Современная математика. Фундаментальные направления. Том 46 (2012). С. 31–43

УДК 517.955

РЕГУЛЯРНОСТЬ СПЕЦИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ВАРИАЦИИ В СИСТЕМАХ ЗАКОНОВ СОХРАНЕНИЯ И УРАВНЕНИИ ГАМИЛЬТОНА—ЯКОБИ

© 2012 г. **С. БЬЯНКИНИ**

Аннотация. Мы изучаем вопрос регулярности специальных функций ограниченной вариации для решений гиперболических систем законов сохранения и уравнения Гамильтона—Якоби и даем обзор техник, используемых при доказательстве. Статью завершает список смежных задач.

1. Введение

Рассмотрим строго гиперболическую систему законов сохранения в случае одной пространственной переменной

$$u_t + f(u)_x = 0, \quad (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R},\ u \in \mathbb{R}^n, \tag{1.1}$$

Классическим является результат, утверждающий, что, если норма ограниченной вариации начальных данных

$$u(0,x) = u_0(x)$$

мала, решение остается в классе функций ограниченной вариации для всех $t > 0$. Для доказательства этого факта могут быть использованы различные методы: схема Глимма [4, 22], анализ волнового фронта [3], метод исчезающей вязкости [8] или другие методы, основанные на единственности предела (см., например, [5, 6]).

Для специальных систем L^∞-решения могут быть построены посредством оценок равномерной устойчивости [7], компенсированной компактности [21] или равномерного затухания [10, 23].

Все эти результаты могут рассматриваться как свойства регулярности решений, влекущие за собой компактность в $L^\infty(\mathbb{R})$. Важно заметить, что непрерывные решения не существуют в общем случае, каковой факт изучается в любом базовом курсе уравнений с частными производными.

Наряду с описанным случаем можно рассмотреть и другие классы регулярности. Приведем далее их краткий список.

1.1. Затухание положительных волн. В случае $n = 1$, т. е. в случае скалярных законов сохранения, О. А. Олейник доказано, что решение удовлетворяет односторонней липшицевой оценке

$$u(t,x+h) - u(t,x) \leqslant \frac{h}{\kappa t}, \tag{1.2}$$

где $f''(u) \geqslant \kappa > 0$ — равномерная выпуклость f [1]. В частности, u локально является функцией ограниченной вариации.

Некоторое обобщение предыдущего условия дано в [18]: положительная часть i-й компоненты v_i производной $\partial_x u$ удовлетворяет неравенству

$$v^+(T,A) \leqslant \frac{1}{c_0}\frac{\mathcal{L}^1(A)}{T-t} + C_0\big(Q(t) - Q(T)\big),$$

где Q — функционал взаимодействия Глимма.

Более подробно этот тип регулярности мы изучим позднее, поскольку он тесно связан с регулярностью специальных функций ограниченной вариации.

1.2. Дифференцируемость вдоль характеристик. В равномерно выпуклом скалярном случае, поскольку

$$x \mapsto -\lambda(u(t,x))$$

является квазимонотонным векторным полем в силу (1.2), мы можем рассмотреть единственное решение в смысле Филиппова для дифференциального включения

$$\dot{x} \in \big[-\lambda(u(t,x+)), -\lambda(u(t,x-))\big].$$

Решения этого включения вне множества скачков u называются характеристическими кривыми.

Для C^1-решений мы можем доказать, что решение является константой вдоль характеристик, т. е. что, если $\gamma(t)$ является характеристикой, то $t \mapsto u(t,\gamma(t))$ является константой, и, таким образом, γ есть отрезок. Эти свойства легко проверить для случая $u \in C^1$.

Таким образом, можно поставить вопрос, выполняются ли те же условия для решений скалярных законов равновесия

$$u_t + f(u)_x = g(t,x,u),$$

где мы требуем выполнения условия

$$\frac{d}{dt}u(t,\gamma(t)) = g(t,\gamma(t),u(t,\gamma(t))).$$

В общем случае это неверно, однако, эти условия выполняются для выпуклой f [20]. Векторный случай этого результата все еще остается нерешенной проблемой.

1.3. Свойства дифференцируемости для L^∞-решений. Для L^∞-решений законов сохранения в случае, когда оценки ограниченной вариации не могут быть доказаны, структура решений, вообще говоря, остается не вполне ясной: например, решения в случае размерности больше единицы или невыпуклые скалярные уравнения. Однако, возможно доказать, что из нелинейности потока f следует, что имеет место некоторая остаточная структура ограниченной вариации: существует локально спрямляемое множество скачков, на котором существуют левый и правый пределы решения и вне которого решение имеет стремящееся к нулю среднее колебание [24].

Вопрос доказательства аналогичных результатов для систем остается открытым.

1.4. Дробная дифференцируемость. Посредством кинетического представления можно доказать, что решение принадлежит компактному множеству в L^1 (см., например, [25]).

1.5. Регулярность специальных функций ограниченной вариации. Для решений строго гиперболических систем законов сохранения в случае одной пространственной переменной можно ожидать наличие счетного множества кривых ударной волны и регулярности решения в оставшемся множестве. В случае системы, однако, структура значительно усложняется в силу присутствия волн других семейств: в самом деле, характеристические кривые больше не являются прямыми, а взаимодействие между волнами усложняет волновую картину (см. рис. 1).

Один из способов интерпретировать такую структуру — сказать, что *решение u имеет спрямляемую часть скачка, а в оставшемся множестве производная u абсолютно непрерывна*. Это значит, что в разложении $\partial_x u$ как производной функции ограниченной вариации канторова часть производной равна нулю. Доказательство последнего факта для скалярного случая можно найти в [2], а для векторного случая — в [9].

Все основные идеи могут быть продемонстрированы на примере скалярного случая:

$$u_t + f(u)_x = 0, \quad (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R},\ u \in \mathbb{R},$$

поэтому в настоящей статье мы ограничимся только его рассмотрением. В заключительной части мы рассмотрим случай уравнения Гамильтона—Якоби.

2. Доказательство регулярности специальных функций ограниченной вариации в скалярном случае

Рисунок 1 может быть интерпретирован следующим образом:

- ударные волны сконцентрированы на счетном множестве липшицевых кривых (первая производная принадлежит классу функций ограниченной вариации),
- положительные и отрицательные волны затухают как t^{-1},

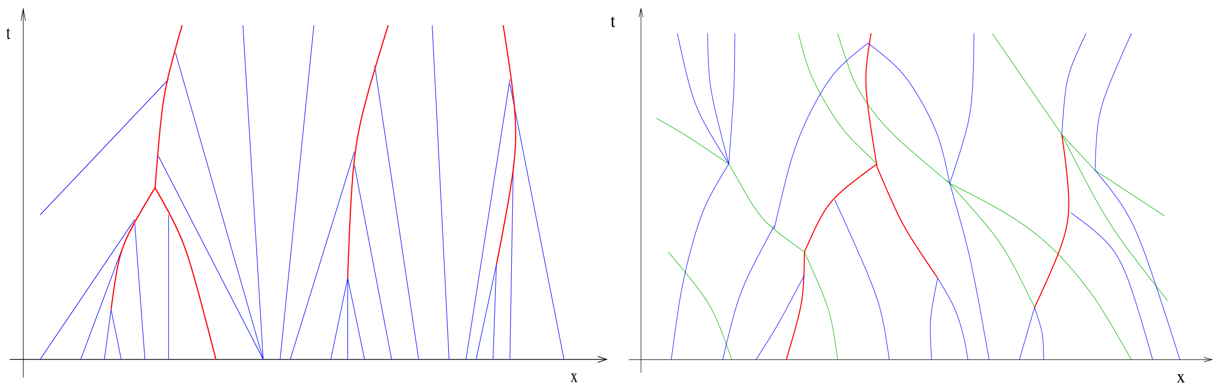

Рис. 1: Характеристические кривые и множество скачков для решения скалярного равномерно выпуклого закона сохранения представлены слева, а характеристики и волновая картина для случая системы — справа.

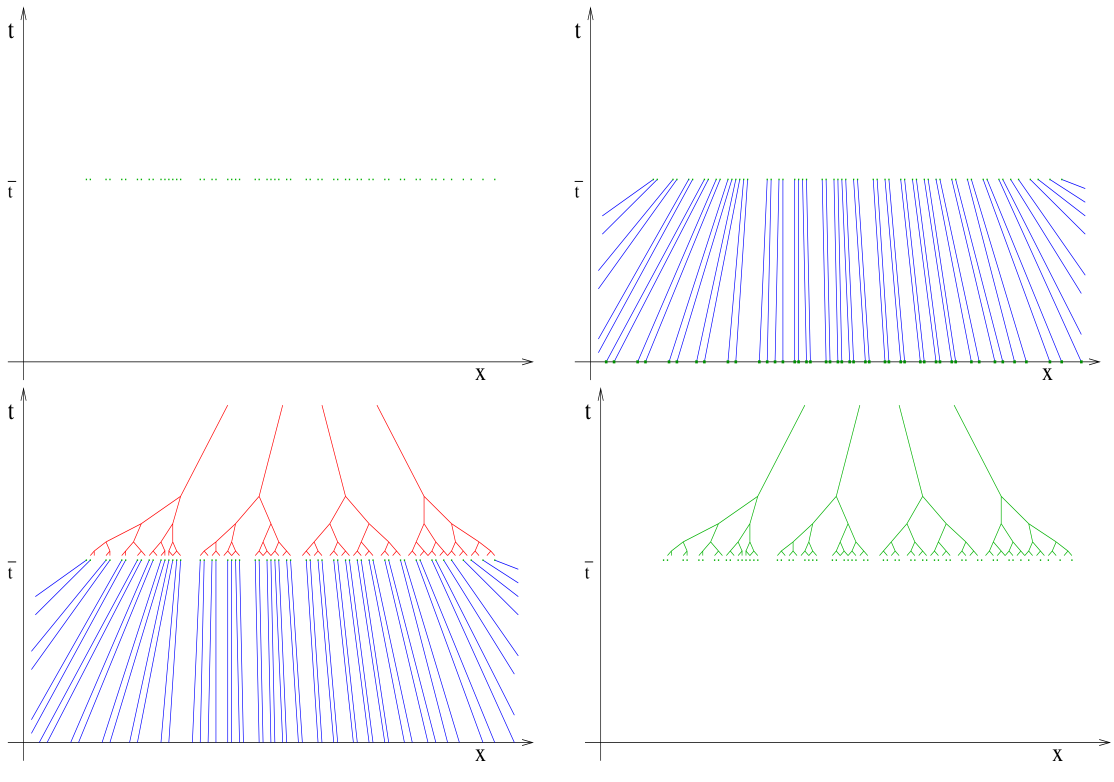

Рис. 2: Анализ регулярности специальных функций ограниченной вариации в скалярном случае; множество, на котором сконцентрирована мера μ, определенная в (2.1).

- в производной нет никаких других членов, т. е. нет канторовой части.

Идея доказательства для скалярного случая, приведенная в [2], заключается в следующем (см. рис. 2).

Пусть $\bar{t}$ — момент времени, в который пространственная производная $u(t)$ имеет канторову часть, сконцентрированную на $\mathcal{L}^1$-пренебрежимом множестве C. Тогда, поскольку $u(\bar{t})\llcorner_C$ непрерывна, для каждого $\bar{x} \in C$ существует только одна характеристика, начинающаяся в $t = 0$ и приходящая в $(\bar{t}, \bar{x})$. Тогда мы можем рассмотреть множество начальных точек $C(0)$ множества C.

Поскольку крутизны характеристик связаны с u функцией $\lambda(u) = f'(u)$, мы получаем, что начало больше или равно $\kappa|\partial_x u|(C)$, где $\kappa \leqslant f''(u)$ — константа равномерной выпуклости. В частности, $\mathcal{L}^1$-мера $C(0)$ больше или равна $\kappa\bar{t}|\partial_x u|(C)$.

Используя тот факт, что характеристики не пересекаются нигде кроме концевых точек, можно доказать, что, если множество A — борелевское и характеристики, начинающиеся из A, завершаются при времени t, то для всех $0 < s < t$ выполняется неравенство

$$\mathcal{L}^1\left\{\gamma(s), \gamma(0) \in A, \gamma - \text{характеристика}\right\} \geqslant \left(1 - \frac{s}{t}\right)\mathcal{L}^1(A).$$

Отсюда следует, что, если характеристики, оканчивающиеся в C при $\bar{t}$, могут быть продолжены, то C имеет положительную меру, поскольку $\mathcal{L}^1(C(0)) > 0$.

