stable_manifold_pendulum

April 18, 2018

1 Varietà stabile ed instabile

Prendiamo come esempio il pendolo con attrito:

$$\ddot{x} = -\sin(x) - \mu\dot{x} \tag{1}$$

dove μ è il coefficiente di attrito. Riscrivendo l'equazione come sistema del primo ordine, troviamo

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\sin(x) - \mu y \end{cases} \tag{2}$$

I punti di equilibrio del sistema sono dati da $(k\pi, 0)$, con $k \in \mathbb{Z}$. In particolare ci concentriamo sul punto di equilibrio $\bar{x} = (\pi, 0)$. Il sistema linearizzato al punto di equilibrio è

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{3}$$

Gli autovalori si calcolano facilmente a mano, comunque sfruttiamo l'occasione per utilizzare le potenzialità di python e dei suoi pacchetti. In particolare useremo numpy e scipy. Cominciamo con importarli

```
In [2]: import numpy as np                                    # libreria matematica
        from scipy.integrate import odeint                    # altra libreria matema
        import matplotlib.pyplot as plt                       # librerie grafiche
        import seaborn
```

```
In [3]: m = 0.2                                                # fisso l'attrito
        A = np.array([[0, 1], [1,  - m]])
        print A
```

```
[[ 0.   1. ]
 [ 1.  -0.2]]
```

Troviamo lo spettro usando la funzione `LA.eig()`

```
In [85]: from scipy import linalg as LA                    # pacchetto per algebra line
         evals, evecs = LA.eig(A)
         print evals
         print evecs                                       # attenzione: gli autovettor

         print('autovalore {0} ha autovettore {1}').format(evals[0], evecs[:,0])
         print('autovalore {0} ha autovettore {1}').format(evals[1], evecs[:,1])
```

```
[ 0.95124922+0.j -1.05124922+0.j]
[[ 0.72454731 -0.68922507]
 [ 0.68922507  0.72454731]]
autovalore (0.951249219725+0j) ha autovettore [ 0.72454731  0.68922507]
autovalore (-1.05124921973+0j) ha autovettore [-0.68922507  0.72454731]
```

L'autovalore negativo è $\lambda_1 = -1.05124922$ a cui corrisponde la varietà stabile

Il punto di equilibrio $(\pi, 0)$ è perciò una sella. Il teorema della varietà stabile ed instabile ci garantisce che esistono due varietà:

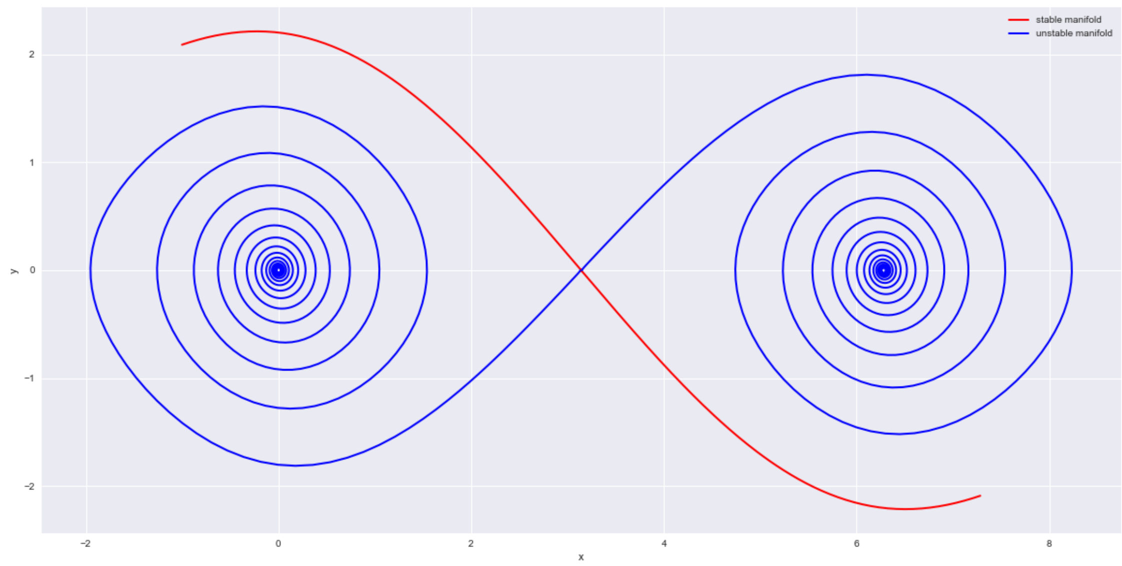
$$W^s(\bar{x}) = \left\{x \in U: \quad \phi^t(x) \to \bar{x}, \quad t \to \infty\right\} \tag{4}$$

$$W^u(\bar{x}) = \left\{x \in U: \quad \phi^t(x) \to \bar{x}, \quad t \to -\infty\right\} \tag{5}$$

Inoltre tali varietà sono tangenti alla varietà stabile ed instabile linearizzate

```
In [88]: # function that returns vector field
         def model(x_y, t):
             x, y  = x_y
             dxdt =  y
             dydt = - np.sin(x)- m*y
             return [dxdt, dydt]

         # distanza dal punto fisso da cui partiamo
         eps = 0.01

         # dimensione della figura
         plt.figure(figsize=(20,10))


         # autovettori
         #varietà stabile lineare
         vs = evecs[:,1]
         #varietà instabile lineare
         vu = evecs[:,0]

         ################### STABLE MANIFOLD
         # time points
         t = np.linspace(0,10, 500)

         # initial condition for the stable manifold 1    evecs[1] è il vettore a c
```

```
xs0 = np.pi + eps*vs[0]
ys0 = 0.0 +  eps*vs[1]

# initial condition for the stable manifold 2
xs1 = np.pi - eps*vs[0]
ys1 = 0.0 -  eps*vs[1]

# solve ODEs
sm0 = odeint(model,[xs0, ys0],-t)         #ricordiamoci di invertire il te
sm1 = odeint(model, [xs1, ys1], -t)

# plot results
plt.plot(sm0[:,0], sm0[:,1],'r-',linewidth=2,label='stable manifold')     #
plt.plot(sm1[:,0], sm1[:,1],'r-',linewidth=2)     # è il primo ramo della v
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')
plt.legend()



################### UNSTABLE MANIFOLD
# time points
t = np.linspace(0,100, 1000)

# initial condition for the stable manifold 1
xu0 = np.pi + eps*vu[0]
yu0 = 0.0 +  eps*vu[1]

# initial condition for the stable manifold 2
xu1 = np.pi - eps*vu[0]
yu1 = 0.0 -  eps*vu[1]

# solve ODEs
um0 = odeint(model,[xu0, yu0],t)         #ricordiamoci di invertire il tem
um1 = odeint(model, [xu1, yu1], t)

# plot results
plt.plot(um0[:,0], um0[:,1],'b-',linewidth=2,label='unstable manifold')
plt.plot(um1[:,0], um1[:,1],'b-',linewidth=2)     # è il primo ramo della v
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')
plt.legend()



plt.show()
```



In [ ]: