del problema; infatti la nondifferenziabilità non permette di dedurre che sono soddisfatte le equazioni di Lagrange, neppure in senso debole.

Per il seguito é anche importante notare che se  $x^0(t)$  corrisponde a un punto critico, il suo periodo *minimo* può essere un sottomultiplo di  $T$ .

Diamo ora una breve descrizione della formulazione variazionale del problema a energia costante

Per caratterizzare le soluzioni di (1.3) che sono periodiche e hanno una prefissata energia  $E$  conviene introdurre un diverso funzionale d'Azione, la cui forma é suggerita da quella del funzionale  $\Psi_E^0$  di Maupertuis [A,C]

$$\Psi_E^0(x(\cdot)) \equiv \int_0^1 \sqrt{E + V(x(t))} \sqrt{\Theta(\dot{x}(t))} dt \quad x(t) \in \Lambda_1^V \quad 1.10$$

Si deve notare che questo funzionale é invariante per riparametrizzazione, così che la scelta dell'intervallo di periodicità é irrilevante.

Il funzionale  $\Psi_E^0$  ha avuto una grande importanza storica per la sua similitudine con il funzionale *lunghezza ottica* per il raggi di luce in ottica geometrica, e quindi per la connessione con il principio di Fermat, se si interpreta  $\sqrt{E + V(x)}$  come indice di rifrazione e  $\Theta(\dot{x}(t))$  come struttura riemanniana.

Tuttavia esso é definito solo per traiettorie che soddisfano

$$E + V(x(t)) \geq 0 \quad \forall t \quad 1.11$$

Questo insieme ha un bordo (le traiettorie per le quali vale in (1.11) il segno di uguaglianza almeno per un valore di  $t$ ) e questo dá luogo a difficoltà in un'analisi rigorosa (i punti critici potrebbero giacere sul bordo e quindi non essere soluzione delle equazioni di Lagrange). Un funzionale che serve allo stesso scopo ma presenta minori difficoltà dal punto di vista del metodo diretto del calcolo delle variazioni (ma non é piú limitato dal basso, e quindi potrebbe non avere punti critici) é il seguente

$$\Phi_E(x(\cdot)) \equiv \int_0^1 \Theta(\dot{x}(t))dt \cdot \int_0^1 (E + V(x(t)))dt, \quad x(t) \in \Lambda_1^V \quad 1.12$$

Anche questo funzionale é invariante per riparametrizzazione; lo indicheremo con il nome di *Funzionale di Tonelli* o *Funzionale di Maupertuis modificato*.

Non é difficile verificare che se  $V$  é di classe  $C^1$  anche  $\Phi_E$  é di classe  $C^1$ .

Sotto questa condizione di regolaritá, vi é corrispondenza biunivoca tra soluzioni periodiche classiche di (1.2) con energia  $E$  e punti critici di  $\Psi_E$  in corrispondenza ai quali  $\Psi_E$  assume valore positivo.

La dimostrazione segue la traccia della corrispondente dimostrazione per il funzionale di Maupertuis, che puó essere trovata su molti testi di Meccanica Analitica. La ricordiamo qui brevemente.

Poniamo

$$\omega_0^2 \equiv \frac{\int_0^1 [E + V(x^0(t))]dt}{\int_0^1 \Theta(\dot{x}^0(t))dt} \quad 1.13$$

Si ha allora

*LEMMA 1.1*

Sia  $x^0(t)$  un punto critico regolare di  $\Psi_E$  e sia  $\Psi_E(x^0) > 0$ . Sia  $\omega_0$  una soluzione di (1.13). Allora  $x_E^0(t) \equiv x^0(\omega_0 t)$  é una soluzione periodica classica di (1.2) con energia  $E$  (e periodo  $|\omega_0|^{-1}$ ).

*Dimostrazione*

Poiché  $\Phi$  é differenziabile e  $x^0$  é un punto critico, per ogni  $w(t) \in H^1([0, T].R^{3N})$  si ha

$$\begin{aligned} 0 = D\Phi_{x^0} w &= \langle \dot{w}, \dot{x}^0 \rangle \cdot \int_0^1 [E + V(t)]dt + \int_0^1 \Theta(\dot{x}^0(t))dt \cdot \int_0^1 (\nabla V(x^0(t)), w(t))dt \\ &= \int_0^1 \Theta(\dot{x}^0(t))dt \left[ \omega_0^2 \int_0^1 (\dot{w}(t), \dot{x}^0(t))dt - \int_0^1 (\nabla V(x^0(t)), w(t))dt \right] \end{aligned} \quad 1.14$$

Da  $\Theta(\dot{x}^0(t)) \geq 0$  e  $|\omega_0| > 0$  segue allora

$$\omega_0^2 \int_0^1 (\dot{w}(t), \dot{x}^0(t))dt + \int_0^1 (\nabla V(x^0(t)), w(t))dt = 0 \quad 1.15$$

e dunque  $x^0$  é soluzione 1-periodica di

$$\omega_0^2 \ddot{x}(t) + \nabla V(x(t)) = 0 \quad 1.16$$

Segue da (1.16) che la funzione

$$E_0(t) \equiv \frac{1}{2} \omega_0^2 \dot{x}^0(t)^2 - V(x_0(t))$$

ha derivata temporale nulla in ogni istante in cui  $\dot{x}_0(t) \neq 0$ . Poiché  $V \in C^1$  si ha allora  $E_0(t) = E_0 \forall t$ .

Ponendo  $x_E^0(t) \equiv x^0(\omega_0 t)$  si verifica che  $x_E^0(t)$  è una soluzione periodica forte di (1.2) con energia  $E$  e che il suo periodo è  $|\omega_0|^{-1}$ .  $\diamond$

NOTA 1

Poiché (1.2) è invariante per riflessione del tempo, le due soluzioni di (13) differiscono solo per il segno di  $\omega_0$  e sono tra loro coniugate per riflessione temporale.  $\heartsuit$

NOTA 2

E' vero anche il reciproco del Lemma 1.1, come si vede notando che, se  $x^0$  è una soluzione periodica classica di (1.2) con periodo  $T$ , la sua energia è conservata e quindi vale (1.16) per la funzione  $x_E^0(t)$  definita da

$$x_E^0 = x^0\left(\frac{t}{\omega_0}\right)$$

dove  $\omega_0$  è definito in (1.13).

Da questo si deduce immediatamente che  $x_E^0$  è un punto critico di  $\Psi_E$ .  $\heartsuit$

Notiamo infine che se  $x^0$  è un punto critico deve essere  $(D\Psi_E)_{x^0}(x^0) = 0$  cioè

$$\int_0^1 \left[ E - V(x^0(t)) - \frac{1}{2} (\nabla V(x^0(t)), x^0(t)) \right] dt = 0$$

In particolare per potenziali omogenei  $V(x) = \frac{1}{|x|^\alpha}$  si può verificare che  $E$  deve essere negativa se  $\alpha \in (0, 2)$  e deve essere positiva se  $\alpha > 2$ .

Inoltre solo se  $\alpha \in (0, 2)$  si ha che  $\omega^2 > 0$ . In particolare per il potenziale newtoniano si possono avere soluzioni periodiche solo se l'energia è negativa.

Facciamo infine un breve accenno alla relazione tra lo Hessiano del funzionale di Azione e quello del funzionale di Tonelli in corrispondenza ai punti critici.

Abbiamo già notato che  $\Psi_E$  è invariante per riparametrizzazione, e in particolare per cambiamento di scala dei tempi  $t \rightarrow T_0 t$ ,  $T_0 > 0$ .

D'altra parte  $\omega_0$  è omogeneo di ordine uno per cambiamento di scala del tempo.

Dunque  $x_E^0(t)$  è punto critico del funzionale

$$\Psi_E^{T_0}(x(\cdot)) \equiv \int_0^{T_0} \Theta(\dot{x}(t)) dt \cdot \int_0^{T_0} (E + V(x(t))) dt \quad 1.17$$

dove  $T_0$  è il periodo di  $x_E^0(t)$ .

Dunque  $x_E^0(t)$  è punto critico di entrambi i funzionali  $\Psi_E^{T_0}$  e  $\Phi_{T_0}$ .

Studiamo la relazione tra le corrispondenti forme hessiane.

Consideriamo i due funzionali

$$\Xi(x(\cdot)) \equiv \frac{1}{2} \int_0^{T_0} (E_0 + V(x(t))) dt, \quad \Sigma(x(\cdot)) \equiv \int_0^{T_0} \Theta(\dot{x}(t)) dt$$

Sotto le nostre ipotesi sono entrambi di classe  $C^2$  nel punto  $x_0^E$ .  
Per costruzione (scrivendo ora  $\tilde{x}$  per  $x_E^0(\cdot)$ )

$$\Psi(\tilde{x}) = \Xi(\tilde{x}) + \Sigma(\tilde{x}) - T_0 E, \quad \Phi(\tilde{x}) = \Xi(\tilde{x}) \Sigma(\tilde{x})$$

Da

$$D\Xi_{\tilde{x}} + D\Sigma_{\tilde{x}} = 0, \quad \Sigma(\tilde{x}) D\Xi_{\tilde{x}} + \Xi(\tilde{x}) D\Sigma_{\tilde{x}} = 0 \quad 1.20$$

si deduce

$$\Sigma(\tilde{x}) = \Xi(\tilde{x}) \quad 1.21$$

poiché  $D\Xi_{\tilde{x}} \neq 0$ .

Naturalmente (1.21) é anche una conseguenza della conservazione dell'energia, poiché

$$E + V(x^0(t)) = \Theta(\dot{x}^0(t)) \quad \forall t$$

Sotto le nostre ipotesi di differenziabilità si ha allora

$$\begin{aligned} \langle w, D^2\Phi_{\tilde{x}}w \rangle &= \Sigma(\tilde{x}) \langle w, D^2\Xi_{\tilde{x}}w \rangle + \Xi(\tilde{x}) \langle w, D^2\Sigma_{\tilde{x}}w \rangle \\ &+ 2 \langle D\Xi_{\tilde{x}}, w \rangle \langle D\Sigma_{\tilde{x}}, w \rangle \quad \forall w \in X \end{aligned}$$

e quindi, utilizzando (1.20) e (1.21)

$$\langle w, D^2\Psi_E(\tilde{x})w \rangle = \Sigma(\tilde{x}) \langle w, D^2\Phi(\tilde{x})w \rangle - 2 \langle D\Xi_{\tilde{x}}, w \rangle^2 \quad \forall w \in X \quad 1.22$$

Ne deduciamo che i due hessiani coincidono sul sottospazio ortogonale a  $D\Xi_{\tilde{x}}$ .

Definendo *indice di un funzionale*  $\Phi$  di classe  $C^1$  in corrispondenza ad un punto critico  $\tilde{x}$  il numero  $i_{\tilde{x}}\Phi$  di autovalori negativi della matrice hessiana, ne concludiamo

$$i_{\tilde{x}}\Psi_E = i_{\tilde{x}}\Phi + 1$$

Vedremo un caso particolare di questo risultato nel problema a due corpi; troveremo una soluzione periodica classica (nel sistema di riferimento del baricentro) che é un minimo assoluto per il funzionale  $\Phi$  (in uno spazio di funzioni opportunamente scelto) e un punto sella per il funzionale  $\Psi_E$ .

## 1.2 ANALISI VARIAZIONALE DEL PROBLEMA DEI DUE CORPI

Analizziamo ora il problema dei due corpi, nell'ambito della struttura variazionale che abbiamo brevemente ricordato, mettendo in luce su questo esempio semplice le difficoltà e le metodologie da adottare. Questo può aiutare ad affrontare analoghi problemi nel caso del problema degli  $N$  corpi.

La soluzione completa del problema dei due corpi era già conosciuta da Newton. Tutte le soluzioni limitate hanno energia negativa e corrispondono a moti periodici. Per ogni



$E < 0$  o per ogni  $T > 0$  esistono infinite soluzioni di periodo  $T$  ed energia  $E$ ; le orbite corrispondenti sono tutte ellissi nel sistema di riferimento in cui il baricentro é fermo e differiscono tra loro per la loro eccentricitá.

Il fatto che tutte le soluzioni limitate siano periodiche é dovuto alla presenza di un'ulteriore costante del moto, indipendente da quelle dovute, attraverso il teorema di Noether, alle simmetrie spaziali continue del sistema. Questa costante del moto puó essere scelta essere la proiezione del vettore di Runge-Lenz su una direzione prefissata nel piano del moto, nel sistema di riferimento del baricentro.

Questa proprietá del sistema di due corpi é connessa al fatto che il sistema é regolarizzabile ([L.C.],[M]) e che la sua regolarizzazione é diffeomorfa al moto geodetico sulla sfera unitaria di  $R^4$ . In questa corrispondenza le orbite attraverso i poli corrispondono a quelle traiettorie di collisione che vengono ottenute per regolarizzazione (e sono traiettorie "di rimbalzo"). Poiché tutte le soluzioni periodiche del problema dei due corpi sono note, sará relativamente facile descrivere la struttura variazionale del funzionale d'Azione nello spazio delle funzioni periodiche (molteplicitá dei punti critici e loro indice).

Su questo modello studieremo anche i motivi per i quali puó essere conveniente, come passo intermedio, introdurre un ulteriore potenziale, che corrisponde a una forza centrale *attrattiva* proporzionale all'inverso del cubo della distanza (e quindi piú singolare della forza gravitazionale). Indicheremo con  $\epsilon$  il coefficiente di proporzionalitá e studieremo la struttura variazionale del problema dei due corpi analizzando il limite  $\epsilon \rightarrow 0$ .

Questo procedimento é anche utilizzato (vedi cap.3) nello studio con metodi variazionali del problema degli  $N$  corpi, ma in questo caso la struttura variazionale é poco nota.

Conviene notare che, quando viene aggiunta l'interazione piú singolare, la struttura delle soluzioni periodiche cambia radicalmente. Non vi é piú la degenerazione dovuta alla costante del moto data dal vettore di Runge-Lenz e "la maggior parte" delle soluzioni a energia negativa non sono periodiche. Questo rende meno degenerare la struttura variazionale (i punti critici sono ora in generale isolati).

Tuttavia la forma del potenziale aggiunto (che é la stessa, a meno del segno, del potenziale centrifugo, e quindi puó essere ricondotta ad una variazione nella definizione del momento angolare) permette ancora di dare una soluzione "in forma chiusa" in corrispondenza ad ogni dato iniziale e questo permette di individuare tutte le soluzioni periodiche di periodo  $T$  prefissato (o di energia  $E$  prefissata). E quindi di individuare tutti i punti critici dei due funzionali descritti qui sopra.

In questo caso semplice sará allora possibile analizzare in sufficiente dettaglio il ruolo del potenziale aggiunto e le conclusioni che si possono trarre nel limite  $\epsilon \rightarrow 0$ .

Entriamo ora nel dettaglio dello studio variazionale del problema dei due corpi. Le equazioni del moto sono

$$m_1 \ddot{x}_1 = m_1 m_2 g \frac{x_2 - x_1}{|x_1 - x_2|^3}, \quad m_2 \ddot{x}_2 = m_1 m_2 g \frac{x_1 - x_2}{|x_1 - x_2|^3}, \quad x_k \in R^3$$

dove  $g$  é la costante gravitazionale e  $m_1, m_2$  sono le masse dei due corpi.

Si tratta di un sistema di equazioni differenziali del secondo ordine, analitiche nella regione

$$X \equiv R^6 - \Delta, \quad \Delta \equiv \{x \in R^6, x_1 = x_2\}$$

L'invarianza per traslazione implica che il baricentro si muove di moto rettilineo uniforme; senza perdita di generalitá sceglieremo il sistema di riferimento inerziale in cui il baricentro é fermo nell'origine.

Nelle coordinate relative  $y \equiv x_1 - x_2$  si ha ora il "sistema ridotto"

$$\ddot{y} = -Mg \frac{y}{|y|^3}, \quad M = m_1 + m_2, \quad y \in R^3 - \{0\} \quad 1.23$$

Scegliendo opportunamente le unità di misura delle lunghezze si può porre  $Mg = 1$ .  
La lagrangiana del sistema ridotto é allora

$$L(y, \dot{y}) = \frac{1}{2} \dot{y}^2 + \frac{1}{|y|} \quad 1.24$$

L'invarianza per rotazioni attorno all'origine implica la conservazione del momento angolare

$$J(y, \dot{y}) \equiv y \wedge \dot{y} = J, \quad J \in R^3$$

Se  $J = 0$  le soluzioni giacciono su di una retta per l'origine, mentre se  $J \neq 0$  le soluzioni giacciono nel piano perpendicolare a  $J$ .

Se  $J = 0$  la traiettoria ha la forma

$$y(t) = a(t)\xi, \quad \xi \in R^3, \quad |\xi| = 1$$

dove  $a(t)$  soddisfa

$$\ddot{a}(t) = -\frac{1}{a(t)^2}$$

Questa equazione ha soluzione (in senso classico) solo fino a un istante  $t_0 > 0$  che dipende dai dati iniziali.

Si ha  $\lim_{t \rightarrow t_0} a(t) = 0$  e quindi, per la conservazione dell'energia,  $\lim_{t \rightarrow t_0} |\dot{a}(t)| = +\infty$ .

Se  $J \neq 0$  ogni traiettoria può essere descritta mediante coordinate polari  $r, \theta$  nel piano del moto. Se l'energia é negativa l'orbita é chiusa ed é un'ellisse con un fuoco nell'origine.

La conservazione della componente  $j$  del momento angolare nella direzione perpendicolare al piano del moto si traduce in

$$j(r, \dot{\theta}) = r^2 \dot{\theta} = j \in R \quad 1.25$$

Utilizzando (1.25) l'equazione per  $r$  assume la forma

$$\ddot{r} = -\frac{1}{r^2} + \frac{j^2}{r^3} \quad 1.26$$

che, se  $\dot{r} \neq 0$ , é equivalente alla legge di conservazione dell'energia

$$\frac{1}{2} \dot{r}^2 + \frac{j^2}{2r^2} - \frac{1}{r} = E \quad 1.27$$

Da (1.27) si deduce che l'equazione (1.26) ammette soluzione globale per ogni dato iniziale per il quale  $j \neq 0$  e che per ciascuno di questi dati iniziali esiste una costante  $c(j) > 0$  tale che  $\liminf_{t \in R} r(t) = c(j)$ .

Si può utilizzare (1.25) per scrivere (1.27) nella forma

$$\frac{j^2}{2r^2} \frac{dr^2}{d\theta} + \frac{j^2}{2r^2} - \frac{M}{r} = E \quad 1.28$$

Posto  $u \equiv \frac{1}{r} - \frac{1}{j^2}$  la (1.28) si può riscrivere

$$\frac{1}{2} \left( \frac{du}{d\theta} \right)^2 + \frac{1}{2} u^2 = E + \frac{M^2}{2j^4} \quad 1.29$$

che é la legge di conservazione dell'energia per un oscillatore armonico di costante elastica unitaria e di energia  $\bar{E} \equiv E + \frac{M^2}{j^4}$ .

La soluzione di (1.29) é allora

$$u(\theta) = u_0 \cos(\theta - \theta_0) \quad 1.30$$

dove  $u_0$  e  $\theta_0$  dipendono dai dati iniziali.

Le orbite circolari corrispondono alle soluzioni per le quali  $r(t) \equiv r_0$ . Da (1.28) si deduce che  $r_0$  é la soluzione di

$$\frac{j^2}{2r^2} - \frac{M}{r} = E$$

e da (1.25) e (1.28) si deduce il periodo  $T_{r_0}$  l'energia  $E_{r_0}$ , ottenendo

$$r_0 = \frac{j^2}{M}, \quad T_{r_0} = \frac{2\pi r_0^2}{j} = 2 \frac{\pi j^3}{M^2}, \quad E_{r_0} = -\frac{M^2}{2j^2} \quad 1.31$$

Si può anche dimostrare che per ogni scelta del piano di moto e per ogni scelta del periodo  $T$  esiste una famiglia di soluzioni periodiche di periodo minimo  $T$ . Esse sono parametrizzate dall'eccentricità  $e$  delle loro orbite ellittiche, con  $0 \leq e < 1$ . Queste soluzioni hanno tutte la stessa energia e lo stesso periodo della soluzione che corrisponde all'orbita circolare ( $e = 0$ ). Per ogni valore di  $T$  questa famiglia ha un limite puntuale per  $e \rightarrow 1$ .

La traiettoria limite copre due volte (in direzioni opposte) l'orbita limite (un segmento di retta con un estremo nell'origine). E' una soluzione debole del problema dei due corpi (poiché l'energia vale  $-\frac{M^2}{2j^2}$  in tutti i punti dove queste traiettorie sono differenziabili) e l'insieme dei tempi di collisione in  $[0, T)$  é costituito da un punto. Per ovvi motivi diremo che queste traiettorie sono *di rimbalzo*.

Queste sono le sole soluzioni deboli che si possono ottenere come limite di soluzioni classiche (e che quindi fanno parte del sistema regolarizzato). Altre soluzioni deboli di periodo minimo  $T$  possono essere ottenute "attaccando" due soluzioni deboli di periodo minimo  $T/2$  che abbiano come orbite segmenti di uguale lunghezza e di orientazioni diverse. *Esse non possono essere ottenute come limite di soluzioni classiche.*

In particolare se i due segmenti vengono scelti in direzioni opposte, la soluzione debole  $\tilde{x}(t)$  che si ottiene ha la proprietà  $\tilde{x}(t + T/2) = -\tilde{x}(t)$ ,  $\forall t$ .

Questa é anche una proprietà delle soluzioni periodiche di periodo minimo  $T$  che corrispondono a orbite circolari, mentre non é posseduta dalle altre soluzioni periodiche di periodo minimo  $T$ .

NOTA 1

Se si completa l'insieme delle traiettorie "classiche" con l'aggiunta delle traiettorie di rimbalzo, si ottiene un sistema di soluzioni completo e regolare nel senso che sono soddisfatte le condizioni di unicità e di dipendenza continua dai dati iniziali. Con questo procedimento il sistema dei due corpi viene *regolarizzato*.

Si noti che questa regolarizzazione *é diversa* (provvede leggi del moto diverse) da quella di Levi-Civita ([L.C.]), valida per traiettorie corrispondenti a dati iniziali a energia negativa, che utilizza un sistema di coordinate e una scala di tempi per cui le orbite vengono messe in corrispondenza biunivoca con i moti geodetici su  $R^4$ . Nella regolarizzazione di Levi-Civita i moti immagine sono isocroni, una conseguenza del fatto che il cambiamento della scala dei tempi viene effettuato in modo diverso per traiettorie diverse. ♡

#### NOTA 2

Quando  $N \geq 3$  il sistema a  $N$  corpi non può essere regolarizzato con un metodo simile a quello che abbiamo descritto per  $N=2$ : non é possibile scegliere un insieme di orbite limite di collisione in modo tale da soddisfare i requisiti di unicità e di continuità rispetto ai dati iniziali. ♡

### 1.3 COMPORTAMENTO VICINO AD UNA COLLISIONE

Nello studio della struttura variazionale gioca un ruolo significativo la conoscenza del comportamento asintotico delle soluzioni deboli in un intorno dell'istante di collisione.

Questo comportamento é meglio descritto se si introduce un nuovo parametro temporale  $\tau(t)$  adattato alla particolare soluzione considerata e definito implicitamente da

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{r(t)}, \quad \tau(0) = 0 \quad 1.32$$

Convieni notare che per le soluzioni classiche  $\tau$  é una funzione monotona differenziabile (poiché  $r(t)$  ha un estremo inferiore non nullo).

E anche che, contrariamente a quanto accade nella regolarizzazione di Levi-Civita, il moto angolare non é qui uniforme (eccezion fatta per le soluzioni con orbita circolare). Infatti

$$\frac{d\theta}{d\tau} = \frac{j^2}{r(\tau)}$$

Tuttavia dalla legge di conservazione dell'energia segue che per tutte le soluzioni periodiche classiche si ha

$$\inf_{t \in R} r(t) = \frac{1 - \sqrt{1 - 2|E|j^2}}{2|E|}$$

e poiché per soluzioni classiche si ha  $2|E|j^2 < 1$  se ne deduce

$$\sup_{\tau \in R} \frac{d\theta}{d\tau} = \frac{2|E|j^2}{1 - \sqrt{1 - 2|E|j^2}}$$

Il termine a destra ha come funzione di  $|E|j^2$  estremo superiore 2 ed estremo inferiore 1. L'estremo inferiore é un minimo e corrisponde alle soluzioni a orbita circolare, l'estremo superiore non viene raggiunto nelle soluzioni classiche (corrisponde alle soluzioni di collisione).