Следовательно, если мы определим функционал как

$$H(t,R) := \mathcal{L}^1\left\{x \in B(0,R) : \text{характеристика, выходящая из } x \text{ может быть продолжена вплоть до } t\right\},$$

то он будет убывающим (поскольку в скалярном случае характеристическое уравнение обладает единственностью), и будет иметь нисходящий скачок при $\bar{t}$.

Мы можем заключить, что количество моментов времени, в которые у производной $\partial_x u$ появляется канторова часть, счетно. Тогда, поскольку как функция двух переменных $\partial_x u$ является специальной функцией ограниченной вариации, (используя уравнение $u_t = -f(u)_x$) $\partial_t u$ также является специальной функцией ограниченной вариации.

2.1. Переформулировка предыдущего доказательства. Поскольку $x \mapsto -f'(u(t,x))$ является квазимонотонным оператором, обыкновенное дифференциальное вложение

$$\dot{x} \in -f'(u(t,x))$$

порождает единственную липшицеву полугруппу $X(t,x)$ [11,16]. В частности, мы можем рассмотреть транспортное решение для

$$\rho_t + (f'(u(t))\rho)_x = 0, \quad \rho(0) = \mathcal{L}^1,$$

которое может быть представлено как $X(t)_\sharp\mathcal{L}^1$, т. е. как якобиан $X^{-1}(t)$.

Если мы рассмотрим разложение $\rho(t) = \rho^c(t) + \rho^a(t)$, где ρ^a — атомарная часть, то

$$\rho^c + (f'(u)\rho^c)_x = -\mu, \quad \rho^a + (f'(u)\rho^a)_x = \mu, \tag{2.1}$$

где μ — распределение. Пользуясь тем фактом, что атомарная часть ρ может только возрастать (в силу монотонности), получим, что μ — положительная мера Родона.

Предыдущее доказательство демонстрирует, что, если в ρ^c появляется канторова часть, то

$$\mu(\{t\} \times A) \geqslant \rho^{\text{cantor}}(A),$$

и локальная ограниченность μ позволяет сделать те же заключения, что и в предыдущем доказательстве. В этом модельном случае мера μ сконцентрирована на канторовом множестве и в множестве скачков.

2.2. Уравнение для $\partial_x u$. Мера $v := \partial_x u(t)$ удовлетворяет тому же транспортному уравнению в форме законов сохранения

$$v_t + (f'(u(t))v)_x = 0, \quad v(0) = D_x u(0),$$

но, поскольку она является обобщенной мерой, уравнения для ее атомарной и неатомарной части являются более сложными. Действительно, мы должны рассмотреть компенсацию между отрицательными и положительными волнами.

Используя аппроксимацию слежения за волновым фронтом, можно доказать, что, если $v = v^c + v^a$, v^a — атомарная часть v, то

$$v^c_t + (f'(u(t))v^c)_x = -\mu^{CJ}, \quad v^a_t + (f'(u(t))v^a)_x = \mu^{CJ},$$

где μ^{CJ} — локально ограниченная обобщенная мера, такая, что

$$\mu^{CJ} - \big\{\text{мера гашения волн}\big\} \leqslant 0.$$

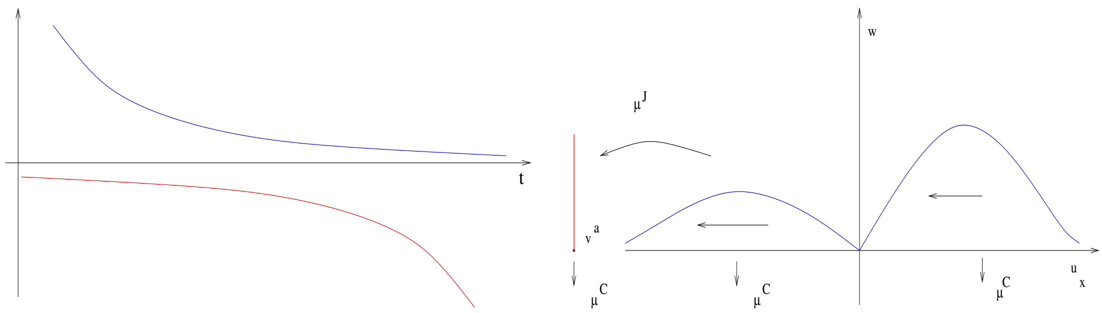

Рис. 3: Оценка затухания вдоль характеристик (слева) и динамическая интерпретация скалярного закона сохранения (справа).

Подводя итог, мы обладаем тремя уравнениями:

$$v_t + (f'(u(t))v)_x = 0,$$
$$|v|_t + (f'(u(t))|v|)_x = -\mu^C \leqslant 0,$$
$$v_t^a + (f'(u(t))v^a)_x = \frac{1}{2}\mu^C + \mu^J,$$

где $\mu^J \leqslant 0$. Доказательство регулярности специальных функций ограниченной вариации, таким образом, может быть заново сформулировано как

$$\mu^J(\{t\} \times A) \leqslant v^{\text{cantor}}(t, A).$$

2.3. Оценки затухания. Мы убедились, что для выпуклых законов сохранения затухание положительных волн может быть описано как

$$v(t, A) \leqslant \frac{1}{c_0}\frac{\mathcal{L}^1(A)}{t}, \quad f'' \geqslant c_0.$$

Мера μ^J позволяет получить соответствующие оценки затухания для отрицательной части v^c :

$$v^c(T, A) \geqslant -\frac{1}{c_0}\frac{\mathcal{L}^1(A)}{t - T} + \mu^J\big(\text{область действия A}\big).$$

В действительности, мера μ^J контролирует в точности те точки, где характеристики сталкиваются и продуцируют скачки. Заметим, что для положительных волн в случае выпуклых скалярных законов сохранения не образуется новых центрированных волн разрежения, и что в случае системы оценка затухания имеет весьма похожую форму.

