# Esame di Meccanica Superiore, 23/02/07

## Esercizio 1

Sia $M = \mathbb{R}^3_+$ (dove $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$) con coordinate $(x^1, x^2, x^3)$ e si consideri il tensore controvariante

$$P = \sum_{i,j=1}^{3} P^{ij} \frac{\partial}{\partial x^i} \wedge \frac{\partial}{\partial x^j}, \quad P^{ij} := \begin{pmatrix} 0 & x^1x^2 & -x^1x^3 \\ -x^1x^2 & 0 & x^2x^3 \\ x^1x^3 & -x^2x^3 & 0 \end{pmatrix}$$

1) Si dimostri che $P$ definisce su $M$ una prentesi di Poisson tramite

$$\{x^i, x^j\} := P^{ij}.$$

2) Si dimostri che per qualunque funzione $F = F(x^1, x^2, x^3)$, il flusso del campo Hamiltoniano $X_F := P\,dF$ avviene su una opportuna superficie $S_A$ definita dall'equazione

$$x^1x^2x^3 = A,$$

e si determini la costante $A$ in funzione del dato inziale $x^1(0)$, $x^2(0)$, $x^3(0)$.

3) Si discuta la struttura delle orbite del campo $X_H$ associato alla Hamiltoniana

$$H = x^1 + x^2 + x^3.$$

4) Osservato che $\{x^1, x^2\} = P^{12}$ definisce su $S_A$ una parentesi di Poisson simplettica, se ne calcolino le coordinate canoniche. (*Suggerimento: puó essere conveniente sfuttare la simmetria di $P$ e cercare una trasformazione della forma* $y^1 = f(x^1)$, $y^2 = f(x^2)$).

## Esercizio 2

Si consideri in $T^*\mathbb{R}^3$ la Hamiltoniana

$$H = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + G(\sqrt{x^2 + y^2}) + F(z),$$

con $G$ ed $F$ funzioni lisce di una variabile.

1) Si dimostri che $H$ è completamente integrabile.

2) Si dimostri che $H$ è separabile in coordinate cilindriche

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \arctan(y/x), \quad z = z.$$

3) Si consideri la deformazione

$$H' = H + (\sqrt{x^2 + y^2})^\alpha \Phi(\theta, xp_y - yp_x),$$

dove $\Phi$ è una funzione liscia di due variabili, periodica di periodo $T = 2\pi$ nel primo argomento. Si trovi un valore di $\alpha$ per il quale $H'$ risulti separabile in coordinate cilindriche per ogni scelta della funzione $\Phi$.