Dunque per ogni soluzione periodica si ha

$$1 \leq \frac{d\theta}{d\tau} \leq 2$$

Si confronti questo con il fatto che

$$\lim_{j \rightarrow 0} \sup_t \frac{d\theta}{dt} = +\infty, \quad \lim_{j \rightarrow 0} \inf_t \frac{d\theta}{dt} = 0$$

Questo corrisponde al fatto che, per energia fissata e momento angolare piccolo, l'angolo varia rapidamente come funzione del tempo vicino ai fuochi e molto lentamente vicino al centro.

Se si utilizza il parametro temporale  $\tau$  la legge di conservazione dell'energia diventa

$$\frac{d^2 r}{d\tau^2} = 1 + 2|E|r \tag{1.33}$$

la cui soluzione é

$$r(\tau) = \frac{1}{2|E|} \left( 1 - e \cos(\sqrt{2|E|}\tau) \right), \quad 0 \leq e < 1$$

dove  $e$  é l'eccentricitá.

Notare che il limite  $e \rightarrow 1$  corrisponde alla soluzione di collisione e  $\tau = 0$  é il tempo di collisione.

La soluzione di collisione non ha singolaritá come funzione di  $\tau$ . Infatti per  $e = 1$  e  $\tau \rightarrow 0$  si ha

$$r(\tau) \simeq \frac{1}{2}\tau^2 \tag{1.34}$$

Da (1.32) si deduce il comportamento asintotico di  $r(t)$  vicino al tempo di collisione (che é  $t = 0$  per la scelta di dati iniziali fatta):

$$r(t) = C|t|^{2/3}(1 + O(|t|^\gamma)) \tag{1.35}$$

per  $C > 0$  and  $\gamma > 0$ .

#### 1.4 RESTRIZIONE A UN SOTTOSPAZIO CHIUSO

Abbiamo ora raccolto tutti gli elementi che saranno utili nello studio variazionale del problema dei due corpi, attraverso l'analisi dei punti critici dei funzionali di Hamilton e di Maupertuis.

L'azione lagrangiana per le soluzioni  $T$ -periodiche del problema ridotto é

$$\Phi_T(y(\cdot)) = \frac{1}{2} \int_0^T \dot{y}^2(t) dt + \int_0^T \frac{1}{|y(t)|} dt \quad y \equiv x_1 - x_2 \tag{1.36}$$

definita su

$$\Lambda_T \equiv \left\{ y(t) \in H^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3), \int_0^T \frac{1}{|y(t)|} dt < +\infty \right\}$$

Questo funzionale non é adatto all'applicazione dei metodi diretti del calcolo delle variazioni poiché non é coercivo: non sono compatti i suoi sottolivelli, cioè i sottoinsiemi di  $\Lambda_T$  definiti da

$$\{y(t) \in \Lambda_T, \Phi_T(y(\cdot)) \leq C\}$$

Ad esempio 0 é l'estremo inferiore dei valori assunti dal funzionale, la successione

$$y_n(t) \equiv n \xi \quad \forall t, \quad \xi \in R^3 \quad |\xi| = 1 \quad 1.37$$

é "minimizzante" poiché

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_T(y_n(\cdot)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T}{n} = 0$$

e tuttavia non ha sottosuccessioni convergenti.

Dunque pur essendo positivo,  $\Phi_T$  potrebbe non avere minimi regolari. La mancanza di compattezza rende comunque difficile la ricerca di punti critici, ad esempio di minimi relativi, con metodi variazionali.

Nel caso del problema dei due corpi tutte le soluzioni classiche  $T$  - *periodiche* sono conosciute e quindi sono noti tutti i punti critici di  $\Phi_T$  in cui questo funzionale é differenziabile; si può così verificare ad esempio che non vi sono minimi relativi (regolari).

Diamo una dimostrazione di questo fatto, come esemplificazione dell'uso del calcolo delle variazioni e anche per fornire alcuni elementi per la descrizione dei punti critici di  $\Phi_T$ .

#### Lemma 1.2

Il funzionale  $\Phi_T$  non ha minimi relativi regolari

#### Dimostrazione

Utilizzando la forma esplicita del funzionale, si può dare in forma semplice il suo hessiano in un punto critico in cui é differenziabile e dimostrare che il funzionale é di classe  $C^2$  in corrispondenza a tutti i suoi punti critici regolari.

Se indichiamo con  $y^0(t)$  il punto critico si ottiene

$$\begin{aligned} \langle w, D^2 \Phi_{y^0} w \rangle &= \int_0^T \int_0^T |\dot{w}|^2(t) dt - \int_0^T \frac{1}{|y^0(t)|^3} |w(t)|^2 dt \\ &+ 3 \int_0^T \frac{1}{|y^0(t)|^5} (w(t), y^0(t))^2 dt, \quad w(t) \in \Lambda_T \end{aligned} \quad 1.38$$

E' ora facile verificare che nessuno di questi punti critici é un minimo. Infatti sia  $\Pi$  il piano del moto. Scegliendo

$$w(t) = w^0(t) \equiv \xi \in R^3, \quad \forall t \quad |\xi| = 1, \quad \xi \perp \Pi$$

si ottiene

$$\langle w^0, D^2 \Phi_{y^0}(\cdot) w^0 \rangle = - \int_0^T \frac{1}{|y^0(t)|^3} dt < 0 \quad \diamond$$

Un modo con cui si può procedere per utilizzare il metodo diretto del calcolo delle variazioni é quello di restringere lo spazio delle funzioni su cui  $\Phi_T$  é definito, prendendo un sottospazio chiuso  $\bar{\Lambda}_T$  di  $\Lambda_T$ .

Indichiamo con  $\Phi_T^r$  il funzionale "ridotto" su questo sottospazio. I sottolivelli di  $\Phi_T^r$  sono per costruzione sottoinsiemi chiusi dei sottolivelli di  $\Phi_T$  e si può cercare di scegliere il sottospazio  $\bar{\Lambda}_T$  in modo che i nuovi sottolivelli siano compatti.

Perché questo procedimento porti a determinare soluzioni (classiche o deboli) del problema dei due corpi (ridotto) è necessario che i punti critici del funzionale  $\Phi_T^r$  siano anche punti critici di  $\Phi_T$  su  $\Lambda_T$ .

Una scelta naturale per  $\bar{\Lambda}_T$  si ottiene notando che le successioni minimizzanti e non convergenti indicate sopra hanno la proprietà che la distanza tra i due corpi cresce indefinitamente mentre l'energia cinetica rimane nulla.

Sarà quindi naturale cercare un sottospazio chiuso di  $\Lambda_T$  nel quale la distanza massima tra i due punti (cioè  $|y|_\infty \equiv \sup_t |y(t)|$ ) sia limitata superiormente da un multiplo della radice quadrata dell'energia cinetica.

Per traiettorie di questo tipo il valore del funzionale cresce oltre ogni limite per traiettorie per le quali la distanza massima diventa molto grande, e ci si può aspettare che i sottolivelli siano compatti.

Un sottoinsieme chiuso di  $\Lambda_T$  che ha questa proprietà è costituito dalla traiettorie, che chiameremo "antiperiodiche", che soddisfano la condizione

$$y(t + T/2) = -y(t) \quad \forall t \quad 1.39$$

Indicheremo con il simbolo  $\Lambda_T^a$  il sottoinsieme chiuso di  $\Lambda_T$  composto dalle funzioni che soddisfano (1.39):

$$\Lambda_T^a \equiv \{y(t) \in \Lambda_T, \quad y(t + T/2) = -y(t) \quad \forall t\}$$

Dal teorema fondamentale del calcolo si ha, per traiettorie che soddisfano (1.39)

$$-y(t) = y(t) + \int_0^{T/2} \dot{y}(t+s) ds$$

e dunque

$$\sup_t |y(t)| \leq 2 \int_0^{T/2} |\dot{y}(s+t)| ds \leq \int_0^T |\dot{y}(s)| ds \leq T^{1/2} [\int_0^T |\dot{y}(s)|^2 ds]^{1/2} \quad 1.40$$

dove abbiamo utilizzato (1.39), la periodicità di  $y(t)$  e la disuguaglianza di Schwartz. La (1.40) è nota come *disuguaglianza di Poincaré*; nel nostro caso essa garantisce che

$$|y|_\infty \rightarrow \infty \Rightarrow \Phi_T(y(\cdot)) \rightarrow \infty$$

e quindi i sottolivelli in  $\Lambda_T^a$  non contengono le successioni minimizzanti e non convergenti discusse precedentemente.

In effetti, per il teorema di Ascoli-Arzelá, la (1.40) garantisce che per ogni valore del parametro  $C$  gli insiemi di funzioni a valore in  $R^3$

$$\{y(t) : \int_0^T |\dot{y}(t)|^2 dt < C\}$$

sono compatti nella topologia delle funzioni continue, e quindi da ogni successione di funzioni continue contenute in questo insieme si può estrarre una sottosuccessione che converge puntualmente.

Indicando con  $\Phi_T^a$  la restrizione di  $\Phi_T$  a  $\Lambda_T^a$  ne deduciamo (ricordare che  $V(y) \geq 0$ ) che i sottolivelli di  $\Phi_T^a$  sono compatti nella topologia delle funzioni continue e quindi che il funzionale  $\Phi_T^a$  può essere studiato con i metodi diretti del calcolo delle variazioni.

Dobbiamo ora verificare che i punti critici di  $\Phi_T^a$  sono anche punti critici di  $\Phi_T$ . Per questo bisogna verificare che

$$y^0(t) \in \Lambda_T^a, \quad (D\Phi_T)_{y^0}(w) = 0 \quad w \in \Lambda_T^a \Rightarrow (D\Phi_T)_{y^0}(w) = 0 \quad w \in \Lambda_T \quad 1.41$$

Nel nostro caso questo è verificato poiché la lagrangiana è invariante per l'applicazione  $y \rightarrow -y$ .

Questo implica che, se  $y^0(t) \in \Lambda_T^a$  e  $\zeta \in \Lambda_T^s$  allora  $D(\Phi_T)_{y^0}(\zeta) = 0$  dove abbiamo posto

$$\Lambda_T^s \equiv \{y(t) \in \Lambda_T : y(t + T/2) = y(t) \quad \forall t\}$$

D'altra parte ogni funzione  $\eta \in \Lambda_T$  può essere scritta (in modo unico) nella forma

$$\eta = w + \zeta, \quad w \in \Lambda_T^a, \quad \zeta \in \Lambda_T^s$$

e questo garantisce che (1.41) è verificata.

Utilizzeremo dunque il funzionale  $\Phi_T^a$  per individuare le soluzioni  $T$ -periodiche del sistema a due corpi. Anche quando aggiungeremo una forza attrattiva più singolare di quella di Newton ci restringeremo a  $\Lambda_T^a$  dopo aver verificato che anche la nuova lagrangiana è invariante per  $y \rightarrow -y$ .

Poiché il funzionale  $\Phi_T^a$  è positivo e continuo, esistono successioni minimizzanti. Per la compattezza dei sottolivelli, passando se necessario a sottosuccessioni, esistono successioni minimizzanti convergenti. Dunque  $\Phi_T^a$  ha almeno un punto di minimo assoluto.

Questo non è però sufficiente per concludere che esiste almeno una soluzione  $T$ -periodica del problema dei due corpi. Infatti il funzionale  $\Phi_T^a$  è continuo ma non differenziabile in tutto il suo dominio di definizione.

Ad esempio esso non è differenziabile in corrispondenza alle soluzioni di collisione: questo può essere verificato senza difficoltà. Se  $x^0(t)$  è una soluzione di collisione, si può calcolare il rapporto incrementale utilizzando il teorema fondamentale del calcolo:

$$\Phi_T^a(x^0(\cdot) + \epsilon w(\cdot)) - \Phi_T^a(x^0(\cdot)) = \int_0^1 ds \frac{d\Phi_T^a(x^0(\cdot) + s\epsilon w(\cdot))}{ds}$$

Il calcolo della derivata può essere effettuato facilmente per ogni valore di  $s$  e di  $t$ . Utilizzando il comportamento asintotico (1.35) e scegliendo  $w \in \Lambda_T^a$  in direzione perpendicolare alla direzione di collisione e a supporto in un piccolo intervallo temporale vicino a  $t = 0$  (così da poter sostituire  $x^0(t)$  con il primo termine nello sviluppo asintotico) si verifica che

$$|\Phi_T^a(x^0(\cdot) + \epsilon w(\cdot)) - \Phi_T^a(x^0(\cdot))| = O(\epsilon^{1/2})$$

così che non esiste il limite del rapporto incrementale. Dunque  $\Phi_T^a$  è continuo ma non differenziabile nel punto  $x^0(t)$ .



A priori dunque il minimo  $\tilde{x}(\cdot)$  di  $\Phi_T^a$  potrebbe essere un punto di non differenziabilità e quindi potrebbe non soddisfare, neppure in senso debole, le equazioni di Lagrange.

Per superare questa difficoltà introdurremo una famiglia di funzionali  $\Phi_T^{a,\epsilon}$  che convergono (in un senso che verrà precisato) a  $\Phi_T^a$  quando  $\epsilon$  tende a zero. Ciascuno di questi funzionali ha la proprietà di essere positivo, coercivo e differenziabile su tutto il dominio di definizione (che è più piccolo del dominio di  $\Phi_T^a$ ).

Ciascuno di essi possiede dunque (almeno) un minimo assoluto.

Considereremo poi una successione  $\{x_\epsilon^0(t)\}$  di tali minimi assoluti e dimostreremo che essa converge puntualmente ad una funzione  $x^0(t)$  che è soluzione  $T$ -periodica (eventualmente debole) del problema a due corpi e punto critico (eventualmente in senso generalizzato) di  $\Phi_T^a$ .

Dimostreremo poi che una soluzione che abbia collisioni non può essere un minimo per  $\Phi_T^a$ . Da qui dedurremo che il punto di minimo corrisponde a una soluzione classica.

#### NOTA 1

Questo è il procedimento che permette di dimostrare l'esistenza di soluzioni periodiche classiche nel problema a  $N$  corpi, anche quando il potenziale differisce da quello Newtoniano per termini additivi che sono funzioni regolari della distanza.. In questo caso più generale, si può procedere senza difficoltà fino alla costruzione di una soluzione debole. La dimostrazione che una soluzione debole non classica non può essere un minimo (e che quindi gli eventuali minimi sono soluzioni classiche) presenta difficoltà nel caso generale perché il comportamento vicino alla collisione può essere più erratico e le collisioni non sono più regolarizzabili (discuteremo brevemente questi punti nel prossimo Capitolo). La dimostrazione con questo metodo dell'esistenza di una soluzione  $T$ -periodica classica è stata fatta solo per  $N = 3$  ed  $N = 4$ . ([D]) ♡

Nel problema dei due corpi ristretto tutte le soluzioni  $T$ -periodiche sono note e quindi in particolare sono note tutte le soluzioni in  $\Lambda_T^a$ .

Tra le soluzioni classiche le sole che soddisfano la condizione di antiperiodicità sono quelle che hanno un'orbita circolare e periodo minimo  $\frac{T}{2n+1}$ ,  $n \in N$ . Dunque i punti critici regolari di  $\Phi_T^a$  formano varietà isomorfa a  $S^3$  (corrispondentemente all'orientazione del piano del moto).

Verificheremo che le soluzioni di periodo minimo  $\frac{T}{2n+1}$ ,  $n \geq 2$  non sono minimi.

Ne segue che nel problema dei due corpi ristretto il funzionale  $\Phi_T^a$  ha un solo minimo regolare, che è isolato (modulo rotazioni e riflessioni).

In  $\Lambda_T^a$  vi sono anche soluzioni deboli del problema a due corpi ristretto, ottenute incollando due o più soluzioni elementari di collisione (limiti di soluzioni regolari) il cui periodo sia un sottomultiplo di  $T$  in modo da garantire che la condizione di  $T/2$ -antiperiodicità sia soddisfatta.

Anche per queste soluzioni si può verificare che non si tratta di minimi del funzionale  $\Phi_T^a$ . Per quanto riguarda le soluzioni  $T$ -periodiche a orbita circolare, esse corrispondono a moti uniformi su circonferenze di raggio

$$r_n = \left( \frac{T}{2n+1} \right)^{2/3} \quad 1.42$$

L'hessiano di  $\Phi_T^a$  assume dunque una forma particolarmente semplice

$$\langle w, D^2 \Phi_{y_n^0}(\cdot) w \rangle = \int \int_0^T |\dot{w}|^2(t) dt - \frac{1}{r_n^3} \int_0^T |w(t)|^2 dt + 3 \frac{1}{r_n^3} \int_0^T (w(t), \hat{y}_n^0(t))^2 dt, \quad 1.43$$

dove

$$y^0 = \cos((2n+1)\pi T^{-1}t) \xi_1 + \operatorname{sen}((2n+1)\pi T^{-1}t) \xi_2$$

con  $\xi_1$  e  $\xi_2$  due versori ortogonali nel piano del moto. Sviluppando  $w(t)$  in serie di Fourier (ricordando che  $w \in \Lambda_T^a$ ) non é difficile porre l'hessiano in forma diagonale e quindi determinarne il numero di autovalori negativi (l'indice). Si verifica cosi' che solo per  $n = 1$  non vi sono autovalori negativi; dunque per  $n \geq 2$  si hanno punti sella. Si può anche verificare che l'indice del punto critico considerato é funzione monotona strettamente crescente di  $n$ .

#### NOTA

Si può notare che il sottospazio corrispondente all'autovalore zero ha sempre dimensione tre. Questo é dovuto al fatto che il funzionale é invariante per rotazioni e per traslazioni nel tempo; i campi vettoriali che descrivono l'evoluzione temporale e le rotazioni sono dunque elementi del sottospazio nullo dell'hessiano. Si tratta di tre vettori indipendenti poiché a ciascun istante  $t_0$  é nullo il campo vettoriale che corrisponde al gruppo a un parametro di rotazione attorno a  $y_n^0(t_0)$ . Se si considera il funzionale come definito sul quoziente di  $\Lambda_T^a$  per il gruppo delle rotazioni e delle traslazioni nel tempo, l'hessiano del funzionale risultante non ha autovalori nulli e i suoi autovalori coincidono con gli autovalori non nulli dell'hessiano di  $\Phi_T^a$ . ♡

### 1.5 ANALISI DEL FUNZIONALE DI TONELLI

Consideriamo ora brevemente, nel caso del problema dei due corpi ridotto, il funzionale di Tonelli che abbiamo introdotto per studiare la struttura delle soluzioni periodiche di energia  $E$  prefissata (nel nostro caso  $E < 0$ ).

Abbiamo notato che questo funzionale non é limitato dal basso, e non può dunque avere minimi assoluti. Questo rimane vero se si considera la sua restrizione a  $\Lambda_T^a$ . Dunque la ricerca dei punti critici non potrà essere fatta come nel caso precedente attraverso successioni minimizzanti.

I punti critici che troveremo saranno *punti sella* e la tecnica che si utilizza per trovarli fa uso del teorema del Passo di Montagna ( $[A, R]$ ). Grosso modo, si tratta della generalizzazione a spazi di dimensione infinita della seguente affermazione: se in  $R^n$  la funzione  $f(z)$  é di classe  $C^2$  e soddisfa

$$f(0) = 0, \quad f(z) > 0 \text{ se } |z| \leq \delta, \quad z \neq 0, \quad f(z^0) < 0$$

dove  $z^0$  é un punto esterno alla palla di centro l'origine e raggio  $\delta$ , allora esiste fuori di questa palla almeno un punto critico  $\bar{z}$  di  $f$ .

Il punto  $\bar{z}$  viene determinato come punto in cui la funzione ha il minimo valore possibile tra quelli che assume sulle curve continue che congiungono l'origine con il punto  $z^0$ .

Si tratta dunque di un procedimento di minimax; nel punto considerato si deve avere  $\nabla f = 0$  poiché, se  $\gamma_0$  é una delle curve su cui viene raggiunto il valore massimo (che deve contenere  $\bar{z}$ ) la derivata di  $f$  nella direzione tangente a  $\gamma_0$  deve annullarsi (poiché  $\bar{z}$  é un punto di massimo sulla curva), mentre la derivata nelle direzioni perpendicolari a  $a_0$  deve annullarsi altrimenti sarebbe possibile trovare un punto  $\hat{z}$  fuori dalla palla di raggio  $\delta$  tale che  $f(\hat{z}) < f(\bar{z})$  e una curva continua (ottenuta per deformazione di  $\gamma_0$  in un intorno di  $\bar{z}$ ) che connette l'origine con  $z^0$  passando per  $\hat{z}$ .

Come in ogni procedimento di minimax per dimostrare l'esistenza del punto critico é necessaria una proprietá di compattezza. Nel caso di spazi di funzioni questa é data da una variante del lemma di Ascoli-Arzelá.

Nel caso del problema dei due corpi ridotto (e in generale per il problema degli  $N$  corpi in un sistema di riferimento in cui il baricentro è fermo nell'origine) questo si ottiene restringendo il funzionale di Tonelli al sottospazio chiuso  $\Lambda_T^a$ . Anche qui questo è lecito perché l'energia cinetica e il potenziale sono invarianti per  $y \rightarrow -y$ .

Non daremo qui la dimostrazione che in questo modo è soddisfatta la condizione di compattezza ([A.R.], [A.C.]). Accenniamo solo al fatto che un modo di procedere è il seguente: abbiamo visto (equazione 1.17) che se  $x^0(t)$  è un punto critico del funzionale di Maupertuis relativo all'energia  $E$  e se l'energia cinetica di  $x^0(t)$  non è identicamente nulla, allora deve essere soddisfatta la relazione

$$\int_0^1 \left[ E + V(x^0(t)) + \frac{1}{2} (x^0(t), \nabla V(x^0(t))) \right] = 0$$

che, nel caso del problema a due corpi ridotto si traduce in

$$\int_0^1 \frac{1}{|y^0(t)|} dt = -2E \quad 1.45$$

È dunque sufficiente cercare un punto critico sulla varietà  $\mathcal{M}$  definita da

$$\mathcal{M} \equiv y \in \Lambda_T^a, \quad \int_0^1 \frac{1}{|y^0(t)|} dt = -2E$$

È allora possibile dimostrare che i punti critici coincidono con i punti critici della restrizione  $\Psi_E^{a,\mathcal{M}}$  di  $\Psi_E^a$  alla varietà  $\mathcal{M}$  e che il punto di sella è un minimo di questo funzionale ristretto.

Si può anche verificare che  $\Psi_E^{a,\mathcal{M}}$  è limitato dal basso e che i suoi sottoinsiemi di livello sono compatti. Dunque esiste almeno un minimo.

Come  $\Phi_T^a$ , anche  $\Psi_E^{a,\mathcal{M}}$  è continuo ma non è differenziabile su tutto il dominio di definizione; in particolare esso non è differenziabile in corrispondenza alle soluzioni di collisione.

Dunque l'esistenza di un minimo (e quindi di un punto critico di tipo sella per  $\Psi_E^a$ ) non implica necessariamente che esso corrisponda a una soluzione, anche se solo in senso debole, del problema dei due corpi.

Anche in questo caso questa difficoltà verrà superata introducendo una famiglia di funzionali modificati, e costruendo una soluzione periodica (possibilmente debole) del problema dei due corpi ridotto, con energia  $E$ , come limite di soluzioni classiche dei problemi modificati.

D'altra parte per il problema dei due corpi tutte le soluzioni periodiche di energia (negativa)  $E$  sono conosciute e quindi è possibile dare una descrizione dettagliata dei punti critici di  $\Psi_E^a$ .

In particolare verificheremo che non vi sono punti di minimo (regolari) e che le soluzioni periodiche la cui orbita è circolare e viene percorsa una sola volta (nel periodo che per orbite circolari compete a energia  $E$ ) sono punti di sella di tipo "passo di montagna" (cioè ottenibili con il procedimento di minimax descritto brevemente qui sopra). Le altre soluzioni periodiche con orbite circolari sono punti critici regolari in corrispondenza ai quali lo hessiano di  $\Psi_E^a$  ha più di un autovalore negativo e le soluzioni di collisione hanno proprietà analoghe: esistono sottospazi affini di dimensione almeno due che contengono il punto critico  $y^0$  considerato e su di essi esiste un intorno  $\mathcal{N}$  di  $y^0$  tale che

$$y \in \mathcal{N} - \{y^0\} \Rightarrow \Psi_E^a(y) < \Psi_E^a(y^0)$$

La traiettoria circolare di periodo minimo é dunque in questo caso l'unico punto critico di tipo "passo di montagna".

Il funzionale di tipo Maupertuis che consideriamo ha, nel caso del problema dei due corpi ridotto, la forma

$$\Psi_E^a(x(\cdot)) \equiv \frac{1}{2} \int_0^1 |\dot{y}|^2 dt \cdot \int_0^1 \left[ \left( E + \frac{1}{|y(t)|} \right) \right] dt \quad 1.47$$

Data la covarianza di scala del problema non vi é perdita di generalitá nel considerare solo il caso  $E = -1/2$ .

Questo corrisponde, per orbite circolari, a periodo minimo  $2\pi$  e, in corrispondenza al periodo minimo, a raggio unitario e momento angolare unitario.