Используя то, что $u(t)$ является абсолютно непрерывной вне части скачка, мы можем записать уравнение для v^c вдоль каждого луча γ :

$$v_t^c + (f'(u(t))v^c)_x = 0, \quad \frac{d}{dt}v^c(t, \gamma(t)) = -f''(u)(v^c)^2.$$

Отсюда следует, что, если луч $\gamma(t)$ имеет время жизни $[0, T]$, то

$$-\frac{1}{c_0}\frac{1}{T - t} \leqslant v^c(t, \gamma(t)) \leqslant \frac{1}{c_0}\frac{1}{t}.$$

2.3.1. Динамическая интерпретация. Мы можем дать следующее динамическое представление эволюции производной $D_x u$.

Если мы рассмотрим меры

$$\omega^c(t) := v^c_\sharp\big(v^c\mathcal{L}^1\big), \quad \omega^a(t) := v^a(t, \mathbb{R}^1),$$

то мы получим, что

$$\omega_t^c + y^2\omega^c = -\tilde{\mu}, \quad \omega_t^a = \tilde{\mu},$$

с (формально)

$$\tilde{\mu} = v(t)_\sharp\left(\frac{1}{2}\mu^C + \mu^J\right).$$

Таким образом, мы можем дать динамическое представление эволюции производной $D_x u$ на рис. 3.

3. Специальные функции ограниченной вариации: оценки для систем

Далее мы рассмотрим основную идею применительно к случаю системы уравнений.

3.1. Разложение в меры волн. Рассмотрим гиперболическую систему

$$u_t + f(u)_x = 0, \quad (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R},\ u \in \mathbb{R}^n$$

и предположим, что $\bar{i}$-е собственное значение λ_i для $Df(u)$ является существенно нелинейным. Выберем направление единичного собственного вектора $r_{\bar{i}}$ и получим

$$D\lambda_{\bar{i}}(u) r_{\bar{i}}(u) \leqslant c_0 < 0.$$

Помимо этого мы разложим производную решения в виде [17]:

$$u_x(t) = \sum v_i(t)\tilde{r}_i$$

с $\tilde{r}_i = r_i$, где u непрерывна или, в противном случае, является направлением скачка i-го семейства. Каждое $v_i(t)$ является ограниченной мерой.

Наша цель — доказать, что $v_{\bar{i}}(t)$ имеет канторову часть только на счетном времени. В общем случае ситуация является более сложной, чем в скалярном случае, в силу присутствия волн различных семейств и их взаимодействия.

3.2. Уравнение для волновой меры. Пусть $\tilde{\lambda}_i$ — i-й собственный вектор, если u непрерывна или является скоростью i-й ударной волны. Используя аппроксимацию волнового фронта, мы получаем следующее уравнение баланса

- сохранение v_i:

$$(v_i)_t + (\tilde{\lambda}_i v_i)_x = \mu_i^I,$$

  где μ_i^I — обобщенная мера, ограниченная убыванием потенциала взаимодействия $Q(u)$;
- сохранение $|v_i|$:

$$(|v_i|)_t + (\tilde{\lambda}_i |v_i|)_x = \mu_i^{IC},$$

  где μ_i^{IC} — обобщенная мера, ограниченная убыванием потенциала $\mathrm{Tot.Var.}(u) + CQ(u)$.

3.2.1. Уравнение для атомарной части. Если $\bar{i}$ существенно нелинейно, то уравнением для атомарной части $v_{\bar{i}}^a$ будет

$$(v_{\bar{i}}^a)_t + (\tilde{\lambda}_{\bar{i}} v_{\bar{i}}^a)_x = \mu_{\bar{i}}^{ICJ},$$

где $\mu_{\bar{i}}^{ICJ}$ — распределение, удовлетворяющее следующему соотношению:

$$\mu^J := \mu_{\bar{i}}^{ICJ} - |\mu_{\bar{i}}^I| - |\mu_{\bar{i}}^{IC}| \leqslant 0.$$

Отсюда следует, что $\mu_{\bar{i}}^J$ — ограниченная мера (*мера скачков*), которая измеряет все множество образованных скачков.

То, что μ^J является мерой (обобщенным распределением) следует из того, что в силу нелинейности можно легко сделать скачок, но для того, чтобы устранить его, нужно использовать сокращение волн или их взаимодействие, см. рис. 4.

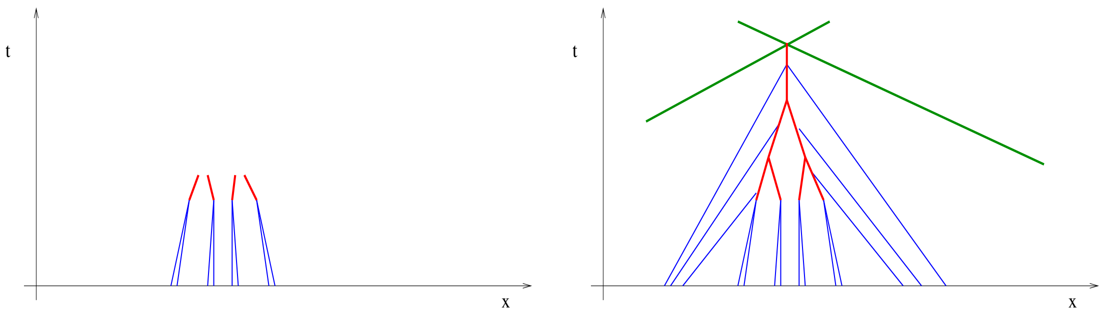

Рис. 4: Возможная эволюция скачков, созданных канторовой частью.

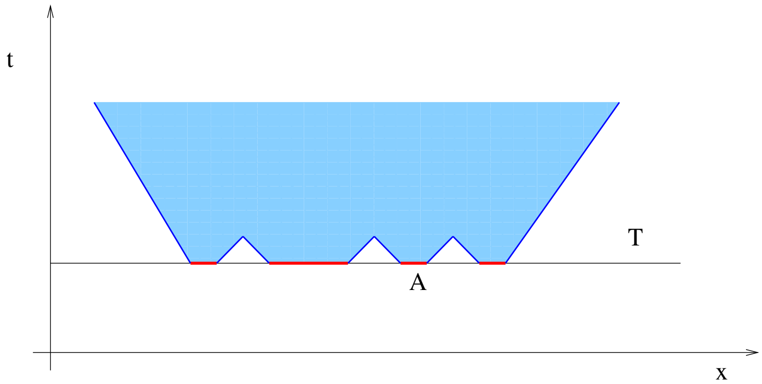

Рис. 5: Область влияния A.

