Prova scritta di Meccanica superiore: 4 Maggio 2007

Esercizio 1

Si consideri in $T^*(\mathbb{R}^2\backslash\{0\})$, parametrizzato da coordinate canoniche (q_1, q_2, p_1, p_2), l'Hamiltoniana

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + \frac{\beta}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2}}(q_1 p_2 - q_2 p_1) + \alpha \log\left(\sqrt{q_1^2 + q_2^2}\right),$$

dove α e β sono due costanti.

1. Si dimostri che H è completamente integrabile.
2. Si discuta l'esistenza delle variabili azione angolo al variare di α e β.
3. Si dimostri che l'equazione di Hamilton-Jacobi definita dall'Hamiltoniana H è separabile in coordinate polari su $\mathbb{R}^2\backslash\{0\}$.

Esercizio 2

Siano $x_i, i = 1, 2, 3$ coordinate cartesiane in $M = (R > 0)^3$.

1. Si verichi che:
$$\{x_1, x_2\} = x_1 x_2, \quad \{x_2, x_3\} = \sigma x_2 x_3, \quad \{x_1, x_3\} = 0 \tag{1}$$
definisce una parentesi di Poisson su M per ogni valore del parametro reale σ.
2. Si dimostri che la funzione $x_1^\sigma x_3$ è un Casimir della parentesi (1).
3. Si trovino coordinate su M nelle quali le parentesi (1) siano date da
$$\{y_1, y_2\} = 1, \quad \{y_1, y_3\} = 0 \quad \{y_2, y_3\} = 0.$$
4. Si consideri il campo vettoriale su M dato da
$$X = \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{1}{\sigma}\frac{\partial}{\partial x_3}$$
e sia P
$$P = P^{ij}\frac{\partial}{\partial x^i} \wedge \frac{\partial}{\partial x^j}$$
il bivittore associato alla parentesi (1). Si calcoli il bivettore Q dato dalla derivata di Lie di P rispetto ad X. Si dimostri che anche Q da luogo a una parentesi di Poisson.
5. Si osservi che le parentesi di Poisson associate a Q sono lineari, e dunque associate ad una algebra di Lie $\mathfrak{g}$. Si trovi una realizzazione di $\mathfrak{g}$ attraverso matrici 2×2.

Suggerimento: si consideri una base M_1, M_2 e M_3 di $\mathfrak{g}$ con $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e M_1 e M_3 matrici diagonali.