Il funzionale é che consideriamo é quindi

$$\Psi^a(y(\cdot)) \equiv \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} |\dot{y}|^2 dt \cdot \int_0^{2\pi} \left[ \left( -\frac{1}{2} + \frac{1}{|y(t)|} \right) \right] dt \quad 1.48$$

definito su  $\Lambda_{2\pi}^a$ .

I suoi punti critici regolari sono soluzioni  $\pi$ -antiperiodiche del problema dei due corpi ridotto con energia  $-1/2$  e quindi corrispondono ad orbite circolari.

Nel punto critico  $y_n^0$  che corrisponde a moto circolare uniforme con periodo minimo  $\frac{2\pi}{2n+1}$ ,  $n = 0, 1, \dots$  e raggio  $r_n = (2n+1)^{-2/3}$  l'hessiano puó essere valutato esplicitamente, ottenendo (tutte le integrazioni sono sull'intervallo  $[0, 2\pi]$ )

$$\begin{aligned} \langle w, D^2\Psi^a(y^n)w \rangle = & \int |\dot{w}(t)|^2 dt \int \left( -\frac{1}{2} + \frac{1}{r_n} \right) dt - 2 \int (\dot{w}(t), \dot{y}_n^0(t)) dt \int \frac{(y_n^0(t), w(t))}{r_n^3} dt \\ & + \int |\dot{y}_n^0(t)|^2 dt \int \left( -\frac{|w(t)|^2}{r_n^3} + 3 \frac{(w(t), y_n^0(t))}{r_n^5} \right) dt \end{aligned} \quad w \in \quad 1.49$$

Consideriamo in dettaglio il caso  $n = 0$ . Vogliamo dimostare che si tratta di un punto critico di tipo passo di montagna, cioé l'hessiano ha un solo autovalore negativo, e vogliamo determinare l'autofunzione associata all'autovalore negativo.

Posto

$$w(t) = \lambda y_0^0(t), \quad \lambda \neq 0$$

cosi' che

$$(w(t), y_0^0(t)) = \lambda |y_0^0(t)|^2 = \lambda, \quad (\dot{w}(t), \dot{y}_0^0(t)) = \lambda |\dot{y}_0^0(t)|^2 = \lambda$$

si deduce

$$\frac{2\pi}{\lambda^2} \langle w, D^2\Psi^a(y_0^0)w \rangle = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{3}{2} - 2 = -\frac{1}{2} < 0$$

Sviluppando  $w$  in serie di Fourier si verifica poi che tutti gli altri autovalori dell'hessiano sono positivi o nulli; il sottospazio associato agli autovalori nulli ha anche qui dimensione tre, come conseguenza dell'invarianza di  $\Psi_E$  per rotazioni e traslazioni nel tempo.

Dunque il sottospazio corrispondente all'autovalore negativo ha dimensione uno ed é sotteso dalla funzione  $y_0^0(t)$ .

E' inoltre facile da verificare che questa é precisamente la direzione perpendicolare alla varietá  $\mathcal{M}$  definita in (1.45); dunque  $\Psi^{a, \mathcal{M}}$  ha un minimo in  $y_0^0$ .

Nello stesso modo si può verificare che in corrispondenza agli altri punti critici  $y_n^0$  l'hessiano ha più di un autovalore negativo, e che il numero di autovalori negativi e una funzione strettamente crescente di  $n$ .

### 1.6 AGGIUNTA DI UNA FORZA ATTRATTIVA PIU' SINGOLARE

Abbiamo notato che il funzionale  $\Phi_T^a$  pur essendo coercivo, non è adatto allo studio delle soluzioni (anche deboli) del problema dei due corpi ridotto perché esso è continuo ma non differenziabile sul suo dominio di definizione. I suoi punti critici potrebbero allora essere tutti di tipo generalizzato, e le corrispondenti funzioni potrebbero non soddisfare le equazioni di Newton, neppure in senso debole.

Per ovviare a questo, introduciamo una famiglia di funzionali d'Azione che sono differenziabili sul loro dominio di definizione (che è più piccolo di quello di  $\Phi_T^a$ ).

La difficoltà che incontriamo nello studio di  $\Phi_T^a$  è dovuta al fatto che questo funzionale è limitato ma non differenziabile sulle soluzioni di collisione. Questo dipende dal fatto che il potenziale newtoniano  $\frac{1}{|y|}$  è relativamente poco singolare in  $y = 0$  così che esistono funzioni  $y(t)$  che soddisfano

$$\int_0^T |\dot{y}(t)|^2 dt < +\infty, \quad \int_0^T \frac{1}{|y(t)|} dt < +\infty \quad 1.50$$

In particolare questo avviene se  $y(t)$  è regolare per  $t \neq t_0$  e in un intorno di  $t_0$  ha un comportamento del tipo  $|t - t_0|^{\frac{2}{3}}$  così che il potenziale coulombiano ha come funzione lungo la traiettoria una singolarità di ordine  $2/3$ .

Convorrà dunque introdurre un potenziale ausiliario più singolare; d'altra parte vogliamo che il funzionale resti limitato dal basso (così da poter iniziare una ricerca del minimo) e quindi il potenziale deve essere positivo.

Convien anche richiedere che questo potenziale si funzioni solo di  $|y|$  così da mantenere l'invarianza della lagrangiana per riflessione. Questo implica che la forza che aggiungiamo sia una forza centrale *attrattiva* e più singolare della forza newtoniana.

Poiché  $|t|^\alpha$  ha (localmente) derivata a quadrato integrabile se  $\alpha > 1/2$  si deduce che il potenziale che aggiungiamo deve avere una singolarità del tipo  $|y|^{-\beta}$  con  $\beta \geq 2$ .

Sceghieremo  $\beta = 2$ . Il vantaggio di questa scelta consiste nel fatto che questa è anche, a parte il segno, la singolarità del potenziale della forza centrifuga, e quindi nelle equazioni scritte in coordinate polari la modificazione introdotta consiste solo in una ridefinizione del momento angolare. Le soluzioni saranno ancora tutte descrivibili in forma esplicita. Per un generico dato iniziale con energia negativa l'orbita non sarà chiusa, ma sarà descrivibile come un'ellisse che precede. Saranno ancora note quindi tutte le soluzioni periodiche, sia a periodo fissato che a energia fissata e questo permette di dare una descrizione accurata dei punti critici dei funzionali modificati, e di studiare in dettaglio la geometria del limite. Questo procedimento, di aggiungere una forza attrattiva sufficientemente intensa (strong force) e considerare il limite in cui questa forza aggiuntiva tende a zero, può essere eseguito anche nel caso generale del problema a  $N$  corpi, ma in questo caso la struttura topologica dei funzionali considerati è poco nota, e non è possibile seguire gli aspetti geometrici della convergenza (che si può ancora dimostrare per via analitica ([A.C.])).

Sceghiamo ancora un sistema di riferimento in cui in baricentro è fermo nell'origine (problema ridotto).

La lagrangiana dipende ora da un parametro  $\epsilon$

$$L_\epsilon(y, \dot{y}) = \frac{1}{2} |\dot{y}|^2 + \frac{1}{|y|} + \frac{\epsilon}{2} \frac{1}{|y|^2}, \quad y \in R^3, \quad \epsilon > 0$$

Le corrispondenti equazioni sono

$$\ddot{y} = -\frac{1}{|y|^3}y - \epsilon \frac{1}{|y|^4}y, \quad y \in R^3 \quad 1.51$$

e il funzionale d'Azione hamiltoniano é

$$\Phi_T^\epsilon \equiv \int_0^T \left[ \frac{1}{2} \dot{y}^2 + \frac{1}{|y(t)|} + \frac{\epsilon}{2} \frac{1}{|y(t)|^2} \right] dt$$

Il parametro  $\epsilon$  sará considerato piccolo (sebbene la descrizione completa del sistema non dipenda dal valore numerico di  $\epsilon$  purché sia positivo); saremo poi interessati al limite di una successione di soluzioni di (1.51) quando  $\epsilon \rightarrow 0$ .

Se il momento angolare  $j$  é nullo, il moto é direzionale e porta a una collisione in un tempo finito.

Un semplice argomento di scala mostra che, se  $\epsilon > 0$ , il comportamento asintotico vicino al tempo di collisione (che definiamo essere 0) é

$$y(t) \simeq |t|$$

Dunque  $|y(t)|^{-1}$  non é integrabile; ne concludiamo che le traiettorie periodiche che ammettono una collisione non sono nel dominio di definizione di  $\Phi_T^\epsilon$  per ogni  $\epsilon > 0$ .

Se una funzione ha derivata a quadrato integrabile e ha uno zero, il suo inverso non può essere a quadrato integrabile. Ne segue che per ogni  $\epsilon > 0$  si ha  $\Phi_T^\epsilon(y(\cdot)) = +\infty$  se esiste  $t_0$  per cui  $y(t_0) = 0$ .

D'altra parte, una funzione periodica la cui derivata ha quadrato integrabile é assolutamente continua, e quindi se non si annulla mai esiste una costante positiva  $C$  tale che  $\inf_t |y(t)| \geq C$ . In corrispondenza a queste funzioni il funzionale  $\Phi_T^\epsilon$  é di classe  $C^2$  (in effetti,  $C^\infty$ ) per ogni  $\epsilon > 0$ .

Dunque per ogni  $\epsilon > 0$  il funzionale  $\Phi_T^\epsilon$  é di classe  $C^2$  sull'intero dominio di definizione.

#### NOTA

Si noti che l'aver aggiunto una forza attrattiva *piú singolare della forza di Newton* ha portato, dal punto di vista del metodo diretto del calcolo delle variazioni, a un funzionale con caratteristiche *migliori* (anche se il suo dominio di definizione é piú ristretto). ♡

Se  $j \neq 0$  il moto ha luogo in un piano (il piano perpendicolare a  $j$ ).

La legge di conservazione del momento angolare é

$$r^2 \dot{\theta} = j \quad 1.52$$

e conseguentemente la legge di conservazione dell'eneriga diventa

$$E = \frac{\dot{r}^2}{2} - \frac{1}{r(t)} + \frac{j^2 - \epsilon}{r^2} \quad f(j, \epsilon) \equiv \frac{\sqrt{j^2 - \epsilon}}{j}$$

La lagrangiana che descrive il moto radiale é dunque

$$L(r, \dot{r}) = \frac{\dot{r}^2}{2} + \frac{1}{r(t)} - \frac{j^2 - \epsilon}{r^2} \quad 1.53$$

Il corrispondente moto é asintotico all'origine se  $\epsilon \geq j^2$  (la forza centrifuga é dominata dalla forza attrattiva che abbiamo aggiunto). Poiché siamo interessati al limite  $\epsilon \rightarrow 0$  considereremo solo il caso  $\epsilon < j^2$ .

Ponendo

$$\phi \equiv f(j, \epsilon)\theta, \quad f(j, \epsilon) \equiv 1 - \sqrt{\frac{\epsilon}{j^2}} \quad 1.54$$

si deduce da (1.52)

$$r^2 \dot{\phi} = \sqrt{j^2 - \epsilon} \quad 1.55$$

Le equazioni (1.53), (1.55) descrivono il problema di Keplero nelle coordiante polari  $r$  e  $\phi$  se si interpreta  $\sqrt{j^2 - \epsilon}$  come momento angolare conservato.

Pertanto tutte le soluzioni di (1.53) (1.55) con energia negativa sono periodiche in  $\phi$  di periodo  $2\pi$  e possono essere descritte dando  $r$  come funzione periodica di  $\phi$  di periodo  $2\pi$ . Allora, per (1.54), se  $r(\phi)$  non é costante,  $r$  é una funzione periodica di  $\theta$  di periodo  $2\pi$  solo se  $f(j, \epsilon)$  é un numero razionale, e il periodo sará  $2\pi$  solo se  $f(j, \epsilon) = 1$ .

Ma per costruzione  $f(j, \epsilon) < 1$  se  $\epsilon > 0$  e  $f(j, \epsilon)$  é una funzione continua e strettamente monotona (decrescente) in  $\epsilon$ . Ne concludiamo che per quasi tutti i dati iniziali la soluzione non é periodica (e quindi non appartiene a  $\Lambda_\tau$  per alcun  $\tau$ ).

Tuttavia tutte le soluzioni sono note esplicitamente, poiché si possono dare espressioni esplicite per  $r(t)$  e  $\psi(t)$  e pertanto anche per  $\theta(t)$ .

Questo permette di dare una descrizione completa della struttura dei punti critici del funzionale  $\Phi_T^\epsilon$ .

Abbiamo notato che, per fissato valore di  $\epsilon$  il moto su orbite differenti da quelle circolari é periodico solo se

$$1 - \frac{\epsilon}{j^2} = \frac{P}{Q}, \quad P, Q \in Z^+, \quad Q > P \quad 1.56$$

e il periodo é  $QT$  se  $T$  é il periodo della soluzione per  $\epsilon = 0$  con gli stessi dati iniziali.

Da (1.56) si deduce

$$j^2 = \frac{\epsilon}{\frac{Q^2}{P^2} - 1} \quad 1.57$$

cosi' che, se  $Q$  e  $P$  sono tenuti fissi, o anche se si pone un limite superiore a  $Q$  (cioé al periodo della successione di soluzioni periodiche considerate al variare di  $\epsilon$ ) si ha

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} j(\epsilon) = 0 \quad 1.58$$

Se si pone un limite superiore al periodo, ogni successione consisterá dunque di traiettorie le cui orbite hanno eccentricitá che tende a uno, e ogni traiettoria limite sará una traiettoria di collisione.

D'altra parte, se si lascia crescere  $Q(\epsilon)$  e si vuole avere una soluzione  $T$ -periodica (e non  $QT$ -periodica) bisogna considerare soluzioni del problema di Keplero che hanno periodo  $\frac{T}{Q}$  e precedono in modo da produrre un'orbita che si chiude dopo  $Q$  rivoluzioni kepleriane. Sappiamo che il diametro di un'orbita kepleriana é proporzionale al periodo (a momento angolare fissato) e che la sua energia é inversamente proporzionale al periodo. Dunque la successione di traiettorie considerate in questo caso ha diametro decrescente, e sia l'energia cinetica che l'energia totale crescono senza limite per  $\epsilon \rightarrow 0$ .

In questo modo si possono studiare in dettaglio i possibili limiti, per  $\epsilon \rightarrow 0$ , di successioni di punti critici di  $\Phi_T^\epsilon$ .

E' particolarmente interessante lo studio del limite nel caso in cui si mantengano fissati, quando  $\epsilon \rightarrow 0$ , gli interi  $P$  e  $Q$  in (1.57).

Consideriamo ad esempio il caso  $P = 1$ ,  $Q = 2$ . L'orbita chiusa si ottiene facendo precedere di  $\pi$  in una oscillazione totale una traiettoria kepleriana di periodo minimo  $T/2$ .

Poiché per costruzione  $j^2 = 2\epsilon$  quando  $\epsilon \rightarrow 0$  le orbite kepleriane hanno eccentricità crescente e nel limite convergono a orbite di collisione. Tenuto conto della precessione, l'orbita limite é descritta, in coordinate polari, da

$$\theta(t) = 0, \quad t \in [0, \frac{T}{4}) \cup [\frac{3T}{4}, T] \quad \theta(t) = \pi \quad t \in [\frac{T}{4}, \frac{3T}{4})$$

(la variabile radiale esegue due volte un moto di collisione con periodo  $T/2$ ).

Si tratta di una traiettoria di collisione in  $\Lambda_T^a$  con periodo minimo  $T$ ; si noti che questa traiettoria di collisione viene ottenuta come limite per  $\epsilon \rightarrow 0$  di soluzioni classiche dei problemi modificati, *ma non può essere ottenuta come limite di soluzioni classiche del problema dei due corpi.*

Non analizzeremo ulteriormente il problema di quali siano le soluzioni deboli che possono essere ottenute in questo modo, scegliendo opportunamente i numeri  $P$  e  $Q$ . Studieremo invece la convergenza dei minimi.

Come nel caso  $\epsilon = 0$  il funzionale  $\Phi_T^\epsilon$  non é coercivo; la successione utilizzata per  $\epsilon = 0$  costituisce un controesempio anche per  $\epsilon > 0$ . Convien dunque restringere il funzionale a  $\Lambda_T^a$ ; questo é legittimo anche per  $\epsilon \neq 0$  poiché il potenziale aggiunto é stato scelto simmetrico.

Per ogni  $\epsilon > 0$  il funzionale risultante é coercivo, limitato dal basso e di classe  $C^2$  sull'intero dominio di definizione. Dunque ammette (almeno) un minimo. Poiché tutti i punti critici sono regolari e corrispondono a soluzioni  $T$ -periodiche di (1.51), e poiché tutte le soluzioni di (1.51) in  $\Lambda_T^a$  sono note, si può anche per  $\epsilon > 0$  determinare esplicitamente la traiettoria che corrisponde al minimo.

Le traiettorie circolari di periodo minimo  $\frac{T}{2n+1}$ ,  $n \geq 0$  sono tutte elementi di  $\Lambda_T^a$ . L'hessiano di  $\Phi_T^{\epsilon, a}$  può essere diagonalizzato esplicitamente, come nel caso  $\epsilon = 0$ , e si vede che esso é non negativo solo per  $n = 0$  (e ha un autovalore nullo con molteplicitá tre dovuto alle simmetrie che abbiamo discusso nel caso  $\epsilon = 0$ ). Dunque tra le soluzioni a orbita circolare solo quella di periodo minimo  $T$  corrisponde a un minimo di  $\Phi_T^{\epsilon, a}$ .

Vi sono ora altre soluzioni in  $\Lambda_T^a$  che corrispondono a orbite ellittiche che precedono in modo opportuno. Si può dimostrare, utilizzando il fatto che il moto é piano, che nessuna di queste soluzioni corrisponde a minimi di  $\Phi_T^{\epsilon, a}$ .

Infine, vi sono soluzioni di collisione, ma anche di queste si può dimostrare che non corrispondono a minimi.

Dunque la successione di minimi per i funzionali  $\Phi_T^{\epsilon, a}$  é una successione di orbite circolari, con raggio che converge quando  $\epsilon \rightarrow 0$  al raggio dell'orbita circolare di periodo  $T$  del problema dei due corpi.

Poiché la forza che é stata aggiunta é regolare a distanza finita dall'origine, le successioni di minimi considerati converge alla soluzione periodica di periodo  $T$  per  $\epsilon = 0$  e dunque al minimo del funzionale  $\Phi_T^a$ .

Il fatto che un'opportuna successione di minimi dei funzionali modificati converga ad un minimo di  $\Phi_T^a$ , eventualmente estraendo sottosuccessioni, é un risultato generale ([B,R])



valido per sistemi a  $N$  corpi. Quello che abbiamo verificato nel problema dei due corpi é che non é necessario estrarre sottosuccessioni e soprattutto che il minimo ottenuto nel limite corrisponde ad una soluzione *classica* (nel caso generale si può solo dedurre che il limite é una soluzione debole).

Terminiamo questo Capitolo discutendo brevemente l'introduzione dei funzionali modificati e il limite  $\epsilon \rightarrow 0$  nel caso del funzionale di Tonelli. L'introduzione del potenziale  $\frac{\epsilon}{|y^2|}$  porta ora a considerare i funzionali

$$\Psi_E^\epsilon \equiv \int_0^1 \Theta(\dot{y}(t)) dt \cdot \int_0^T \left( E + \frac{1}{|y(t)|} + \frac{1}{2\epsilon} \frac{1}{|y(t)|^2} \right) dt \quad 1.59$$

Le soluzioni a orbita circolare di (1.51) con energia (negativa)  $E$  sono ancora (dopo aver riscalato il tempo) punti critici di questi funzionali.

Se  $y_\epsilon^0$  sono queste soluzioni e  $r_\epsilon^0$  sono i loro raggi, é facile verificare che per ogni  $E < 0$  il raggio é una funzione continua (in effetti, analitica) di  $\epsilon$  e che  $y_\epsilon^0(t)$  é continua (anzi, analitica) in  $\epsilon$  nella topologia di  $H^1((0, T), R^3)$ .

Si deduce da questo che i funzionali  $\Psi_E^\epsilon$  convergono uniformemente in un intorno di  $y_0^0$ . E' inoltre possibile dimostrare che se il funzionale  $\Psi_\epsilon^0$  é differenziabile in  $y_0^0$  la successione di funzionali  $\Psi_E^\epsilon$  convergono insieme ai loro differenziali in un intorno di  $y_0^0$  e che la successione di punti critici  $y_\epsilon^0$  converge al punto critico  $y_0^0$  di  $\Psi_E$ .

Per ogni  $\epsilon > 0$  le soluzioni a orbita circolare e periodo minimo sono punti di tipo passo di montagna dei rispettivi funzionali (la dimostrazione non presenta differenze essenziali da quella data nel caso  $\epsilon = 0$ ) e convergono al punto sella del funzionale limite.

I punti sella considerati sono anche minimi dei funzionali  $\Psi_E^\epsilon$  ristretti alle varietà

$$\mathcal{M}^\epsilon \equiv \{y(t) \in \Lambda_{2\pi}^a \mid 0 = E + \int_0^1 [V_\epsilon y(t) + \frac{1}{2}(y(t), \nabla V_\epsilon(y(t)))] dt\}$$

dove

$$V_\epsilon(y) \equiv \frac{1}{|y|} + \frac{\epsilon}{|y|^2}$$

Si può verificare che, in un intorno del punto critico  $y_0^0$  le varietà  $\mathcal{M}^\epsilon$  convergono alla varietà  $\mathcal{M}$  ottenuta ponendo  $\epsilon = 0$  e che la successione di funzioni  $y_\epsilon^0$  corrispondenti ai minimi convergono puntualmente (e uniformemente) alla funzione  $y_0^0$  che corrisponde al minimo del funzionale  $\Psi_E^0$  ristretto a  $\mathcal{M}$ .

### BIBLIOGRAFIA cap 1

- [A.C.] *A. Ambrosetti, V. Coti-Zelati* Periodic solutions of singular Lagrangian systems Birkhauser 1993
- [D] *G.F. Dell'Antonio* Contemporary Mathematics 1996, eds. Vignoli, Matzeu
- [L.C.] *T. Levi-Civita* Lezioni di Meccanica Razionale Zanichelli Bologna 1991
- [M] *J. Moser* Stable and random motions in Hamiltonian systems Princetn U. Press 1973
- [R] *P. Rabinowitz* Minimax methods in critical point theory ed. AMS Providence 1986



## 2. OTTICA GEOMETRICA E STRUTTURE SIMPLETTICHE

### 2.1 Introduzione

### 2.2 Ottica Gaussiana

### 2.3 Funzione Generatrice (Eiconale)

### 2.4 Funzione caratteristica e principio di Fermat

### 2.5 Ottica geometrica non lineare

### 2.6 Funzioni caratteristica e ottica non lineare

### 2.7 Aberrazioni

### 2.1 INTRODUZIONE

In questo Capitolo discuteremo brevemente la relazione tra strutture simplettiche ed ottica geometrica, in particolare la stretta relazione tra il principio di Fermat e il principio variazionale di Hamilton. Questo ha un notevole interesse storico; infatti lo sviluppo della teoria hamiltoniana e delle trasformazioni simplettiche, con le loro applicazioni in meccanica, ha inizio con le ricerche di Hamilton in ottica geometrica. In questo ambito é stata formulata per la prima volta la teoria delle trasformazioni simplettiche e delle loro funzioni generatrici.

Ricordiamo che l'ottica geometrica é una teoria di tipo "corpuscolare", che descrive la propagazione della luce mediante traiettorie in  $R^3$  che sono determinate dalle proprietá ottiche dei mezzi attraversati (indice di rifrazione) e dalle leggi di riflessione e rifrazione sulle superfici di discontinuitá (superfici ottiche).

E' noto che l'ottica geometrica puó essere riguardata come il limite dell'ottica ondulatoria (onde elettromagnetiche) nel limite in cui la lunghezza d'onda é molto piú piccola delle dimensioni caratteristiche dei mezzi ottici attraversati. Non discuteremo qui questo aspetto ([G.S.]).

Considereremo solo il caso in cui i mezzi attraversati dalla luce sono omogenei. In questo caso, l'ottica geometrica é fondata su due leggi:

1<sup>0</sup>: *All'interno di ciascun mezzo omogeneo, la luce si propaga secondo linee rette.*

2<sup>0</sup>: *Nel passaggio da un mezzo all'altro la direzione di propagazione varia secondo le leggi di Snell.*

Ci limiteremo a considerare il caso in cui vi é un "asse ottico"  $\Gamma$  che attraversa tutti i mezzi ottici considerati (caso tipico é il caso di una successioni di lenti con un asse in comune). Faremo anche l'ipotesi che tutti i raggi ottici considerati formino un angolo piccolo con una parallela all'asse ottico. In questo caso i raggi ottici possono essere parametrizzati mediante  $\Gamma$ .