3.3. Доказательство регулярности специальных функций ограниченной вариации. Итак, непрерывная часть $v_{\bar{i}} - v_{\bar{i}}^c$ — удовлетворяет следующему соотношению:

$$(v_{\bar{i}}^c)_t + (\lambda_{\bar{i}} v_{\bar{i}}^c)_x = \mu_{\bar{i}}^c, \quad \mu_{\bar{i}}^c := \mu_{\bar{i}}^I - \mu_{\bar{i}}^{ICJ}.$$

Используя ту же аргументацию, что и в случае оценки затухания положительных волн, придем к следствию, что

$$v_{\bar{i}}^c(T, A) \geqslant -\frac{1}{c_0} \frac{\mathcal{L}^1(A)}{t - T} - |\mu_{\bar{i}}^c| \quad \Big(\text{Область влияния } A\text{, рис. } 5\Big).$$

В частности, если A — множество меры 0, где сконцентрирована канторова часть, то, взяв последовательность $t_n \searrow T$, получим, что

$$|\mu_{\bar{i}}^c|(A) > 0.$$

Поскольку $\mu_{\bar{i}}^c$ — ограниченная мера, множество точек времени, в которых появляется канторова часть, счетно. Этим точкам соответствует:

- сильное взаимодействие между волнами;
- создание ударной волны той же силы, что и у канторовой части.

4. Регулярность специальных функций ограниченной вариации для уравнения Гамильтона—Якоби

Настоящая часть заимствована из [14].

Рассмотрим вязкостное решение u уравнения Гамильтона—Якоби

$$\partial_t u + H(t, x, D_x u) = 0 \qquad \text{in } \Omega \subset [0, T] \times \mathbb{R}^n. \tag{4.1}$$

Мы доказываем регулярность специальных функций ограниченной вариации для $D_x u$ и $\partial_t u$ в предположении, что H дифференцируемо и равномерно выпукло по последней переменной, т. е.

(H1) $H \in C^3([0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, вторые производные ограничены, и существуют такие положительные константы a, b и c, что
  1. $H(t,x,p) \geqslant -c$,
  2. $H(t,x,0) \leqslant c$,
  3. $|H_{px}(t,x,p)| \leqslant a + b|p|$,

(H2) существует $c_H > 0$ такое, что
$$c_H^{-1} Id_n(p) \leqslant H_{pp}(t,x,p) \leqslant c_H Id_n(p)$$
для любых t и x.

Доказательства следующих утверждений могут быть найдены в книге Каннарсы и Синестрари [19, гл. 6].

Используя выпуклость гамильтониана по p-й переменной, мы можем связать уравнение Гамильтона—Якоби с вариационной задачей.

Пусть L — лагранжиан нашей системы, т. е. преобразование Лежандра гамильтониана H относительно последней переменной при любых фиксированных t и x :
$$L(t,x,v) = \sup_p \{\langle v,p\rangle - H(t,x,p)\}.$$
Преобразование Лежандра наследует свойства H, в частности, L принадлежит классу $C^3([0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ и равномерно выпукло по последней переменной.

В дополнение к равномерной выпуклости и C^3-регулярности L, предположения (H1) и (H2) относительно H гарантируют существование и положительных констант a, b и c, таких, что

1. $L(t,x,v) \geqslant -c$,
2. $L_x(t,x,0) \leqslant c$,
3. $|L_{vx}(t,x,v)| \leqslant a + b|v|$.

Определим функцию ценности $u(t,x)$, сопоставленную ограниченной липшицевой функции $u_0(x)$ для $(t,x) \in \Omega$
$$u(t,x) := \min \left\{ u_0(\xi(0)) + \int\limits_0^t L(s,\xi(s),\dot{\xi}(s))ds \;\middle|\; \xi(t) = x,\ \xi \in [C^2([0,t])]^n \right\}. \tag{4.2}$$
От ξ мы могли бы потребовать меньшей регулярности, однако это не требуется, поскольку все минимизирующие кривые существуют и являются гладкими в силу регулярности L, см. [19].

Теорема 4.1. *Для точки (t,x) возьмем в (4.2) минимизирующую кривую ξ, такую, что $\xi(s) \in \Omega_s$ для всех $s \in [0,t]$, и выполняется следующее. (Напомним, что $\Omega_s = \{x \in \mathbb{R}^n |\ (s,x) \in \Omega\}$.)*

1. *Отображение $s \mapsto L_v(s,\xi(s),\dot{\xi}(s))$ абсолютно непрерывно.*
2. *ξ является классическим решением уравнения Эйлера—Лагранжа*
$$\frac{d}{ds} L_v(s,\xi(s),\dot{\xi}(s)) = L_x(s,\xi(s),\dot{\xi}(s))$$
и уравнения Дюбуа—Раймонда
$$\frac{d}{ds}[L(s,\xi(s),\dot{\xi}(s)) - \langle \dot{\xi}(s), L_v(s,\xi(s),\dot{\xi}(s))\rangle] = L_t(s,\xi(s),\dot{\xi}(s))$$
для всех $s \in [0,t]$, где $L_t(s,\xi(s),\dot{\xi}(s))$ — производная L по первой переменной.
3. *Для любого $r > 0$ существует такое $K(r) > 0$, что, если $(t,x) \in [0,r] \times B_r(0)$, то*
$$\sup_{s\in[0,t]} \left|\dot{\xi}(s)\right| \leqslant K(r).$$
4. *Существует двойственная дуга или коположение*
$$p(s) := L_v(s,\xi(s),\dot{\xi}(s)), \qquad s \in [0,t], \tag{4.3}$$
такое, что ξ, p являются решением следующей системы:
$$\begin{cases} \dot{\xi}(s) = H_p(s,\xi(s),p(s)), \\ \dot{p}(s) = -H_x(s,\xi(s),p(s)). \end{cases}$$

5. *Пара* $(s, \xi(s))$ *является регулярной, т. е.* ξ *является единственным минимизирующим элементом для* $u(s, \xi(s))$ *при любом* $0 < s < t$ *и* $u(s, \cdot)$ *дифференцируемо при* $\xi(s)$.
6. *Пусть* p — *двойственная дуга, сопоставленная* ξ *(см.* (4.3)), *тогда*

$$p(t) \in D_x^+ u(t, x),$$

$$p(s) = D_x u(s, \xi(s)), \qquad s \in (0, t).$$

Теорема 4.2. *Функция ценности* u, *определенная в* (4.2), *является вязкостным решением с ограниченным липшицевым начальным значением*

$$u(0, x) = u_0(x).$$

Далее мы приведем некоторые свойства единственного вязкостного решения уравнения Гамильтона—Якоби (4.1), которые следуют из только что полученной формулы представления. Эти свойства цитируются нами по [19].

