Prova scritta di Meccanica superiore: 15 Ottobre 2008

Esercizio 1
Si consideri in $T^*\mathbb{R}^3$ la Hamiltoniana

$$H = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + G(\sqrt{x^2+y^2}) + F(z),$$

con F e G funzioni lisce di una variabile.

1. Si dimostri che H è completamente integrabile.

2. Si dimostri che H è separabile in coordinate cilindriche

$$r = \sqrt{x^2+y^2}, \quad \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right), \quad z = z.$$

3. Si consideri la deformazione

$$H = H + (\sqrt{x^2+y^2})^{\alpha}\Phi(\theta, xp_y - yp_x),$$

dove Φ è una funzione liscia di due variabili periodica nel primo argomento di periodo $T = 2\pi$. Si trovi un valore di α per il quale anche H' risulti separabile in coordinate cilindriche per ogni scelta della funzione Φ.

Esercizio 2

Si considerin $T^*\mathbb{R}^2$ parametrizzato di (u_1, u_2, q_1, q_2) la parentesi antisimmetrica definita da

$$\{q_i, q_j\} = 0, \quad \{u_i, q_j\} = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2,$$
$$\{u_1, u_2\} = f(q_1, q_2).$$

1. Si dimostri che $\{.\,,\,.\}$ definisce una parentesi di Poisson per ogni scelta di una due forma

$$\omega = f(q_1, q_2) dq_1 \wedge dq_2 \ \text{ in } \mathbb{R}^2.$$

2. Posta $f(q_1, q_2) = B(costante)$ si trovino coordinate canoniche per tale parentesi.

3. Lo stesso per la funzione

$$f(q_1, q_2) = f(\sqrt{q_1^2 + q_2^2}).$$