Piú precisamente, sia  $s$  una coordinata su  $\Gamma$ , e indichiamo con  $\Pi_s$  il piano perpendicolare a  $\Gamma$  passante per il punto di coordinata  $s$ . Per un generico raggio ottico, siano  $q(s) \equiv \{q_1(s), q_2(s)\}$  le coordinate cartesiane su  $\Pi_s$  del punto in cui il raggio interseca  $\Pi_s$ . Conveniamo di scegliere come origine il punto in cui l'asse ottico interseca  $\Pi_s$  e di scegliere su  $\Pi_s$  per ciascun valore di  $s$  assi cartesiani ottenuti per trasporto parallelo.

Se  $q(s)$  corrisponde a un punto interno a un mezzo ottico, indicheremo con  $v(s) \in S^2$  la direzione del raggio ottico nel punto di coordinate  $q(s)$ . Se  $q(s)$  giace su di una superficie di discontinuitá, indicheremo con  $v_+(s)$  (rispettivamente  $v_-$ ) la direzione di provenienza (rispettivamente la direzione di uscita).

*In ottica geometrica il parametro  $s$  gioca il ruolo che ha il tempo in meccanica.*

La relazione tra direzione di incidenza e direzione di uscita della luce da un mezzo ottico (ad esempio un sistema di lenti) é descritta in modo semplice nell'approssimazione lineare, in cui gli angoli sono "piccoli" e le variazioni sono considerate solo all'ordine piú basso. La soluzione di problemi piú realistici (ad esempio l'aberrazione della luce in una lente sottile) si può ottenere partendo dall'approssimazione lineare e introducendo opportune correzioni per tener conto della nonlinearitá.

Tuttavia i calcoli diventano subito laboriosi, soprattutto perché é necessario verificare che equazioni cosí modificate soddisfino

Si ottiene una notevole semplificazione se si utilizza un algoritmo che garantisce automaticamente la compatibilitá con la legge di Snell. Hamilton notó che questo avveniva se la variazione di direzione nel passaggio da un mezzo ottico all'altro viene ottenuta (*generata*) mediante una funzione (che Hamilton chiamó funzione *caratteristica locale*).

Nell'approssimazione lineare (che definiremo in seguito) questa funzione può essere facilmente determinata e risulta essere un polinomio di secondo grado. Le modificazioni dovute alla nonlinearitá del problema si traducono allora nella pratica nell'utilizzazione polinomi di grado superiore al secondo.

Nel seguito di questo Capitolo vedremo che il metodo di calcolo elaborato da Hamilton per l'ottica geometrica é molto efficace e permette di rendere conto in modo semplice di molti fenomeni di aberrazione.

Vedremo anche che vi é una relazione stretta tra questo metodo e il principio di Fermat (i raggi luminosi seguono traiettorie di minimo cammino ottico). In particolare vedremo che la funzione caratteristica utilizzata per determinare il cammino del raggio ottico tra due valori  $s_1$  ed  $s_2$  del parametro ottico differisce dalla lunghezza ottica di questo cammino solo per il termine additivo  $s_2 - s_1$ .

L'efficacia del metodo trovato, e l'analogia tra il principio di Fermat e il principio di Maupertuis in Meccanica Newtoniana, spinse Hamilton ad applicare lo stesso metodo a problemi di Meccanica Celeste, introducendo anche qui il metodo delle funzioni generatrici e quello che é ora conosciuto come metodo di Hamilton-Jacobi. Per analogia con la relazione tra funzione generatrice e lunghezza ottica la prima funzione generatrice costruita da Hamilton era l'integrale della Lagrangiana lungo le soluzioni delle equazioni del moto; questo procedimento di costruzione é di notevole interesse storico, sebbene sia circolare (la funzione generatrice viene impiegata per determinare la soluzione delle equazioni del moto, ma per la sua determinazione é necessario conoscere tali soluzioni). Queste ricerche portarono Hamilton a sottolineare il ruolo importante giocato in entrambe le teorie da una forma quadratica antisimmetrica (che nell'ottica geometrica é una matrice e in Meccanica hamiltoniana é la due-forma simplettica sul fibrato tangente allo spazio delle configurazioni) e dalle trasformazioni che lasciano invariante questa forma quadratica (le leggi di Snell di variazione per rifrazione della direzione del raggio di luce in ottica geometrica e l'evoluzione del sistema secondo le leggi di Newton in Meccanica hamiltoniana).

In questo capitolo tratteremo brevemente, dal punto di vista hamiltoniano, l'ottica lineare per mezzi isotropi e faremo un cenno alla teoria delle aberrazioni, cioè delle modificazioni dovute alla nonlinearitá.

Una trattazione piú estesa si trova in ([G.S.]) e in testi di ottica lineare. Una trattazione particolarmente esauriente si trova in ([B]).

## 2.2 OTTICA GAUSSIANA

Per definizione, in ottica lineare nel calcolo della relazione tra direzione incidente e direzione rifratta si trascurano i termini superiori al primo nell'angolo di incidenza. In questa approssimazione la relazione é dunque descritta da una matrice.

Per la consistenza dell'approssimazione é necessario che il piano tangente alla superficie ottica sia approssimativamente perpendicolare all'asse ottico (in caso contrario l'angolo di rifrazione differirebbe da quello di incidenza per una quantità che non é di ordine uno nell'angolo di incidenza).

All'ordine considerato ogni superficie ottica puó essere allora identificata con un parabolide (non necessariamente di rotazione) il cui asse é l'asse ottico del sistema.

Senza perdita di generalitá, assumeremo che l'intero sistema ottico sia contenuto tra i piani  $\Pi_0$  e  $\Pi_1$  e che tutti i raggi ottici considerati siano contenuti in un cilindro di raggio  $\epsilon$  avente come asse l'asse ottico. Assumiamo anche che le superfici che delimitano i mezzi omogenei non si intersechino all'interno di questo cilindro (approssimazione delle lenti sottili)

L'ottica Gaussiana é una semplificazione dell'ottica lineare, ottenuta assumendo che i raggi ottici in esame stiano tutti nello stesso piano  $\Pi$  (che contiene l'asse ottico).

In questo caso la direzione di propagazione sará descritta da un angolo, che indicheremo con il simbolo  $\theta$ .

Indicando con  $\gamma_s$  la retta in  $\Pi$  perpendicolare a  $\Gamma$  nel punto di coordinata  $s$ , e con  $q(s) \in R^1$  la coordinata su  $\gamma_s$ , al "tempo"  $s$  il raggio luminoso é individuato da  $q(s), \theta(s)$  (oppure  $\theta_{\pm}(s)$  se vi é intersezione con una superficie di separazione tra mezzi ottici diversi).

Nell'approssimazione dell'ottica gaussiana, le relazioni tra  $\{q(s), \theta(s)\}$  e  $\{q(s'), \theta(s')\}$  e quelle tra  $\{q(s), \theta_{-}(s)\}$  e  $\{q(s), \theta_{+}(s)\}$  sono lineari e quindi date da matrici. La composizione di due trasformazioni corrisponde al prodotto (a sinistra) delle corrispondenti matrici.

L'osservazione principale nella descrizione fatta da Hamilton é che le leggi di trasformazione assumono una forma particolarmente semplice se si utilizzano come variabili le  $q(s)$  e delle nuove coordinate  $p(s)$  definite da

$$p(s) \equiv n(s)\theta(s)$$

dove  $n(s)$  é l'indice di rifrazione del mezzo in cui si trova il punto di coordinate  $q(s)$  (se  $q(s)$  corrisponde a un punto di discontinuitá, sará  $p_{\pm} \equiv n_{\pm}\theta_{\pm}$ ). Notiamo che in ottica gaussiana l'indice di rifrazione é una funzione di punto a valori reali. In ottica lineare esso é una funzione a valori matrici simmetriche di rango due.

La giustificazione per l'utilizzazione delle coordinate  $(q, p)$  é data dal seguente Teorema:

#### TEOREMA 2.1

*Se si utilizzano le coordinate  $\{q, p\}$  le matrici di trasformazione in ottica gaussiana sono simplettiche e ogni matrice simplettica di rango due puó essere realizzata in questo modo.*

#### NOTA 1

Ricordiamo che una matrice  $T$  di rango  $2M$  si dice simplettica se si ha

$$T^t \cdot J \cdot T = J$$

con

2.1

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$$

dove  $I$  e  $0$  sono le matrici identitá e matrice nulla di rango  $M$ .

Per ogni  $M$ , le matrici simplettiche di rango  $2M$  formano gruppo (indicato con  $Sp_M$ ). L'unitá del gruppo é la matrice identitá. Dalla (2.1) segue che se  $T$  é simplettica,  $(\det T)^2 = 1$  e dunque le matrici simplettiche sono invertibili.

La relazione (2.1) può allora essere scritta

$$T^t J = J T^{-1}$$

da cui si deduce che, se  $\xi$  è un autovettore di  $T^t$  all'autovalore  $\lambda$ , allora  $J\xi$  è un autovettore all'autovalore  $\lambda^{-1}$ .

Inoltre  $T$  preserva la struttura complessa che è definita su  $R^{2M}$  dalla matrice  $J$  (notare che  $J^2 = -I$ ) e che permette di identificare  $R^{2M}$  con  $C^M$ . Ne segue che se  $\lambda$  è un'autovalore di  $T$ , allora anche  $\bar{\lambda}$  è un autovalore, con la stessa molteplicità sia algebrica che geometrica. Da questo è facile concludere che una matrice simplettica ha determinante uguale a 1.

♡

#### NOTA 2

Nel caso di rango due si verifica per calcolo diretto che la condizione (2.1) è *equivalente* alla condizione che il determinante di  $T$  sia uguale a uno. Le matrici simplettiche di rango due corrispondono dunque alle trasformazioni lineari del piano che lasciano l'origine invariante e preservano l'area. In particolare, le rotazioni nel piano sono matrici simplettiche. Per matrici di rango  $2M$  con  $M > 1$  non tutte le matrici che hanno determinante uno sono simplettiche. ♡

#### Dimostrazione del Teorema 2.1

Poiché le matrici simplettiche formano gruppo, sarà sufficiente verificare che sono simplettiche le matrici ottiche "elementari", cioè quelle che corrispondono rispettivamente alla propagazione rettilinea in un mezzo omogeneo (in cui non variano né direzione né indice di rifrazione, e quindi non varia la coordinata  $p$ ) e alla variazione dell'angolo di propagazione in un punto di una superficie ottica (in questo caso non vi è variazione della coordinata  $q$ ).

Trattiamo separatamente i due casi.

a)

Se dal punto di coordinate  $(q(s), p(s))$  viene raggiunto il punto  $(q(s'), p(s'))$ , con  $s' > s$  mediante propagazione (rettilinea) in direzione  $\theta(s) = \theta(s') \equiv \theta$  in un mezzo di indice di rifrazione  $n(s) = n(s') \equiv n$  si ha per costruzione, al primo ordine in  $\theta$ ,

$$q(s') = q(s) + (s' - s)\theta(s)$$

Si ha allora

$$q(s') = q(s) + \frac{1}{n}p(s' - s), \quad p(s') = p(s)$$

così che la corrispondente matrice  $T$  è data da

$$T = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{n}(s' - s) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si ha  $\det T = 1$  e dunque la matrice è simplettica.

b)

Consideriamo la rifrazione da una superficie ottica, che nell'approssimazione gaussiana è identificata con una curva  $\sigma$  (intersezione della superficie con il piano  $\pi$ ). Poiché consideriamo solo l'approssimazione lineare, la tangente a  $\sigma$  nel punto di intersezione con

l'asse ottico deve essere perpendicolare a questo asse. Al primo ordine significativo,  $\sigma$  può allora essere identificata con una parabola (o, nel caso limite, con una retta perpendicolare al piano ottico).

La sua equazione é dunque

$$s - s_0 = \frac{1}{2}kq^2$$

dove  $k$  é la curvatura ed  $s_0$  é la coordinata dell'intersezione dell'asse ottico con  $\sigma$ .

Si noti che  $k > 0$  corrisponde a una curva concava nella direzione positiva dell'asse ottico (corrispondente al crescere della coordinata  $s$ ) mentre  $k < 0$  corrisponde ad una curva convessa.

Indichiamo con  $\theta_-(q)$ ,  $\theta_+(q)$  gli angoli che il raggio incidente (rispettivamente uscente) forma con l'asse ottico e con  $i_-$  e  $i_+$  gli angoli che questo stesso raggio forma con la normale a  $\sigma$  nel punto di incidenza.

Indichiamo con  $q$  la coordinata di questo punto sulla perpendicolare  $\Gamma$  all'asse ottico e con  $\xi$  l'angolo che la tangente a  $\sigma$  nel punto di incidenza forma con l'asse ottico.

Nell'approssimazione in cui  $q$  é piccolo, e quindi  $\xi$  é prossimo a  $\frac{\pi}{2}$  si ha, trascurando termini di ordine superiore al primo in  $q$  e in  $\theta$ ,

$$i_- + (\xi - \theta_-) = \frac{\pi}{2} \quad \frac{\pi}{2} - \xi = \frac{ds(q)}{dq} \simeq kq$$

cosi' che

$$i_- \simeq \theta_- + kq \quad 2.2$$

Analogamente si ha

$$i_+ \simeq \theta_+ + kq \quad 2.3$$

La legge di Snell chiede che

$$n_- i_- = n_+ i_+$$

Dunque, a meno di infinitesimi di ordine superiore al primo in  $\theta_{\pm}$

$$p_+ - p_- = (n_- - n_+)kq \quad 2.4$$

Poiché per costruzione

$$q_- = q_+ \equiv q$$

la matrice che realizza la trasformazione é

$$T_r = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -P & 1 \end{pmatrix}, \quad P \equiv (n_+ - n_-)k = \frac{(n_+ - n_-)}{R}$$

dove  $R$  é il raggio di curvatura di  $\sigma$  nel punto  $q_0$ . Si intenderá che il raggio di curvatura é positivo se la curva presenta la sua convessità al raggio incidente, negativo se presenta la sua concavitá.

Anche questa matrice ha determinante uguale ad uno ed é quindi simplettica. Questo termina la dimostrazione del Teorema 2.1.  $\diamond$

NOTA 1

In ottica gaussiana la costante  $P$  che appare nella matrice di rifrazione viene detta "potenza ottica della superficie". Essa é proporzionale alla differenza tra gli indici di rifrazione e alla curvatura della superficie (e quindi inversamente proporzionale al raggio di curvatura). ♡

#### NOTA 2

Consideriamo un sistema ottico costituito da una lente la cui prima faccia abbia curvatura  $R_1^{-1}$  e la seconda faccia abbia curvatura  $R_2^{-1}$ .

La variazione di "momento" nell'attraversamento della prima faccia é data dalla matrice  $T_r$  descritta qui sopra; la variazione nell'attraversamento della seconda faccia é analogamente descritta da

$$T_r^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -P' & 1 \end{pmatrix}, \quad P' = \frac{(n'_+ - n'_-)}{R_2}$$

Si noti che  $n'_- = n_+$  e  $n'_+ = n_-$ .

Se si fa l'ipotesi che la lente sia molto sottile (quindi la matrice che descrive la propagazione rettilinea all'interno della lente puó essere sostituita con la matrice identità) la matrice simplettica che descrive l'effetto della lente (nell'approssimazione gaussiana) é il prodotto delle matrici  $T_r^1$  e  $T_r^2$  ed é quindi data da

$$T_{lente} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -f^{-1} & 1 \end{pmatrix}, \quad f^{-1} \equiv (n_1 - n_0) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad 2.5$$

dove  $n_1$  é l'indice di rifrazione del materiale di cui é composta la lente e  $n_0$  é l'indice di rifrazione del mezzo ambiente.

Se la lente é tale che  $f > 0$ , alla costante  $f$  viene dato il nome di *lunghezza focale* della lente.

Il motivo di questa notazione é il seguente. La matrice di trasformazione  $T$  tra le coordinate di due segmenti ottici, posti a distanza  $f$  uno a sinistra e uno a destra della lente sottile di distanza focale  $f$  ha la forma

$$T = \begin{pmatrix} 1 & f \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & f \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & f \\ -\frac{1}{f} & 0 \end{pmatrix}$$

Se un raggio ottico passa per il primo segmento nel punto di intersezione con l'asse ottico (cioé per  $q_1 = 0$ ) con "momento"  $p_1$ , esso giunge sul secondo segmento nel punto di coordinata  $fp_1$  e con momento nullo, e quindi il raggio uscente é parallelo all'asse ottico.

Infatti si ha

$$\begin{pmatrix} q_2 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & f \\ -\frac{1}{f} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ p_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} fp_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dunque se si pone una sorgente luminosa sull'asse ottico a distanza  $f$  da una lente sottile la cui distanza focale é  $f$ , i raggi ottici emergenti sono paralleli.

Viceversa, se i raggi incidenti sono paralleli all'asse ottico, essi vengono *focalizzati* in un punto sull'asse ottico a distanza  $f$  dalla lente. ♡

Prima di discutere brevemente le proprietà di alcune matrici simplettiche particolari (e quindi di alcune particolari lenti nell'approssimazione gaussiana) dimostriamo che ogni matrice simplettica corrisponde ad un sistema ottico nell'approssimazione gaussiana (piú precisamente ad un sistema di due lenti sottili).



Ricordiamo che chiamiamo "elementari" le matrici simpletliche che vengono associate nell'approssimazione gaussiana rispettivamente alla propagazione rettilinea in un mezzo omogeneo e alla rifrazione attraverso una superficie ottica

**TEOREMA 2.2**

*Ogni matrice simpletlica  $2 \times 2$  può essere scritta come prodotto di al più quattro matrici elementari.*

*Dimostrazione*

Si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+ac & ac+ab+a^2bc \\ a & ab+1 \end{pmatrix} \quad 2.6$$

Questa matrice descrive un sistema ottico composto da una sorgente di luce, da una lente sottile e da uno schermo.

Infatti la matrice di trasformazione è il prodotto delle matrici corrispondenti ad una propagazione rettilinea, ad una rifrazione dovuta ad una lente, e a una seconda propagazione rettilinea.

Sia ora

$$\begin{pmatrix} x & \zeta \\ z & y \end{pmatrix}$$

una matrice simpletlica.

Se  $z \neq 0$  questa coincide con (2.6) pur di scegliere

$$a = z, \quad c = \frac{x-1}{z}, \quad b = \frac{y-1}{z}$$

Dunque al di fuori dal sottospazio

$$\{S : S_{21} = 0\}$$

ogni matrice simpletlica è il prodotto di tre matrici elementari e descrive un sistema ottico costituito da una sorgente, una lente sottile e uno schermo.

La decomposizione ottenuta è unica (tra le decomposizioni nel prodotto di tre matrici elementari nell'ordine indicato).

Se  $z = 0$ , affinché il determinante sia uno deve essere  $y \neq 0$ .

Si ha allora

$$ST_c^2 \equiv \begin{pmatrix} x & \zeta \\ 0 & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & \zeta \\ 0 & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ d & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+d\zeta & \zeta \\ dy & y \end{pmatrix}$$

Poiché  $cy \neq 0$ , pur di scegliere  $d \neq 0$ , la decomposizione precedente garantisce l'esistenza di costanti  $a, b, c$  tali che

$$\begin{pmatrix} x & \zeta \\ 0 & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ d & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esiste quindi una scelta di costanti  $a, b, c, d$  (non unica) tale che

$$\begin{pmatrix} x & \zeta \\ 0 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -d & 1 \end{pmatrix}$$

Questa matrice rappresenta un sistema composto da una sorgente, da due lenti sottili e da uno schermo posto a distanza trascurabile dalla seconda lente.

Questo completa la dimostrazione del Teorema 2.2.  $\diamond$

Diamo ora una versione piú debole del Teorema 2.2, che ha il vantaggio di poter essere facilmente generalizzabile all'ottica lineare (in cui le matrici sono di rango quattro) e anche al caso del gruppo delle matrici simplettiche di rango  $2M$  qualunque.

**LEMMA 2.3**

*Il gruppo delle matrici simplettiche di rango due é generato finitamente dalle matrici simplettiche elementari*

**NOTA**

In questa formulazione, non é indicato il numero minimo di matrici elementari necessarie per costruire, mediante prodotti, una matrice simplettica.

Il risultato descritto nel Teorema 1 puó essere riottenuto notando che le matrici simplettiche elementari corrispondenti a propagazione rettilinea formano gruppo (un sottogruppo a un parametro del gruppo delle matrici simplettiche) e cosí anche le matrici elementari corrispondenti a rifrazione, e utilizzando la forma esplicita del commutatore tra matrici semplici di tipo diverso.  $\heartsuit$

*Dimostrazione del Lemma 2.3*

Dimostriamo che l'algebra di Lie del gruppo simplettico coincide come spazio vettoriale con lo spazio sotteso dalle algebre di Lie relative ai sottogruppi dei due tipi di matrici elementari e dalla tangente ad una famiglia ad un parametro di matrici simplettiche ottenute moltiplicando due matrici elementari di tipo diverso.

Notiamo innanzitutto che l'algebra di Lie del gruppo delle matrici simplettiche coincide come spazio lineare con l'insieme delle matrici  $S$  che soddisfano la condizione

$$S^t J + JS = 0 \tag{2.7}$$

Infatti, se la famiglia di matrici

$$I + \epsilon S + \epsilon^2 G(\epsilon)$$

é simplettica, dove le matrici  $G(\epsilon)$  sono regolari per  $\epsilon$  piccolo, deve valere

$$(I + \epsilon S + \epsilon^2 G(\epsilon))^t J (I + \epsilon S + \epsilon^2 G(\epsilon)) = J, \quad \forall \epsilon$$

Identificando i termini di ordine uno in  $\epsilon$  si ottiene (2.7).

Si puó notare l'analogia con la dimostrazione che l'algebra di Lie del gruppo delle matrici ortogonali é costituita dalle matrici antisimmetriche; il ruolo della matrice  $J$  é ora assunto dalla matrice  $I$ .

Per ogni  $M$  l'algebra di Lie  $sp_M$  del gruppo  $Sp_M$  delle matrici simplettiche di rango  $2M$  é costituita da matrici a traccia nulla. Se  $M = 1$  avere traccia nulla é anche condizione sufficiente per appartenere a  $sp_1$ . Per  $M > 1$  non tutte le matrici a traccia nulla appartengono a  $sp_M$ .

Le matrici elementari che corrispondono alla propagazione rettilinea in un mezzo omogeneo sono della forma

$$T_1(\epsilon) \equiv \begin{pmatrix} 1 & a\epsilon \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e quindi la loro algebra di Lie é lo spazio vettoriale sotteso dalla matrice

$$S_1 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Analogamente l'algebra di Lie del sottogruppo

$$T_2(\epsilon) \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b\epsilon & 1 \end{pmatrix}$$

corrispondente alla rifrazione é lo spazio vettoriale sotteso dalla matrice

$$S_2 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Il commutatore delle matrici  $S_1$  ed  $S_2$  é la matrice

$$S_{1,2} \equiv [S_1, S_2] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Si ha per costruzione

$$T_{1,2}(\epsilon) \equiv T_1(\epsilon)T_2(\epsilon) - T_2(\epsilon)T_1(\epsilon) = \epsilon^2 S_{1,2} + O(\epsilon^3)$$

Dunque la matrice  $S_{1,2}$  é tangente alla famiglia di trasformazioni simplettiche  $T_{1,2}(\epsilon)$ . D'altra parte le matrici  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_{1,2}$  sono linearmente indipendenti, e quindi sottendono uno spazio lineare di dimensione tre. Per costruzione, si tratta di un sottospazio dell'algebra di Lie delle matrici simplettiche di rango due. Ma i due spazi hanno la stessa dimensione (tre), e quindi coincidono. Questo termina la dimostrazione del Lemma 2.3.  $\diamond$

**DEFINIZIONE (sistema telescopico)**

*Un sistema ottico lineare gaussiano é detto telescopico se la matrice simplettica  $T$  che lo rappresenta ha la proprietà  $T_{2,1} = 0$ .*

Il motivo di questa definizione é che un sistema ottico é telescopico precisamente se la direzione di uscita di un raggio luminoso coincide con la direzione di entrata.

Se la matrice ha la forma

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$$

si ha

$$q_f = a q_i + b p_i, \quad p_f = a^{-1} p_i$$

Il fattora  $a$  é il fattore di ingrandimento del sistema.

Un ruolo importante nell'ottica geometrica é giocato dai piani (ottici) *coniugati*.

Ogni piano ottico é individuato dalla sua intersezione con l'asse ottico, e quindi dal valore della coordinata  $s$  che abbiamo utilizzato.

In ottica gaussiana, si considereranno piuttosto i segmenti ottici, intersezione dei piani ottici con il piano  $\pi$  in cui per ipotesi avviene la propagazione.