Теорема 4.3 (Принцип динамического программирования). *Зафиксируем* (t, x). *Тогда для всех* $t' \in [0, t]$

$$u(t, x) := \min \left\{ u(t', \xi(t')) + \int_{t'}^{t} L(s, \xi(s), \dot{\xi}(s)) ds \;\middle|\; \xi(t) = x,\ \xi \in [C^2([t', t])]^n \right\}. \tag{4.4}$$

Более того, если ξ *является минимизирующим элементом в* (4.2), *то он также является минимизирующим элементом для* (4.4) *для всех* $t' \in [0, t]$.

Теорема 4.4 (Теорема о полувогнутости). *Предположим, что выполняется* (H1) *и* (H2), *и* u_0 *принадлежит* $C_b(\mathbb{R}^n)$. *Тогда* $u(t, \cdot)$ *локально полувогнута с константой полувогнутости* $C(t) = \dfrac{C}{t}$ *для любого* t *из* $(0, T]$. *Таким образом, для любого фиксированного* $\tau > 0$ *существует такая константа* $C = C(\tau)$, *что* $u(t, \cdot)$ *является полувогнутой с константой, меньшей* C, *для любого* $t \geqslant \tau$.

Более того, u *также является локально полувогнутой по обеим переменным* (t, x) *в* $(0, T] \times \mathbb{R}^n$.

4.1. Исследование характеристик.

Введем определение обобщенных обратных характеристик.

Определение 4.1. Пусть дано $x \in \Omega_t$ для фиксированного t из $[0, T]$. Мы назовем *обобщенной обратной характеристикой*, соответствующей u, выходящей из x, кривую $s \mapsto (s, \xi(s))$, где $\xi(\cdot)$ и его двойственная дуга $p(\cdot)$ разрешают систему

$$\begin{cases} \dot{\xi}(s) = H_p(s, \xi(s), p(s)), \\ \dot{p}(s) = -H_x(s, \xi(s), p(s)) \end{cases} \tag{4.5}$$

с конечными условиями

$$\begin{cases} \xi(t) = x, \\ p(t) = p, \end{cases} \tag{4.6}$$

где $p \in D_x^+ u(t, x)$.

Если $D_x^+ u(t, x)$ однозначно, то мы назовем ξ *классической обратной характеристикой*.

Можно показать, что решения указанных характеристических уравнений с конечными условиями

$$\begin{cases} \xi(t) = x, \\ p(t) = p \in K \end{cases} \tag{4.7}$$

очень близки к автономному случаю.

Предложение 4.1. *Рассмотрим решение* ξ *системы* (4.5) *с конечными условиями* (4.7). *Положим* $y := \xi(\tau)$ *и рассмотрим прямую, соединяющую* x *с* y,

$$\eta(s) = \frac{s - \tau}{t - \tau} x + \frac{t - s}{t - \tau} y. \tag{4.8}$$

Тогда мы получим следующие оценки

$$\|\eta-\xi\|_{[C^0([\tau,t])]^n},\ \|\eta_p-\xi_p\|_{[C^0([\tau,t])]^{n^2}},\ \|\eta_{pp}-\xi_{pp}\|_{[C^0([\tau,t])]^{n^3}} \leqslant O((t-\tau)^2),$$

$$\|\dot\eta-\dot\xi\|_{[C^0([\tau,t])]^n},\ \|\dot\eta_p-\dot\xi_p\|_{[C^0([\tau,t])]^{n^2}},\ \|\dot\eta_{pp}-\dot\xi_{pp}\|_{[C^0([\tau,t])]^{n^3}} \leqslant O(t-\tau).$$

Это позволяет нам перейти к изучению функции

$$\phi(\tau,y,t,x):=\min\left\{\int\limits_\tau^t L(s,\xi(s),\dot\xi(s))ds \;\middle|\; \xi\in[C^2([\tau,t])]^n,\ \xi(\tau)=y,\ \xi(t)=x,\right\}.$$

Предложение 4.2. *Верна следующая оценка*:

$$\left\|\phi(\tau,y(p),t,x)-(t-\tau)L\left(t,x,\frac{x-y(p)}{t-\tau}\right)\right\|_{C^2(K)} \leqslant O((t-\tau)^2).$$

В частности, для достаточно малых значений $t-\tau$ отображения $y\mapsto\phi(\tau,y,t,x)$ и $x\mapsto\phi(\tau,y,t,x)$ являются выпуклыми с константой $\dfrac{\tilde C}{t-\tau}$.

Позже мы сузим наше рассмотрение, ограничившись интервалом времени, для которого выполняются указанные предложения.

4.2. Доказательство регулярности специальных функций ограниченной вариации. Рассмотрим шар $B_R(0)\subset\mathbb{R}^n$ и ограниченное выпуклое множество $\Omega\subset[\tau,\tau+\varepsilon]\times\mathbb{R}^n$, обладающее следующими свойствами:

- $\{s\}\times B_R(0)\subset\Omega$ для каждого $s\in[\tau,\tau+\varepsilon]$;
- для любых $(t,x)\in\Omega$ и для любой C^2-кривой ξ, которая минимизирует $u(t,x)$ в (4.2), кривая $\xi(s)$ целиком содержится в Ω для $s\in[\tau,t]$.

В самом деле, исходя из того факта, что $\|Du\|_\infty<\infty$, нам достаточно выбрать

$$\Omega:=\big\{(t,x)\in[\tau,\tau+\varepsilon]\times\mathbb{R}^n|\ |x|\leqslant R+C'(\tau+\varepsilon-t)\big\}$$

с константой C' достаточно большой и зависящей только от $\|Du\|_\infty$ и H.

