Функциональный анализ и его приложения,
т. 9, вып. 1, 1975, 65—66.

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ РАССЕЯНИЯ ДЛЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ КОНЕЧНОЗОННЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ

Б. А. Дубровин

Пусть $u(x)$ — вещественная гладкая периодическая функция, $L = -\frac{d^2}{dx^2} + u(x)$ — оператор Штурма — Лиувилля. Спектр оператора L на всей прямой состоит из набора отрезков, называемых *разрешенными блоховскими зонами* или *ляпуновскими зонами устойчивости*. Настоящая заметка посвящена описанию класса потенциалов, имеющих конечное число зон. Нетривиальность этого класса может быть извлечена из работы Е. Айнса [5]: потенциалы уравнения Ламе $u(x) = n(n+1)\wp(x)$ являются $n+1$-зонными (здесь $\wp(x)$ — функция Вейерштрасса). При $n=1$ этот результат был повторен Н. И. Ахиезером; он, исходя из результатов Гельфанда — Левитана и Марченко (см. [1], [2]), начал решать эту задачу для некоторых частных спектральных плотностей: идеи метода, предложенного Ахиезером, существенно используются автором в этой заметке. В самое последнее время, исходя из нужд нелинейного уравнения Кортевега — де Фриза (КФ-уравнения), С. П. Новиков доказал такую теорему: если $u(x - ct)$ есть решение N-го аналога КФ-уравнения (см. формулировку теоремы 2 ниже), то потенциал $u(x)$ — $N+1$-зонный (см. [4]). С. П. Новиков высказал гипотезу, что его теорема дает все конечнозонные потенциалы. Доказательство этой гипотезы следует из сформулированных ниже теорем 1 и 2.

Для формулировки основного результата введем следующие обозначения. Пусть $E_1, \ldots, E_{2N+1}$ — границы зон спектра, Γ_N — гиперэллиптическая риманова поверхность $W^2 = \prod_{i=1}^{2N+1} (E - E_i)$, $\pi : \Gamma_N \to C$ — ее каноническая проекция на E-плоскость, S^N — N-я симметрическая степень, $J(\Gamma_N)$ — якобиево многообразие. Существует бирациональный изоморфизм α: $S^N\Gamma_N \to J(\Gamma_N)$, поэтому естественно определяется алгебраическая функция σ_1: $J(\Gamma_N) \xrightarrow{\alpha^{-1}} S^N\Gamma_N \xrightarrow{S^N\pi} S^N C \to C$, где последнее отображение есть суммирование. Пусть ω — абелев дифференциал второго рода с полюсом второго порядка в бесконечности и с нулевыми периодами по циклам вокруг разрезов $E_{2j-1}\, E_{2j}$; пусть iU_j — сопряженные периоды дифференциала ω. Вектор (U_j) задает на торе $J(\Gamma_N)$ постоянное векторное поле.

Теорема 1. *Любой $N+1$-зонный потенциал $u(x)$ с границами зон $E_1, \ldots, E_{2N+1}$ определяется заданием точки Q на $J(\Gamma_N)$ и является ограничением функции $-2\sigma_1 + \sum E_i$ на прямолинейную обмотку вдоль поля (U_j), проходящую через Q.*

Теорема 2. *Существуют такие константы c и c_i, являющиеся симметрическими функциями от $E_1, \ldots, E_{2N+1}$, что для любого построенного в теореме 1 потенциала $u(x)$ функция $u(x - ct)$ есть решение уравнения* (определение интегралов I_k КФ-уравнения дано ниже)

$$\frac{\partial}{\partial t} u = \frac{\partial}{\partial x} \sum_{i=1}^{N} c_i \frac{\delta}{\delta u} I_{2i+3}.$$

В пространстве решений уравнения $L\psi = E\psi$ введем базис блоховских функций $\psi(x, E; x_0)$, $\overline{\psi}(x, E; x_0)$, определяемый условиями: $\hat{T}\psi = \lambda\psi$, $\psi(x, E; x_0) = 1$, где $\hat{T}$ — матрица монодромии $\begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$ (см. [4]). Пусть $\chi = -i\psi'/\psi$.

Утверждение 1. *Функция $\chi = \chi(x, E)$ не зависит от выбора точки x_0 и периодична по x; верны формулы $\chi_I = \frac{1}{2}(\chi_R'/\chi_R)$, $\chi_R = \frac{k\sqrt{1 - a_R^2}}{a_I + b_I}$; при $k \to \infty$ имеет место асимптотическое разложение $\chi_R(x, E) \sim k + \sum_{n=0}^{\infty} \chi_{2n+1}(x)/(2k)^{2n+1}$ $(k^2 = E)$; тогда $I_{2n+1} = \int_T \chi_{2n+1}(x)\, dx$ — полиномиальные интегралы КФ-уравнения (см. [4]).*

Утверждение 2. *Для конечнозонного потенциала* $\chi_R\,(x, E)$ *имеет вид*

$$\chi_R\,(x, E) = \sqrt{\prod_{i=1}^{2N+1} (E - E_i)} \Big/ \prod_{i=1}^{N} (E - \gamma_i\,(x)),$$

причем полюса $\gamma_i\,(x)$ *вещественны и лежат по одному в запрещенных зонах при любом* x.

