НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ СУБРИМАНОВОЙ ГЕОМЕТРИИ

А. А. Аграчев

Аннотация. Субриманова геометрия есть геометрия пространств с неголономными связями. В статье дан неформальный обзор некоторых тем этого предмета, начиная с построения геодезических линий и кончая недавним определением кривизны.

Содержание

Введение

Этот обзор посвящён недавнему развитию давнего представления о расстоянии между двумя пунктами, как длине кратчайшего среди всех возможных путей, связывающих эти пункты. Прилагательное “возможный” здесь не случайно; развитие связано прежде всего с ним.

В евклидовой геометрии кратчайшие пути суть прямолинейные отрезки, удовлетворяющие обычным аксиомам. В римановом мире евклидова геометрия – только одна из бесчисленных возможностей. Тем не менее, любая риманова метрика хорошо аппроксимируется евклидовой на очень малых расстояниях: окрестность любой точки, разглядываемая под всё более сильным микроскопом, становится всё менее отличимой от евклидовой. В пределе вместо исходного пространства получается пространство начальных скоростей путей, исходящих из данной точки; оно-то и есть евклидово.

Риманова конструкция была основана на предшествовавшей ей работе Гаусса, изучавшего поверхности в трёхмерном евклидовом

SISSA, Триест & МИАН, Москва.

пространстве. Расстояние между двумя точками на поверхности равно длине кратчайшего пути по этой поверхности, соединяющего данные точки. Начальные скорости гладких кривых, исходящих из данной точки и лежащих на поверхности, образуют касательную плоскость к поверхности, то есть евклидову плоскость. Касательные к поверхности в двух разных точках плоскости изометричны, но малые окрестности этих точек на поверхности, вообще говоря, не изометричны; они точно на изометричны, если гауссова кривизна поверхности принимает разные значения в этих точках.

Риман обобщил гауссову конструкцию на высокие размерности и объяснил, что всё может быть сделано внутренним образом, без вложения в евклидово пространство. В самом деле, для того, чтобы измерять длины кривых, достаточно знать евклидову длину их скоростей. Риманово пространство есть гладкое многообразие, касательное пространство к которому в каждой точке снабжено своей собственной евклидовой структурой, причём эти структуры гладко зависят от точки.

Для обитателя риманова пространства, сидящего в некоторой точке, касательные векторы суть направления, в которых он может двигаться и посылать информацию, а также откуда он может её получать. Он может измерять длину векторов и углы между векторами, касательными в одной и той же точке, согласно евклидовым правилам; и это, в общем, всё, что он может делать. Дело однако в том, что такой обитатель, в принципе, может полностью восстановить геометрию пространства, производя эти простые измерения вдоль разных гладких кривых.

В субримановом пространстве мы не можем двигаться и посылать информацию во всех направлениях, как и получать её отовсюду. Имеются ограничения (наложенные Богом, моральным императивом, правительством или просто законами природы). Субриманово пространство есть гладкое многообразие, в касательном пространстве к которому в каждой точке выбрано некоторое допустимое подпространство, снабжённое евклидовой структурой, причём допустимое подпространство и евклидова структура на нём гладко зависят от точки.

Допустимые пути суть пути с допустимыми скоростями. Расстояние между точками есть точная нижняя грань длин соединяющих эти точки путей. Предполагается, что любую пару точек, лежащих на одной компоненте связности многообразия, можно соединить допустимым путём. Это условие на первый взгляд может показаться странным и трудновыполнимым, но на самом деле это не так. Дело в том, что допустимые подпространства меняются от точки к точке, и наше условие выполняется при более или менее общей зависимости подпространств от точки; точнее будет сказать, что оно не выполняется только при очень специальном выборе допустимых подпространств.

Пусть размерность допустимых подпространств равна k, а многообразие имеет размерность $n > k$ и связно. Живя в таком субримановом мире, мы передвигаемся, шлём и получаем информацию по правилам k-мерного евклидова пространства, но при этом, в принципе, можем добраться до любой точки n-мерного многообразия. В субримановом пространстве часть координат как бы скрыта, плохо различима на малых расстояниях. Это замечательный и ещё не освоенный источник для мистических спекуляций с их таинственными скрытыми измерениями, но также и для физиков–теоретиков с их постоянным поиском новых безумных формализаций!

В механике это естественная геометрия систем с неголономными связями: коньков, колёс, катящихся шаров, подшипников и т. д. Такого рода геометрия могла бы также служить для моделирования социального поведения в условиях ограничительной бюрократической и правовой системы, позволяя увеличить степень свободы без нарушения имеющихся правил.

Это то, что касается естественных приложений. Впрочем, дело математиков, – развить саму геометрию, иначе нечего будет прилагать. В настоящее время это обширная и быстро развивающаяся область, хотя только в самые последние годы стали появляться математики, для которых субриманова геометрия – главная специальность. Здесь отметились люди с самым разным опытом: гиперболическая, конформная и CR-геометрия, гипоэллиптические операторы, некоммутативный гармонический анализ, вариационное исчисление и геометрическая теория меры, оптимальное управление и неголономная механика. Данная статья ни в коем случае не претендует на исчерпывающий обзор основ субримановой геометрии: затронуты лишь некоторые близкие автору темы.

Я старался писать в неформальном повествовательном стиле, надеюсь, не в ущерб точности. Литературные ссылки вынесены в комментарии к каждой главе, чтобы не прерывать изложение. Цель обзора – рассказать возможно более широкому кругу математиков об этой красивой и увлекательной области; возможно, привлечь новых исследователей или хотя бы доставить читателю некоторое интеллектуальное удовольствие.

1. Геодезические

Итак, пусть $\Delta \subset TM$ – гладкое векторное распределение на многообразии M, а $\bar{\Delta}$ – пространство гладких векторных полей на M со значениями в Δ. Векторные поля из $\bar{\Delta}$ называются также *горизонтальными* полями. Положим $\Delta_q = \Delta \cap T_qM,\ q \in M$. Гладкая кривая $\gamma : [t_0, t_1] \to M$ называется *горизонтальной* или *допустимой*, если $\dot{\gamma}(t) \in \Delta_{\gamma(t)},\ t_0 \leq t \leq t_1$. Композицию нескольких последовательно проходимых допустимых кривых естественно считать допустимой. Такая композиция будет, вообще говоря, не гладкой, а лишь кусочно-гладкой. Более гибкий и удобный класс допустимых кривых образуют липшицевы допустимые кривые, то есть такие липшицевы кривые $\gamma : [t_0, t_1] \to M$, что $\dot{\gamma}(t) \in \Delta_{\gamma(t)}$ для почти всех $t \in [t_0, t_1]$. Эти кривые суть решения неавтономных дифференциальных уравнений вида $\dot{q} = V_t(q)$, где $V_t \in \bar{\Delta},\ t_0 \leq t_1$, а отображение $(q, t) \mapsto v_t(q)$ измеримо и локально ограничено.

Введём отношение эквивалентности на M, объявив пару точек эквивалентными, если их можно соединить допустимой кривой. Замечательная “Теорема об орбитах” Суссмана гласит, что классы эквивалентности суть погруженные подмногообразия в M. Эта не слишком сложная, но важная теорема даёт также некоторое описание касательных пространств к этим подмногообразиям, которое мы сейчас приведём.

Напомним, что векторное поле V на M называется полным, если решения дифференциального уравнения $\dot{q} = V(q)$ определены на всей вещественной оси $\mathbb{R}$ и что все поля с компактными носителями – полные. Пусть V – полное поле, и отображение $P^t : q(0) \mapsto q(t)$ сдвигает каждую точку M на время t вдоль решения уравнения $\dot{q} = V(q)$, проходящего через эту точку; тогда $P^t : M \to M$ есть диффеоморфизм, причём $P^{t+s} = P^t \circ P^s,\ \forall t, s \in \mathbb{R}$. Однопараметрическая группа диффеоморфизмов $P^t,\ t \in \mathbb{R}$, есть *поток, порождённый полем* V. Этот поток удобно обозначать в виде экспоненты: $P^t \doteq e^{tV}$. Поток, порождённый горизонтальным полем, называется горизонтальным.

Рассмотрим теперь подгруппу группы диффеоморфизмов многообразия M, порождённую горизонтальными потоками:

$$\mathcal{P} \doteq \left\{ e^{t_1 f_1} \circ \cdots \circ e^{t_k f_k}() : f_i \in \bar{\Delta},\, t_i \in \mathbb{R},\, i = 1, \ldots, k,\ k = 1, 2, \ldots \right\}.$$

Ясно, что орбиты действия группы $\mathcal{P}$ в M содержатся в наших классах эквивалентности. В действительности, орбиты совпадают с классами эквивалентности, а касательное пространство к орбите, содержащей точку $q \in M$ имеет вид:

$$T_q\mathcal{P}(q) = span\{(P_*V)(q) : P \in \mathcal{P},\ V \in \bar{\Delta}\}.$$

В самом деле, пусть $P_{1*}V_1, \dots, P_{k*}V_k$ образуют базис пространства $span\{(P_*V)(q) : P \in \mathcal{P},\ V \in \bar{\Delta}\}$. Тогда росток k-мерного подмногообразия

$$\left\{e^{s_1 P_{1*}V_1} \circ \cdots \circ e^{s_k P_{k*}V_k} : s_i \text{ близки к нулю}\right\} \tag{1.1}$$

содержится в орбите $\mathcal{P}(q)$; действительно, $e^{sP_*V} = P \circ e^{sV} \circ P^{-1}$.

Более того, ростки вида (1.1), посаженные во всех точках $q \in M$, служат базой некоторой топологии, вообще говоря, более строгой, чем исходная топология многообразия M. Компоненты связности пространства M, снабжённого этой строгой топологией, суть погруженные подмногообразия, фактически, по определению. Действительно, "окрестности" (1.1) – координатные карты этих подмногообразий. Горизонтальные кривые непрерывны в строгой топологии, откуда следует, что компоненты связности совпадают с нашими классами эквивалентности. Это и есть теорема Суссмана об орбитах.

Поскольку горизонтальные векторные поля касаются орбит во всех точках, то и коммутаторы этих полей касаются. В конечном счёте получаем, что

$$Lie_q\Delta \doteq \{[V_1, [V_2, \cdots, V_k]\cdots](q) : V_i \in \bar{\Delta},\ i = 1, \dots, k,\ k = 1, 2, \dots\}$$

лежит в $T_q\mathcal{P}(q)$. В частности, если $Lie_q\Delta = T_qM$, то содержащая q орбита – открытое подмножество M (в исходной "слабой" топологии). В дальнейшем, мы всегда будем предполагать, что:

$$Lie_q\Delta = T_qM, \quad \forall\, q \in M. \tag{1.2}$$

Распределения, удовлетворяющие условию (1.2), по разному называются специалистами из разных областей: "скобочно порождающими" , "вполне неголономными" , "удовлетворяющими условию Хермандера".

Из вышесказанного следует, что выполнение условия (1.2) гарантирует транзитивность действия группы $\mathcal{P}$ на M. Этот факт называется теоремой Рашевского–Чоу.

Замечание. Если многообразие M и распределение Δ вещественно аналитичны, то имеет место не только включение $Lie_q\Delta \subset T_q\mathcal{P}(q)$, но и равенство $Lie_q\Delta = T_q\mathcal{P}(q)$. Это можно вывести, например, из аналитичности решений обыкновенных дифференциальных уравнений с аналитической правой частью. В этом случае условие (1.2) не только достаточно, но и необходимо для транзитивности действия группы $\mathcal{P}$ на M.

Определение. *Гладкое векторное подрасслоение $\Delta \subset TM$, снабжённое евклидовой структурой и удовлетворяющее условию (1.2), называется субримановой структурой.*

Скалярное произведение пары векторов $v_1, v_2 \in \Delta_q$ мы будем обозначать символом $\langle v_1|v_2\rangle$, а длину вектора $v \in \Delta_q$ символом $|v| = \langle v|v\rangle^{\frac{1}{2}}$. Длина горизонтальной кривой $\gamma : [t_0, t_1] \to M$:

$$length(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} |\dot{\gamma}(t)|\, dt.$$

Ясно, что длина кривой не меняется при её перепараметризации.

Субриманово расстояние между точками $q_0, q_1 \in M$, с лёгкой руки Михаила Громова называемое также расстоянием Карно–Каратеодори:

$$\delta(q_0, q_1) = \inf\{length(\gamma) :$$

$$\gamma : [0,1] \to M \text{ горизонтальна},\ \gamma(0) = q_0,\ \gamma(1) = q_1\}.$$

Если $\Delta = TM$, то это обычное риманово расстояние; если же $\Delta \subsetneqq T_qM$, то оно весьма необычно. Как бы то ни было, субриманова метрика, как и риманова, индуцирует стандартную топологию на M. Действительно, анализируя условие (1.2) нетрудно понять, что близкие к q_0 точки можно соединить с q_0 короткими горизонтальными путями.

Таким образом, малые субримановы шары компактны. Более того, как и в римановом случае, субриманово метрическое пространство полно тогда и только тогда, когда все шары компактны; при этом центр любого компактного шара соединён со всеми точками шара кратчайшими горизонтальными путями. Иными словами, если шар радиуса r с центром в q_0 компактен, и q_1 находится на расстоянии не более r от q_0, то inf в определении $\delta(q_0, q_1)$ можно заменить на min.

Итак, важно уметь описывать кратчайшие пути. Как и в римановом случае, несколько проще описать геодезические, то есть такие горизонтальные кривые $\gamma : [0,1] \to M$, что $\gamma|_{[t,s]}$ есть кратчайший путь между $\gamma(t)$ и $\gamma(s)$ для любых достаточно близких друг к другу t и s, при том, что вся кривая γ может и не быть кратчайшим путём между $\gamma(0)$ и $\gamma(1)$.

Напомним, что в римановом случае геодезическая характеризуется своей начальной точкой и начальной скоростью. Если же

$\Delta \subsetneq T_qM$, то исходящие из точки q геодезические не могут характеризоваться начальной скоростью, это сразу ясно. В самом деле, как мы знаем, исходящие из q кратчайшие пути заполняют целую окрестность точки q, но при этом их начальные скорости лежат в Δ_q. У нас просто не хватает начальных скоростей! Положение исправляет переход от скоростей к импульсам, то есть от касательного расслоения к кокасательному.

Пусть $p \in T_q^*M$; положим $h_q(p) = \max\{\langle p, v\rangle : v \in \Delta_q,\ |v| \le 1\}$ – норма на $\Delta^* = T_q^*M/\Delta_q$, двойственная евклидовой норме на Δ_q. Меняя теперь не только p, но также и q, мы получаем неотрицательную функцию $h : T^*M \to \mathbb{R}$. Более того, $h^{-1}(0) = \Delta^\perp$ – ортогональное дополнение к Δ, а сужение h на $T^*M \setminus \Delta^\perp$ – гладкая функция.

Нетрудно видеть, что $h^2|_{T_q^*M}$ – неотрицательная квадратичная форма. Важно отметить, что это, вообще говоря, вырожденная квадратичная форма, причём $\ker h^2|_{T_q^*M} = \Delta_q^\perp$. Таким образом, множества уровня $h^{-1}(c) \cap T_q^*M$, где $c > 0$, суть гомотетичные эллиптические цилиндры с образующим подпространством $\Delta_q^\perp$.

Напомним, что в T^*M имеется каноническая симплектическая структура. Пусть $\pi : T^*M \to M$ – стандартная проекция, $\pi(T_q^*M) = q$. Сначала определяется тавтологическая дифференциальная 1-форма s на T^*M, $s_\lambda = \lambda \circ \pi_* \in T_\lambda^*(T^*M)$, $\lambda \in T^*M$, а затем уже симплектическая структура $\sigma = ds$. В локальных координатах (p, q) на T^*M, где $q = (q^1, \dots, q^n)$, $\lambda = p_1dq^1 + \cdots + p_ndq^n$, тавтологическая форма, соответствуя своему названию, записывается в виде $s = p_1dq^1 + \cdots + p_ndq^n$, а симплектическая форма принимает вид $\sigma = dp_1 \wedge dq^1 + \cdots + dp_n \wedge dq^n$.

Напомним, что характеристикой (характеристической кривой) дифференциальной формы называется кривая, скорость которой в каждой точке лежит в ядре формы. Симплектическая форма σ невырождена, так что у неё нет характеристик, а вот у сужения σ на множество уровня функции h они, вообще говоря, есть. Характеристики формы $\sigma|_{h^{-1}(c)}$ называют *субримановыми экстремалями*, при этом различают случаи *нормальных экстремалей* $(c > 0)$ и *анормальных экстремалей* $(c = 0)$. Экстремали суть кривые в T^*M.

Теорема 1. *Любая геодезическая есть проекция в M некоторой экстремали.*

Геодезическая называется нормальной, если она – проекция нормальной экстремали, и анормальной, если она – проекция анормальной экстремали. Вообще говоря, одна и та же геодезическая может оказаться и нормальной, и анормальной.

Рассмотрим теперь экстремали повнимательнее. Начнём с нормальных. Пусть $r > 0$; гомотетия $\lambda \mapsto r\lambda$, $\lambda \in T_q^*M$, $q \in M$, переводит характеристики формы $\sigma|_{h^{-1}(c)}$ в характеристики формы $\sigma|_{h^{-1}(rc)}$, поэтому достаточно рассмотреть нормальные экстремали, лежащие в $h^{-1}(1)$. Заметим, что $h^{-1}(1)$ – подмногообразие коразмерности 1 в T^*M, а касательное к нему пространство в точке λ – ядро линейной формы $d_\lambda h$. Таким образом, $\ker \sigma|_{h^{-1}(1)}$ есть косоортогональное дополнение к $\ker d_\lambda h$; это прямая, порождённая вектором $\vec{h}(\lambda)$, где $\sigma(\cdot, \vec{h}(\lambda)) = dh$.

Векторное поле $\vec{h}$ на T^*M есть не что иное, как гамильтоново поле, отвечающее гамильтониану $h : T^*M \to \mathbb{R}$. Таким образом, нормальные экстремали суть траектории гамильтоновой системы $\dot{\lambda} = \vec{h}(\lambda)$. Сформулированная выше теорема гласит, что любая геодезическая есть проекция некоторой экстремали. В случае нормальных экстремалей верно и обратное:

Предложение 1. *Проекция любой траектории гамильтоновой системы $\dot{\lambda} = \vec{h}(\lambda)$ есть геодезическая.*

Коразмерность $h^{-1}(0) = \Delta^\perp$ в T^*M больше 1, и ранг формы $\sigma|_{h^{-1}(0)}$ может меняться от точки к точке, поэтому анормальные экстремали описать несколько сложнее. Заметим, что анормальные экстремали, согласно их конструкции, зависят только от распределения Δ, но не от евклидовой структуры на нём. Кроме того, проекции анормальных экстремалей не обязаны быть геодезическими.

Настало время привести конкретные примеры субримановых структур и их геодезических. Простейший класс субримановых пространств образуют должным образом интерпретированные изопериметрические задачи на плоскости.

Пусть ω – гладкая дифференциальная 1-форма на $\mathbb{R}^2$,

$$\omega_x = a_1(x)dx^1 + a_2(x)dx^2, \quad x = (x^1, x^2) \in \mathbb{R}^2. \tag{1.3}$$

Рассмотрим задачу минимизации длины кривых $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$, соединяющих две фиксированные точки на плоскости и удовлетворяющих дополнительному условию $\int\limits_\gamma \omega = c$, где c – заданная константа. С такой задачей естественным образом связана специальная субриманова структура на

$$\mathbb{R}^3 = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}^2,\ y \in \mathbb{R}\}.$$

Пусть $q = (x, y) \in \mathbb{R}^3$; положим $\Delta_q = \ker(dy - \omega_x)$. Двумерные подпространства $\Delta_q,\ q \in \mathbb{R}^3$, образуют распределение Δ в $\mathbb{R}^3$. Сужение проекции $(x, y) \mapsto x$ на Δ_q обратимо, поэтому стандартная евклидова структура $(dx^1)^2 + (dx^2)^2$ в $\mathbb{R}^2$ индуцирует субриманову структуру в $\mathbb{R}^3$ с распределением Δ.

Кривая $t \mapsto (x(t), y(t))$ горизонтальна в том и только том случае, когда $\dot{y}(t) = \langle \omega_{x(t)}, \dot{x}(t) \rangle$. Таким образом, горизонтальные кривые имеют вид:

$$t \mapsto \Big(\gamma(t), y_0 + \int\limits_{\gamma|_{[0,t]}} \omega\Big),$$

где γ – произвольная липшицева кривая на плоскости, причём субриманова длина горизонтальной кривой равна длине γ. Мы получаем, что исходная изопериметрическая задача эквивалентна задаче минимизации субримановой длины горизонтальных кривых, соединяющих две фиксированные точки в $\mathbb{R}^3$.

Опишем геодезические этой субримановой структуры; достаточно, конечно, описать проекции геодезических на плоскость $\mathbb{R}^2$. Прежде всего заметим, что результат будет одним и тем же для всех форм ω, отличающихся друг от друга на замкнутую форму. В самом деле, разность

$$\int\limits_{\gamma} (\omega + d\varphi) - \int\limits_{\gamma} \omega = \varphi(\gamma(1)) - \varphi(\gamma(0))$$

зависит лишь от концов кривой γ.

Таким образом, для описания проекций геодезических на плоскость достаточно знать форму $d\omega = b(x)dx^1 \wedge dx^2$, где $b = \frac{\partial a_2}{\partial x^1} - \frac{\partial a_1}{\partial x^2}$. Кстати, условие полной неголономности (1.2) для этой задачи эквивалентно тому, что в любой точке $x \in \mathbb{R}^2$ хоть одна частная производная $\frac{\partial^{i+j} b}{(\partial x^1)^i (\partial x^2)^j}$ отлична от нуля.

Предложение 2. *Кривая $\gamma : [0.1] \to \mathbb{R}^2$ в том и только том случае есть проекция нормальной геодезической на плоскость, когда кривизна γ в точке $\gamma(t)$ равна $\nu b(\gamma(t))$ для всех $t \in [0, 1]$ и некоторой константы $\nu \in \mathbb{R}$.*

Кривая γ есть проекция анормальной экстремали в том и только том случае, когда $b(\gamma(t)) = 0,\ 0 \le t \le 1$. Если же, дополнительно, $d_{\gamma(t)}b \ne 0,\ 0 \le t \le 1$, то γ есть проекция анормальной геодезической.

Можно рассмотреть несколько более общую задачу, заменив евклидову плоскость $\mathbb{R}^2$ произвольным двумерным римановым многообразием N. Предложение 2 остаётся в силе, если кривизну плоской кривой заменить геодезической кривизной кривой в N.

Можно ещё обобщить задачу, рассмотрев главное одномерное расслоение над N (со структурной группой $\mathbb{R}$ или S^1) вместо прямого произведения $N \times \mathbb{R}$. Роль формы ω в этом случае играет связность на главном расслоении, а горизонтальные кривые суть параллельные переносы вдоль кривых на базе. Предложение 2 остаётся в силе, причём b – кривизна связности.

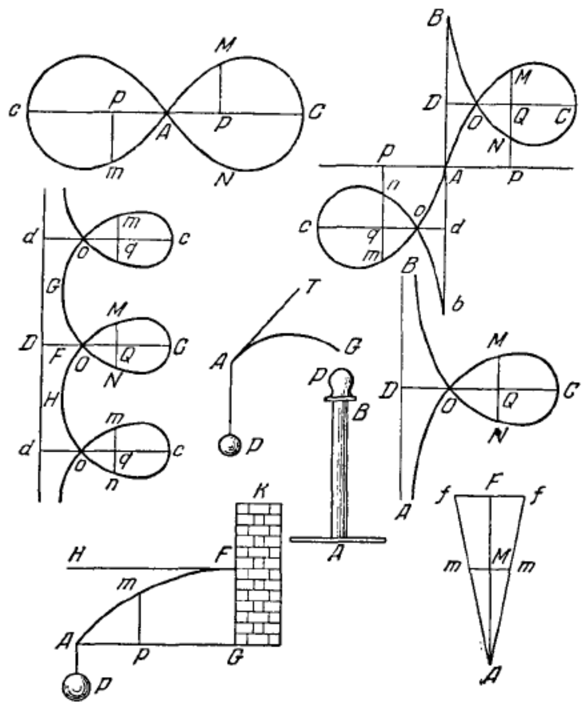
Мы видим, что проекции нормальных геодезических на N суть траектории заряженных частиц в магнитном поле b, причём константа ν играет роль заряда частицы. Важно отметить, что описанные в предложении 2 анормальные геодезические не зависят от выбора римановой метрики на поверхности!

В следующем примере мы опять минимизируем длину кривой, соединяющей две точки на плоскости, но при других дополнительных условиях. Рассмотрим шар, катящийся по плоскости без проскальзования и прокручивания. Мгновенное состояние такой системы задаётся точкой касания шара плоскости и ориентацией шара. Таким образом, пространство состояний $M = \mathbb{R}^2 \times SO(3)$. Условие непроскальзования состоит в том, что точка касания имеет одинаковые вектора скорости на плоскости и на сфере, а условие непрокручивания – в том, что угловая скорость вращения шара в каждый момент времени параллельна плоскости, по которой шар катится. Эти условия задают двумерное распределение допустимых скоростей $\Delta \subset TM$.

Легко понять, что шар с заданной начальной ориентацией можно единственным допустимым способом прокатить вдоль любой плоской кривой. Иными словами, имеется естественное взаимнооднозначное соответствие между допустимыми (горизонтальными) кривыми, начинающимися в заданной точке пространства состояний M, и плоскими кривыми, начинающимися в проекции этой точки в $\mathbb{R}^2$. Таким образом, конечная ориентация шара определяется его начальной ориентацией и путём в $\mathbb{R}^2$, вдоль которого шар катится. Задача состоит в нахождении кратчайшего среди всех плоских путей с заданными концами и таких, что прокатив вдоль них шар, мы его переориентируем должным образом.