Теперь мы можем использовать достаточно стандартную общую идею доказательства, см. [2,12]. Мы строим монотонный ограниченный функционал $F(t)$, определенный на отрезке $[\tau,\tau+\varepsilon]$. Затем связываем существование канторовой части в матрице $D_x^2u(t,\cdot)$ для определенного t на $[\tau,\tau+\varepsilon]$ со скачком функционала F в t. Поскольку этот функционал может иметь только счетное число скачков, канторова часть $D_x^2u(t,\cdot)$ может быть отличной от нуля только для счетного числа точек t.

4.2.1. Убывающий функционал. Рассмотрим t из промежутка $(\tau,\tau+\varepsilon]$ для фиксированного $\tau>0$ и достаточно малого $\varepsilon>0$. Для любого $\tau\leqslant s<t$ определим многозначное отображение

$$X_{t,s}(x):=\{\xi(s)|\ \xi(\cdot)\,\text{— решение (4.5) при}\ \xi(t)=x,\ p(t)=p\in D_x^+u(t,x)\}.$$

Кроме того, будем обозначать через $\chi_{t,s}$ сужение $X_{t,s}$ на те точки, где он принимает единственное значение. Область определения $\chi_{t,s}$ — $\mathrm{dom}\,(\chi_{t,s})=:U_t$ — состоит из тех точек, на которых $D_x^+u(t,x)$ принимает единственное значение, т. е. существует единственный минимизирующий элемент для $u(t,x)$ в формуле (4.2). По этой причине ясно, что $\chi_{t,s}$ определено п. в. в Ω_t. Иногда мы будем писать $\chi_{t,s}(\Omega_t)$, имея в виду $\chi_{t,s}(U_t)$.

Определим функционал

$$F(t):=\mathcal{H}^n(\chi_{t,\tau}(U_t)). \tag{4.9}$$

Лемма 4.1. *Функционал F является невозрастающим и*

$$F(s)\geqslant F(t)\quad \textit{для любых}\ s,t\in(\tau,\tau+\varepsilon]\ \textit{при}\ s<t.$$

4.2.2. Оценки по области. При сделанных выше предположениях мы можем доказать следующую лемму, связывающую лапласиан u с областью начальных точек характеристик.

Лемма 4.2. *Рассмотрим достаточно малое ε (зависящее только от M в оценке для $\|H_{px}\|$). Пусть $t \in (\tau, \tau+\varepsilon]$ и $A \subset \Omega_t$ — борелевское множество. Тогда*

$$\mathcal{H}^n(X_{t,\tau}(A)) \geqslant C_1 \mathcal{H}^n(A) - C_2(t-\tau)\int\limits_A d\Delta u(t,\cdot) + O((t-\tau)^2),$$

где C_1 и C_2 — положительные константы (зависящие от C, c_H). $\Delta u(t,\cdot)$ — пространственный лапласиан для $u(t,\cdot)$.

Более того, для скалярного случая верна следующая лемма.

Лемма 4.3. *Если $\varepsilon > 0$ достаточно мало, то для любого $t \in (\tau, \tau+\varepsilon]$, для любого $\delta \in [0, t-\tau]$ и для любого борелевского множества $A \subset \Omega_t$ мы имеем оценку*

$$\mathcal{H}^n(X_{t,\tau+\delta}(A)) \geqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\frac{t-(\tau+\delta)}{t-\tau}\right)^n \mathcal{H}^n(X_{t,\tau}(A)).$$

Далее возможно доказать следующую лемму. Ниже мы будем обозначать канторову часть $D^2_x u(t,\cdot)$ через $D^2_c u(t,\cdot)$.

Лемма 4.4. *Пусть ε достаточно мало. Тогда для любого t из $(\tau, \tau+\varepsilon]$, такого, что $|D^2_c u(t,\cdot)|(\Omega_t) > 0$, и для δ из $(0, \tau+\varepsilon-t]$ существует такое борелевское множество $A \subset \Omega_t$, что*

1. $\mathcal{H}^n(A) = 0$, $|D^2_c u(t,\cdot)|(A) > 0$ *и* $|D^2_c u(t,\cdot)|(\Omega_t \setminus A) = 0$;
2. $X_{t,\tau}$ *однозначно определено на* A;
3. *выполнено*

$$\chi_{t,\tau}(A) \cap \chi_{t+\delta,\tau}(\Omega_{t+\delta}) = \varnothing.$$

Здесь мы уже можем доказать, что канторова часть появляется только счетное число раз.

Для достаточно малого $\varepsilon > 0$, такого, что выполняются леммы 4.1, 4.2, 4.3 и 4.4, рассмотрим на интервале $[\tau, \tau+\varepsilon]$ функционал F, определенный в (4.9). F ограничен и по лемме 4.1 является монотонной функцией. Таким образом, множество его точек разрыва не более чем счетно.

Мы докажем, что существование канторовой части в момент времени t связано с разрывностью функционала F в t, откуда будет следовать, что на отрезке $[\tau, \tau+\varepsilon]$ должно существовать лишь счетное число t, для которых канторова часть отрицательна.

Предположим, что существует такое t из интервала $(\tau, \tau+\varepsilon)$, что

$$|D^2_c u(t, \Omega_t)| > 0.$$

Тогда для любого $\delta > 0$ пусть A будет множеством из леммы 4.4. Используя лемму 4.4-(3), мы получим:

$$F(t+\delta) \leqslant F(t) - \mathcal{H}^n(X_{t,\tau}(A)) \tag{4.10}$$

Чтобы вычислить $\mathcal{H}^n(X_{t,\tau}(A))$, введем $\omega := |D^2_c u(t,\cdot)|(A)$. Как мы могли видеть в предыдущей лемме, при выборе такого $s \in [\tau, t)$, что $t-s$ достаточно мало, мы получаем

$$\mathcal{H}^n(X_{t,s}(A)) \geqslant \frac{C_2}{2}\omega^2.$$

Более того, по лемме 4.3

$$\mathcal{H}^n(X_{t,\tau}(A)) \geqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\frac{t-\tau}{t-s}\right)^n \mathcal{H}^n(X_{t,s}(A)).$$

Отсюда

$$\mathcal{H}^n(X_{t,\tau}(A)) \geqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\frac{t-\tau}{t-s}\right)^n \frac{C_2}{2}\omega^2 \geqslant C\omega^2.$$

Теперь мы можем использовать эту оценку в (4.10) и получить неравенство

$$F(t+\delta) \leqslant F(t) - C\omega^2.$$

Устремляя $\delta \to 0$, видим, что

$$\limsup_{\delta\to 0} F(t+\delta) < F(t).$$

Следовательно, t является точкой разрыва для F, что мы и хотели показать.

