Esame di Meccanica Superiore 5 Luglio 2008

Si consideri il sistema Hamiltoniano con due gradi di libertà definito nelle variabilie canoniche (q_1, q_2, p_1, p_2) dalla Hamiltoniana

$$H(q_1, q_2, p_1, p_2, \epsilon) = \frac{p_1^2 + p_2^2}{2} + \frac{1}{\epsilon^2}(1 - \cos(\epsilon \omega q_1) \cos(\epsilon q_2))$$

dove ϵ è positivo e ω è irrazionale.

1. Mostrare che il punto $q_1 = 0, q_2 = 0$ è un punto di equilibrio stabile per l' Hamiltonian $H(q_1, q_2, p_1, p_2, \epsilon)$.

2. Dimostrare che le nuove coordinata

$$J_1 = \frac{p_1^2 + \omega^2 q_1^2}{2\omega}, \quad J_2 = \frac{p_2^2 + q_2^2}{2}$$

$$\chi_1 = \arctan \frac{\omega q_1}{p_1}, \quad \chi_2 = \arctan \frac{q_2}{p_2}$$

sono le coordinate azione-angolo per l' Hamiltoniana

$$H_0(q_1, q_2, p_1, p_2) = \lim_{\epsilon \to 0} H(q_1, q_2, p_1, p_2, \epsilon).$$

Cioè (a) la trasformazione $(q_1, q_2, p_1, p_2) \to (\chi_1, \chi_2, J_1, J_2)$ è canonica; (b) i punti con coordinate

$$(\chi_1, \chi_2, J_1, J_2) \quad \text{e} \quad (\chi_1 + 2\pi n, \chi_2 + 2\pi m, J_1, J_2), \quad \forall m, n \in \mathbb{Z}$$

sono identificati; (c) l'Hamiltoniana H_0 nelle nuove coordinate non dipende da χ_1 e χ_2.

3. Calcolare la funzione generatrice

$$W(\chi_1, \chi_2, \tilde{J}_1 \tilde{J}_2, \epsilon) = \tilde{J}_1 \chi_1 + \tilde{J}_2 \chi_2 + \sum_{k=1}^{2} \epsilon^k F_k(\chi_1, \chi_2, \tilde{J}_1, \tilde{J}_2)$$

della trasformazione canonica $(\chi_1, \chi_2, J_1, J_2) \to (\tilde{\chi}_1, \tilde{\chi}_2, \tilde{J}_1, \tilde{J}_2)$ che trasforma la Hamiltoniana $H(\chi_1, \chi_2, J_1, J_2, \epsilon)$ nella forma

$$K(\tilde{\chi}_1, \tilde{\chi}_2, \tilde{J}_1, \tilde{J}_2) = K_0(\tilde{J}_1, \tilde{J}_2) + \epsilon K_1(\tilde{J}_1, \tilde{J}_2) + \epsilon^2 K_2(\tilde{J}_1, \tilde{J}_2) + O(\epsilon^3).$$

Suggerimento: le incognite sono le funzioni F_1, F_2, K_1 e K_2. Per determinare K_1 e K_2, osservare che l'integrale di $\partial_{\chi_j} F_k,\ j,k = 1,2$ sul toro bidimensionale è identicamente nullo.

4. Trovare le frequenze di oscillazione vicino al punto di equilibrio $q_1 = 0$, $q_2 = 0$. Determinare la correzione ϵ^2 delle frequenze come funzione di $\tilde{J}_1$ e $\tilde{J}_2$.
Suggerimento: trovare le Hamiltoniane $K_0(\tilde{J}_1, \tilde{J}_2)$, $K_1(\tilde{J}_1, \tilde{J}_2)$ e $K_2(\tilde{J}_1, \tilde{J}_2)$ e calcolare la frequenza dei moti associati all'Hamiltoniana K.