Проекции в $\mathbb{R}^2$ нормальных геодезических в этой задаче суть *эйлеровы эластики*, очень хорошо известные кривые. У Эйлера эти кривые появились как положения равновесия упругого стержня, а в задаче качения шара по плоскости их обнаружил Велимир Джорджевич. Геометрически эластики можно охарактеризовать как гладкие кривые в евклидовой плоскости, кривизна которых есть афинная функция от координат. Иными словами, $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ есть эйлерова эластика в том и только том случае, когда найдутся такие $\bar{a} \in \mathbb{R}^2$, $a \in \mathbb{R}$, что кривизна кривой γ в точке $\gamma(t)$ равна $\langle \bar{a} | \gamma(t) \rangle + a$ для всех $t \in [0,1]$. Заметим, что охарактеризованные таким образом эластики – частный случай кривых, уже встречавшихся нам при рассмотрении изопериметрической задачи. Выходит, что нормальные геодезические суть качения шара вдоль траекторий заряженных частиц в афинном магнитном поле.

Приведём более традиционную характеризацию эластик. Для этого отождествим $\mathbb{R}^2$ с комплексной плоскостью $\mathbb{C}$. Пусть $\gamma : [0, t_1]$ – кривая, параметризованная длиной дуги, тогда $\dot{\gamma}(t) = e^{i\theta(t)}$, $\theta \in \mathbb{R}$. Кривая γ есть эластика в том и только том случае, когда $\ddot{\theta}(t) = a \sin(bt + c)$, $0 \le t \le t_1$, для некоторых констант a, b, c. Иными словами, параметризованные длиной дуги эластики – это кривые, направления скоростей которых удовлетворяют уравнению движения математического маятника. Рисунок, изображающий разные типы эластик, взят из статьи Эйлера. Эластики с точками перегиба отвечают колебательным движениям маятника (маятник меняет направление движения), а эластики без точек перегиба – вращательным движениям.



Анормальные геодезические в рассматриваемой задаче не слишком интересны: это просто качения шара вдоль прямых. Таким образом, анормальные геодезические являются одновременно нормальными, самыми вырожденными из них.

Последний пример в этой главе – качение шара по плоскости без проскальзования но с возможным прокручиванием. Пространство состояний то же, что и в предыдущем примере, но горизонтальное распределение трёхмерно. Как и прежде, мы можем катить шар без проскальзования вдоль любой плоской кривой, при этом угловая скорость вращения шара произвольна. Длина скорости горизонтальной кривой есть, по определению, длина угловой скорости вращения.

В этой задаче горизонтальные кривые в M уже не восстанавливаются по своей начальной точке и проекции в $\mathbb{R}^2$, во всяком случае, если мы говорим о непараметризованных кривых. Если же мы ограничимся горизонтальными кривыми, параметризованными длиной дуги, то, при некотором разумном дополнительном условии, сможем их восстановить по начальной точке и параметризованной проекции в $\mathbb{R}^2$. Действительно, проекция в $\mathbb{R}^2$ есть такая кривая $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$, что $|\dot\gamma(t)| \le 1$. Из условия непроскальзования следует, что длина ортогональной проекции угловой скорости вращения шара в момент t на горизонтальную плоскость равна

$|\dot\gamma(t)|$. Поскольку мы предполагаем, что длина угловой скорости вращения равна единице, то однозначно восстанавливаем длину вертикальной проекции угловой скорости. Если же мы зафиксируем направление вращения вокруг вертикальной оси, то однозначно восстановим всю угловую скорость.

Подведём итог: вдоль всякой кривой $\gamma : [0, t_1] \to \mathbb{R}^2$, удовлетворяющей условию $|\dot\gamma(t)| \leq 1$, можно единственны образом прокатить шар без проскальзования и с единичной угловой скоростью при условии, что шар может прокручиваться вокруг вертикальной оси только по (против) часовой стрелки. Остаётся описать геодезические, они в этой задаче очень простые.

Кривая $\gamma[0, t_1] \to \mathbb{R}^2$ в том и только том случае есть проекция параметризованной длиной дуги геодезической, когда поворотом и сдвигом плоскости она может быть переведена в кривую вида:

$$\bar\gamma(t) = (at, b\sin(ct + d)), \quad 0 \leq t \leq t_1,$$

где $a^2 + (bc)^2 \leq 1$.

Шар катится по синусоиде либо (в случае $a = 0$) колеблется на отрезке, одновременно прокручиваясь вокруг вертикальной оси. Непостоянство скорости качения компенсируется прокручиванием, причём направление прокручивания не меняется во время движения. Анормальные геодезические в этой задаче те же, что и в предыдущей: качение вдоль прямой без прокручивания.

Комментарии. Теорема Суссмана об орбитах доказана в [28], но её следствие – теорема Рашевского–Чоу появилось намного раньше, см. [24, 16]. Аналитическая версия теоремы об орбитах принадлежит Нагано [22]. Теорема 1 легко выводится из принципа максимума Понтрягина [23], её подробное доказательство, а также доказательства предложений 1 и 2 можно найти, например, в [3]; в книге [21] те же вещи рассмотрены с несколько другой точки зрения. То, что геодезические в задаче о качении шара по плоскости без прокручивания суть эйлеровы эластики, обнаружил Джорджевич (см. [19]), дополнительную информацию можно найти в [27]; рисунок с эластиками взят из книги Эйлера [17]. Геодезические в задаче о качении с прокручиванием изучены в статье [10].

2. Шары

Отвлечёмся теперь от катания евклидовых шаров по плоскости и попробуем понять, как выглядят шары в самом общем субримановом метрическом пространстве. Нас прежде всего интересуют шары малого радиуса, они очень сильно отличаются от римановых.

Напомним, что шаром (сферой) радиуса $r > 0$ с центром в $q \in M$ называется множество $B_q(r) = \{x \in M : \delta(q,x) \leq r\}$ (множество $S_q(r) = \{x \in M : \delta(q,x) = r\}$); здесь δ – субриманово расстояние. Поскольку субриманова метрика индуцирует стандартную топологию в M, то, как и в римановом случае, $S_q(r) = \partial B_q(r)$, но дальше начинаются существенные различия.

Следуя Громову, рассмотрим малый шар "под микроскопом". А именно, рассмотрим шар $B_q(\varepsilon r)$ и увеличим все расстояния в нём в $\frac{1}{\varepsilon}$, после чего устремим $\varepsilon \to 0$. Иными словами, рассмотрим семейство метрических пространств $B_q(\varepsilon r), \frac{1}{\varepsilon}\delta$ и предел этого семейства по Громову–Хаусдорфу при $\varepsilon \to 0$. Такой предел (а для субримановых пространств он всегда существует) есть, по определению, шар радиуса r в метрическом касательном пространстве к пространству (M, δ) в точке q. Этот шар, вместе с метрикой в нём, обозначим $(\hat{B}_q(r), \hat{\delta})$. Итак,

$$(\hat{B}_q(r), \hat{\delta}) = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(B_q(\varepsilon r), \frac{1}{\varepsilon}\delta \right).$$

Ясно, что $(\hat{B}_q(r_1), \hat{\delta}) \subset (\hat{B}_q(r_2), \hat{\delta})$ при $r_1 < r_2$. Объединение $\hat{M}_q = \bigcup\limits_{r>0} \hat{B}_q(r)$, снабжённое метрикой $\hat{\delta}$, есть касательное пространство к (M, δ) в точке q.

В римановом случае касательное пространство T_qM к многообразию M снабжено евклидовой структурой. Евклидово пространство T_qM и есть метрическое касательное $(\hat{M}_q, \hat{\delta})$, это достаточно очевидно. Для того, чтобы описать метрическое касательное в общем субримановом случае, нужно сначала ввести *флаг распределения* Δ в точке q.

Флаг распределения – это последовательность подпространств

$$\Delta_q = \Delta_q^1 \subset \cdots \subset \Delta_q^m = T_qM,$$

определяемых следующим образом:

$$\Delta_q^k = \{[V_1, [V_2, \cdots, V_l] \cdots](q) : V_i \in \bar{\Delta},\, i = 1, \ldots, l \leq k\}, \quad 0 \leq k \leq m.$$

Размерности подпространств Δ_q^k могут зависеть от q; ясно, впрочем, что $\dim \Delta_q^k$ полунепрерывна снизу по q. Распределение Δ называется эквирегулярным в точке q, если величины $\dim \Delta_x^k$, $k = 1, \ldots, m$, постоянны в некоторой окрестности точки q. Из полунепрерывности целочисленных функций $\dim \Delta_x^k$ следует, что Δ эквирегулярно на открытом плотном подмножестве многообразия M.

Мы подробно опишем $\hat{M}_q$ только в точках эквирегулярности распределения Δ; впрочем, конструкция $\hat{M}_q$ в остальных точках не намного сложнее. Заметим прежде всего, что для вычисления флага не нужно использовать все сечения распределения, достаточно взять какой-нибудь локальный базис этого распределения. Действительно, пусть $V_i \in \bar{\Delta},\ i = 1, \dots, d$, и $\Delta_q = span\{V_i(q),\ i = 1, \dots, d\}$. Тогда любое горизонтальное поле V в окрестности точки q представляется в виде $V = \sum\limits_{i=1}^{d} a_i V_i$, где a_i – гладкие функции. Из правила Лейбница $[V, aW] = a[V, W] + (Va)W$ теперь легко выводим, что

$$\Delta_q^k = span\{[V_{i_1}, [V_{i_2}, \cdots, V_{i_l}] \cdots] : 1 \le i_1, \dots, i_l \le d,\ l \le k\}.$$

Здесь $(Va)(x) \doteq \langle d_x a, V(x)\rangle$ – производная функции a по направлению V.

Пусть теперь распределение Δ эквирегулярно в точке q; тогда у нас есть целый флаг распределений $\Delta^1 \subset \Delta^2 \subset \cdots \subset \Delta^m$, определённый в некоторой окрестности точки q. Пусть $V \in \bar{\Delta}^i,\ W \in \bar{\Delta}^j$. Из того же правила Лейбница выводим, что $[V, W](q) \in \Delta_q^{i+j}$ и, более того, проекция $[V, W](q)$ в $\Delta_q^{i+j}/\Delta_q^{i+j-1}$ зависит только от проекций $V(q)$ в $\Delta_q^i/\Delta_q^{i-1}$ и $W(q)$ в $\Delta_q^j/\Delta_q^{j-1}$.

Иными словами, коммутатор векторных полей индуцирует структуру алгебры Ли на градуированном пространстве

$$L_q = \bigoplus_{i=1}^{m} (\Delta_q^i/\Delta_q^{i-1})$$

(мы считаем, что $\Delta_q^0 = 0$ по определению). Легко видеть, что L_q – нильпотентная алгебра Ли. Более того, эта градуированная нильпотентная алгебра Ли порождается первым членом градуировки $\Delta_q^1 = \Delta_q$. Напомним также, что, согласно определению субримановой структуры, пространство Δ_q снабжено евклидовым скалярным произведением.

Так вот, конечномерная нильпотентная градуированная алгебра Ли, порождённая первым членом градуировки, снабжённым евклидовой структурой, называется *алгеброй Карно.* Односвязная группа Ли, порождённая алгеброй Карно, называется *группой Карно.*

Пусть G_q – группа Карно, порождённая алгеброй Карно L_q. Всякое подпространство алгебры Ли есть левоинвариантное распределение на соответствующей группе Ли. Таким образом, $\Delta_q \subset L_q$ есть левоинвариантное распределение на группе Ли G_q и задаёт на этой группе левоинвариантную субриманову структуру, а значит и левоинвариантную субриманову метрику. Назовём эту метрику канонической метрикой группы Карно.

Теорема 2 (Громов–Митчел). *Пусть Δ эквирегулярно в точке $q \in M$; тогда метрическое касательное пространство $(\hat{M}_q, \hat{\delta})$ изометрично группе Карно G_q с канонической метрикой.*

Это весьма точное описание касательного метрического пространства, пока, правда, слишком абстрактное. Мы сейчас объясним, как это пространство получается предельным переходом при разглядывании (M, δ) в окрестности точки q под всё более сильным микроскопом.

Пусть $x^1, \ldots, x^n$ – некоторые локальные координаты на M в окрестности точки q, $x^\iota(q) = 0$, $\iota = 1, \ldots, n$. Скажем, что они согласованы с флагом $\Delta_q^1 \subset \cdots \subset \Delta_q^m = T_q M$, если в этих локальных координатах подпространства Δ_q^i представлены координатными подпространствами в $\mathbb{R}^n$; точнее, Δ_q^i представлено подпространством $\mathbb{R}^{k_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{R}^{k_i}$, $i = 1, \ldots, m$, где

$$\mathbb{R}^{k_i} = \{(0, \ldots, 0, x^{k_1 + \cdots + k_{i-1} + 1}, \ldots, x^{k_1 + \cdots + k_i}, 0, \ldots, 0) : x^\iota \in \mathbb{R}\},$$

$k_i = \dim\left(\Delta_q^i / \Delta_q^{i-1}\right)$. В дальнейшем мы считаем, что выбранные координаты согласованы с флагом.

Как мы знаем, горизонтальные пути ведут во все точки, но разные направления имеют разный вес: чем больше i, тем труднее двигаться в направлении $\mathbb{R}^{k_i}$. С помощью горизонтальных кривых малой длины ε мы можем продвинуться на (евклидово) расстояние порядка ε в направлении подпространства $\mathbb{R}^{k_1}$, но только на расстояние порядка ε^2 в направлении подпространства $\mathbb{R}^{k_2}$, порядка ε^3 – в направлении подпространства $\mathbb{R}^{k_3}$ и т.д.

