Esame di Meccanica Superiore, 08/03/07

Esercizio 1

Siano x, y coordinate cartesiane in $\mathbb{R}^2$ privato della diagonale $\{x = y\}$; siano p_x e p_y i loro momenti coniugati. Sian $n \in \mathbb{N}$ e si consideri la Hamiltoniana

$$H_n = \frac{1}{2}\left(\frac{p_y^2 - p_x^2}{x - y}\right) + a_n \sum_{j=0}^{n} x^j y^{n-j}$$

dove a_n è una costante.

1. Si dimostri che H_n è separabile nelle coordinate (x, y) per ogni n e si trovi una seconda costante del moto K_n.
2. Si pongano $n = 1$ e $a_1 = \frac{1}{2}$ e si calcolino esplicitamente le variabili Q_1 e Q_2 canonicamente coniugate ad H_1 e K_1.
3. Si pongano $n = 2$ e $a_2 = \frac{1}{3}$. Si discuta l'esistenza delle varibili azione-angolo per H_2.

Esercizio 2

Si consideri nello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$ dotato delle coordinate (x, y, z) la parentesi definita da

$$\{x, y\} = z, \quad \{x, z\} = -\tau(x^2 + z^2), \quad \{y, z\} = x$$

dove τ è un parametro reale.

1. Si dimostri che la parentesi sopra definita è di Poisson.
2. Si trovi la funzione di Casimir C di queste parentesi di Poisson.
3. Si discuta la struttura delle orbite del campo vettoriale di Hamiltoniana

$$H = y^2.$$