**DEFINIZIONE:** *segmenti ottici coniugati*

In ottica gaussiana, due segmenti ottici vengono detti coniugati se la matrice  $T$  che connette i dati sul secondo segmento con quelli sul primo ha la proprietà

$$T_{1,2} = 0$$

Si noti che per due segmenti ottici coniugati si ha  $q' = T_{1,1}q$  e quindi il punto di intersezione del raggio ottico con il secondo segmento dipende solo dal punto in cui esso è partito sul primo segmento, e non dalla direzione di partenza.

Ne segue che se sul primo segmento vi è una sorgente luminosa (tutti i raggi ottici partono dallo stesso punto) l'immagine sul secondo segmento sarà un solo punto (l'immagine della sorgente è stata focalizzata).

In particolare, se due segmenti ottici sono coniugati, i raggi ottici non possono essere individuati dando posizione iniziale e posizione finale.

Dalla forma delle matrici simpletliche elementari si deducono inoltre facilmente le equazioni che determinano i piani coniugati.

Consideriamo due piani, situati da parti opposte rispetto ad una lente di distanza focale  $f$ , a distanza  $d_1$  e  $d_2$  rispettivamente (la distanza viene misurata con la coordinata  $s$  e ha segno positivo se il segmento si trova a destra della lente e negativo se si trova a sinistra). La matrice di trasformazione è

$$\begin{pmatrix} 1 & \delta_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \delta_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\delta_2}{f} & \delta_1 + \delta_2 - \frac{\delta_1 \delta_2}{f} \\ -\frac{1}{f} & 1 - \frac{\delta_1}{f} \end{pmatrix}$$

dove

$$\delta_k \equiv \frac{d_k}{n}$$

essendo  $n$  l'indice di rifrazione del mezzo ambiente.

I piani sono coniugati se  $T_{1,2} = 0$  e quindi se

$$\delta_1 + \delta_2 = \frac{\delta_1 \delta_2}{f}$$

o equivalentemente

$$\frac{1}{\delta_1} + \frac{1}{\delta_2} = \frac{1}{f}$$

che è detta *equazione per le lenti sottili*.

Questa equazione può essere risolta per  $\delta_2$  se e solo se  $\delta_1 \neq f$ .

Dunque ogni segmento ottico che sia a distanza dalla lente diversa dalla distanza focale ha un piano coniugato (e uno solo).

Si vede inoltre che per piani coniugati si ha

$$\frac{q_2}{q_1} = 1 - \frac{\delta_2}{f} = -\frac{\delta_1}{\delta_2}$$

Se  $\delta_1$  e  $\delta_2$  hanno lo stesso segno (sorgente e immagine da parti opposte di una lente con distanza focale positiva) si deduce che  $q_2$  e  $q_1$  hanno segno opposto, e quindi l'immagine risulta rovesciata.

### 2.3 FUNZIONE GENERATRICE (Eiconale)

L'interesse della struttura simplettica dell'ottica gaussiana (e dell'ottica geometrica in generale) risiede nel fatto che le trasformazioni

$$(q, p) \rightarrow (q', p')$$

possono essere *generate* da una funzione mediante un procedimento standard. Per studiare l'ottica geometrica in un'approssimazione migliore di quella lineare, come é necessario fare ad esempio se si vuole studiare l'aberrazione delle lenti, é quindi sufficiente determinare con approssimazione migliore la funzione generatrice.

Consideriamo due piani che non sono coniugati.

La legge di trasformazione delle coordinate  $(q, p)$  é data da una matrice simplettica  $T$ , con  $T_{1,2} \neq 0$ .

Le leggi di trasformazione sono

$$q_2 = T_{1,1}q_1 + T_{1,2}p_1, \quad p_2 = T_{2,1}q_1 + T_{2,2}p_1$$

da cui si ottiene, utilizzando il fatto che  $T_{1,2} \neq 0$

$$p_1 = T_{1,2}^{-1}(q_2 - T_{1,1}q_1), \quad p_2 = T_{1,2}^{-1}(T_{2,2}q_2 - q_1)$$

Posto

$$W(q_1, q_2) \equiv \frac{1}{2T_{1,2}}(T_{1,1}q_1^2 + T_{2,2}q_2^2 - 2q_1q_2) \quad 2.8$$

si verifica che

$$p_1 = \frac{-\partial W}{\partial q_1}, \quad p_2 = \frac{\partial W}{\partial q_2}$$

Hamilton chiamó questa funzione *caratteristica puntuale* (poiché essa dipende solo dai punti in cui il raggio luminoso attraversa i segmenti ottici considerati). Nei testi piú recenti di ottica geometrica questa funzione é detta *eiconale*.

Notare che  $W$  é una forma quadratica non degenera, e che ogni forma quadratica non degenera puó essere scritta nella forma (2.8) e costituisce dunque la funzione generatrice puntuale per un sistema ottico nell'approssimazione gaussiana (la conoscenza di  $T_{1,1}$ ,  $T_{2,2}$ ,  $T_{1,2} \neq 0$  e la condizione  $\det T = 1$  determinano completamente la matrice  $T$ ).

Una proprietá importante della funzione generatrice puntuale é la sua *additivitá*.

#### PROPOSIZIONE 2.4

Siano  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$ ,  $\Gamma_3$  tre segmenti ottici, con  $s_3 > s_2 > s_1$ . Supponiamo che nessuna coppia di segmenti sia coniugata.

Siano

$$W_{1,2}(q_1, q_2), \quad W_{2,3}(q_2, q_3)$$

le funzioni generatrici delle trasformazioni di coordinate tra le coppie di segmenti  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  e tra i segmenti  $\Gamma_2$  e  $\Gamma_3$  rispettivamente.

Allora

$$W_{1,3}(q_1, q_3) \equiv W_{1,2}(q_1, q_2(q_1, q_3)) + W_{2,3}(q_2(q_1, q_3), q_3) \quad 2.9$$

é la funzione generatrice puntuale della trasformazione simplettica che mette in relazione i dati su  $\Gamma_3$  con quelli su  $\Gamma_1$ .

**NOTA**

Nella (2.9) si é indicato con  $q_2(q_1, q_3)$  la coordinata dell'intersezione con il segmento  $\Gamma_2$  del raggio ottico determinato da  $q_1$  e  $q_3$  (poiché per ipotesi questi due segmenti non sono coniugati, la conoscenza di  $q_1$  e di  $q_3$  determina completamente il raggio ottico).  $\heartsuit$

**Dimostrazione della Proposizione 2.4**

Per verificare che  $W_{1,3}$  é la funzione generatrice puntuale, notiamo che per ipotesi, essendo  $W_{1,2}$  e  $W_{2,3}$  funzioni generatrici, si ha

$$p_1 = -\frac{\partial W_{1,2}}{\partial q_1}, \quad p_2 = \frac{\partial W_{1,2}}{\partial q_2}, \quad p_2 = -\frac{\partial W_{2,3}}{\partial q_2}$$

Dunque

$$\frac{\partial W_{1,3}}{\partial q_1} = \frac{\partial W_{1,2}}{\partial q_1} + \frac{\partial W_{1,2}}{\partial q_2} \frac{\partial q_2(q_1, q_3)}{\partial q_1} + \frac{\partial W_{2,3}}{\partial q_2} \frac{\partial q_2(q_1, q_3)}{\partial q_1}$$

e, utilizzando (2.9)

$$\frac{\partial W_{1,3}}{\partial q_1} = -p_1$$

Nello stesso modo si dimostra

$$\frac{\partial W_{1,3}}{\partial q_3} = p_3$$

Questo conclude la dimostrazione della Proposizione 2.4.  $\diamond$

Si puó notare che la funzione generatrice é definita a meno di una costante additiva. Vogliamo verificare che, pur di scegliere questa costante in modo opportuno, la funzione  $W_{1,2}(q_1, q_2)$  coincide, nell'approssimazione dell'ottica gaussiana, con la lunghezza ottica del raggio che congiunge il punto di coordinata  $q_1$  sul primo segmento ottico con il punto di coordinata  $q_2$  sul secondo segmento ottico.

Da questa relazione e dal principio di Fermat dedurremo che  $W(q, q')$  soddisfa un principio variazionale. Questo coinciderá con il secondo principio variazionale di Hamilton se si interpreteranno i cammini ottici come moto di un punto materiale.

Per dimostrare che la funzione  $W$  coincide con la lunghezza ottica, a meno di una costante additiva, notiamo che entrambe godono della proprietá additiva (per la lunghezza ottica questo é vero per definizione).

Poiché ogni raggio ottico é rettilineo uniforme a tratti, é allora sufficiente verificare la relazione nel caso della propagazione rettilinea in un mezzo omogeneo.

La lunghezza ottica  $L(\gamma)$  del segmento  $\gamma$  che congiunge i due punti di coordinate  $q_1, q_2$  sui segmenti ottici di coordinata  $s_1$  ed  $s_2$  é per definizione

$$L(\gamma) = n[(s_2 - s_1)^2 + (q_2 - q_1)^2]^{\frac{1}{2}}$$

dove  $n$  é l'indice di rifrazione del mezzo in cui avviene la propagazione.

Nell'approssimazione dell'ottica lineare (e quindi in particolare in quella gaussiana) la differenza  $q_2 - q_1$  é molto piccola in valore assoluto rispetto a  $s_2 - s_1$ .

Sará dunque

$$L(\gamma) \simeq n(s_2 - s_1) + \frac{n}{2} \frac{q_2 - q_1}{s_2 - s_1} = n(s_2 - s_1) + \frac{p}{2}(q_2 - q_1) \quad 2.10$$

dove abbiamo utilizzato le relazioni

$$p = \frac{\theta}{n}, \quad \theta \simeq \text{tang } \theta = \frac{q_2 - q_1}{s_2 - s_1}$$

Per propagazione rettilinea in un mezzo omogeneo, si ha

$$q_2 = q_1 + p_1 d, \quad p_2 = p_1$$

così che la funzione generatrice è

$$W(q_1, q_2) = \frac{1}{2d}(q_1^2 + q_2^2 - 2q_1q_2) = \frac{1}{2d}(q_1 - q_2)^2 \quad 2.11$$

Dunque

$$p_1 = p_2 = \frac{-1}{d}(q_1 - q_2) \quad 2.12$$

e infine

$$W(q_1, q_2) = \frac{1}{2}p_1(q_2 - q_1) \quad 2.13$$

Confrontando con (2.10) si vede che la lunghezza ottica differisce dal valore funzione  $W(q_1, q_2)$  solo per il termine additivo  $n(s_2 - s_1)$ . Nell'approssimazione gaussiana un raggio ottico che connette i punti  $q_1, q_2$  sui segmenti ottici  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  in un mezzo omogeneo di indice di rifrazione  $n$  ha lunghezza ottica

$$L(\gamma) = \frac{1}{2(s_2 - s_1)}(q_1 - q_2)^2 + n(s_2 - s_1) \quad 2.14$$

#### 2.4 FUNZIONE CARATTERISTICA E PRINCIPIO DI FERMAT IN OTTICA GAUSSIANA

Verifichiamo ora che le leggi di propagazione della luce in ottica gaussiana ottenute mediante la funzione caratteristica sono equivalenti a quelle che si ottengono dalla legge di Snell e dal principio di Fermat.

Consideriamo due segmenti ottici situati da lati opposti rispetto ad una curva  $\sigma$  di separazione tra due mezzi ottici, di equazione

$$s = \frac{1}{2}kq^2$$

Scegliamo l'origine delle coordinate  $s$  nel punto in cui  $\sigma$  interseca l'asse ottico.

Consideriamo due punti  $P_1$  e  $P_2$  sull'asse ottico, e siano  $q_1$  e  $q_2$  le loro coordinate.

Siano  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  i segmenti ottici che passano rispettivamente per  $P_1$  e per  $P_2$  e si intersecano sulla curva  $\sigma$  in un punto  $B$ .

Vogliamo dimostrare che la traiettoria seguita dal raggio ottico, come descritta mediante il formalismo della funzione caratteristica, è la traiettoria che rende stazionaria la lunghezza ottica.

Conviene parametrizzare i due cammini ottici considerati mediante la coordinata  $q$  del punto di intersezione con la verticale  $h$  all'asse ottico nel vertice della parabola.

Assumiamo che i segmenti ottici su cui si trovano  $P_1$  e  $P_2$  non siano coniugati e indichiamo con  $A$  e  $C$  rispettivamente le intersezioni con  $h$  rispettivamente della retta definita dal segmento  $P_1 B$  (rispettivamente  $P_2 B$ ).

Per ipotesi gli angoli che queste rette formano con l'asse ottico sono molto piccoli. Le lunghezze dei segmenti  $A B$  e  $C B$  coincidono dunque nell'approssimazione lineare, e coincidono con la distanza  $\epsilon(q)$  di  $B$  da  $h$ .

Si ha

$$\epsilon(q) = \frac{k}{2}q^2 + O(q^3) \quad 2.15$$

Dette  $d_1$  e  $d_2$  le distanze tra  $h$  e  $\gamma_1$  e tra  $\gamma_2$  e  $h$ , il quadrato della lunghezza ottica del cammino considerato é, tenuto conto di (2.14) e dell'additivitá della lunghezza ottica

$$L(q) = \frac{1}{d_1}(q - q_1)^2 + \frac{1}{d_2}(q_2 - q')^2 + \epsilon(q)$$

dove  $q'$  é la coordinata del punto  $C$  ed  $\epsilon(q)$  é l'errore che si compie nella sostituzione della lunghezza del cammino ottico  $AB$  (che ha luogo nel mezzo di indice di rifrazione  $n_1$ ) con la lunghezza del cammino ottico  $BC$  considerato come avente luogo nel mezzo di indice di rifrazione  $n_2$ .

Facendo uso di (2.13) e trascurando i termini di ordine superiore al secondo in  $q$  (coerentemente al fatto che si é nell'approssimazione lineare, e quindi  $q$  é molto piccolo) si ha

$$L(q) = \frac{1}{d_1}(q - q_1)^2 + \frac{1}{d_2}(q_2 - q)^2 + \frac{1}{2}(n_1 - n_2)kq^2 \quad 2.16$$

Il cammino ottico effettivamente realizzato é, in accordo con il Principio di Fermat, quello che soddisfa

$$\frac{dL(q)}{dq} = 0$$

Dunque nell'approssimazione considerata il principio di Fermat prende la forma

$$\frac{1}{d_1}(q - q_1) + \frac{1}{d_2}(q_2 - q) + (n_1 - n_2)kq = 0 \quad 2.17$$

Ricordando che, nell'approssimazione considerata, il metodo della funzione caratteristica dá (cfr. 2.12)

$$p_1 = \frac{1}{d_1}(q - q_1), \quad p_2 = \frac{1}{d_2}(q_2 - q) \quad 2.18$$

si ottiene infine la condizione

$$p_2 = p_1 + (n_1 - n_2)kq \quad 2.19$$

che é, nell'approssimazione lineare, la legge di Snell. Viceversa, data la descrizione della propagazione del raggio ottico mediante l'uso della funzione caratteristica (che implica la legge di Snell) si vede da (2.18) e (2.19) che vale (2.17) ed é quindi soddisfatto il principio di Fermat.

NOTA



La relazione tra principio di Fermat e metodo della funzione caratteristica é resa in modo piú sintetico se si utilizza la relazione tra funzione caratteristica e lunghezza del cammino ottico.

Da (2.10), (2.11), nell'approssimazione lineare

$$L(q_1, q) = W(q_1, q) + n_1(s - s_1), \quad L(q, q_2) = W(q, q_2) + n_2(s_2 - s)$$

Per la proprietá additiva del cammino ottico si ha

$$L(q_1, q, q_2) = W(q_1, q) + W(q, q_2) + s(n_1 - n_2) + n_2 s_2 - n_1 s_1$$

e dunque, tenuto conto della dipendenza di  $s$  da  $q$

$$\frac{dL}{dq} = \frac{dW(q_1, q)}{dq} + \frac{dW(q, q_2)}{dq} + (n_1 - n_2)kq \quad 2.20$$

Se si pone

$$p_- \equiv \frac{dW(q_1, q)}{dq}, \quad p_+ \equiv \frac{dW(q, q_2)}{dq}$$

il principio di Fermat implica la legge di Snell.  $\heartsuit$

## 2.5 OTTICA GEOMETRICA LINEARE

Estendiamo ora brevemente all'ottica lineare l'analisi fatta per l'ottica gaussiana.

Viene meno l'ipotesi che i raggi di luce giacciono in un piano che contiene l'asse ottico, ma viene mantenuta l'approssimazione lineare, per cui tutte le relazioni sono considerate solo al primo ordine negli angoli che le direzioni dei raggi ottici formano con l'asse ottico.

Si puó allora continuare a utilizzare come parametro la coordinata  $s$  dell'asse ottico. Ogni raggio  $\gamma$  é ora completamente determinato dai dati iniziali su un piano ottico  $\Pi_{s_0}$ , dalla legge di propagazione rettilinea nei mezzi omogenei e dalle leggi di Snell della rifrazione.

I dati iniziali sono ora il punto  $P_{s_0}(\gamma)$  che rappresenta l'intersezione di  $\gamma$  con  $\Pi_{s_0}$ , e la direzione in questo punto. Indicheremo con  $q_1(s_0)$ ,  $q_2(s_0)$  le coordinate del punto di intersezione  $P_{s_0}(\gamma)$  per una scelta di assi cartesiani in  $\Pi_{s_0}$ . Faremo sempre la convenzione che gli assi cartesiani utilizzati in piani ottici diversi siano ottenuti per trasporto parallelo. Per quanto riguarda la direzione di  $\gamma$ , essa é individuata da un punto  $Q_{s_0}(\gamma)$  sulla sfera unitaria centrata in  $P_{s_0}$ . Nell'approssimazione lineare, essa é ugualmente ben descritta dalle coordinate di  $Q_{s_0}(\gamma)$  lungo gli assi 1 e 2 (l'asse 3 essendo diretto secondo l'asse ottico); infatti, all'ordine considerato si ha  $\theta_3 = (1 - \theta_1^2 - \theta_2^2)^{\frac{1}{2}} \simeq 1$ .

Le coordinate

$$q_1, q_2, \theta_1, \theta_2$$

variano in un piccolo intorno dell'origine in  $R^4$ .

Come nel caso dell'ottica gaussiana, converrá utilizzare coordinate

$$q_1, q_2, p_1, p_2, \quad p_k = \sum_h n_{(k,h)} \theta_k, \quad k = 1, 2$$

dove  $\tilde{n} \equiv (n_{k,h})$  é la matrice che descrive l'indice di rifrazione in un intorno del punto descritto dalle coordinate  $(q, p)$ .

per semplicitá considereremo in seguito solamente il caso di mezzi otticamente isotropi, e quindi  $\tilde{n} \equiv n I$ .

Come nel caso dell'ottica gaussiana, bisogna prestare attenzione al fatto che sulle superfici ottiche (di separazione tra mezzi a indici di rifrazione diversi) il limite destro e il limite sinistro di  $p_k \theta_k^{-1}$  sono diversi.

Considerando due piani ottici

$$\Pi_{s_1}, \Pi_{s_2}, \quad s_1 < s_2$$

per ciascun raggio  $\gamma$  le coordinate

$$q_k(s_2), p_k(s_2)$$

sono funzioni delle coordinate  $q_k(s_1), p_k(s_1)$ .

Nell'approssimazione lineare che stiamo considerando questa relazione sará lineare e sará dunque descritta da un matrice.

Vogliamo dimostrare che questa matrice é simplettica, e che ogni matrice simplettica di rango quattro puó essere ottenuta in questo modo (per un'opportuna scelta di superfici ottiche e di indici di rifrazione).

Verifichiamo innanzitutto che ogni matrice di trasformazione cosi' ottenuta é simplettica. Ricordiamo che una matrice  $T$  di rango quattro é simplettica (per la scelta di coordinate effettuata sopra) se

$$T \cdot J \cdot T^t = J, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \quad I \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Come nel caso gaussiano, sará sufficiente considerare le matrici associate a processi elementari: propagazione in un mezzo omogeneo isotropo e rifrazione ad una superficie ottica.

Per quanto riguarda la propagazione rettilinea, se l'indice di rifrazione del mezzo é  $n$  la relazione tra le coordinate sui piani ottici  $\Pi_{s_0}$  e  $\Pi_{s_1}$  é data da

$$q(s_1) - q(s_0) = (s_1 - s_0)\theta = (s_1 - s_0) n^{-1} p(s_0), \quad p(s_1) = p(s_0)$$

La matrice di trasformazione é dunque data da

$$T = \begin{pmatrix} I & d I \\ 0 & I \end{pmatrix}, \quad d = (s_1 - s_0) n^{-1} \quad I \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad 2.21$$

Per calcolo diretto si verifica che  $T$  é simplettica.

Per determinare le matrici che descrivono la rifrazione e dimostrare che sono simplettiche conviene ricordare che in approssimazione lineare le superfici ottiche sono identificabili con paraboloidi il cui asse é l'asse ottico.

*In generale questi paraboloidi non saranno di rotazione.*

Scegliendo coordinate con origine sul vertice del paraboloide, l'equazione della superficie ottica sará, nell'approssimazione considerata

$$s = \frac{1}{2}(q, K q)$$

dove  $K$  é una matrice simmetrica di rango due.

Nell'approssimazione lineare la normale a questa superficie nel punto di coordinate posizionali  $q \equiv (q_1, q_2)$  é data da

$$\eta \equiv (Kq, -(1 - (q, K^2q)^{1/2}) \in R^2 \times R^1, \quad |\eta| = 1 \quad 2.22$$

Nell'approssimazione lineare  $\eta_3 = -1$ .

Per un generico vettore  $w$  la proiezione sul piano tangente alla superficie nel punto di coordinate

$$q \equiv (q_1, q_2, \frac{1}{2}(q, Kq))$$

é data da

$$w_p = w - (w, \eta)\eta \quad 2.23$$

La legge di Snell, in approssimazione lineare, stabilisce che

$$\tilde{n}_1(v_1 - (v_1, \eta)\eta) = \tilde{n}_2(v_2 - (v_2, \eta)\eta) \quad 2.24$$

dove i versori  $v_1$  e  $v_2$  sono le direzioni del raggio luminoso nei due mezzi di indici di rifrazione  $\tilde{n}_1$  e  $\tilde{n}_2$ .

Infatti nell'approssimazione lineare si ha

$$v_k \equiv (v_{k,1}, v_{k,2}, \sqrt{1 - v_{k,1}^2 - v_{k,2}^2}) \simeq (v_{k,1}, v_{k,2}, 1) \quad 2.25$$

e quindi  $v_1 - (v_1, \eta)\eta$  puó essere identificato con il prodotto di un versore (nella direzione di  $v_1$  sul piano tangente) per il seno dell'angolo formato da  $v_1$  con la normale alla superficie.

Convien notare che, nell'approssimazione lineare, non é possibile formulare la legge di Snell utilizzando la componente di  $v_k$  normale alla superficie, poiché questa vale  $-1$  a meno di termini che sono di ordine due nell'angolo tra  $v_k$  e l'asse ottico.

Da (2.22), (2.25) si deduce

$$(v_k, \eta) = -1 + O(q)$$

e quindi la proiezione di (2.24) sul piano ottico considerato (cioé la restrizione alle prime due componenti) dá

$$p_1 - n_1 K q_1 = p_2 - n_2 K q_2, \quad p_k, q_k \in R^2$$

La legge di trasformazione per rifrazione é allora descritta dall matrice

$$T_2 \equiv \begin{pmatrix} I & 0 \\ -P & I \end{pmatrix}, \quad P \equiv -(n_1 - n_2)K$$

(abbiamo tenuto conto del fatto che  $q_2 = q_1$ ).

Verifichiamo che  $T_2$  in (2.26) é simplettica se  $K$  é una matrice simmetrica di rango due.

Si ha

$$T_2 \cdot J = \begin{pmatrix} I & 0 \\ -P & I \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & -P \end{pmatrix}$$

$$T_2 \cdot J \cdot T_2^t = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & -P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -P \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} = J$$

(abbiamo usato il fatto che  $K^t = K$  e quindi  $P^t = P$ ).

Poiché le matrici simplettiche formano gruppo, resta dimostrato che é simplettica la matrice che descrive in ottica lineare la relazione tra le coordinate di un raggio ottico in piani ottici diversi.