Эта ситуация формализуется следующим образом. Мы вводим градуировку алгебры вещественных полиномов от n переменных, определив веса переменных правилом: $w(x^\iota) = i$, $k_1 + \cdots + k_{i-1} < \iota \leq k_1 + \cdots + k_i$, $i = 1, \ldots, m$; соответственно, $w(x^{\iota_1} \cdots x^{\iota_l}) = w(x^{\iota_1}) + \cdots + w(x^{\iota_l})$. Мы рассматриваем полиномы как дифференциальные операторы нулевого порядка с полиномиальными коэффициентами и продолжаем эту градуировку на всю алгебру линейных дифференциальных операторов с полиномиальными коэффициентами, положив $w\left(\frac{x^\alpha \partial^l}{(\partial x)^\beta}\right) = w(x^\alpha) - w(x^\beta)$, где $x^\alpha = x^{\alpha_1} \cdots x^{\alpha_j}$, $x^\beta = x^{\beta_1} \cdots x^{\beta_l}$ – произвольные мономы, $(\partial x)^\beta = \partial x^{\beta_1} \cdots \partial x^{\beta_l}$.

Линейный дифференциальный оператор с полиномиальными коэффициентами называется квазиоднородным веса ν, если все входящие в него мономиальные операторы имеют вес ν. Всё пространство дифференциальных операторов с полиномиальными коэффициентами оказывается, таким образом, разбито в прямую сумму квазиоднородных операторов различных весов. Легко видеть, что композиция квазиоднородных операторов D_1 и D_2 квазиоднородна и $w(D_1 \circ D_2) = w(D_1) + w(D_2)$.

Векторные поля суть дифференциальные операторы порядка 1. Для пары квазиоднородных векторных полей получаем: $w([V_1, V_2]) = w(V_1) + w(V_2)$. Заметим, что вес квазиоднородного векторного поля не может быть меньшим, чем $-m$ и, что любое векторное поле неотрицательного веса обращается в ноль в точке q. Более того, если $w(V) \geq -i$, то $V(q) \in \Delta_q^i$.

Зададим убывающую фильтрацию алгебры Ли гладких векторных полей в $\mathbb{R}^n$:

$$Vec(\mathbb{R}^n) = Vec^{-m}(k_1, \dots, k_m) \subset Vec^{1-m}(k_1, \dots, k_m) \subset \\ \dots \subset Vec^{\nu}(k_1, \dots, k_m) \subset \cdots ,$$

где подпространство $Vec^{\nu}(k_1, \dots, k_m)$ состоит из полей, разложение в ряд Тейлора которых содержит только мономиальные поля веса не менее ν.

Определение. *Согласованные с флагом координаты называются привилегированными, если* $\bar{\Delta} \subset Vec^{-1}(k_1, \dots, k_m)$.

Упражнение: Показать, что при $m = 2$ любые согласованные с флагом координаты привилегированы, а при $m \geq 3$ это не так.

Теорема 3. *Для любого вполне неголономного ростка распределения найдутся привилегированные координаты.*

Обещанное "разглядывание под микроскопом" – это анизотропное растягивание привилегированных координат в соответствии с их весами. А именно, определим *дилатацию*

$$\eta_s : \mathbb{R}^{k_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{R}^{k_m} \to \mathbb{R}^{k_1} \oplus \cdots \mathbb{R}^{k_m}, \ s > 0,$$

формулой:

$$\eta_s(x_1 \oplus \cdots \oplus x_m) = s x_1 \oplus s^2 x_2 \oplus \cdots \oplus s^m x_m.$$

Полином ϕ в том и только том случае квазиоднороден веса ν, когда $\phi \circ \eta_s = s^{\nu} \phi, \ s > 0$. Полиномиальное векторное поле V в том и только том случае квазиоднородно веса ν, когда $\eta_{s*} V = s^{-\nu} V, \ s > 0$.

Пусть $V_1, \dots, V_{k_1} \in \bar{\Delta}$ – некоторый ортонормальный базис нашей субримановой структуры в заданной координатной окрестности, а

$\delta(\cdot,\cdot)$ – субриманово расстояние, порождённое этой структурой. Тогда, для любого $\varepsilon > 0$, поля $\varepsilon V_1, \dots, \varepsilon V_{k_1}$ образуют ортонормальный базис для перемаштабированной субримановой структуры, порождающей расстояние $\frac{1}{\varepsilon}\delta$. Далее, для всякого $V \in \bar{\Delta}$ существует $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \eta_{\frac{1}{\varepsilon}*} V = \hat{V}$, где $\hat{V}$ – квазиоднородное поле веса -1 – сумма мономиальных полей веса -1 из разложения Тейлора поля V. Действительно, это следует из того, что мы работаем в привилегированных координатах, и разложение Тейлора поля V не содержит мономиальных полей веса < -1.

Таким образом, перемаштабируя расстояние и одновременно растягивая окрестность точки q с помощью дилатации, мы, переходя к пределу, получаем, что метрическое касательное $(\hat{M}_q, \hat{\delta})$ есть субриманово пространство, представляемое субримановой структурой в $\mathbb{R}^n$ с ортонормальным базисом $\hat{V}_1, \dots, \hat{V}_{k_1}$, состоящим из квазиоднородных полей веса -1.

Как мы знаем, коммутатор квазиоднородных полей квазиоднороден, причём веса при коммутировании складываются. Следовательно, поля $\hat{V}_1, \dots, \hat{V}_{k_1}$ порождают градуированную нильпотентную алгебру Ли, причём все итерированные коммутаторы этих полей порядка, больше, чем m, равны нулю. Нетрудно показать, что, при условии эквирегулярности распределения Δ, эта градуированная алгебра Ли имеет размерность n и изоморфна описанной выше алгебре $L_q = \bigoplus\limits_{i=1}^{m} \left(\Delta_q^i / \Delta_q^{i-1}\right)$. В общем, не эквирегулярном случае размерность алгебры Ли, порождённой полями $\hat{V}_1, \dots, \hat{V}_{k_1}$, может быть большей, чем n.

Пусть $\Pi(k_1, \dots, k_m; \varepsilon) = \{x_1 \oplus \dots \oplus x_m : x_i \in \mathbb{R}^{n_i},\ |x_i| \le \varepsilon^i,\ i = 1, \dots, m\}$. Несколько огрубляя наш опыт разглядывания под микроскопом, заключаем, что при малом $\varepsilon > 0$ субриманов шар следующим образом оценивается сверху и снизу:

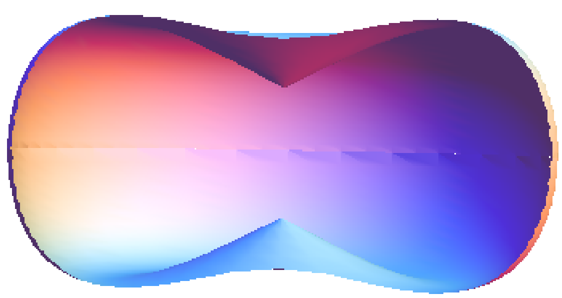
$$c\Pi(k_1, \dots, k_m; \varepsilon) \subset B_q(\varepsilon) \subset c'\Pi(k_1, \dots, k_m; \varepsilon),$$

где константы c и c' не зависят от ε.

Для того, чтобы замостить куб фиксированного размера, требуется порядка $\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{k_1 + 2k_2 + \dots + mk_m}$ (при $\varepsilon \to 0$) сдвинутых “ящиков” $\Pi(k_1, \dots, k_m; \varepsilon)$. Следовательно, размерность Хаусдорфа субриманова пространства равна $k_1 + 2k_2 + \dots + mk_m$. Мы видим, что размерность Хаусдорфа субриманова пространства строго больше его топологической размерности во всех случаях, кроме риманова. Можно сказать, что субриманово метрическое пространство имеет фрактальный характер; в то же время, топологически это самое обычное многообразие.

Пример. Рассмотрим субриманову структуру в $\mathbb{R}^3$ с распределением ранга 2. Легко видеть, что такое распределение в том и только том случае эквирегулярно в точке q, когда оно задаёт контактную структуру в окрестности q. В этом случае $\Delta_q^2 = \mathbb{R}^3$. Элементарное вычисление показывает, что единственной, с точностью до сохраняющего метрику изоморфизма, 3-мерной группой Карно является группа Гейзенберга. Это простейшее не риманово субриманово пространство. Пусть $V_1, V_2 \in \Delta$ – левоинвариантный ортонормированный базис распределения Δ в этом случае; тогда $V_1, V_2, [V_1, V_2]$ – базис алгебры Ли Гейзенберга, причём $[V_1, V_2]$ коммутирует как с V_1, так и с V_2.

В главе 1 мы рассмотрели 3-мерные субримановы структуры, связанные с изопериметрическими задачами на плоскости. Легко видеть, что группа Гейзенберга соответствует самой знаменитой из этих задач – задаче Дидоны, когда функция b, характеризующая изопериметрическую задачу, – константа. Субриманова сфера в разрезе на группе Гейзенберга выглядит следующим образом:



Из квазиоднородности и левоинвариантности следует, что все сферы в группе Карно устроены одинаково и получаются друг из друга дилатацией и левым сдвигом на группе. Мы видим, что сферы, причём сферы сколь угодно малого радиуса, имеют точки негладкости: это точки пересечения сферы с вертикальной осью – сдвигом центра группы, содержащим центр шара). Наличие точек негладкости неслучайно, их неизбежность вытекает из простейших свойств множества геодезических, стартующих в центре шара.

Зафиксируем $q_0 \in M$ и рассмотрим функцию $c(q) = \delta(q_0, q)$. Шары с центром в q_0 суть множества Лебега функции c, а сферы – её множества уровня. Можно показать, что, если $T_{q_0}M \neq \Delta_{q_0}$, то на любой сфере $S_{q_0}(r)$ достаточно малого радиуса есть точки негладкости функции c. В то же время, функция c – гладкая на открытом плотном подмножестве в окрестности q_0. Это, пожалуй, всё, что известно о функции расстояния c в случае произвольной субримановой структуры, кроме её очевидной гёльдеровости с показателем Гёльдера $\frac{1}{m}$, если $\Delta^m = TM$. В специальных случаях известно, конечно, намного больше.

Объясним, как аналитические свойства функции расстояния связаны с геодезическими. Напомним, что горизонтальный путь $\gamma : [0,t] \to M$ называется кратчайшим, если длина γ равна расстоянию между точками $\gamma(0)$ и $\gamma(t)$. Назовём кратчайший путь γ продолжаемым, если найдётся такой кратчайший путь $\bar\gamma : [0,\bar t] \to M$, $\bar t > t$, что $\gamma = \bar\gamma|_{[0,t]}$ и $\bar\gamma(\bar t) \neq \gamma(t)$.

Теорема 4. *Пусть q принадлежит компактному шару с центром в q_0. Функция c – гладкая в точке q в том и только том случае, когда q соединено с q_0 единственным кратчайшим путём, причём этот кратчайший путь продолжаем и является строго нормальной геодезической.*

В точках, где нарушается гладкость функции c, характер негладкости существенно зависит от того, ведут ли в эту точку нормальные или анормальные кратчайшие пути. Напомним, что функция на многообразии M называется полувогнутой (полувыпуклой), если в локальных координатах она представляется суммой вогнутой (выпуклой) и гладкой функций. Легко видеть, что это условие не зависит от выбора локальных координат. Ясно, что любая полувогнутая (полувыпуклая) функция локально липшицева; более того, согласно известной теореме А. Д. Александрова, у неё почти всюду существует вторая производная.

Теорема 5. *Если принадлежащая компактному шару с центром в q_0 точка q соединена с q_0 только строго нормальными кратчайшими путями, то функция c полувогнута в некоторой окрестности q.*

Полувогнутость функции расстояния очень хорошо видна на рисунке шара на группе Гейзенберга: касательный конус шара в точке негладкости есть дополнение к выпуклому конусу.

Теорема 6. *Если все начинающиеся в точке q_0 непостоянные кратчайшие пути строго нормальны, то сфера $S_{q_0}(r)$ есть липшицево подмногообразие в M для почти всех таких $r \geq 0$, что шар $B_{q_0}(r)$ компактен.*

В качестве контрапункта к “нормальной” ситуации приведём следующее утверждение:

Предложение 3. *Если принадлежащая компактному шару с центром в q_0 точка q соединена с q_0 только строго анормальными кратчайшими путями, то $|d_{q_n}c| \to \infty$ для любой сходящейся к q последовательности $\{q_n\}$ точек гладкости функции c. В частности, функция c не является локально липшицевой в окрестности точки q.*

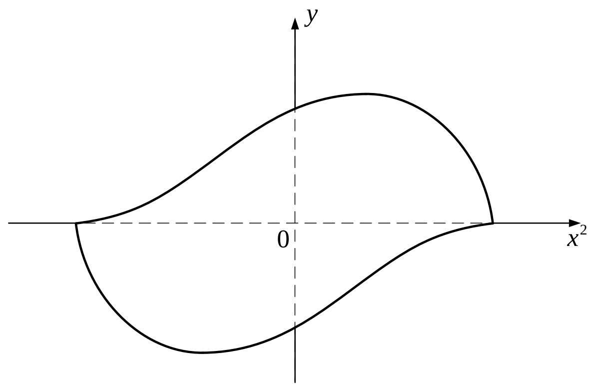
Простейшее субриманово пространство с анормальными геодезическими получается из изопериметрической задачи на плоскости $\mathbb{R}^2$ с формой $\omega = (x^1)^2 dx^2$ (см. (1.3)). В этом случае функция $b : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, определяемая условиями $d_x\omega = b(x)dx^1 \wedge dx^2$, линейна, $b(x) = 2x^1$ и, согласно предложению 2, проекции анормальных геодезических на плоскость $\mathbb{R}^2$ суть сегменты прямой $\{(0, x^2) : x^2 \in \mathbb{R}\}$. Легко видеть, что сами анормальные геодезические в этом случае суть сегменты прямых $\{(0, x^2, c) \in \mathbb{R}^3 : x^2 \in \mathbb{R}\}$, где $c \in \mathbb{R}$ – произвольная константа. Анормальные геодезические оказываются в этом случае одновременно и нормальными. Действительно, отрезки прямых – кратчайшие пути для евклидовой метрики даже без изопериметрического ограничения.