Утверждение 3. *Функция* $\psi\,(x, E; x_0)$ *продолжается до мероморфной функции на* $\Gamma_N \setminus \infty$, *при* $x \neq x_0$ *имеет там* N *полюсов* $E = \gamma_i\,(x_0)$ *и* N *нулей* $E = \gamma_i\,(x)$, *а также существенно особую точку в бесконечности с асимптотикой* $\psi \sim e^{ik(x-x_0)}$.

Как заметил Н. И. Ахиезер, аналитические свойства функции на поверхности Γ_N, аналогичные описанным выше, позволяют восстановить нули ψ по ее полюсам, решая задачу обращения Якоби (см. [3]). Более точно: выберем базис голоморфных дифференциалов $\omega_1, \ldots, \omega_N$ на Γ_N, нормированных условием $\oint\limits_{E_{2j-1}E_{2j}} \omega_k = 2\pi i \delta_{jk}$.

Утверждение 4. *Нули* $\gamma_1\,(x), \ldots, \gamma_N\,(x)$ *функции* $\psi\,(x, E; x_0)$ *определяются из уравнения на многообразии Якоби*

$$\int\limits_{\gamma_1(x_0)}^{\gamma_1(x)} \omega_j + \ldots + \int\limits_{\gamma_N(x_0)}^{\gamma_N(x)} \omega_j = U_j\,(x - x_0) \qquad (j = 1, \ldots, N).$$

Теперь формула теоремы 1 получается из утверждения 4 и из асимптотики χ_R.

Утверждение 5. Имеет место равенство $\dfrac{\delta}{\delta u} = \int\limits_T \chi_R dx = \dfrac{1}{2\chi_R}$.

В конечнозонном случае отсюда вытекает, что для коэффициентов ряда в левой части имеют место линейные рекуррентные соотношения, что и доказывает теорему 2.

Замечания. 1. Из утверждения 3 следует, что полюса γ_j функции χ — собственные числа дискретного спектра оператора L для одной из двух задач: на полупрямой $(-\infty, x_0]$ или $[x_0, \infty)$ с нулевыми граничными условиями, т. е. условные собственные числа в терминологии А. Б. Шабата [6]. Нетрудно выписать систему дифференциальных уравнений на условные собственные числа γ_j, обобщающую уравнения работы [6]:

$$\gamma_j' = 2i \sqrt{\prod_k (\gamma_j - E_k)} \Big/ \prod_{k \neq j} (\gamma_j - \gamma_k), \qquad j = 1, \ldots, N.$$

2. Оказывается, зависимость от времени потенциала $u\,(x)$ в силу любого из высших уравнений КФ тоже задается различными прямолинейными обмотками на торе $J\,(\Gamma_N)$. Из этого немедленно следует, что торы $J\,(\Gamma_N)$ идентичны торам, построенным в [4] как поверхности уровня коммутирующего набора интегралов стационарной задачи для высших уравнений КФ. Для исходного уравнения КФ $\dot{u} = 6uu' - u'''$ производные по времени от величин γ_j имеют вид

$$\dot{\gamma}_j = 8i \Big(\sum_{k \neq j} \gamma_k - \frac{1}{2} \sum E_k \Big) \sqrt{\prod_k (\gamma_j - E_k)} \Big/ \prod_{k \neq j} (\gamma_j - \gamma_k).$$

Дальнейшие приложения к теории уравнения КФ мы дадим в следующей работе.

Автор глубоко признателен С. П. Новикову за постоянное внимание к этой работе.

Московский государственный
университет

Поступило в редакцию
4 апреля 1974 г.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Гельфанд И. М., Левитан Б. М., Изв. АН СССР, серия матем. 15, (1951), 309—360. 2. Марченко В. А., Труды Моск. матем. о-ва 1 (1952), 327—420. 3. Ахиезер Н. И., ДАН СССР 141 (1961), 263—266. 4. Новиков С. П., Функц. анализ 8, вып. 3 (1974), 54—66. 5. Ince E. L., Proc. Roy. Soc. Edinburgh 60 (1940), 83—99. 6. Шабат А. Б., Сб. «Динамика сплошной среды», вып. 5, Новосибирск, 1970, 130—156.