Vogliamo ora dimostrare

**LEMMA 2.5**

*Ogni matrice simplettica di rango quattro puó essere ottenuta in questo modo.*

**Dimostrazione**

Sará sufficiente dimostrare che l'algebra di Lie  $sp_2$  delle matrici simplettiche di rango quattro é sottesa dalle matrici che si ottengono come tangenti all'origine di quelle traiettorie nel gruppo  $Sp_2$  che si costruiscono utilizzando solo matrici del tipo (2.21) e (2.26). Ricordando che, per una generica scelta di matrici  $A, B, C$  si ha

$$e^{\epsilon A} \cdot e^{\epsilon B} \cdot e^{-\epsilon A} \cdot e^{-\epsilon B} = I + \epsilon^2[A, B] + O(\epsilon^3)$$

e

$$e^{\epsilon C}[A, B]e^{-\epsilon C} = [A, B] + \epsilon[C, [A, B]] + O(\epsilon^2)$$

sará sufficiente dimostare che l'algebra di Lie di  $Sp_2$  é sottesa da matrici della forma

$$A_k, [A_k, A_h], [A_k, [A_h, A_l]], [A_k, [A_h, [A_l, A_m]]] \quad 2.27$$

dove le  $A_k$  sono tali che  $e^{\epsilon A_k}$  é della forma (2.21) o (2.26) per ogni valore di  $\epsilon$ . Notiamo ora che, se  $e^{\epsilon A_1}$  é della forma (2.26) per ogni  $\epsilon$ , differenziando rispetto ad  $\epsilon$  e ponendo poi  $\epsilon = 0$  si ottiene che  $A_1$  ha la forma

$$A_1 = c_1 \begin{pmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad 2.28$$

dove  $c_1$  é un numero reale.

Nello stesso modo, se  $e^{\epsilon A_2}$  é della forma (2.28), allora

$$A_2 = c_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ M & 0 \end{pmatrix} \quad 2.29$$

dove  $c_2$  é un numero reale e  $M$  é una matrice simmetrica di rango due. Per calcolo diretto si verifica che

$$[A_1, A_2] \equiv A_1 A_2 - A_2 A_1 = c_1 c_2 \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix}$$

Dunque ogni matrice della forma

$$\begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix} \quad 2.30$$

con  $M$  simmetrica di rango due può essere ottenuta in (2.29).  
D'altra parte, si ha

$$[A_1, [A_1, A_2]] = c_1^2 c_2 \begin{pmatrix} 0 & -2M \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dunque ogni matrice della forma

$$\begin{pmatrix} 0 & S \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.31}$$

con  $S$  matrice simmetrica di rango due può essere ottenuta in (2.27).

Calcoliamo infine il commutatore di una matrice della forma (2.31) con una matrice della forma (2.29).

Si ottiene

$$\begin{pmatrix} 0 & S \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ M & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ M & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & S \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} SM & 0 \\ 0 & MS \end{pmatrix}$$

Tenuto conto del fatto che, essendo  $S$  ed  $M$  simmetriche si ha  $MS = (SM)^t$  e che ogni matrice di rango due può essere scritta (in modo non unico) come prodotto di due matrici simmetriche, si deduce che ogni matrice della forma

$$\begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & N^t \end{pmatrix} \tag{2.32}$$

con  $N$  matrice di rango due può essere ottenuta in (3.27).

Le matrici della forma (2.30), (2.31), (2.32) sono tra loro linearmente indipendenti.

Poiché  $M$  è simmetrica, le matrici del tipo (2.29) formano uno spazio vettoriale di dimensione tre; per lo stesso motivo, le matrici del tipo (2.31) formano uno spazio vettoriale di dimensione tre.

Le matrici del tipo (2.32) formano uno spazio vettoriale di dimensione quattro poiché  $N$  è una qualunque matrice di rango due.

Ne concludiamo che lo spazio vettoriale sotteso dalle matrici del tipo (2.27) ha dimensione dieci.

Poiché esso è, per costruzione, un sottospazio dello spazio vettoriale  $sp_2$ , per dimostrare che il gruppo  $Sp_2$  è generato da da matrici della forma (2.21), (2.26) sarà sufficiente dimostrare che come spazio vettoriale l'algebra di Lie  $sp_2$  ha dimensione dieci.

Per dimostrare questo, ricordiamo che  $sp_2$  è lo spazio lineare delle matrici  $A$  di rango quattro che soddisfano

$$AJ + JA^t = 0 \tag{2.33}$$

Poiché per costruzione  $AJ + JA^t$  è una matrice antisimmetrica (ricordare che  $J^t = -J$ ), la (2.33) corrisponde a  $\frac{1}{2}4(4-1) = 6$  relazioni indipendenti tra le componenti di  $A$ .

Le matrici di rango quattro costituiscono uno spazio vettoriale di dimensione sedici, dunque la (2.33) definisce un sottospazio vettoriale di dimensione dieci, come asserito.

Questo termina la dimostrazione del Lemma 2.5.  $\diamond$

NOTA

Un caso particolare dell'ottica lineare per mezzi isotropi é quello in cui tutte le lenti sono invarianti per rotazione attorno all'asse ottico. In questo caso la matrice  $K$  é proporzionale all'identitá per ogni superficie ottica e solo matrici della forma

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ -cI & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -c & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

appaiono nel caso della rifrazione.

Poiché la propagazione rettilinea in un mezzo omogeneo e isotropo dá luogo ad una matrice della forma

$$\begin{pmatrix} I & dI \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

si vede che ogni matrice ottenuta per composizione avrá la forma

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad ad - bc = 1$$

Il sottogruppo di  $Sp_2$  cosí ottenuto é dunque isomorfo a  $Sp_1$ . Se tutte le superfici ottiche sono invarianti per rotazione attorno all'asse ottico e se tutti i mezzi sono isotropi, l'ottica lineare é dunque equivalente all'ottica gaussiana.  $\heartsuit$

Le definizioni di piani coniugati e di sistemi telescopici in ottica lineare coincidono con quelle date per l'ottica geometrica, e non verranno ripetute.

Se il sistema di lenti non é invariante per rotazione, e/o se i mezzi ottici attraversati non sono isotropi, non é possibile in generale avere focalizzazione.

La definizione di lunghezza ottica porta anche in ottica lineare alla seguente formula

$$L_\gamma \equiv (s_2 - s_1) + \frac{1}{2}[p_{s_2}q_{s_1} - p_{s_1}q_{s_2}] \quad 2.34$$

dove  $q_{s_i}$  sono le coordiante dell'intersezione di  $\gamma$  con il piano  $\Pi_{s_i}$ ,  $P_{s_i} = \tilde{n}_i v_i$ ;  $\tilde{n}_i$  é la matrice che individua l'indice di rifrazione nel punto  $q_{s_i}$  e  $v_i$  é la proiezione su  $\pi_{s_i}$  della direzione di propagazione di  $\gamma$  in  $q_{s_i}$ .

La traiettoria  $\gamma$  é parametrizzata dalla coordinata  $s$  lungo l'asse ottico e viene considerata nell'intervallo  $[s_1, s_2]$ .

Anche la funzione generatrice puntuale viene costruita in modo analogo a quanto fatto nel caso gaussiano.

Da

$$q_2 = Aq_1 + Bp_1, \quad p_2 = Cq_1 + Dp_1 \quad 2.35$$

si deduce, nell'ipotesi che la matrice  $B$  sia invertibile, e quindi che i piani ottici considerati non siano coniugati

$$p_1 = -B^{-1}Aq_1 + B^{-1}q_2, \quad p_2 = -(B^t)^{-1}q_1 + DB^{-1}q_2$$

Poiché la matrice é симплетtica si ha

$$(B^t)^{-1} = DB^{-1}A - C$$

e quindi la funzione generatrice puntuale é

$$W(q_1, q_2) = \frac{1}{2} [(DB^{-1}q_2, q_2) + (B^{-1}Aq_1, q_1) - 2((B^t)^{-1}q_1, q_2)] \quad 2.36$$

Si verifica direttamente che, se  $\gamma$  soddisfa le leggi dell'ottica geometrica si ha

$$L(\gamma) = s_2 - s_1 + W(q_1, q_2) \quad q_1 = q(s_1), \quad q_2 = q(s_2) \quad 2.37$$

Anche in ottica lineare, come già visto in ottica gaussiana, l'utilizzazione di una funzione generatrice puntuale richiede che i piani ottici considerati non siano coniugati.

Se la matrice  $B$  in (2.35) non é invertibile si può dimostrare che almeno una delle matrici  $A$  e  $D$  é invertibile. Se  $A$  é invertibile si può utilizzare una funzione generatrice di tipo misto  $W'(p_1, q_2)$  che si ottiene invertendo (2.35) per scrivere

$$p_2 = p_2(p_1, q_2), \quad q_1 = q_1(p_1, q_2)$$

Questo richiede che  $A$  sia invertibile; si può dimostrare che, se la matrice  $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$  é simplettica e se  $B$  non é invertibile, allora almeno una delle due matrici  $A$  e  $D$  é invertibile. Se la matrice  $D$  é invertibile, si utilizza una funzione generatrice del tipo  $W''(q_1, p_2)$ . Le relazioni tra funzioni di tipo diverso associate alla stessa trasformazione simplettica sono quelle della meccanica hamiltoniana; ad esempio si ha

$$dW' = dW + d(p_1q_1)$$

La relazione tra il principio di Fermat e il metodo delle funzioni caratteristiche (e quindi il principio variazionale di Hamilton) ha in ottica lineare la stessa forma già discussa nell'ambito dell'ottica gaussiana.

## 2.6 FUNZIONI CARATTERISTICHE IN OTTICA GEOMETRICA NONLINEARE

Dimostriamo innanzitutto che in ottica geometrica, e non solo nell'approssimazione lineare sviluppata finora, se un cammino ottico soddisfa il principio di Fermat, e se le coordinate  $P_i \in R^2$  vengono definite in modo opportuno, é simplettica la trasformazione

$$(q(s_1), p(s_1)) \Rightarrow (q(s_2), p(s_2)) \quad 2.38$$

dove  $q(s_i), p(s_i)$  sono le coordinate che identificano il raggio ottico sul piano  $\pi_{s_i}$ .

La sola ipotesi che viene fatta é che i raggi ottici possano essere parametrizzati dalla coordinata  $s$  che parametrizza l'asse ottico, o equivalentemente che ciascun raggio ottico attraversi una e una sola volta ciascun piano ottico  $\Pi_s$ .

Questa ipotesi é naturalmente soddisfatta se per ogni valore del parametro  $s$  i raggi ottici formano un angolo piccolo con la direzione dell'asse ottico.

In questo caso, se la coppia di piani considerati non é coniugata, la trasformazione simplettica (2.38) differisce di poco da quella data dall'ottica lineare, e la sua funzione generatrice puntuale  $W(q_1, q_2)$  differisce poco dalla funzione  $W^0(q_1, q_2)$  data dall'ottica lineare. Si avrà cioè

$$W(q_1, q_2) = W^0(q_1, q_2) + W^1(q_1, q_2), \quad W^1(q_1, q_2) = O(|q|^3)$$

Inoltre, se il sistema ottico considerato é invariante per rotazione attorno all'asse ottico, si avrá

$$W(q_1, q_2) = W(\mathcal{R}q_1, \mathcal{R}q_2)$$

dove  $\mathcal{R}$  é una rotazione in  $R^2$ .

Abbiamo giá notato che in questo caso  $W^0$  é invariante per rotazione; dunque anche  $W^1$  é invariante per rotazione, ed é quindi funzione delle espressioni invarianti

$$q_1^2, q_2^2, q_1 \cdot q_2$$

Se facciamo inoltre l'ipotesi che  $W$  sia di classe  $C^4$ , ne deduciamo che  $W^1$  deve essere di ordine almeno due negli invarianti, e quindi di ordine almeno quattro nelle variabili  $q_i$ .

Ne segue che, all'ordine successivo a quello che dá l'approssimazione lineare, la trasformazione é caratterizzata da una funzione generatrice della forma

$$W^0(q_1, q_2) + P_2(q_1^2, q_2^2, (q_1, q_2))$$

dove  $P_2$  é un polinomio di ordine due nelle variabili indicate.

Questo permette di discutere in modo dettagliato le deviazioni di (2.38) dal caso lineare; questi effetti sono detti "aberrazioni" e hanno nomi specifici (aberrazione sferica, coma, astigmatismo ...). Ne daremo una breve discussione nel seguito.

Ricordiamo che un'applicazione  $\phi$  si dice *simplettica* se in ciascun punto di coordinate  $(q, p)$  la matrice  $T_\phi(q, p)$  che descrive l'applicazione tangente (che é un'operazione lineare) é *simplettica*, soddisfa cioè la condizione

$$T_\phi(q, p) \cdot J \cdot T_\phi^t(q, p) = J$$

Equivalentemente l'applicazione  $\phi$  é *simplettica* se l'applicazione lineare  $\phi^*$  lascia invariante la due-forma

$$\omega \equiv dq_1 \wedge dp_1 + dq_2 \wedge dp_2$$

( $\phi^*$  é definito su  $R^4$  per dualità, a partire dal sollevamento  $\phi_*$  di  $\phi$  allo spazio tangente).  
Notare che, essendo  $R^2 \times R^2$  uno spazio lineare, esso può essere identificato in modo naturale con il suo spazio tangente, e poi con il suo spazio cotangente utilizzando per la dualità il prodotto scalare euclideo.

Per dimostrare che é possibile scegliere la coordinata  $p$  in modo tale che la trasformazione tra piani ottici sia *simplettica*, ricordiamo che in ottica geometrica un raggio ottico é caratterizzato dal rendere stazionaria la lunghezza ottica.

Se i cammini ottici possono essere parametrizzati dalla coordinata dell'asse ottico, e si utilizzano terne cartesiane il cui terzo asse é l'asse ottico, ogni cammino ottico  $\gamma$  può essere parametrizzato nella forma

$$\gamma : (x_1(s), x_2(s), s), \quad s_0 \leq s \leq s_1 \quad 2.39$$

e la sua lunghezza ottica é per definizione

$$L(\gamma) = \int_{s_1}^{s_2} \sqrt{(\tilde{n}(x(s), s)\zeta, \zeta)} ds$$



$$\zeta \equiv \left( \frac{dx_1}{ds}, \frac{dx_2}{ds}, 1 \right)$$

dove abbiamo indicato con  $\tilde{n}$  la matrice simmetrica di rango tre, detta matrice dell'indice di rifrazione, che caratterizza in ogni punto le proprietà ottiche del mezzo considerato. Essa è costante a tratti, limitata, e il suo autovalore più piccolo è strettamente positivo in ogni punto.

Abbiamo anche fatto l'ipotesi che la parametrizzazione  $s \rightarrow x(s)$  sia tale che  $L(\gamma) < +\infty$  (in particolare che  $x(s)$  sia differenziabile quasi ovunque). Questo è certamente vero se tutti i raggi ottici attraversano trasversalmente ciascun piano ottico.

Nel caso lineare abbiamo discusso solamente il caso in cui tutti i mezzi ottici attraversati siano isotropi, cioè

$$\tilde{n}(x(s), s) = n(x(s), s)I, \quad n(x(s), s) \geq c > 0$$

Manterremo questa ipotesi anche nella trattazione che faremo del caso nonlineare; la lunghezza ottica del cammino  $\gamma$  è allora

$$L(\gamma) = \int_{s_1}^{s_2} n(x(s), s) \sqrt{\left[ 1 + \left( \frac{dx_1}{ds} \right)^2 + \left( \frac{dx_2}{ds} \right)^2 \right]} ds \quad 2.40$$

La funzione  $n(x, s)$  è in generale discontinua nei casi di interesse in ottica geometrica. Per motivi di semplicità consideriamo prima il caso in cui la funzione indice di rifrazione è di classe  $C^1$ . Il caso di interesse in ottica geometrica, in cui  $n$  è discontinua in corrispondenza alle superfici ottiche, verrà trattato come caso limite.

Poniamo

$$l(x_1, x_2, \xi_1, \xi_2, s) \equiv n(x_1, x_2; s) (1 + \xi_1^2 + \xi_2^2)^{\frac{1}{2}}$$

così che

$$L(\gamma) = \int_{s_1}^{s_2} l(x, \dot{x}; s) ds, \quad \dot{x} \equiv \left( \frac{dx_1}{ds}, \frac{dx_2}{ds} \right) \quad 2.41$$

Poniamo ora

$$q_k \equiv x_k, \quad p_k \equiv \frac{\partial l}{\partial \xi_k} \Big|_{\xi=q} = \frac{n \dot{q}_k}{\sqrt{1 + \dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2}}, \quad k = 1, 2 \quad 2.42$$

e definiamo la funzione  $H(q, p; s)$  mediante

$$H(q, p; s) \equiv p_1 \dot{q}_1 + p_2 \dot{q}_2 - l(q, \dot{q}(q, p; s); s) \quad 2.43$$

Si noti che l'applicazione  $\phi$ :

$$\phi : q, \dot{q}, s \Rightarrow q, p, s$$

definita in (2.41) è invertibile (notare che la funzione  $\sqrt{1 + \dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2}$  non è omogenea di grado due nelle  $q$ ).

Questo si deduce anche dal fatto che  $l$  definito in (2.43) è convessa nelle variabili  $\xi$ .

Infatti un calcolo esplicito dá

$$D^2 l \equiv \frac{n(x_1, x_2; s)}{[1 + \xi_1^2 + \xi_2^2]^{5/2}} \begin{pmatrix} \xi_2^2 + 1 & -\xi_1 \xi_2 \\ -\xi_1 \xi_2 & \xi_1^2 + 1 \end{pmatrix} \quad 2.44$$

I punti critici del funzionale  $L$  sono le soluzioni dell'equazioni di Eulero-Lagrange con lagrangiana  $l$  (e il principio di Fermat é il principio di azione stazionaria (primo principio di Hamilton) per la lagrangiana  $l$ ).

Poiché la (2.43) definisce  $H$  come trasformata di Legendre di  $l$ , i punti critici di  $L$  (traiettorie che soddisfano il principio di Fermat) sono descritti, nelle variabili  $q, p$ , dalle soluzioni delle equazioni

$$\frac{dq_k}{ds} = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \frac{dp_k}{ds} = -\frac{\partial H}{\partial q_k}, \quad k = 1, 2 \quad 2.45$$

Il flusso hamiltoniano é costituito da trasformazioni simplettiche. Dunque per ogni  $s_2, s_1$  é simplettica l'applicazione data da

$$q(s_1), p(s_1) \Rightarrow \psi(s_2 - s_1, q(s_1), p(s_1)) \equiv (q(s_2), p(s_2))$$

dove  $\psi(s, z)$  é la soluzione al tempo  $s$  di (2.45) per la quale

$$\psi(s_1, z^1) = z^1 \equiv (q(s_1), p(s_1))$$

Consideriamo ora il caso in cui l'indice di rifrazione é costante a tratti e presenta discontinuitá in corrispondenza alle superfici ottiche.

In questo caso la funzione  $l$ , e quindi la funzione  $H$ , sono discontinue come funzione di  $q$  in corrispondenza alle superfici ottiche e quindi la seconda delle equazioni in (2.45) non é definita. Ci si poteva aspettare questo, poiché le coordinate  $p$  utilizzate in ottica lineare hanno una discontinuitá sulle superfici ottiche.

Come funzione delle  $p$  la  $H$  é invece differenziabile, e quindi la prima delle equazioni (2.45) rimane valida, ma  $\frac{dq}{ds}$  é discontinua.

La situazione é analoga a quella incontrata nello studio del rimbalzo come limite di moto regolare dovuto a potenziali con variazioni molto pronunciate. Anche in quel caso la velocità é una funzione discontinua, mentre la posizione é continua, e ha derivata sia a destra che a sinistra.

Anche qui, studiamo la rifrazione alla superficie di separazione  $\Sigma$  tra due mezzi isotropi omogenei  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$  di indice di rifrazione  $n_1, n_2$  come caso limite della propagazione in mezzi ottici isotropi ma non omogenei, con indici di rifrazione  $n^m(x)$  dove la successione di funzioni  $n^m(x)$  é di classe  $C^1$  e converge a  $n_1$  in  $\Omega_1$  e a  $n_2$  in  $\Omega_2$ , uniformemente, in ogni compatto che non interseca  $\Sigma$ .

Indichiamo con  $L^m$  la lunghezza ottica definita utilizzando  $n^m(x)$ , e con  $H^m(q, p)$  la corrispondente funzione definita come in (2.43).

Dalle ipotesi fatte segue che la successione  $H^m(q, p)$  converge insieme al suo gradiente in ogni compatto che non interseca  $\Sigma$ .

Dunque, per ogni scelta di dati iniziali e finali  $q(s_0)$  e  $q(s_1)$ , le soluzioni  $\gamma^m$  di (2.45) per  $H^m$  convergono al di fuori di  $\Sigma$  alla soluzione  $\gamma^0$  corrispondente a  $H^0$ , costruita utilizzando  $n^0(x)$ . La traiettoria  $\gamma^0$  é quella descritta dall'ottica lineare nella sua interpretazione hamiltoniana.

Dimostriamo infatti che  $\gamma^0$  minimizza  $L^0$  tra tutte le traiettorie che hanno gli stessi dati iniziali.

Poiché le  $\gamma^m$  minimizzano i funzionali  $L^m$ , sará sufficiente dimostrare che

$$\lim_{m \rightarrow \infty} L^m(\gamma^m) = L^0(\gamma^0) \quad 2.46$$

Si ha

$$L^m(\gamma^m) - L^0(\gamma^0) = (L^m(\gamma^m) - L^0(\gamma^m)) + (L^0(\gamma^m) - L^0(\gamma^0))$$

con

$$L^m(\gamma^m) - L^0(\gamma^m) = \int_{s_1}^{s_2} [n^m(x^m(s), s) - n^0(x^m(s), s)] \sqrt{\left[1 + \left(\frac{dx_1^m}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dx_2^m}{ds}\right)^2\right]} ds$$

Questo termine converge a zero, per il teorema di convergenza dominata di Lebesgue, poiché il termine in parentesi quadrata converge a zero puntualmente al di fuori dell'unico valore  $s_0^m$  nel quale  $\gamma^m$  attraversa la superficie convessa  $\Sigma$ , mentre le funzioni in radice quadrata sono integrabili e il loro integrale è uniformemente limitato.

Il termine  $L^0(\gamma^m) - L^0(\gamma^0)$  si scrive

$$L^0(\gamma^m) - L^0(\gamma^0) = \int_{s_1}^{s_2} n^0(x(s), s) \left[ \sqrt{\left[1 + \left(\frac{dx_1}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{ds}\right)^2\right]} - \sqrt{\left[1 + \left(\frac{dx_1}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{ds}\right)^2\right]} \right] ds$$

Questo termine converge a zero poiché  $n^0$  è uniformemente limitata e il rimanente fattore nell'integrale converge a zero al di fuori di  $s_0^0$  ed è integrabile, così che si può utilizzare anche qui il teorema di convergenza dominata di Lebesgue.

Abbiamo così dimostrato, utilizzando il formalismo hamiltoniano, che le soluzioni date dall'ottica geometrica minimizzano la lunghezza ottica.

**NOTA**

Si potrebbe anche seguire un procedimento inverso, e determinare le soluzioni del problema variazionale "hamiltoniano" quando l'indice di rifrazione è una funzione differenziabile di punto *come limite delle soluzioni date dall'ottica geometrica in corrispondenza ad una successione di mezzi ottici, composti da mezzi omogenei ed isotropi opportunamente distribuiti*. Analiticamente, questo corrisponde ad approssimare la funzione regolare  $n(x)$  con una successione  $n^m(x)$  di funzioni "costanti a tratti".

La convergenza delle successioni si dimostra seguendo la traccia della dimostrazione data qui sopra per il problema inverso. Può essere interessante notare che la soluzione del problema della brachistocrona (il primo problema variazionale studiato quantitativamente in età moderna) fu ottenuta da J. Bernoulli precisamente con questo procedimento di approssimazione mediante funzioni costanti a tratti. ♡

## 2.7 ABERRAZIONI

Studiamo ora quali siano gli effetti dei termini non lineari nella trasformazione (2.22); considereremo solo il primo ordine significativo, nell'ipotesi che il sistema ottico considerato sia invariante per rotazioni attorno all'asse ottico. In questo caso le prime correzioni sono di ordine tre in  $q$ .

Conviene studiare gli effetti in funzione della struttura della funzione generatrice di tipo misto  $W(q_1, p_2)$  (non indicheremo esplicitamente la dipendenza da  $s_1$  e da  $s_2$ ).

**NOTA**

Si noti che dal punto di vista fisico la limitazione sui valori di  $p$  per i raggi ottici considerati (cioè una limitazione dell'angolo solido in cui si propaga la luce secondo le leggi

dell'ottica geometrica) si può ottenere ponendo schermi con fori in corrispondenza all'asse ottico. La descrizione che daremo delle aberrazioni sarà allora valida se questi fori sono sufficientemente piccoli. ♡

Poniamo

$$W(q_1, p_2) = W^0(q_1, p_2) + W^1(q_1, p_2), \quad q_i, p_i \in R^2$$

dove  $W^0$  è la funzione generatrice ottenuta nell'approssimazione lineare (quindi  $W^0(q_1, p_2)$  è quadratica nelle sue variabili) e  $W^1(q_1, p_2)$  è infinitesima di ordine maggiore di due. Se il sistema è invariante per rotazioni attorno all'asse ottico, la funzione  $W^1(q_1, p_2)$  è invariante per rotazioni simultanee di  $q_1$  e  $p_2$  ed è quindi una funzione degli invarianti che si possono costruire con questi vettori.