Векторные поля $V_1 = \frac{\partial}{\partial x^1}$, $V_2 = \frac{\partial}{\partial x^2} + (x^1)^2 \frac{\partial}{\partial y}$ образуют ортонормальный базис рассматриваемой структуры в $\mathbb{R}^3$. Эта структура не эквирегулярна в точках плоскости $\{(0, x^2, y) : x^2, y \in \mathbb{R}\}$. Флаг распределения в точке $q = (0, x^2, y)$ имеет вид:

$$\hat{\Delta}^1_q = \hat{\Delta}^2_q = \{(\xi_1, \xi_2, 0) : \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}\}, \quad \hat{\Delta}^3_q = \mathbb{R}^3.$$

Рассматриваемый пример некоторым образом универсален: если группа Гейзенберга описывала метрическое касательное пространство в любой эквирегулярной точке субримановой метрики на трёхмерном многообразии, то этот пример описывает метрическое касательное пространство в любой такой точке q, что $\Delta^1_q = \Delta^2_q \neq \Delta^3_q$. Согласно введённым ранее обозначениям, это случай $k_1 = 2$, $k_2 = 0$, $k_3 = 1$.

Описанную модель называют *плоской субримановой структурой Мартине*, а плоскость $\{(0, x^2, y) : x^2, y \in \mathbb{R}\}$ – *плоскостью Мартине.* Все сферы с центром на плоскости Мартине устроены одинаково, причём множество точек негладкости субриманова расстояния от точки на плоскости Мартине есть сама эта плоскость. Рассмотрим сферу радиуса r с центром в нуле. Эта сфера гладкая вне плоскости Мартине, а её пересечение с плоскостью Мартине имеет следующий вид:



Это пересечение – замкнутая кривая, гладкость которой нарушается в двух точках сферы, соединённых с центром анормальными геодезическими. Каждый из двух гладких сегментов кривой касается анормальной геодезической с одного конца и подходит к ней под ненулевым углом с другого. Заметим, что расстояние от центра растёт с постоянной скоростью вдоль любой параметризованной длиной дуги кратчайшей кривой, в том числе, вдоль нашей анормальной геодезической. В то же время, анормальная геодезическая касается кривой, лежащей на сфере (т. е. на множестве уровня функции расстояния от центра). Отсюда сразу следует, что расстояние от центра не может быть липшицевым в окрестности соответствующей точки сферы. Впрочем, сама сфера в рассматриваемом случае – липшицево многообразие.

Метрические касательные, безусловно, важные, но всё-таки очень специальные субримановы пространства. Что же известно о пространствах общего положения? Свойствами общего положения мы здесь считаем те, что выполняются для любой структуры из некоторого открытого всюду плотного подмножества пространства субримановых структур на данном многообразии в C^∞ топологии Уитни.

Нетрудно догадаться, что в случае общего положения одна и та же геодезическая не может быть одновременно нормальной и анормальной. Более того, если проекции двух анормальных экстремалей совпадают, то эти экстремали пропорциональны в T^*M, отличаясь друг от друга скалярным множителем. В этом случае говорят, что все экстремали (нормальные и анормальные) *имеют коранг 1*. В действительности, это свойство выполняется не только для отдельных структур общего положения, но и для гладко зависящих от конечного числа вещественных параметров семейств субримановых структур. Имеется ввиду, что все экстремали всех структур семейства общего положения имеют коранг 1. Это означает (согласно обычной терминологии теории особенностей), что множество субримановых структур, не все экстремали которых имеют коранг 1, есть подмножество коразмерности бесконечность в пространстве всех субримановых структур.

Условие, что все экстремали имеют коранг 1, влечёт некоторые ограничения на локальное устройство сфер, которое мы сейчас опишем. Пусть $T_qM \supset E_0$ – коориентированная гиперплоскость в касательном пространстве. Коориентируемость, по определению, означает, что среди двух полупространств, на которые эта гиперплоскость делит T_qM, одно считается положительным, а другое отрицательным. Таким образом, $T_qM = E_- \cup E_0 \cup E_+$, где $E_\pm$ – открытые полупространства.

Пусть $q \in S_{q_0}(r)$; скажем, что E_0 – касательная гиперплоскость к шару $B_{q_0}(r)$ в точке q, если для всякой трансверсальной гиперплоскости E_0 гладкой кривой $\phi : (-1,1) \to M,\ \phi(0) = q$, найдётся такое $\varepsilon > 0$, что $\phi(-\varepsilon, 0) \subset B_{q_0}(r),\ \phi(0,\varepsilon) \cap B_{q_0}(r) = \emptyset$. Ясно, что шар может обладать не более, чем одной касательной гиперплоскостью в точке q, но такой гиперплоскости может и вовсе не быть, как, например, в точках анормальной кратчайшей рассмотренной выше плоской структуры Мартине.

Предложение 4. *Если все геодезические имеют коранг 1 и q_0 соединено с q продолжаемым кратчайшим путём, то шар $B_{q_0}(r)$ обладает касательной гиперплоскостью E_0 в точке q. Пусть γ – кратчайший путь, параметризованный длиной $\gamma(0) = q_0,\ \gamma(r) = q$. Если γ – нормальная геодезическая, то $\dot\gamma(r) \in E_+$. Если γ – дифференцируемая в точке r анормальная геодезическая, то $\dot\gamma(r) \in E_0$.*

Рассмотрим подробнее случай субримановой структуры общего положения в $\mathbb{R}^3$; пусть $V_1(x), V_2(x),\ x \in \mathbb{R}^3$ – её ортонормальный базис. Уравнение $\det(V_1, V_2, [V_1, V_2]) = 0$ задаёт гладкую поверхность Σ, которую называют поверхностью Мартине:

$$\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^3 : \det\left(V_1(x), V_2(x), [V_1, V_2](x)\right) = 0\}.$$

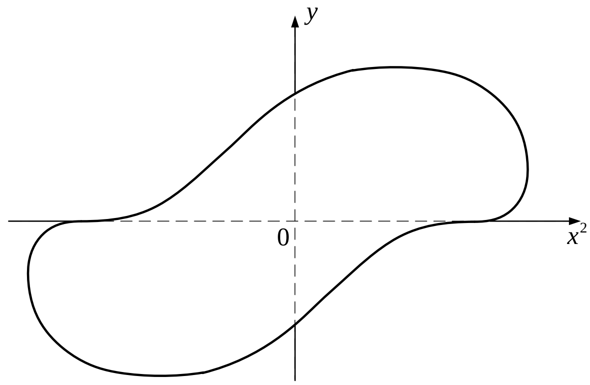
Наша структура эквирегулярна во всех точках из $\mathbb{R}^3 \setminus \Sigma$ и не эквирегулярна в точках поверхности Σ.

Во всех точках поверхности Σ за исключением некоторого дискретного подмножества этой поверхности распределение

$$\Delta_x = span\{V_1(x), V_2(x)\}$$

трансверсально поверхности, так что подпространство $\Delta_x \cap T_x\Sigma$ одномерно. Такие точки x характеризуются условием $\Delta_x^1 = \Delta_x^2 \neq \Delta_x^3$ и называются точками Мартине. Прямые $\Delta_x \cap T_x\Sigma,\ x \in \Sigma$, образуют поле напрввлений на Σ (с изолированными особенностями). Интегральные кривые этого поля направлений суть анормальные геодезические: непостоянная допустимая кривая есть анормальная геодезическая в том и только том случае, когда она целиком лежит на поверхности Мартине.

Пусть x – точка Мартине; согласно предложению 4, малые сферы с центром в x обладают касательными плоскостями в точках проходящей через x анормальной геодезической, и пересечение сферы с поверхностью Мартине выглядит примерно так:



В случае общего положения это пересечение не совпадает с множеством точек негладкости сферы. Более того, простые топологические соображения подсказывают, что в этом случае множество точек негладкости сферы не может быть замкнутой кривой и должно состоять из двух стягиваемых компонент связности.

Рассмотрим теперь малые сферы с центром в точке $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \Sigma$. Метрическое касательное в точке x изометрично рассмотренной выше группе Гейзенберга, оно очень симметрично. При переходе от сферы в метрическом касательном пространстве к малой сфере общего положения симметрия разрушается и структура особенностей меняется.

Структура особенностей сферы тесно связана с особенностями семейства геодезических, исходящих из её центра. Объясним это подробнее. В рассматриваемом случае все геодезические нормальны и следовательно являются проекциями на $M = \mathbb{R}^3$ траекторий гамильтоновой системы

$$\dot{\lambda} = \vec{h}(\lambda), \quad \lambda \in T^*M, \quad h(\lambda) = 1$$

(см. главу 1). Нетрудно видеть, что эти проекции параметризованы длиной дуги. Геодезические, исходящие из точки x, суть проекции траекторий с начальным условием $\lambda(0) = T_x^*M \cap h^{-1}(1)$.

Пусть $\pi : T^*M \to M$ – стандартная проекция, $\pi(T_x^*M) = x$. Введём обозначение $H_x = T_x^*M \cap h^{-1}(1)$ и рассмотрим *экспоненциальное отображение*

$$\mathcal{E}_x : (t, \lambda) \mapsto \pi \circ e^{t\vec{h}}(\lambda), \quad t > 0, \ \lambda \in H_x. \tag{2.1}$$

Заметим, что кривые $t \mapsto \mathcal{E}_x(t, \lambda)$ суть геодезические, стартующие в точке x, и что всякий компактный шар $B_x(r)$ есть образ множества $[0, r] \times H_x$ при экспоненциальном отображении, $B_x(r) = \mathcal{E}_x([0, r] \times H_x)$. Кроме того, $S_x(r) \subset \mathcal{E}_x(r, H_x)$. Последнее включение всегда строгое, так как не все геодезические длины r суть кратчайшие пути, сколь бы мало ни было r.

Как отличить кратчайшую нормальную геодезическую от не кратчайшей? Рецепт, в общем, тот же, что и в классической римановой геометрии. Малый отрезок геодезической

$$\gamma(t) = \mathcal{E}_x(t, \lambda), \quad t > 0, \tag{2.2}$$

кратчайший по определению. Строго нормальная геодезическая перестаёт быть кратчайшей, пройдя либо *точку разреза*, либо первую *сопряжённую точку*. Эти точки для нас чрезвычайно важны также и потому, что, согласно теореме 4, функция расстояния теряет гладкость как раз в концах непродолжаемых кратчайших.

Определение. *Моментом разреза вдоль геодезической (2.2) называется число*

$$\bar{t} = \min\{t > 0 : \exists\, \lambda' \in H_x, \ \lambda' \neq \lambda, \ \gamma(t) = \mathcal{E}_x(t, \lambda')\};$$

точка $\gamma(\bar{t}) = \mathcal{E}(\bar{t}, \lambda)$ называется точкой разреза.

Сопряжённым моментом вдоль γ называется такое число $\hat{t} > 0$, что (t, λ) есть критическая точка отображения $\mathcal{E}_x$; точка $\gamma(\hat{t}) = \mathcal{E}(\hat{t}, \lambda)$ называется сопряжённой точкой.

Таким образом, точка разреза – это точка, в которой геодезическая впервые встречает другую геодезическую той же длины, исходящую из x. Сопряжённые точки – это точки “огибающей поверхности” семейства геодезических, исходящих из x. Выражаясь немного старомодно можно сказать, что в сопряжённой точке геодезическая встречает инфинитезимально близкую к ней геодезическую, исходящую из x. Эти два типа точек играют несколько разную роль: геодезическая перестаёт быть кратчайшей, пройдя точку разреза, но остаётся локально кратчайшей (т. е. короче всех C^0-близких к ней допустимых путей с теми же концами) вплоть до первой сопряжённой точки. Пройдя первую сопряжённую точку, геодезическая перестаёт быть локально кратчайшей.

Геодезические на группе Гейзенберга суть круговые спирали, а их “огибающая поверхность” вырождается в прямую (вертикальную координатную ось), точки разреза и первые сопряжённые точки совпадают, геодезическая одновременно перестаёт быть и глобально и локально кратчайшей. В случае общего положения это не так, и у почти всех непродолжаемых кратчайших концы суть точки разреза, но не сопряжённые точки.