5. Заключительные замечания и некоторые связанные вопросы

Регулярность специальных функций ограниченной вариации может быть доказана и для других классов систем уравнений. Здесь мы приведем некоторые интересные случаи.

- Регулярность специальных функций ограниченной вариации для потоков со счетным множеством точек перегиба [26] или регулярность специальных функций ограниченной вариации для $v_i(D\lambda_i r_i)$ [15].
- Регулярность специальных функций ограниченной вариации для систем класса Темпла с начальными данными.

Чрезвычайно интересной нерешенной проблемой остается вопрос существования канторовой части в мере $\mathrm{div} d$, где d — направление оптимального луча для решения

$$u_t + H(\nabla u) = 0,$$

где H является лишь гладким и выпуклым. Некоторые успехи в изучении этого вопроса были достигнуты в [13].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Олейник О. А.* Разрывные решения нелинейных дифференциальных уравнений// Усп. мат. наук. — 1957. — *12*, № 3. — С. 3–73.
2. *Ambrosio L., De Lellis C.* A note on admissible solutions of 1d scalar conservation laws and 2d Hamilton—Jacobi equations// J. Hyperbolic Differ. Equ. — 2004. — *1*, № 4. — С. 813–826.
3. *Ancona F., Marson A.* A wave-front tracking algorithm for $n \times n$ nongenuinely nonlinear conservation laws// J. Differential Equations. — 2001. — *177*. — С. 454–493.
4. *Ancona F., Marson A.* Sharp convergence rate of the Glimm scheme for general nonlinear hyperbolic systems// Comm. Math. Phys. — 2011. — *302*, № 3. — С. 581–630.
5. *Bianchini S.* BV solutions to semidiscrete schemes// Arch. Ration. Mech. Anal. — 2003. — *167*, № 1. — С. 1–81.
6. *Bianchini S.* Relaxation limit of the Jin-Xin relaxation model// Comm. Pure Appl. Math. — 2006. — *56*, № 5. — С. 688–753.
7. *Bianchini S.* Stability of solutions for hyperbolic systems with coinciding shocks and rarefactionsL^∞// SIAM J. Math. Anal. — 2001. — *33*, № 4. — С. 959–981.
8. *Bianchini S., Bressan A.* Vanishing viscosity solutions of nonlinear hyperbolic systems// Ann. of. Math. (2). — 2005. — *161*. — С. 223–342.
9. *Bianchini S., Caravenna L.* SBV regularity for genuinely nonlinear, strictly hyperbolic systems of conservation laws in one space dimension// ActaMath. Sci. Ser. B Engl. Ed. — 2012. — *32*, № 1. — С. 380–388.
10. *Bianchini S., Colombo R. M., Monti F.* 2x2 systems of conservation laws with L^∞ data// J. Differ. Equations. — 2010. — *249*, № 12. — С. 3466–3488.
11. *Bianchini S., Gloyer M.* An estimate on the flow generated by monotone operators// Comm. Partial Differential Equations. — 2011. — *36*, № 5. — С. 777–796.
12. *Bianchini S., De Lellis C., Robyr R.* SBV regularity for Hamilton—Jacobi equations in $\mathbb{R}^n$// Arch. Ration. Mech. Anal. — 2011. — *200*, № 3. — С. 1003–1021.
13. *Bianchini S., Tonon D.* SBV-like regularity for Hamilton-Jacobi equations with a convex Hamiltonian// J. Math. Anal. Appl. — 2012. — *391*, № 1. — С. 190–208.
14. *Bianchini S., Tonon D.* SBV regularity for Hamilton-Jacobi equations with Hamiltonian depending on (t, x)// SIAM J. Math. Anal. — 2012. — В печати.
15. *Bianchini S., Yu L.* SBV-like regularity for general hyperbolic systems of conservation laws// arXiv:1202.2680v1. — 2012.
16. *Bouchut F., James F.* One dimensional transport equations with discontinuous coefficients// Comm. Partial Differential Equations. — 1999. — *24*. — С. 2173–2189.
17. *Bressan A.* Hyperbolic systems of conservation laws. The one-dimensional Cauchy problem. — Oxford: Oxford Univ. Press, 2000.

18. *Bressan A., Colombo R. M.* Decay of positive waves in nonlinear systems of conservation laws// Ann. Scoula Norm. Super. Pisa Cl. Sci. — 1998. — *26*, № 1. — С. 133–160.
19. *Cannarsa P., Sinestrari C.* Semiconcave functions, Hamilton—Jacobi equations, and optimal control. — Boston: Birkhäuser, 2004.
20. *Dafermos C. M.* Continuous solutions for balance laws// Ric. Mat. — 2006. — *55*, № 1. — С. 79–91.
21. *DiPerna R. J.* Compensated compactness and general systems of conservation laws// Trans. Amer. Math. Soc. — 1985. — *292*, № 2. — С. 383–420.
22. *Glimm J.* Solutions in the large for nonlinear hyperbolic systems of equations// Comm. Pure Appl. Math. — 1965. — *18*. — С. 697–715.
23. *Glimm J., Lax P.* Decay of solutions of systems of nonlinear hyperbolic conservation laws. — Providence: AMS, 1970.
24. *De Lellis C., Otto F., Westdickenberg M.* Structure of entropy solutions for multi-dimensional conservation laws// Arch. Ration. Mech. Anal. — 2003. — *170*. — С. 137–184.
25. *Lions P.-L., Perthame B., Tadmor E.* A kinetic formulation of multidimensional scalar conservation laws and related equations// J. Amer. Math. Soc. — 1994. — *7*, № 1. — С. 169–191.
26. *Robyr R.* SBV regularity of entropy solutions for a class of genuinely nonlinear scalar balance laws with non-convex flux function// J. Hyperbolic Differ. Equ. — 2008. — *5*, № 2. — С. 449–475.

Stefano Bianchini
СИССА, ул. Бономеа, 265, IT-34136 Триест, Италия
E-mail: bianchin@sissa.it