Posto

$$u \equiv |q_1|^2, \quad v \equiv |p_2|^2, \quad w \equiv 2(q_1, p_2) \quad 2.47$$

la funzione  $W^1$  è funzione di  $u, v, w$ , infinitesima di ordine maggiore di uno.

Se è regolare (ad esempio di classe  $C^2$ ) essa deve essere almeno di ordine due nelle  $u, v, w$  e quindi di ordine almeno quattro nelle  $q_1, p_2$ . Gli effetti che descriviamo saranno dunque di ordine almeno tre nelle  $q_1, p_2$ .

Se  $W^1$  è di classe  $C^2$  nelle variabili indicate si avrà

$$W^1(u, v, w) = P_2(u, v, w) + O\left((q_1^2 + p_2^2)^{5/2}\right)$$

dove  $P_2$  è un polinomio di grado due.

Considereremo solo il contributo dovuto a questo polinomio, che scriviamo nella forma

$$P_2(u, v, w) = \left[ \frac{1}{4}Fu^2 + \frac{1}{4}Av^2 + \frac{1}{8}(C - D)w^2 + \frac{1}{2}Duv + \frac{1}{2}Euw + \frac{1}{6}Bvw \right] \quad 2.48$$

Poniamo

$$\Delta q_{2,k} \equiv \frac{\partial W^1}{\partial p_{2,k}} \quad 2.49$$

Quest'espressione rappresenta la variazione, dovuta alla nonlinearity, della posizione su  $\Pi_{s_2}$  del raggio che emerge con impulso  $p_2$  (e quindi la variazione del raggio ottico che emerge nella direzione  $v_2$ )

$$v_2 \equiv \left( \frac{p_2}{n_2}, \sqrt{1 - \frac{p_2^2}{n_2^2}} \right)$$

Per studiare l'effetto dei monomi in (2.48) consideriamo il caso in cui i raggi "entranti" intersechino  $\Pi_1$  in un intorno dell'origine e lungo l'asse 1. Questo avviene ad esempio se su  $\Pi_{s_1}$  vi è una sorgente luminosa che non è puntiforme ma può essere identificata con un segmento passante per l'asse ottico.

Si ha allora

$$q_{1,1} = x, \quad q_{1,2} = 0$$

Corrispondentemente introduciamo coordinate polari per  $p_2$

$$p_{2,1} = \rho \cos\theta, \quad p_{2,2} = \rho \sin\theta$$

Si ha

$$u = x^2, \quad v = \rho^2, \quad w = 2x\rho \cos\phi$$

Da (2.49), (2.48) si ottiene

$$\Delta q_{2,1} = A\rho^3 \cos\phi + \frac{1}{3}B\rho^2 x(1 + 2\cos^2\phi) + C\rho x^2 \cos\phi + Ex^3$$

$$\Delta q_{2,2} = A\rho^3 \sin\phi + \frac{2}{3}B\rho^2 x \sin\phi \cos\phi + D\rho x^2 \sin\phi \quad 2.50$$

Se  $x = 0$  (sorgente puntiforme sull'asse ottico) si ha

$$\Delta q_2 = A p_2 |p_2|^2 \quad 2.51$$

L'immagine di una sorgente puntiforme non é dunque un punto ma un disco il cui diametro dipende dalla direzione di irraggiamento (ricordare che  $p_2 = p_2(q_1, p_1) = p_2(q_1, 0)$ ).

*Questo effetto é detto aberrazione sferica*

Se il sistema viene corretto per l'aberrazione sferica, cosi' da ottenere che la costante  $A$  sia uguale a zero, consideriamo l'effetto dei termini di ordine uno nella variabile  $x$  (cioé l'effetto di distorsione dovuto al fatto che la sorgente non é puntiforme, calcolato al primo ordine nella estensione della sorgente).

La variazione in  $q_2$  dovuta al termine lineare in  $x$  é

$$\Delta q_2(\phi) = \frac{1}{3}B\rho^2 x [(2 + \cos 2\phi), \sin 2\phi] \quad 2.52$$

Per  $x$  e  $\rho$  costanti al variare di  $\phi$  la (2.52) descrive una circonferenza di raggio  $\frac{1}{3}x\rho^2$  e centro  $(\frac{2}{3}B\rho^2 x, 0)$ .

Per  $\rho$  costante, al variare di  $x$  (e quindi del punto di emissione della luce dal segmento considerato) queste circonferenze descrivono una figura piana che richiama (vagamente) la forma di una cometa.

*Per questo motivo tale aberrazione viene detta 'coma'.*

Se si corregge per l'aberrazione sferica e per la coma, si puó mettere in luce l'effetto dovuto al termine di ordine due in  $x$ .

Si ottiene

$$\Delta q = \rho x^2 (C \cos\phi, D \sin\phi) \quad 2.53$$

Questa é un'ellisse; dunque per  $\rho$  costante, al variare di  $x$  in  $[-x_0, x_0]$  i raggi ottici descrivono l'interno di un'ellisse.

*Questo effetto é detto 'astigmatismo'*

Convieni notare che, se  $C \neq D$  non vi é alcun piano ottico successivo su cui i raggi corrispondenti a un fissato valore di  $x$  si focalizzano.

Infine, se si corregge per le aberrazioni finora descritte, cioé se si pone  $A = B = C = D = 0$ , si ha

$$\Delta q_2 = E q_2 |q_2|^2 \quad 2.54$$

*Questo effetto viene detto 'distorsione'.*

Se il sistema linearizzato provvedeva un'immagine omotetica della sorgente, così che al primo ordine  $q_2 = mq_1$ , ( $m$  un fattore di ingrandimento) si avrà ora

$$q_2 + \Delta q_2 = mq_1 + Eq_2|q_2|^2 = mq_1(1 + E|q_1|^2) + O(|q_1|^4) \quad 2.55$$

Si avrà allora una distorsione *a barile* se  $E < 0$ , e una distorsione *a cuscino* se  $E > 0$ .

#### *BIBLIOGRAFIA cap 2*

[B] *H. Buchdale* An introduction to Hamiltonian Optics Cambridge U.Press 1970

[G,S] *V. Guillemin, S. Sternberg* Symplectic techniques in Physics Cambridge U.Press 1984







### 3. IL PROBLEMA DEGLI $N$ CORPI

3.1 Introduzione.

3.2 Soluzioni di collisione.

3.3 Configurazioni centrali per  $N \geq 3$ .

3.4 Studio delle configurazioni centrali.

3.5 Il problema dei tre corpi ristretto.

3.6 Stabilità nel problema dei tre corpi ristretto.

3.7 Sistemi dipendenti da un parametro: metodo di continuazione.

3.8 Continuazione nel problema dei tre corpi ristretto: orbite retrograde e di cometa

3.9 Continuazione: soluzioni del problema dei tre corpi.

#### INTRODUZIONE

Il problema di descrivere il moto di  $N$  corpi materiali in  $R^3$ , considerati puntiformi, interagenti fra loro attraverso forze Newtoniane, è certamente il cui studio ha portato Poincaré a sviluppare il metodo dell'analisi qualitativa.

Questioni fondamentali, quali l'esistenza e classificazione delle orbite periodiche o la stabilità del sistema planetario hanno avuto finora solo una risposta molto parziale; già il problema dei tre corpi, anche in una sua versione semplificata, che tratteremo più avanti (il problema dei tre corpi ristretto) è in gran parte irrisolto anche per quanto riguarda l'analisi qualitativa.

In questo Capitolo scriveremo le equazioni che determinano, secondo Newton, il moto di  $N$  corpi materiali dotati di massa e considerati puntiformi. Studieremo alcune soluzioni elementari, e discuteremo brevemente le soluzioni di collisione. Studieremo poi in maggior dettaglio il problema dei tre corpi ristretto e alcune delle sue soluzioni periodiche, e dimostreremo che se uno dei corpi ha massa molto più piccola degli altri si possono trovare soluzioni di forma particolarmente semplice.

Il procedimento che utilizzeremo (procedimento di continuazione) è di interesse generale, e verrà discusso in dettaglio.

Sono consigliati per un approfondimento degli argomenti discussi in questo Capitolo i riferimenti bibliografici ([A.C.], [Me], [Mo], [S.M.], [W]).

Consideriamo nello spazio euclideo  $E^3$  un sistema di  $N$  punti materiali di masse  $m_k$ ,  $1 \leq k \leq N$ , interagenti attraverso forze newtoniane.

Scelto un sistema di assi coordinati, e indicate con

$$q_k \in R^3, \quad k = 1, \dots, N$$

le corrispondenti coordinate cartesiane, le equazioni del moto sono

$$m_k \ddot{q}_k = \sum_{h \neq k} g m_h m_k |q_k - q_h|^{-3} (q_h - q_k) = -\nabla_{q_k} U \quad 3.1$$

dove l'energia potenziale  $U(q)$  è definita da

$$U(q) \equiv - \sum_{1 \leq k < h \leq N} g m_k m_h |q_k - q_h|^{-1}$$

Posto

$$q \equiv (q_1, \dots, q_N) \in R^{3N}$$

e indicando con  $M$  la matrice diagonale di rango  $3N$  che ha sulla diagonale le masse  $m_k$ , ripetute ciascuna tre volte, le equazioni (3.1) si possono scrivere nella forma concisa

$$M\ddot{q} = -\nabla U \quad 3.2$$

e derivano dalla Lagrangiana

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}(\dot{q}, M\dot{q}) - U(q) \quad 3.3$$

Si noti che le forze (e il potenziale) diventano singolari quando due corpi collidono (cioé le loro coordinate coincidono).

La corrispondente hamiltoniana si ottiene notando che  $p \equiv M\dot{q}$  ed é

$$H(q, p) = \frac{1}{2}(p, M^{-1}p) + U(q), \quad p \in R_{3N}$$

#### NOTA 1

La lagrangiana (3.3) é invariante per il gruppo delle trasformazioni rigide di  $E^3$ . Sono dunque conservati la quantità di moto  $P$  e il momento angolare  $J$ . Essendo il sistema autonomo, é anche conservata l'energia  $E$ .

Per  $N = 2$  esiste un ulteriore integrale primo, il vettore di Runge-Lenz, e conseguentemente tutti i moti limitati sono periodici. L'esistenza di quest'ultima costante del moto riflette il fatto che il sistema é invariante per un'opportuna azione del gruppo  $O(4)$ . Questa invarianza non sussiste per  $N \geq 3$ , cosí che per  $N \geq 3$  quantità di moto, momento angolare ed energia sono i soli integrali primi. In questo caso le traiettorie possono essere molto complicate e in generale sono aperte anche quando sono limitate. Molto poco si sa sulle soluzioni periodiche, e la conoscenza, anche qualitativa, del flusso nello spazio delle fasi é molto insoddisfacente, anche nel caso  $N = 3$ . ♡

#### NOTA 2

Poiché il potenziale Newtoniano é omogeneo, le equazioni sono invarianti per riscaldamento delle variabili spaziali, pur di riscaldare anche il tempo. Questo non corrisponde a un'invarianza della Hamiltoniana, e quindi a costanti del moto. Tuttavia permette di trovare nuove soluzioni per riscaldamento: se  $(q(t), p(t))$  é una soluzione che corrisponde a momento angolare  $J$  ed energia  $E$ , allora per ogni  $b \neq 0$

$$\tilde{q}(t) = b^{-2}q(b^3t), \quad \tilde{p}(t) = bp(b^3t)$$

é una soluzione che corrisponde a momento angolare  $b^{-1}J$  e a energia  $b^2E$ .

Con questo riscaldamento ci si può limitare a considerare le soluzioni che corrispondono a energia 1, 0 - 1.

Un altro utile riscaldamento permette di normalizzare le masse. Se  $(q(t), p(t))$  é una soluzione del problema degli  $N$  corpi con masse  $m_k$  allora  $\tilde{q}(t) = q(\sigma t)$ ,  $\tilde{p}(t) = \sigma^3 p(\sigma t)$  é una soluzione del problema degli  $N$  corpi con masse  $\sigma^2 m_k$ ,  $1 \leq k \leq N$ .

Si utilizza questo riscaldamento per normalizzare le masse in modo che  $\sum_{k=1}^N m_k = 1$ . ♡

### 3.2 SOLUZIONI DI COLLISIONE

Il potenziale kepleriano é singolare quando i due punti coincidono. Se una soluzione esiste per  $0 \leq t < t_c$  e se per una coppia di indici  $k \neq h$  si ha che  $|q_k(t) - q_h(t)| \rightarrow 0$  quando  $t - t_c \rightarrow 0_-$  la soluzione non può essere continuata in senso stretto per  $t \geq t_c$ . Il tempo  $t_c$  é detto tempo di collisione (o istante di collisione)

Per il problema di Keplero, le traiettorie per le quali esiste un istante di collisione sono moti rettilinei e sono il limite, quando si prenda una successione opportuna di dati iniziali, di traiettorie (ellittiche o iperboliche o paraboliche) in cui il vertice tende ad avvicinarsi al fuoco (così che l'eccentricità aumenta e l'ellisse tende a un segmento di retta con l'origine ad uno degli estremi).

Questo permette di continuare in modo naturale le traiettorie di collisione prendendo il limite della successione approssimante.

E' immediato verificare che in questo caso

- a) I tempi di collisione sono in numero finito in ogni intervallo limitato dell'asse dei tempi
- b) Negli intervalli temporali (aperti) compresi tra due collisioni successive la traiettoria é soluzione nel senso tradizionale dell'equazione di Newton.
- c) L'energia assume uno stesso valore sui diversi intervalli temporali in cui i tempi di collisione dividono la traiettoria.
- d) La traiettoria é continua agli istanti di collisione.

In generale, traiettorie del problema a  $N$  corpi che hanno le proprietà a) b), c), d) descritte qui sopra si indicano con il nome di *soluzioni di collisione* o anche *soluzioni deboli*.

Il funzionale d'Azione assume un valore finito sulle traiettorie di collisione. Per vedere questo basta ricordare che l'Azione nel problema degli  $N$  corpi assume sulla traiettoria

$$\gamma \equiv \{q_k(t)\}, \tau \leq t \leq \sigma$$

il valore

$$A(\gamma) = \int_{\tau}^{\sigma} \left[ \frac{1}{2} \sum_k m_k \dot{q}_k^2 + \sum_{h \neq k} \frac{m_h m_k}{|q_k(t) - q_h(t)|} \right] dt \quad 3.4$$

(abbiamo posto uguale a uno la costante di gravitazione).

Poiché tutti i termini sono positivi, quest'espressione é finita solo se per ogni scelta degli indici  $k, h$  si ha

$$\int_{\tau}^{\sigma} \dot{q}_k^2 dt < +\infty, \quad \int_{\tau}^{\sigma} \frac{1}{|q_k(t) - q_h(t)|} dt < +\infty \quad 3.5$$

Per il problema di Keplero tutte le traiettorie di collisione sono rettilinee tra istanti di collisione, e possono essere determinate esplicitamente come soluzione di un'equazione differenziale ordinaria in  $R^1$ . Si ottiene, se  $t_c$  é un istante di collisione e  $t_1 \leq t < t_c$  é un intervallo in cui non vi sono collisioni, e indicando con  $y(t)$  le coordinate relative si ottiene

$$y(t) = (t_c - t)^{2/3} y(0) \quad \dot{y}(t) = \frac{2}{3} (t_c - t)^{-1/3} \dot{y}(0)$$

e questa funzione, pur non essendo uniformemente limitata nell'intervallo considerato, é tuttavia a quadrato integrabile.

Poiché vi é al piú un numero finito di collisioni in ogni intervallo temporale finito, e il funzionale d'Azione é additivo, si vede che per soluzioni di collisione le condizioni (3.6) sono soddisfatte.

Tuttavia in corrispondenza alle collisioni l'Azione non é di classe  $C^1$  nella topologia é utilizzata nel principio variazionale di Hamilton.

Le soluzioni di collisione sono punti critici del funzionale d'Azione secondo una definizione di punto critico piú generale di quella che abbiamo utilizzato finora; grosso modo, se  $C$  é il valore del funzionale d'azione in corrispondenza ad una soluzione con collisioni, gli insiemi

$$\{\gamma : A(\gamma) < C\} \quad \{\gamma : A(\gamma) > C\}$$

hanno diversa struttura topologica (questo é naturalmente vero anche in corrispondenza alle soluzioni forti, ma in quel caso é piú facile definire i punti critici attraverso l'annullarsi del differenziale).

Nel problema degli  $N$  corpi, con  $N \geq 3$ , il comportamento delle traiettorie in un intorno temporale degli istanti di collisione é simile a quello del caso  $N = 2$ .

In particolare si puó dimostrare (la dimostrazione é stata data da Sundman nel 1909 ed é riportata ad esempio in ([Me]), che valgono le seguenti stime a-priori per ogni coppia di indici  $h \neq k$ , e per  $|t - t_c|$  sufficientemente piccolo

$$c \leq a_{h,k} < |\xi_{h,k}(t)| < b_{h,k} \leq \lim_{t \rightarrow t_c+,-} \frac{d\xi_{h,k}}{dt} = 0 \quad 3.6$$

dove  $a_{h,k} > 0$  e  $b_{h,k} > 0$  dove per definizione

$$\xi_{h,k}(t) \equiv |t - t_c|^{-2/3} (q_k(t) - q_h(t))$$

Il comportamento asintotico delle distanze e delle velocità relative é dunque lo stesso che avevamo determinato nel caso  $N = 2$  e questo dimostra che l'Azione é finita per le traiettorie di collisione anche nel caso  $N \geq 3$ .

Si puó inoltre dimostrare che esistono per ogni coppia di indici  $k \neq h$  i limiti

$$\lim_{t \rightarrow t_c+,-} \xi_{h,k}(t) \equiv \bar{\xi}_{h,k}^{+,-}$$

Si presenta tuttavia una differenza essenziale. Mentre nel caso  $N = 2$  si ha

$$\bar{\xi}_{h,k}^+ = -\bar{\xi}_{h,k}^-$$

(la traiettoria é di rimbalzo) nel caso  $N \geq 3$  la relazione tra  $\bar{\xi}_{h,k}^+$  e  $\bar{\xi}_{h,k}^-$  dipende per ciascuna coppia di indici  $k \neq h$  dai dati iniziali. Inoltre, se si considera l'insieme delle traiettorie che possono essere ottenute come limite di traiettorie regolari, per questo insieme non é soddisfatta la proprietà di continuità rispetto ai dati iniziali.

In questo senso *il sistema di  $N$  corpi non é regolarizzabile per  $N > 3$* . In particolare non é possibile dare una regola di continuazione unica delle traiettorie agli istanti di collisione. Come conseguenza il comportamento "vicino alle collisioni" é molto complicato per  $N \geq 3$  ed é poco compreso anche nel caso  $N = 3$ .

#### NOTA

Nel problema di Keplero si ha collisione solo se il momento angolare  $J$  rispetto al baricentro é nullo; in particolare le soluzioni di collisione si trovano sulla superficie  $J = 0$  nello spazio delle fasi.

Un risultato della stessa natura si ha anche nel problema degli  $N$  corpi per  $N \geq 3$ . In particolare si possono avere collisioni simultanee degli  $N$  corpi solo se il momento angolare totale del sistema rispetto al baricentro é nullo.

Per collisioni cui prendono parte solo  $M$  degli  $N$  corpi, sia  $J_M(t)$  il momento angolare del sottosistema composto dagli  $M$  corpi considerati rispetto al loro baricentro. Si noti che non si tratta di un sistema isolato, e quindi il baricentro non si muove di moto rettilineo uniforme, e il momento angolare del sottosistema non é una costante del moto.

Utilizzando il fatto che, in un piccolo intervallo di tempo che comprende la collisione considerata i rimanenti  $N - M$  punti materiali si trovano a distanza strettamente positiva dagli  $M$  corpi che entrano in collisione tra loro, Sundman ha dimostrato che  $J_M(t)$  é in questo intervallo di tempi una funzione continua, e che condizione necessaria affinché la collisione abbia luogo é che  $\lim_{t \rightarrow t_c} J_M(t) = 0$ .  $\heartsuit$

### 3.3 CONFIGURAZIONI CENTRALI PER $N \geq 3$

L'invarianza del sistema degli  $N$  corpi per trasformazioni rigide dello spazio implica che il baricentro si muove di moto rettilineo uniforme.

Possiamo allora scegliere un sistema di riferimento inerziale in cui il baricentro é fermo nell'origine. In questo sistema l'invarianza per rotazioni garantisce la conservazione del momento angolare rispetto all'origine e il fatto che il sistema sia autonomo implica che anche l'energia é conservata.

Questi quattro sono i soli invarianti scalari (differenziabili) per il problema degli  $N$  corpi in  $E^3$ . Essi sono funzionalmente indipendenti in tutti i punti dello spazio delle fasi fatta eccezione per le configurazioni centrali che descriviamo in questo capitolo.

Notiamo ora che il problema degli  $N$  corpi *non* ammette posizioni di equilibrio. Infatti, poiché  $U$  é omogeneo di grado  $-1$  si ha, per il teorema di Eulero sulle funzioni omogenee

$$\sum_{k,i} \frac{\partial U}{\partial q_{k,i}} q_{k,i} = -U$$

In una posizione di equilibrio si avrebbe

$$\frac{\partial U}{\partial q_{k,i}} = 0, \quad k = 1, \dots, N, \quad i = 1, 2, 3$$

questo implicherebbe  $U = 0$ , risultato impossibile poiché  $U$  é la somma di termini che sono strettamente positivi su ogni compatto.

Il sistema ammette invece soluzioni in cui ciascuno degli  $N$  corpi traccia un'orbita Kepleriana intorno al baricentro comune (nel sistema di riferimento in cui esso é immobile). Queste sono le prime soluzioni del problema degli  $N$  che sono state trovate (da Eulero e Lagrange) e sono associate alle *configurazioni centrali*.

Eulero si pose il problema di determinare soluzioni in cui i punti materiali collidono seguendo traiettorie rettilinee in modo che le successive configurazioni siano omotetiche (per la precisione Eulero si pose questo problema sotto l'ulteriore ipotesi che gli  $N$  punti fossero allineati).

Dette  $q_k(t)$  le traiettorie degli  $N$  corpi, questo significa che deve esistere una funzione  $\lambda(t)$  tale che

$$q_k(t) = \lambda(t) q_k^0, \quad \forall k \tag{3.7}$$

Sostituendo nell'equazione (3.2) si ottiene, tenendo conto dell'omogeneità di  $U$

$$\ddot{\lambda} M q^0 = -\nabla U(\lambda(t)q^0) = -\lambda^{-2} \nabla U(q^0) \quad 3.8$$

Prendendo in (3.8) il prodotto scalare con  $q^0$  si ha

$$\ddot{\lambda}(t) = \frac{\sigma}{\lambda(t)^2}, \quad \sigma \equiv \frac{(q^0, \nabla U(q^0))}{(q^0, M q^0)} < 0 \quad 3.9$$

Tenendo conto di (3.9) si vede che le coordinate  $q^0$  devono soddisfare

$$\nabla U(q) - \sigma M q = 0 \quad 3.10$$

Da (3.9) si deduce che, per  $t$  prossimo a un istante di collisione  $t_c$  si ha

$$q(t) \simeq |t - t_c|^{2/3}$$

Le configurazioni che soddisfano (3.10) sono dette *configurazioni centrali*.

Non sono conosciute tutte le soluzioni di (3.10) se  $N \geq 4$ . Vedremo in seguito che le (3.10) sono equazioni variazionali, sono cioè le equazioni di Eulero che individuano i punti critici di un funzionale. Utilizzeremo questo per dimostrare che, a meno di una rotazione nello spazio, esistono precisamente  $\frac{N!}{2}$  soluzioni di (3.10) in cui i punti sono allineati (soluzioni colineari), che per  $N \geq 3$  ne esiste almeno una in cui i punti non sono allineati ma giacciono in un piano (soluzioni planari) e che per  $N \geq 4$  ne esiste almeno una in cui i punti non sono coplanari.

Per  $N = 3$  esistono tre configurazioni centrali colineari e due configurazioni centrali non colineari (nel problema dei tre corpi nel sistema di riferimento del baricentro ogni soluzione il cui momento angolare è nullo è necessariamente planare); in esse, i punti materiali sono collocati ai vertici di un triangolo equilatero, *indipendentemente dal valore delle masse*. Queste soluzioni, che differiscono solo per l'orientazione, furono trovate da Lagrange.