Множество концов исходящих из x непродолжаемых кратчайших называется *множеством разреза*, а множество первых сопряжённых точек – *первой каустикой*. Можно показать, что множество разреза лежит в замыкании множества точек разреза, причём это верно не только для рассматриваемой 3-мерной задачи, а и для любой субримановой струтуры, у которой все кратчайшие пути строго нормальны. Заметим, что и начальная точка x лежит в замыкании множества точек разреза, если только $\Delta_x \neq T_xM$.

В следующей главе мы подробно рассмотрим структуру множества разреза и первой каустики вблизи x для ростка 3-мерной субримановой структуры общего положения (см. последний рисунок следующей главы).

Комментарии. Теорема 2 доказана в [20] (см. также [18]), а теорема 3 в [8] и [11] (см. также более позднюю работу [9]). Доказательства теоремы 4 и предложения 3 есть в [3], как и доказательство принадлежащей Риффору [26] теоремы 6; теорема 5 следует из более общего результата Каннарса и Риффора [13]. Сфера на группе Гейзенберга описана в одной из первых работ по субримановой геометрии [12], сфера для плоской структуры Мартине – в работе [6]. Типичность субримановых структур, имеющих только экстремали коранга 1, установлена в [15], предложение 4 доказано в [2].

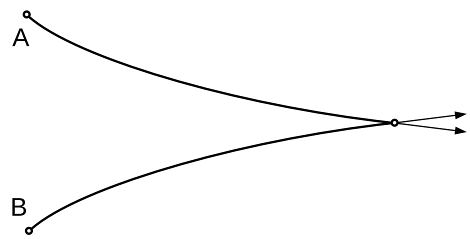
3. Кривизна

Ибо кто может выпрямить
то, что Он сделал кривым?[1]

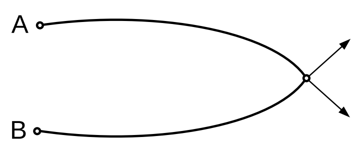
Определение субримановой кривизны основано на идее, восходящей ещё к Гауссу с его геодезическими треугольниками. Пусть A, B, C – три достаточно близкие точки субримановом многообразии. Соединим точки A и B с точкой C кратчайшими путями.

[1]Эклесиаст 7:13

Предположим, что эти пути – нормальные геодезические. В случае отрицательной кривизны картина должна быть примерно такой:



а в случае положительной кривизны – вот такой:



Иными словами, чем больше кривизна, тем длиннее вектор разности скоростей соответствующих геодезических в точке C. Своё строгое инфинитезимальное воплощение эта идея обретает в следующей конструкции.

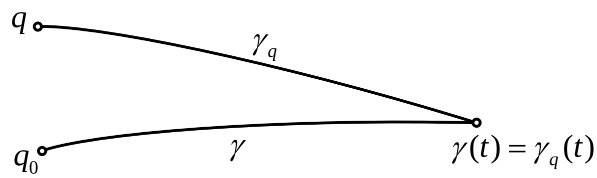
В конструкции участвуют не все нормальные геодезические, а только *обильные* (по-английски *ample*) геодезические. Что такое обильные геодезические, мы объясним немного позже, пока же достаточно знать, что $\forall q_0 \in M$ почти все исходящие из точки q_0 геодезические таковы. Напомним, что нормальные геодезические суть проекции на M траекторий гамильтоновой системы $\dot\lambda = \vec{h}(\lambda),\ h(\lambda) = 1$, причём эти геодезические автоматически параметризованы длиной дуги.

Гамильтониан h – однородный степени 1 на слоях кокасательного расслоения, поэтому поэтому траектории системы $\dot\lambda = \vec{h}(\lambda),\ h(\lambda) = c$, для любого $c > 0$ имеют те же проекции на M с той же параметризацией. Во многих отношениях удобнее работать с квадратичным на слоях гамильтонианом $\frac{1}{2}h^2(\lambda)$ и соответствующей гамильтоновой системой:

$$\dot\lambda = h(\lambda)\vec{h}(\lambda), \quad \lambda \in T^*M. \tag{3.1}$$

Проекции траекторий этой системы на M – те же самые геодезические, параметризованные пропорционально длине дуги, но не обязательно самой длиной дуги. Их легко выразить через экспоненциальное отображение (2.1). Если $\lambda(0) \in T^*_{q_0}M$ и $h(\lambda(0)) = c > 0$, то проекция траектории $t \mapsto \lambda(t)$ есть геодезическая $t \mapsto \mathcal{E}_{q_0}(ct, \frac{1}{c}\lambda(0))$. Если же $h(\lambda(0)) = 0$, то $\lambda(0)$ – неподвижная точка.

Итак, пусть $\gamma : t \mapsto \gamma(t),\ \gamma(0) = q_0,$ – параметризованная пропорционально длине дуги обильная геодезическая. Зафиксируем некоторое достаточно малое $t > 0$; тогда для любого q из некоторой окрестности точки q_0 в M найдётся единственный параметризованный пропорционально длине дуги кратчайший путь $\gamma_q : [0, t] \to M$ такой, что $\gamma_q(0) = q,\ \gamma_q(t) = \gamma(t)$:



Рассмотрим функцию $q \mapsto b_t(q) \doteq \frac{1}{2}|\dot\gamma_q(t) - \dot\gamma(t)|^2$; это гладкая функция, определённая в окрестности точки q_0. Более того, эта функция, очевидно, достигает минимума в точке q_0. Таким образом, $d_{q_0}b_t = 0$, а гессиан $D^2_{q_0}b_t$ есть корректно определённая неотрицательная квадратичная форма на $T_{q_0}M$. Мы извлечём кривизну из асимптотики семейства квадратичных форм $D^2_{q_0}b_t\big|_{\Delta_{q_0}}$ при $t \to 0$.

Чтобы понять, как может быть устроена эта асимптотика, вычислим сначала функцию b_t в точках геодезической γ. Мы получаем:

$$\gamma_{\gamma(s)}(\tau) = \gamma\left(s + \frac{t-s}{t}\tau\right), \quad 0 \le \tau \le t,$$

$$b_t(\gamma(s)) = \frac{s^2}{2t^2}|\dot\gamma(t)|^2 = \frac{s^2}{2t^2}|\dot\gamma(0)|^2.$$

Следовательно, $D^2_{q_0}b_t(\dot\gamma(0)) = \frac{1}{t^2}|\dot\gamma(0)|^2$.

Упражнение. Пусть M – евклидово пространство (т. е. пространство $\mathbb{R}^n$, снабжённое евклидовой метрикой); тогда функция b_t – одна и та же для всех стартующих в точке q_0 геодезических:

$$b_t(q) = \frac{|q - q_0|^2}{2t^2}, \qquad D^2_{q_0}b_t(v) = \frac{1}{t^2}|v|^2, \quad v \in \mathbb{R}^n.$$

Теперь рассмотрим общий риманов случай. Согласно первоначальной конструкции Римана, его кривизна измеряет инфинитезимальное отклонение квадрата риманова расстояния от евклидового, так что приведённая ниже формула не должна удивлять. В римановом случае все геодезические обильны и имеет место следующая асимптотика:

$$D^2_{q_0}b_t(v) = \frac{1}{t^2}|v|^2 + \frac{1}{3}\langle R(v|\dot\gamma)\dot\gamma|v\rangle + O(t), \quad v \in T_{q_0}M,$$

при $t \to 0$. Здесь R –риманов тензор: если $|\dot\gamma(0)| = |v| = 1,\ \langle\dot\gamma(0)|v\rangle = 0$, то $\langle R(v|\dot\gamma)\dot\gamma|v\rangle$ – секционная кривизна в направлении $span\{\dot\gamma(0), v\}$.

Рассмотрим, наконец, самый общий субриманов случай.

Теорема 7. *Пусть γ – обильная геодезическая. Тогда существуют такие квадратичные формы Q, R_γ на Δ_{q_0}, причём $Q(v) \geq |v|^2$, $\forall v \in \Delta_{q_0}$, что*

$$D^2_{q_0} b_t(v) = \frac{1}{t^2} Q_\gamma(v) + \frac{1}{3} R_\gamma(v) + O(t), \quad v \in \Delta_{q_0},$$

при $t \to 0$.

Квадратичная форма R_γ называется формой кривизны в направлении геодезической γ, а предшествующая ей в асимптотике положительно определённая форма Q_γ – своего рода размерностный инвариант, характеризующий анизотропность субримановой метрики на малых расстояниях. Равенство $Q_\gamma(v) = |v|^2$, $\forall v \in \Delta_{q_0}$ имеет место в том и только том случае, когда $\Delta_{q_0} = T_{q_0}M$, то есть только в римановом случае.

Теперь мы дадим определение обильных геодезических, а заодно научимся вычислять спектр формы Q и постараемся объяснить её геометрический смысл. На самом деле, свойство обильности зависит только от распределения и ростка горизонтальной кривой, оно никак не связано с евклидовой структурой на Δ и тем фактом, что γ – нормальная геодезическая.

Определение. *Росток гладкой горизонтальной кривой в точке q_0 называется обильным, если существует такое $k > 0$, что k-струя этого ростка не совпадает с k-струёй ни одной анормальной геодезической.*

Это определение чересчур абстрактно. Давайте его конкретизируем и научимся эффективно проверять обильность. Пусть $\Phi_t : M \to M$, $t \in \mathbb{R}$, – некоторый горизонтальный поток, причём $\Phi_t(q_0) = \gamma(t)$, $t \geq 0$. Иными словами, γ – одна из траекторий потока Φ_t. Рассмотрим подпространства $\Delta_{\gamma(t)} \subset T_{\gamma(t)}M$ и перенесём их в точку q_0 с помощью нашего потока. Мы получим семейство подпространств

$$\Delta^t_{q_0} = \Phi^{-1}_{t*} \Delta_{\gamma(t)}, \quad \Delta^t_{q_0} \subset T_{q_0}M.$$

Нетрудно показать, что кривая $\gamma|_{[0,t]}$ есть анормальная геодезическая в том и только том случае, когда $span\{\Delta^\tau_{q_0},\, 0 \leq \tau \leq t\}$ есть собственное подпространство $T_{q_0}M$.

Определим теперь флаг распределения Δ вдоль ростка горизонтальной кривой γ:

$$\Delta^{(i+1)}_\gamma = \frac{d^i}{dt^i} \Delta^t_{q_0}\Big|_{t=0}, \ i = 0, 1, 2, \ldots .$$

Здесь под i-й призводной семейства подпространств понимается линейная оболочка i-й производной всех сечений $t \mapsto v(t) \in \Delta_{q_0}^t,\ t \geq 0$. Нетрудно видеть, что

$$\Delta_{q_0} = \Delta_\gamma^{(1)} \subset \Delta_\gamma^{(2)} \subset \cdots \subset \Delta_\gamma^{(i)} \subset \cdots, \tag{3.2}$$

причём подпространства $\Delta_\gamma^{(i)}$ зависят только от Δ и γ, но не от выбора потока Φ_t. Более того, росток кривой γ обилен в том и только том случае, когда найдётся такое k, что $\Delta_\gamma^{(k)} = T_{q_0}M$.

Разумеется, для того, чтобы вычислить Δ_γ^i, нет нужды дифференцировать все сечения $\Delta_{q_0}^t$, да и находить само семейство $\Delta_{q_0}^t$ необязательно. Пусть $\Phi_t = e^{tX},\ \Delta_q = span\{V_1(q), \dots, V_d(q)\}$, где $X, V_1, \dots, V_d$ – горизонтальные векторные поля. Напомним, что $\frac{d}{dt} e_*^{-tX} V = e_*^{-tX}[X, V]$; отсюда нетрудно вывести, что

$$\Delta_\gamma^{(i+1)} = span\{\underbrace{[X, \cdots, [X}_{j}, V_l] \cdots] : 0 \leq j \leq i, 1 \leq l \leq d\}.$$

Мы видим, что флаг (3.2) есть микролокальная версия флага распределения, рассмотренного в главе 2. При построении флага распределения рассматриваются все итерированные коммутаторы горизонтальных векторных полей, а для флага вдоль кривой итерируется только коммутирование с фиксированным полем, порождающим эту кривую. Флаги вдоль разных горизонтальных кривых, исходящих из одной и той же точки, могут быть, конечно, разными. Нас в первую очередь интересуют флаги вдоль нормальных геодезических.

Пусть $\xi \in T_{q_0}^*M$; обозначим символом $\bar{\xi}$ геодезическую, отвечающую решению системы (3.1) с начальным условием $\lambda(0) = \xi$. Иными словами, $\bar{\xi}(t) = \mathcal{E}\left(h(\xi)t, \frac{1}{h(\xi)}\xi\right)$, если $h(\xi) \neq 0$, и $\bar{\xi}(t) \equiv q_0$, если $h(\xi) = 0$. Каждому $\xi \in T_{q_0}^*M$ отвечает флаг

$$\Delta_{q_0} = \Delta_{\bar{\xi}}^{(1)} \subset \Delta_{\bar{\xi}}^{(2)} \subset \cdots \subset T_{q_0}M.$$

Предложение 5. *Целочисленные функции*

$$\xi \mapsto \dim \Delta_{\bar{\xi}}^{(i)}, \quad \xi \in T_{q_0}^*M, \quad i = 1, 2, \dots, \tag{3.3}$$

полунепрерывны снизу на $T_{q_0}^*M$. Более того, существует такое открытое по Зарисскому подмножество $\mathcal{O}_{q_0} \subset T_{q_0}^*M$, что для всякого $\xi \in \mathcal{O}_{q_0}$ геодезическая $\bar{\xi}$ обильна, а функции $\xi \mapsto \dim \Delta_{\bar{\xi}}^{(i)},\ i = 1, 2, \dots$, постоянны на $\mathcal{O}_{q_0}$ и равны своим максимальным значениям на $T_{q_0}^*M$.

Перейдём к вычислению спектра квадратичной формы Q_γ. Мы сделаем это не для любого обильного ростка, а только для ростков, удовлетворяющих дополнительному не слишком обременительному условию *эквирегулярности*. Объясним это условие.

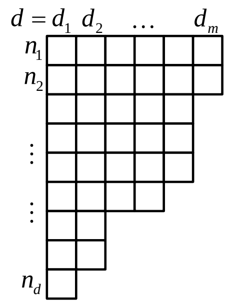
До сих пор мы фиксировали точку $q_0 \in M$ и рассматривали ростки всех нормальных геодезических, исходящих из этой точки. Теперь давайте зафиксируем геодезическую $\gamma : [0, t_1] \to M$ и рассмотрим ростки этой геодезической в разных точках. А именно, для всякого $s \in [0, t_1)$ положим $\gamma_s(t) = \gamma(s+t)$. Тогда $\Delta^{(1)}_{\gamma_s} \subset \Delta^{(2)}_{\gamma_s} \subset T^*_{\gamma(s)}M$. Нетрудно видеть, что целочисленные функции $s \mapsto \dim \Delta^{(i)}_{\gamma_s}$ полунепрерывны снизу. Эти функции локально постоянны на открытом всюду плотном подмножестве полуинтервала $[0, t_1)$. Росток геодезической γ в нуле называется *эквирегулярным*, если функции $s \mapsto \dim \Delta^{(i)}_{\gamma_s}$, $i = 1, 2, \ldots$, локально постоянны в окрестности нуля, т. е. $\dim \Delta^{(i)}_{\gamma_s} = \dim \Delta^{(i)}_{\gamma}$ для всех достаточно малых $s > 0$.

Проиллюстрируем введённые понятия на рассмотренных в главе 2 субримановых структурах в $\mathbb{R}^3$. Если начальная точка $q_0 = x$ лежит вне поверхности Мартине, то все непостоянные геодезические обильны и эквирегулярны, а флаги вдоль их ростков совпадают с флагом распределения в точке q_0; в частности, $\Delta^{(2)}_{\bar\xi} = \mathbb{R}^3$. Если же $q_0 = x$ – точка Мартине, то все не анормальные геодезические обильны, но ни одна из них не эквирегулярна. Для $\xi \in \mathcal{O}_{q_0}$ получаем: $\Delta^{(2)}_{\bar\xi} = \Delta^{(1)}_{\bar\xi} = \Delta_{q_0}$, $\Delta^{(3)}_{\bar\xi} = \mathbb{R}^3$. Для того, чтобы перейти к эквирегулярным росткам, нужно чуть-чуть продвинуться вдоль геодезической, выйдя таким образом за пределы поверхности Мартине.

В общем случае предложение 5 может быть дополнено следующим образом:

Для всех q_0 из некоторого открытого всюду плотного подмножества в M обильные геодезические $\bar\xi$, $\xi \in \mathcal{O}_{q_0}$, эквирегулярны.

Теперь мы сосредоточимся на эквирегулярном случае. Пусть $\dim \Delta_{q_0} = d$ и $\Delta^m_\gamma = T_{q_0}M$. Положим $d_1 = d$, $d_{i+1} = \dim \Delta^{(i+1)}_\gamma - \dim \Delta^{(i)}_\gamma$, $i = 1, \ldots, m-1$. В эквирегулярном случае последовательность чисел $d_1, \ldots, d_m$ – невозрастающая, $d_{i+1} \le d_i$, $1 \le i \le m-1$. Составим диаграмму Юнга со столбцами длины $d_1, \ldots, d_m$:



Пусть строки этой диаграммы имеют длину $n_1, \dots, n_d$. Тогда

$$\operatorname{spec} Q_\gamma = \{n_1^2, \dots, n_d^2\}. \tag{3.3}$$

Напомним, что Q_γ есть квадратичная форма на d-мерном евклидовом пространстве Δ_{q_0}, элементы спектра такой формы суть собственные числа соответствующего симметричного оператора на Δ_{q_0}. Среди чисел $n_1, \dots, n_d$ могут быть повторяющиеся, количество повторений соответствует кратности собственного числа.

Замечание. Для не эквирегулярного ростка обильной геодезической собственные числа формы Q_γ не обязаны быть целыми. Например, в случае $M = \mathbb{R}^3$ для ростков обильных геодезических в точке Мартине получаем: $\operatorname{spec} Q_\gamma = \{1, \frac{9}{4}\}$.

Геометрический смысл форм Q_γ хорошо иллюстрирует понятие *геодезической размерности* субриманова пространства M в точке q_0. Вот, что это такое.

Рассмотрим какое-нибудь компактное подмножество $C \subset M$ с непустой внутренностью (например, шар малого радиуса с центром q_0). Соединим все точки множества C с точкой q_0 кратчайшими геодезическими. Геодезические параметризуем пропорционально длине дуги так, чтобы все они были заданы на одном и том же отрезке $[0,1]$. Таким образом, точка $x \in C$ соединена с q_0 геодезической $\gamma_x : [0,1] \to M$, где $\gamma_x(0) = q_0,\ \gamma_x(1) = x$. Если точки q_0 и x соединены несколькими кратчайшими путями, то мы берём их все: тогда γ_x не одна геодезическая, а некоторое их множество.

Теперь мы хотим стянуть C к q_0 вдоль кратчайших путей. Положим $C_t = \{\gamma_x(t) : x \in C\},\ 0 \le t \le 1$, тогда $C_1 = C,\ C_0 = \{q_0\}$. Предположим, что на M задана некоторая форма объёма, так что определены объёмы $vol(C_t) > 0,\ 0 < t \le 1$. *Геодезической размерностью* субриманова пространства M в точке q_0 называется $\lim\limits_{t\to 0} \frac{1}{t} \ln vol(C_t)$, если этот предел существует и не зависит от выбора множества C и формы объёма. Иными словами, геодезическая размерность – это порядок, с которым объём множества C_t стремится к нулю при $t \to 0$.

Теорема 8. *Предположим, что геодезические $\bar{\xi}$, $\xi \in \mathcal{O}_{q_0}$, эквирегулярны, а исходящие из точки q_0 анормальные кратчайшие пути заполняют подмножество меры ноль в M. Тогда геодезическая размерность субриманова пространства M в точке q_0 равна $tr\, Q_{\bar{\xi}}$, $\forall \bar{\xi} \in \mathcal{O}_{q_0}$.*

Некоторые пояснения к последней теореме. Как мы уже отмечали, условие эквирегулярности геодезических $\bar{\xi}$ при $\xi \in \mathcal{O}_{q_0}$ выполняется для всех q_0 из некоторого открытого всюду плотного подмножества в M. Что касается условия на исходящие из точки q_0 анормальные кратчайшие пути, то оно выполняется во всех точках всех известных примеров субримановых пространств, но доказательства того, что это всегда так, нет. Мы знаем, что такие пути заполняют замкнутое нигде не плотное подмножество в M, но не знаем, может ли оно иметь положительную меру. Это важный открытый вопрос в субримановой геометрии.

В случае выполнения условий теоремы у нас есть явная формула для геодезической размерности (см. (3.3)). Геодезическая размерность равна

$$\sum_{i=1}^{d} n_i^2 = \sum_{i=1}^{m} (2i-1) d_i.$$

Интересно сравнить её с хаусдорфовой размерностью, вычисленной в главе 2. Мы сделаем это в случае, когда $m = 2$, то есть $\Delta_{\bar{\xi}}^{(1)} \neq \Delta_{\bar{\xi}}^{(2)} = T_{q_0}M$ при $\xi \in \mathcal{O}_{q_0}$. В этом случае флаги вдоль геодезических совпадают с флагом распределения в точке q_0. Таким образом, хаусдорфова размерность субриманова пространства M равна $d+2(n-d)$, а его геодезическая размерность равна $d+3(n-d)$, где n – топологическая размерность многообразия M. Таким образом, геодезическая размерность строго больше хаусдорфовой.

Напомним, что хаусдорфова размерность есть порядок, с которым объём шара стремится к нулю при стремлении к нулю радиуса. Полученное неравенство есть самое грубое (на уровне размерности) проявление уже отмечавшегося свойства субримановых (но не римановых) пространств: наличие множества сколь угодно коротких геодезических, не являющихся кратчайшими путями.

Например, при стягивании шара $C = B_{q_0}(r)$ к его центру вдоль кратчайших путей, множество C_t заполняет лишь часть шара $B_{q_0}(tr)$, поскольку при уменьшении длины всё больше исходящих из точки q_0 геодезических оказываются кратчайшими (они не выходят на сферу $S_{q_0}(r)$, а на сферу $S_{q_0}(tr)$ выходят). Более того, множество C_t "уплощается" гораздо быстрее, чем $B_{q_0}(tr)$, при $t \to 0$. Всё это хорошо видно уже в простейшем случае группы Гейзенберга, где топологическая размерность равна трём, хаусдорфова четырём, а геодезическая пяти.

Перейдём к обсуждению форм кривизны R_γ. Нетрудно показать, что $\dot\gamma(0) \in \ker R_\gamma$, так что квадратичная форма R_γ фактически определена на фактор-пространстве $\Delta_{q_0}/\mathbb{R}\dot\gamma(0)$. Важно понять, как квадратичная форма $R_{\bar\xi}$ зависит от $\xi \in T^*_{q_0}M$.

Можно показать, что $\xi \mapsto R_{\bar\xi}(v)$ есть рациональная функция, положительно однородная степени однородности 2, $\forall v \in \Delta q_0$. Эта функция конечна на $\mathcal{O}_{q_0}$ и может иметь полюса вне $\mathcal{O}_{q_0}$. Напомним, что в римановом случае $R_{\bar\xi}(v) = \langle R(v, \dot{\bar\xi})\dot{\bar\xi}, v\rangle$, где R – риманова кривизна. Таким образом, в римановом случае функция $\xi \mapsto R_{\bar\xi}(v)$ есть просто квадратичная форма, но в общем случае это не так.

Вообще, о структуре этих функций известно очень мало, их серьёзное изучение только началось. Если записать рациональную функцию $\xi \mapsto R_{\bar\xi}(v)$ в локальных координатах, то её коэффициенты сами окажутся рациональными функциями от частных производных гамильтониана h. Явные выражения однако чрезвычайно сложны и почти бесполезны для понимания геометрии.

В этой статье мы граничимся описанием форм $R_{\bar\xi}$ в хорошо изученном случае контактной субримановой структуры на 3-мерном многообразии. В этом случае функции $\xi \mapsto R_{\bar\xi}(v)$ – квадратичные формы[2] на $T^*_{q_0}M$.

Итак, пусть Δ – контактное рапределение на 3-мерном римановом многообразии M. Тогда $\dim \Delta_{q_0} = 2$ и $R_{\bar\xi}$ есть квадратична форма на одномерном евклидовом пространстве $\Delta_{q_0}/\mathbb{R}\dot\gamma(0)$, то есть, по-существу, число (единственное собственное значение симметричного оператора, соответствующего квадратичной форме). Пусть $r(\xi)$ – это число. Функция $\xi \mapsto r(\xi)$ сама есть квадратичная форма на $T^*_{q_0}M$. Вычисление показывает, что сужение этой квадратичной формы на ортогональное дополнение к Δ_{q_0} есть положительно определённая форма: $r|_{\Delta^\perp_{q_0}} > 0$.

Таким образом, кривизна контактной субримановой структуры не может быть тождественно равной нулю. На первый взгляд, это протиаоречит привычной римановой картине, однако, если приглядеться, то окажется, что, наоборот, полностью ей соответствует. Действительно, в субримановом, но не римановом пространстве всегда имеются сколь угодно короткие не локально кратчайшие геодезические. Таким образом, кривизна не только не может

[2]Для контактных субримановых структур на многообразиях большей размерности это уже не так.

быть тождественно равной нулю, но и не должна быть равномерно ограниченной сверху на пространстве геодезических фиксированной длины. Именно это и происходит.

Напомним, что геодезическая $\bar{\xi}$ параметризована пропорционально длине дуги, причём $|\dot{\bar{\xi}}| = h(\xi)$, $\xi \in T^*_{q_0}M$. Кроме того, h^2 есть квадратичная форма, а $\Delta^\perp_{q_0}$ – её ядро. Добавляя к данному $\xi \in T^*_{q_0}M$ достаточно большой элемент из $\Delta^\perp_{q_0}$, мы не меняем скорости геодезической $\bar{\xi}$, но увеличиваем кривизну и приближаем первый сопряжённый момент к нулю. Определение сопряжённого момента дано в конце главы 2.

В действительности, имеется очень тесная, не только качественная, но и количественная связь квадратичной формы $r(\xi)$, $\xi \in T^*_{q_0}M$, со структурой первой каустики и множества разреза вблизи точки q_0. Сейчас мы опишем эту связь, при этом нам будет удобно перенормировать форму $r(\cdot)$, заменив её на $\frac{5}{2}r(\cdot)$.