#### NOTA

Si noti che le (3.10) non sono omogenee di ordine zero nelle variabili  $q^0$ . La trasformazione  $q^0 \rightarrow \mu q^0$  corrisponde a una diversa scelta di dati iniziali per l'equazione (3.10). Per questo spesso si dá il nome di *configurazioni centrali* alle soluzioni del problema  $\nabla U(q) + C M q = 0$  per  $C > 0$ . ♡

Per  $N \geq 4$  non esiste una classificazione delle configurazioni centrali, né si sa (tranne che per  $N = 4$ ) se tutte le configurazioni centrali piane e non colineari siano isolate modulo rotazioni.

Ritorniamo in seguito sulle proprietà delle configurazioni centrali. Osserviamo per ora che le traiettorie ottenute a partire dalle configurazioni centrali facendo variare  $\lambda(t)$  secondo la legge (3.9) sono soluzioni (deboli) dell'equazione di Newton. Poiché (3.9) descrive il moto su una retta di un punto materiale attratto verso l'origine da una forza newtoniana e con momento angolare zero, se l'energia è negativa esiste per ogni dato iniziale un tempo  $t_c$  in cui  $\lambda(t_c) = 0$ . Questo corrisponde ad una collisione simultanea degli  $N$  punti materiali. La soluzione  $\lambda(t)$  può essere continuata per  $t > t_c$  in una soluzione di rimbalzo; questo dá una continuazione della traiettoria degli  $N$  punti che corrisponde ad un rimbalzo simultaneo. Procedendo in questo modo per tutti i tempi di collisione si ottiene una

soluzione debole periodica del problema a  $N$  corpi; il periodo minimo corrisponde al doppio dell'intervallo di tempo che trascorre tra due rimbalzi.

Un problema simile a quello che portó Eulero a determinare le soluzioni di collisione descritte qui sopra fu affrontato da Lagrange per  $N$  generico. Egli cercó soluzioni della forma

$$q_k(t) = G(t)q_k^0 \quad \forall k \quad 3.11$$

dove  $G(t)$  é una rappresentazione del gruppo rigido di  $E^3$  (gruppo euclideo).

Se si considera un sistema di riferimento inerziale in cui il baricentro coincide con l'origine delle coordinate, ci si riduce a cercare soluzioni della forma

$$q_k(t) = R(t)q_k(0) \quad \forall k \quad 3.12$$

dove  $R(t)$  sono matrici di rotazione.

Le configurazioni  $q^0$  che vengono cosí determinate prendono il nome di *equilibri relativi* perché corrispondono a posizioni d'equilibrio nel sistema di riferimento (non inerziale) che ruota attorno all'origine con moto descritto da  $R(t)$ .

Sostituendo (3.12) in (3.2) si ottiene

$$R^{-1} \ddot{R}(t) m_k q_k^0 = -\nabla_{q_k} U(q)|_{q=q^0} \quad 3.13$$

Posto

$$A(t) \equiv R^{-1} \cdot \dot{R}$$

(la velocità angolare del moto rigido considerato, descritta nel sistema di riferimento del baricentro) si ha

$$\dot{A}(t) = R^{-1} \cdot \ddot{R}(t) - R^{-1} \cdot \dot{R}(t) \cdot R^{-1} \cdot \dot{R}(t)$$

cosí che

$$R^{-1} \cdot \ddot{R}(t) = \dot{A}(t) + A(t)^2 \quad 3.14$$

Convieni considerare tre casi:

- a) I vettori  $q_1(0), \dots, q_N(0)$  sottendono l'intero spazio  $R^3$  (cioé i punti considerati non sono coplanari).
- b) I vettori  $q_1(0), \dots, q_N(0)$  sottendono un sottospazio di dimensione due
- c) I vettori  $q_1(0), \dots, q_N(0)$  sono colineari.

Nel caso a) la (3.13) implica

$$\dot{A}(t) + A^2(t) = cost$$

poiché la matrice considerata agisce come una matrice costante su una base completa.

Poiché  $\dot{A}(t)$  é antisimmetrica mentre  $A^2(t)$  é simmetrica se ne deduce che la matrice  $A^2(t)$  é costante, e quindi che  $A(t)$  é costante poiché la dipendenza dal tempo é continua.

Quindi

$$R(t)^{-1} \dot{R}(t) = B = cost, \quad R(t) = e^{itB} \quad 3.15$$

La (3.13) diventa allora, ponendo  $Aq \equiv \omega \wedge q$

$$m_i \omega \wedge q_k = -\nabla_k U(q), \quad 3.16$$

Questa equazione non ammette soluzioni non nulle; infatti per ipotesi i vettori  $q_k$  sottono  $R^3$  mentre per ogni valore dell'indice  $k$  il termine a sinistra in (3.16) é perpendicolare ad  $\omega$ . Ne deduciamo che *se i vettori  $q_k$  non sono coplanari non esistono soluzioni della 3.12.*

Analizziamo ora il caso in cui i vettori  $q_k$  sono coplanari. Utilizziamo coordinate in cui il piano sotteso dalle  $q_k$  é perpendicolare all'asse 3. Indichiamo con il simbolo  $\Pi$  questo piano.

Da (3.13) si deduce che la matrice  $R^{-1} \cdot \ddot{R}(t)$  applica  $\Pi$  in se ed agisce su di esso come una matrice costante.

La matrice considerata ha dunque la forma

$$R^{-1} \cdot \ddot{R}(t) = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & * \\ c_{21} & c_{22} & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \quad 3.17$$

dove il simbolo \* indica che nessuna informazione viene data su questo elemento di matrice. Indicando con  $w(t)$  il vettore (velocità angolare) per cui

$$A(t)x = \omega(t) \wedge x, \quad \forall x \in R^3$$

si ha, esplicitando i calcoli

$$\dot{A} + A^2 = \begin{pmatrix} -(w_2^2 + w_3^2) & -\dot{w}_3 + w_1 w_2 & \dot{w}_2 + w_1 w_3 \\ \dot{w}_3 + w_1 w_2 & -((w_3^2 + w_1^2)) & -\dot{w}_1 + w_2 w_3 \\ -\dot{w}_2 + w_3 w_1 & \dot{w}_1 + w_3 w_2 & -(w_2^2 + w_3^2) \end{pmatrix} \quad 3.18$$

Confrontando (3.17) con (3.18) si deduce che  $w_1^2 - w_2^2$ ,  $w_3^2$  e  $w_1 w_2$  sono costanti, e che  $0 = \dot{w}_2 = w_1 w_3$ ,  $0 = \dot{w}_1 = -w_2 w_3$ .

Dunque

$$R^{-1} \cdot \ddot{R}(t) = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & 0 \\ c_{21} & c_{22} & 0 \\ 0 & 0 & c_{33} \end{pmatrix} \quad 3.19$$

dove le  $c_{k,h}$  sono opportune costanti. Ne concludiamo che il moto di tutti gli  $N$  corpi ha luogo sul piano (1,2) ed é una rotazione con velocità angolare costante intorno al baricentro.

Infine, nel caso c), si ha  $q_k(0) = c_k \xi$  per un opportuno vettore  $\xi$  e quindi

$$\dot{q}_k(0) = A(0)q_k(0) = c_k A(0)\xi, \quad \forall k$$

Dunque i dati iniziali (posizione e velocità) di ognuno degli  $N$  corpi hanno componente nulla nella direzione ortogonale al piano sotteso dai vettori  $\xi$  e  $A(0)\xi$ . Il moto avviene allora in questo piano, e la conservazione del momento angolare garantisce che anche in questo caso si tratta di una rotazione rigida con velocità angolare costante, cioè

$$A(t) = A(0) \quad \forall t$$



In entrambi i casi b) e c), assumendo come asse 3 quello perpendicolare al piano del moto, si ha

$$A^2 = \begin{pmatrix} -k^2 & 0 & 0 \\ 0 & -k^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Poiché le  $q_k(0)$  giacciono nel piano (1, 2) si ha  $A^2 q_k(0) = -k^2 q_k(0)$  e dunque le equazioni che determinano gli equilibri relativi planari sono

$$k^2 M q = -\nabla U(q), \quad 3.20$$

Notiamo che queste equazioni coincidono con quelle che determinano le configurazioni centrali planari. Dunque *data ogni configurazione centrale planare di  $N$  corpi una soluzione planare (periodica) del problema degli  $N$  corpi si ottiene ruotando la configurazione centrale attorno al suo baricentro con un'opportuna velocità angolare.*

Piú in generale ci si può porre il problema di trovare le soluzioni del problema a  $N$  corpi che hanno la forma

$$q_k(t) = r(t)R(t)q(0)$$

dove  $r(t)$  é una funzione a valori numerici e  $R(t)$  é una famiglia di matrici di rotazione. Queste soluzioni sono dette *omografiche* poiché la configurazione relativa degli  $N$  corpi varia solo per dilatazione.

Sostituendo nell'equazione di Newton si ottiene

$$D(t)q_k^0 = -m_k^{-1} \nabla_{q_k} U(q)|_{q=q^0}, \quad D \equiv \left[ \ddot{r}I + 2\dot{r}R^{-1} \cdot \dot{R} + rR^{-1}\ddot{R} \right] \quad 3.21$$

Indicando come prima con  $w$  il vettore velocità angolare (nel sistema ruotante) la matrice  $D$  ha la forma esplicita

$$D(t) \equiv r^2 \begin{pmatrix} \ddot{r} - r(w_2^2 + w_3^2) & -r\dot{w}_3 - 2w_3\dot{r} + rw_1w_2 & r\dot{w}_2 + 2w_2\dot{r} + rw_1w_3 \\ r\dot{w}_3 + 2w_3\dot{r} + rw_1w_2 & \ddot{r} - r(w_1^2 + w_3^2) & -r\dot{w}_1 - 2w_1\dot{r} + rw_2w_3 \\ -r\dot{w}_2 - 2w_2\dot{r} + rw_1w_3 & r\dot{w}_1 + 2w_1\dot{r} + rw_2w_3 & \ddot{r} - r(w_1^2 + w_2^2) \end{pmatrix}$$

Consideriamo per primo il caso non planare, cioè il caso in cui le  $q_k$  sottendono  $R^3$ . Allora le (3.21) implicano che la matrice  $D(t)$  é costante.

Considerando solo la parte simmetrica di  $D(t)$  si deduce che le quantità  $r^{3/2}w_k$ ,  $k = 1, 2, 3$  sono costanti.

Senza perdita di generalità si possono scegliere gli assi coordinati in modo che  $w_1(0) = w_2(0) = 0$ . Dunque

$$w_1(t) = w_2(t) = 0 \quad \forall t$$

da cui deduciamo

$$R(t) = \begin{pmatrix} \cos\theta(t) & -\sin\theta(t) & 0 \\ \sin\theta(t) & \cos\theta(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \dot{\theta}(t) = w_3(t) \quad 3.22$$

e dunque il moto é piano. La matrice  $D$  assume ora la forma

$$D = r^2 \begin{pmatrix} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 & -r\ddot{\theta} - 2\dot{r}\dot{\theta} & 0 \\ r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} & \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \ddot{r} \end{pmatrix} \quad 3.23$$

Poiché il moto é piano, la conservazione del momento angolare dá

$$r^2\dot{\theta} = j = \text{cost} \quad 3.24$$

dunque

$$2r\dot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta} = 0$$

da cui si deduce che i termini non diagonali in  $D$  sono nulli.

Gli elementi sulla diagonale sono costanti. Considerando l'elemento (1,1) si deduce che esiste una costante  $\lambda$  tale che

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\lambda r^{-2} \quad 3.25$$

Le (3.24), (3.25) sono la versione in coordinate polari del problema di Keplero.

Anche la componente (3,3) di  $D$  é costante, e dunque

$$r^2\ddot{r} = c_1, \quad r^3\dot{\theta}^2 = c_2 \quad 3.26$$

Da (3.26) si deduce l'alternativa  $\theta = \text{cost}$  oppure  $r = \text{cost}$ . Il primo caso dá la configurazione centrale discussa precedentemente; il moto descritto é omotetico e di collisione simultanea. Il secondo implica  $D_{3,3} = 0$  cosí che  $D$  applica  $R^3$  in  $\Pi$ . Dunque

$$[\nabla_{q_k} U(q)](0) \in \Pi \quad \forall k$$

e questo implica che le  $q_k(0)$  non sottendono  $R^3$ , contraddicendo l'ipotesi fatta. Ne concludiamo

### PROPOSIZIONE 3.1

*Le sole soluzioni omografiche non planari del problema degli  $N$  corpi sono le soluzioni omotetiche di collisione che hanno come dato iniziale una configurazione centrale.*  $\diamond$

Nel caso in cui le  $q_k(0)$  sono colineari,  $q_k(0) = c_k \xi$ , il moto ha luogo nel piano sotteso dai vettori  $\xi$  e  $A(0)\xi$  dunque la matrice  $R(t)$  ha la forma (3.22) e la matrice  $D(t)$  ha la forma (3.23).

Questo é vero anche nel caso in cui le  $q_k(0)$  sono coplanari ma non colineari. Infatti, scegliendo gli assi coordinati in modo che il piano delle  $q_k(0)$  sia il piano (1, 2), si deduce che la matrice  $D(t)$  ha la forma

$$D(t) = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & * \\ c_{21} & c_{22} & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

Da questo si deduce che  $r^{3/2}(t)w_1(t)$  e  $r^{3/2}(t)w_2(t)$  sono costanti e quindi

$$\frac{3}{2}r^{1/2}\dot{r}w_m + r^{3/2}\dot{w}_m = 0, \quad m = 1, 2 \quad 3.27$$

D'altra parte per ipotesi  $D$  è un'applicazione di  $\Pi$  in se. Dunque  $D_{3,1} = D_{3,2} = 0$ . Utilizzando (3.27) queste condizioni si possono scrivere

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\dot{r} & rw_3 \\ rw_3 & -\frac{1}{2}\dot{r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Da qui si deduce l'alternativa  $w_1 = w_2 = 0$  oppure  $\dot{r} = w_3 = 0$ . La seconda alternativa riconduce al problema dell'equilibrio relativo discusso precedentemente. La prima alternativa porta la matrice  $R(t)$  ad avere la forma (3.22) e la matrice  $D$  ad avere la forma (3.23).

Si hanno ancora le equazioni (3.24), (3.25) (problema di Keplero) ma ora non deve essere soddisfatta l'equazione (3.26) poiché nessuna informazione è stata ottenuta sull'elemento di matrice  $D_{3,3}$ .

Notiamo che nel caso coplanare (incluso quello colineare) si ha

$$D(t)q^0 = -\lambda q^0$$

così che il dato iniziale  $q^0$  di una soluzione omografica deve soddisfare l'equazione

$$M^{-1}\nabla U(q^0) - \lambda q^0 = 0$$

che coincide con l'equazione che determina le configurazioni centrali.

Abbiamo dunque dimostrato

**PROPOSIZIONE 3.2**

*Data ogni configurazione centrale planare  $\{q_k^0\}$  e ogni soluzione  $r(t), \theta(t)$  del problema di Keplero in coordinate polari, ponendo*

$$q_k(t) \equiv r(t)R(t)q_k^0$$

dove

$$R(t) = \begin{pmatrix} \cos\theta(t) & -\sin\theta(t) & 0 \\ \sin\theta(t) & \cos\theta(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

si ottiene una soluzione planare del problema degli  $N$  corpi.  $\diamond$

Diamo infine la costruzione esplicita delle configurazioni centrali colineari per  $N = 3$ , dovuta a Eulero, e della configurazione centrale noncolineare di Lagrange.

i)  $N = 3$ : *configurazioni centrali colineari* (Eulero)

Per ipotesi i tre corpi sono allineati; indichiamo con  $x_k$  la coordinata del  $k^{mo}$  punto lungo la retta definita dai tre corpi.

Consideriamo solo il caso

$$x_1 < x_2 < x_3.$$

Gli altri casi si trattano in modo analogo. Conviene notare che vi sono tre casi possibili (e non sei) poiché si considerano solo classi di equivalenza, e l'inversione dell'ordine dei tre punti sulla retta può essere ottenuta mediante una rotazione.

Poniamo

$$z \equiv x_2 - x_1, \quad y \equiv x_2 - x_3$$

L'equazione (3.9) assume la forma

$$\sigma z - \frac{m_1 + m_2}{z^2} + \frac{m_3}{y^2} - \frac{m_3}{(z+y)^2} = 0, \quad \sigma y - \frac{m_3 + m_2}{y^2} + \frac{m_1}{z^2} - \frac{m_1}{(z+y)^2} = 0$$

Eliminando  $\sigma$  si ottiene un'equazione per le  $(y, z)$ . Posto  $w = \frac{y}{z}$  si ottiene

$$(m_1 + m_3)w^5 + (3m_1 + 2m_2)w^4 + (3m_1 + m_2)w^3 - (3m_3 + m_2)w^2 - (3m_3 + 2m_2)w - (m_2 + m_3) = 0 \quad 3.28$$

Ogni radice positiva di questa equazione determina una configurazione centrale, o piú precisamente una famiglia di configurazioni centrali che differiscono per una dilatazione (é semplice verificare che le configurazioni centrali formano un insieme invariante per dilatazione).

Si può dimostrare (ad esempio utilizzando la regola di alternanza di segni dei coefficienti) che la (3.11) ammette una sola soluzione positiva  $\bar{w}$ .

La soluzione dipende solo dal rapporto delle masse (un riscaldamento di tutte le masse é equivalente ad un riscaldamento della configurazione). Se  $m_1 < m_2 < m_3$  si ha  $\bar{w} > 1$  mentre se  $m_1 > m_2 > m_3$  si ha  $\bar{w} < 1$  (se i punti materiali sono ordinati secondo le loro masse, i corpi di massa piú piccola stanno piú vicini).

Da (3.28) si deduce anche che, per ogni scelta di  $w_0 > 0$  si può trovare (in modo non unico) una terna di masse per le quali  $w_0$  é soluzione di (3.28).

ii)  $N = 3$  : *configurazioni centrali non colineari* (Lagrange)

Assumiamo che i punti non siano colineari e poniamo

$$q_{k,h} \equiv |q_k - q_h|$$

Per  $N = 3$  le  $q_{k,h}$  insieme alla direzione della congiungente il baricentro con uno dei punti materiali formano un sistema completo di coordinate, modulo una scelta dell'orientazione. Le equazioni (3.10) che individuano le configurazioni centrali sono invarianti per rotazioni e riflessioni. Dunque esse possono essere scritte utilizzando solo le variabili  $q_{k,h}$ .

L'energia potenziale viene allora scritta

$$U(q) = -g \left[ \frac{m_1 m_2}{q_{1,2}} + \frac{m_2 m_3}{q_{2,3}} + \frac{m_3 m_1}{q_{3,1}} \right]$$

Conviene notare che l'equazione (3.10) può essere letta come condizione che la funzione  $U$  sia stazionaria a condizione che sia soddisfatto il vincolo

$$I(q) = \text{cost}, \quad I(q) \equiv \frac{1}{2} \sum_k m_k |q_k|^2$$

La  $\sigma$  gioca allora il ruolo di moltiplicatore di Lagrange. Dimostriamo che  $I$  può essere scritta in funzione delle distanze  $q_{k,h}$ .

Infatti, ponendo  $M \equiv \sum_k m_k$

$$\sum_k \sum_h m_k m_h q_{k,h}^2 = \sum_k \sum_h m_k m_h (|q_k|^2 + |q_h|^2 - 2(q_k, q_h)) = 4MI - \left| \sum_k m_k q_k \right|^2$$

L'ultimo termine é nullo poiché il baricentro é nell'origine, e dunque

$$I = \frac{1}{4M} \sum_k \sum_h m_k m_h q_{k,h}^2$$

La (3.10) per il problema dei tre corpi é equivalente alla condizione che  $U$  sia stazionaria se  $I$  é tenuto costante.

Questo si traduce in

$$-g \frac{m_k m_h}{q_{k,h}} + \sigma m_k m_h q_{k,h} = 0 \quad \forall k \neq h$$

che ha come sola soluzione

$$q_{1,2} = q_{2,3} = q_{3,1} \quad \left( = \frac{\sigma^{1/3}}{g} \right)$$

che corrisponde a un triangolo equilatero.

### 3.4 STUDIO DELLE CONFIGURAZIONI CENTRALI

Abbiamo visto che l'equazione

$$M^{-1} \nabla U(q) - \sigma q = 0 \tag{3.10}$$

determina le configurazioni centrali, gli equilibri relativi e le soluzioni omografiche. Le configurazioni centrali sono la soluzione piú generale, per le altre bisogna anche chiedere che la configurazione sia planare.

Prima di studiare piú in dettaglio l'equazione (3.10) notiamo che le sue soluzioni hanno un'altra proprietá che gioca un ruolo importante nello studio della riduzione del problema a  $N$  corpi utilizzando le sue simmetrie e le costanti del moto associate.

In generale, nel sistema di riferimento inerziale in cui il baricentro é fermo nell'origine il problema degli  $N$  corpi ha quattro integrali primi, le tre componenti del momento angolare e l'energia.

Determiniamo le condizioni affinché nel punto considerato questi quattro integrali siano funzionalmente indipendenti (i loro differenziali sono linearmente indipendenti).

Gli integrali primi hanno la forma

$$H(q, p) = \sum_k \frac{1}{2m_k} p_k^2 + U(q), \quad J_m = \sum_k (q_k \wedge p_k)_m$$

e non sono funzionalmente indipendenti in corrispondenza a quei punti nello spazio delle fasi in cui vale l'identitá

$$dH(q, p) + \sum_m c_m dJ_m = 0$$

per opportune costanti  $\{c_m\}$ ,  $m = 1, 2, 3$ .

In forma esplicita

$$\sum_k \frac{p_k}{m_k} dp_k + \sum_k \nabla_k U(q) dq_k + \sum_m c_m \left( \sum_k (q_k \wedge dp_k)_m + (dq_k \wedge p_k)_m \right) = 0 \tag{3.29}$$

Poiché i differenziali  $dq_k$  e  $dp_k$  sono linearmente indipendenti tra loro l'equazione (3.29) implica per ogni valore dell'indice  $k$

$$\frac{p_k}{m_k} dp_k + \nabla_k U(q) dq_k + \sum_m c_m ((q_k \wedge dp_k)_m + (dq_k \wedge p_k)_m) = 0$$

o ancora

$$\frac{p_k}{m_k} dp_k + \nabla_k U(q) dq_k + c((q_k, J dp_k) + (dq_k, J p_k)) = 0$$

dove  $J$  é la matrice simplettica di rango due.  
Questo conduce alle equazioni

$$p_k = m_k c J q_k, \quad \nabla_k U(q) = -c p_k$$

da cui si ottiene

$$\nabla_k U(q) = -c^2 m_k q_k, \quad k = 1, \dots, N$$

che é la forma esplicita dell' equazione (3.10).

*Dunque le configurazioni centrali sono anche le configurazioni nelle quali i quattro differenziali  $dH$  e  $dJ_k$  non sono linearmente indipendenti.*

Esse sono dunque punti singolari quando si voglia ridurre il sistema sulla varietá che nello spazio delle fasi corrisponde a valori prefissati dell'energia e del momento angolare. Questa varietá é regolare e ha codimensione quattro tranne che in corrispondenza alle configurazioni centrali, in cui ha dimensione tre.

Indichiamo con  $\Delta$  l'insieme delle configurazioni di collisione, cioè quelle in cui si ha  $q_k = q_h$  per (almeno) una coppia di indici  $k, h$  distinti, e consideriamo (3.28) definita su  $R^{3N} - \Delta$ . Si tratta di un sistema di  $3N$  equazioni analitiche reali in  $3N$  incognite. Diremo che una successione ordinata

$$\{q_1, \dots, q_N\}, \quad q_k \in R^3 - \Delta$$

é soluzione di (3.10) se esiste un numero  $\sigma$  tale che (3.10) sia soddisfatta.

Se  $\{q_k\}$  é una soluzione, lo sono anche  $\{Rq_k\}$ ,  $R \in SO(3)$  e  $\{cq_k\}$ ,  $c \in R$  (con  $\sigma' = c^{-2}\sigma$ ). Considereremo equivalenti le soluzioni che differiscono per queste operazioni.

Le soluzioni di (3.10) sono sufficientemente conosciute solo per  $N \leq 3$ . In particolare non sono conosciute tutte le soluzioni per  $N = 4$ , neppure nel caso in cui tutte le masse sono uguali. Si congetture, ma questo non é stato ancora dimostrato, che per quasi tutte le scelte di masse vi siano solo un numero finito di classi di equivalenza.

Per studiare l'equazione (3.10) conviene mettere in luce il suo carattere variazionale.

Il modo piú naturale di fare questo é il seguente.

Introduciamo un prodotto scalare (e quindi una metrica) in  $R^{3N}$  mediante la matrice  $M$  :

$$\langle q, q \rangle \equiv \sum_k m_k (q_k, q_k) \equiv (q, Mq) \quad 3.30$$

(utilizziamo il simbolo  $(,)$  per il prodotto scalare euclideo). Notiamo che le soluzioni di (3.10) soddisfano automaticamente la condizione

$$\sum_k m_k q_k = 0$$