Всякую квадратичную форму на конечномерном векторном пространстве можно представить, причём многими способами, в виде линейной комбинации квадратов линейных форм. Если на пространстве задана евклидова структура, то мы получим каноническое представление, взяв квадраты подходящего ортонормального базиса линейных форм.

Квадратичная форма $r(\cdot)$ определена на пространстве $T^*_{q_0}M$, а евклидова структура задана только на подпространстве $\Delta_{q_0} \subset T_{q_0}M$. Мы знаем также, что $r|_{\Delta^\perp_{q_0}} > 0$. Этой информации достаточно для получения следующего канонического представления формы $\frac{5}{2}r$ в виде линейной комбинации квадратов:

$$\frac{5}{2}r(\xi) = \langle \xi, f_0 \rangle^2 + \alpha_1 \langle \xi, f_1 \rangle + \alpha_2 \langle \xi, f_2 \rangle,$$

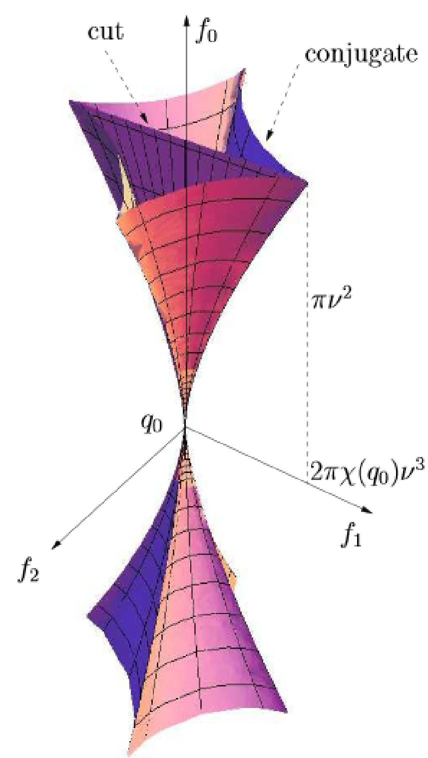
где $\alpha_1 \geq \alpha_2$, а f_1, f_2 лежат в Δ_{q_0} и образуют ортонормальный базис этой евклидовой плоскости. Вектор f_0 трансверсален плоскости Δ_{q_0} и определён с точностью до знака. Если $\alpha_1 \neq \alpha_2$, то векторы f_1, f_2 также определены с точностью до знака; в противном случае подходит любой ортонормальный базис плоскости Δ_{q_0}. Несложный вывод этой канонической формы мы предоставляем читателю.

Заметим, что $h^2(\xi) = \langle \xi, f_1 \rangle^2 + \langle \xi, f_2 \rangle^2$ и $\dot{\bar{\xi}}(0) = \langle \xi, f_1 \rangle f_1 + \langle \xi, f_2 \rangle f_2$. Введём специальное обозначение $\nu = \frac{1}{|\langle \xi, f_0 \rangle|}$ для величины, обратной к абсолютной величине третьей координаты вектора ξ, которая не влияет на начальную скорость геодезической $\bar{\xi}$. Положим также $\kappa = \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2)$, $\chi = \frac{1}{6}(\alpha_1 - \alpha_2)$; величины κ и χ – главные числовые инварианты субримановой структуры.

Пусть $length_{conj}(\gamma)$ – длина отрезка геодезической γ до первой сопряжённой точки (по-английски conjugate point). Имеет место следующая асимптотика:

$$length_{conj}(\bar{\xi}) = 2\pi\nu - \pi\kappa\nu^3 + O(\nu^4)$$

при $\nu \to 0$. Предположим, что $\chi \neq 0$, т. е. $\alpha_1 > \alpha_2$. В этом случае пересечение первой каустики и множества разреза с малой окрестностью точки q_0 имеют следующий вид:



Касательный конус и к каустике, и к множеству разреза в точке q_0 есть прямая $\mathbb{R}f_0$. Первая каустика состоит из двух “пирамид” с вершиной q_0, одна из пирамид отвечает положительным значениям величины $\langle \xi, f_0 \rangle$, а другая отрицательным. Каждая из пирамид имеет по 4 ребра возврата. Асимптотически эти рёбра возврата суть полукубические параболы. Если считать ось $\mathbb{R}f_0$ вертикальной осью, то горизонтальные сечения первой кастики асимптотически – астроиды с центром на оси $\mathbb{R}f_0$, причём симметричные астроиды (т. е. две диагонали астроиды равны). Вершины астроид лежат на прямых, параллельных осям $\mathbb{R}f_1, \mathbb{R}f_2$.

Первая сопряжённая точка геодезической ξ лежит на высоте $\pi\nu^2 + O(\nu^4)$, а длина диагонали ‘астроиды’, получаемой сечением каустики на этой высоте равна $4\pi\chi\nu^3 + O(\nu^4)$. Горизонтальное сечение множества разреза (по-английски cut locus) асимптотически есть диагональ астроиды, соединяющая вершины, лежащие на прямой, параллельной оси $\mathbb{R}f_1$. Слово “асимптотически” здесь (как и выше) заменяет многословное, но достаточно ясное из рисунка и, на мой взгляд, излишне загромождающее текст, описание. Можно было бы написать: горизонтальное сечение множества разреза на высоте $\pi\nu^2$ есть гладкая кривая, соединяющая противоположные рёбра возврата каустики; при растяжении горизонтальных координат (но не вертикальной!) в $\frac{1}{\nu^3}$ раз и стремлении ν к нулю эта кривая равномерно сходится к интервалу $(-2\pi\chi f_1, 2\pi\chi f_1)$.

Мы видим, что кривизна $R_{\bar{\xi}},\ \xi \in T^*_{q_0}M$ полностью определяет форму первой каустики и множества разреза вблизи точки q_0 не только качественно, но и количественной. Должен однако признать, что механизм этой связи пока понят плохо: у нас нет общих теорем, выводящих основные свойства каустики и множества разреза из структуры форм кривизны.

До сих пор мы занимались кривизной в заданной точке $q_0 \in M$, но, поскольку это произвольная точка многообразия, мы таким образом находим кривизну и её нормальную форму во всех точках. Получаем гладкие функции $q \mapsto \kappa(q)$ и $q \mapsto \chi(q)$, а также векторное поле $q \mapsto f_0(q)$. В случае $\chi(q_0) = 0$ форма первой каустики и множества разреза сильно отличается от описанной выше и достаточно точно восстанавливается по производным функции χ в точке q_0. Если же $\chi(q) = 0,\ \forall q \in M$, то всё определяется производными функции κ. В случае же $\chi \equiv 0,\ \kappa \equiv const$ первая каустика вблизи точки q_0 сливается с множеством разреза и совпадает с траекторией поля f_0.

Вообще, класс контактных субримановых структур, удовлетворяющих условию $\chi \equiv 0$, имеет весьма прозрачную интерпретацию. Это условие эквивалентно тому, что поток, порождённый полем f_0, состоит из субримановых изометрий. Распрямив поле f_0 в некоторой окрестности точки q_0, мы можем представить эту окрестность как произведение интервала (кусочка таектории поля f_0) и двумерной области. Распределение Δ трансверсально траекториям поля f_0, а субриманова длина векторов из Δ зависит только их проекций на двумерную область, поскольку сдвиг вдоль траекторий поля f_0

есть изометрия. Таким образом, субриманова длина горизонтальных векторов определяет некоторую риманову структуру на двумерной области, превращая эту область в риманову поверхность. Далее, функция κ, будучи субримановым инвариантом, постоянна на траекториях поля f_0 и является, по-существу, функцией на этой римановой поверхности.

Оказывается, κ есть ни что иное, как гауссова кривизна этой римановой поверхности, а исходная субриманова структура локально изометрична структуре, соответствующей задаче Дидоны на римановой поверхности. Напомним, что задача Дидоны – это специальная изопериметрическая задача на римановой поверхности: внешний дифференциал 1-формы, задающей изопериметрическое ограничение в этой задаче, равен форме площади на римановой поверхности. Напомним также, что группа Гейзенберга соответствует задаче Дидоны на евклидовой плоскости, то есть случаю $\chi(\cdot) \equiv \kappa(\cdot) \equiv 0$.

Таким образом, контактная субриманова структура тогда и только тогда локально изометрична своему метрическому касательному, когда $\chi = \kappa = 0$ во всех точках или, эквивалентно, когда квадратичная форма $\xi \mapsto r(\xi),\ \xi \in T^*_{q_0}M$, имеет ранг 1 для всех q_0. Мы уже выяснили, что эта форма не может быть нулевой.

Комментарии. Субриманова кривизна была открыта совсем недавно (см. [4, 5]), её определение напоминает оригинальную конструкцию Римана кривизны его имени [25]. Теоремы 7,8 и предложение 5 доказаны в [4]. Типичные трёхмерные контактные структуры подробно исследованы в [1, 14, 7] задолго до открытия субримановой кривизны.

Список литературы

[1] A. Agrachev, Exponential mappings for contact sub-Riemannian structures. J. Dynam. Contr. Syst., 1996, v.2, 321–358

[2] A. Agrachev, Tangent hyperplanes to subriemannian balls. J. Dynam. Contr. Syst., 2016, v.22, 683–692

[3] A. Agrachev, D. Barilari, U. Boscain, Introduction to Riemannian and sub-Riemannian geometry. https://webusers.imj-prg.fr/ davide.barilari/ABB-SRnotes-110715.pdf

[4] A. Agrachev, B. Barilari, L. Rizzi, Curvature: a variational approach. ArXiv:1306.5318; Memoires Amer. Math. Soc., в печати

[5] A. Agrachev, B. Barilari, L. Rizzi, Sub-Riemannian curvature in contact geometry. ArXiv:1505.04374; J. Geom. Anal., в печати

[6] A. Agrachev, B. Bonnard, M. Chyba, I. Kupka, Sub-Riemannian sphere in Martinet flat case. ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations, 1997, v.2, 377–448

[7] A. Agrachev, H. Chakir, J.-P. Gauthier, Sub-Riemannian metrics on R^3. Proc. Canadian Math. Soc., 1998, v.25, 29–78

[8] A. Agrachev, R. Gamkrelidze, A. Sarychev, Local invariants of smooth control systems. Acta. Appl. Math., 1989, v.14, 191–237

[9] A. Bellaiche, The tangent space in sub-Riemannian geometry. In: Sub-Riemannian Geometry, v.144 of Progr. Math., pp.1-78. Birkhäuser, Basel, 1996

[10] И. Бесчастный, Об оптимальном качении сферы с прокручиванием, без проскальзывания. Матем. сб. 2014, т.205, 3-–38

[11] R. Bianchini, G. Stefani, Graded approximations and controllability along a trajectory. SIAM J. Control Optim., 1990, v.28, 903–924

[12] А. Вершик, В. Гершкович, Неголономные динамические системы. Геометрия распределений и вариационные задачи. Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления, 1987, т.16, 5–85

[13] P. Cannarsa, L. Rifford, Semiconcavity results for optimal control problems admitting no singular minimizing controls. Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire, 2008, v.25, 773-802

[14] H. Chakir, J.-P. Gauthier, I. Kupka, Small sub-Riemannian balls on R^3. J. Dynam. Contr. Syst., 1996, v.2, 359–421

[15] Y. Chitour, F. Jean, E. Trélat, Genericity results for singular curves. J. Differ. Geom., 2006, v.73, 45-73

[16] W.-L. Chow, Über Systeme von linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. Math. Ann., 1939, v.117, 98–105

[17] L.Euler, Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, sive Solutio problematis isoperimitrici latissimo sensu accepti, Lausanne, Geneva, 1744.

[18] M. Gromov, Carnot-Carathéodory spaces seen from within. In: Sub-Riemannian geometry, v.144 of Progr. Math., pp. 79–323. Birkhäuser, Basel, 1996

[19] V. Jurdjevic, Geometric control theory. Cambridge Univ. Press, 1997

[20] J. Mithell, On Carnot–Carathéodory metrics. J. Differential Geom., 1985, v.21, 35–45

[21] R. Montgomery, A tour of subriemannian geometries, their geodesics and applications. Mathematical Surveys and Monographs, v91. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002

[22] T. Nagano, Linear differential systems with singularities and applications to transitive Lie algebras. J. Math. Soc. Japan, 1966, v.15, 398–404

[23] Л. Понтрягин, В. Болтянский, Р. Гамкрелидзе, Е. Мищенко, Математическая теория оптимальных процессов. Физматгиз, Москва, 1961

[24] П. Рашевский, О соединимости любых двух точек вполне неголономного пространства допустимой линией. Уч. зап. Мос. гос. пед. ин-та. им. К. Либнехта. Сер. физ.-мат. 1938, т.3, 83-–94

[25] B. Riemann, Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen. In: Abhandlungen der Koniglichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen 1868, v.13, 133-150

[26] L. Rifford, A propos des spheres sous-riemanniennes. Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin, 2006 v.13, 521-526

[27] Ю. Сачков, Симметрии и страты Максвелла в задаче об оптимальном качении сферы по плоскости Матем. сб., 2010, т.201, 99–120

[28] H. Sussmann, Orbits of families of vector fields and integrability of distributions. Trans. Amer. Math. Soc., 1973, v.180, 172–188