Функциональный анализ и его приложения,
т. 9, вып. 3, 1975, 41—51.

ПЕРИОДИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА—ДЕ ФРИЗА В КЛАССЕ КОНЕЧНОЗОННЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ

Б. А. Дубровин

Введение

В недавних работах [1], [2] показано, что известное из теории нелинейных волн уравнение Кортевега — де Фриза (КдФ) $\dot{u} = 6uu' - u'''$ тесно связано со спектральной теорией оператора Штурма — Луивилля $L = -\frac{d^2}{dx^2} + u$. В случае быстроубывающих начальных условий $u(x, 0)$ эта связь позволяет решить задачу Коши для уравнения КдФ, используя хорошо развитый аппарат обратной задачи теории рассеяния [3]—[5]. При этом все потенциалы с нулевым коэффициентом отражения образуют набор конечномерных инвариантных многообразий для уравнения КдФ. В работе [6] выяснено, что соответствующие решения уравнения КдФ описывают взаимодействие конечного числа решений типа простой волны (солитонов), поэтому указанные инвариантные многообразия называются *многообразиями N-солитонных решений.*

В случае периодической задачи для уравнения КдФ правильным аналогом N-солитонных решений, как показано С. П. Новиковым в работе [7], является многообразие таких функций $u(x)$, что оператор $-\frac{d^2}{dx^2} + u(x)$ имеет ровно N лакун в спектре (такие потенциалы в дальнейшем называются *конечнозонными* или *N-зонными*). В той же работе показано, что любое стационарное решение N-го аналога уравнения КдФ (см. формулировку теоремы 2.2 ниже) есть N-зонный потенциал. В настоящей работе доказывается гипотеза С. П. Новикова о том, что так получаются все конечнозонные потенциалы. Кроме того, дано явное описание всех конечнозонных потенциалов на языке теории абелевых функций, позволяющее (в тех же терминах) полностью описать динамику уравнения КдФ и его высших аналогов на многообразии N-зонных потенциалов (см. [8]). Следует отметить, что описание конечнозонных потенциалов на языке теории абелевых функций, аналогичное приведенному здесь, получено независимо (несколько другими методами) А. Р. Итсом и В. Б. Матвеевым [9].

Укажем далее на предложенный В. А. Марченко [10] подход к решению периодической задачи КдФ, основанный на аппроксимации матричных элементов матрицы трансляции выражениями, полиномиальными по энергии. Этот аппроксимационный процесс обрывается для периодических конечнозонных потенциалов; возможно, методы работы [10] будут полезны в решении вопроса об аппроксимации произвольного потенциала конечнозонными. Исследования В. А. Марченко базируются на дифференциальных уравнениях для эволюции матрицы трансляции во времени, полученных им независимо от работы [7].

Первые примеры конечнозонных потенциалов можно извлечь из работы Айнса [11]: именно, потенциалы уравнения Ламе $u(x) = N(N+1)\wp(x)$ (здесь $\wp(x)$ — эллиптическая функция Вейерштрасса) являются N-зонными. Методы построения других примеров четных конечнозонных потенциалов был предложен Н. И. Ахиезером в связи с континуальным обобщением теории ортогональных многочленов на системе интервалов [12]. Идея метода работы [12] существенно используется в настоящей работе. Наконец, задача описания однозонных потенциалов была полностью решена Хохштадтом [13].

Дадим формулировку основного результата этой работы. Пусть $\{\Gamma_N\}$ — совокупность гиперэллиптических римановых поверхностей рода N, на которых отмечена точка ветвления (пусть это — бесконечноудаленная точка ∞). Над пространством $\{\Gamma_N\}$ имеется естественное расслоение $\{J(\Gamma_N)\}$, слоем которого является многообразие Якоби $J\ (\Gamma_N)$ поверхности Γ_N, причем в каждом слое отмечена точка, соответствующая дивизору (∞) (легко видеть, что эта точка на многообразии Якоби — точка второго порядка). Указанное многообразие $\{J\ (\Gamma_N)\}$ называется *полным многообразием модулей гиперэллиптических якобианов* (*с отмеченной точкой второго порядка*). Тогда совокупность всех N-зонных потенциалов совпадает с многообразием $\{J\ (\Gamma_N)\}$. При этом каждый слой расслоения $\{J\ (\Gamma_N)\}$ остается инвариантным относительно действия динамических систем, определяемых уравнением КдФ и его любым высшим аналогом, и действие этих динамических систем на торах $J\ (\Gamma_N)$ задается прямолинейными обмотками.

Следует отметить, что многие результаты этой работы (в частности, дифференциальные уравнения (2.12) и (3.9)) без труда обобщаются на случай бесконечного числа зон, но при этом в сильной степени теряется эффективность построения потенциалов.

§ 1. Необходимые факты из теории дифференциального оператора второго порядка с периодическими коэффициентами

Мы рассматриваем оператор $L = -\frac{d^2}{dx^2} + u(x)$, где $u\ (x)$ — гладкая вещественная функция, периодическая с периодом T. В пространстве решений уравнения

$$Ly = Ey. \tag{1.1}$$

введем базис функций $c\ (x,\ x_0,\ E)$ и $s\ (x,\ x_0,\ E)$ со следующими начальными условиями в точке x_0:

$$c\ (x_0) = s'\ (x_0) = 1, \qquad c'\ (x_0) = s\ (x_0) = 0. \tag{1.2}$$

Функции c и s являются целыми функциями от спектрального параметра E. На решениях уравнения (1.1) определен линейный оператор трансляции $\hat{T}$:

$$(\hat{T}y)\ (x) = y\ (x + T). \tag{1.3}$$

Пусть $\alpha_{ij} = \alpha_{ij}\ (x_0,\ E)$ — матрица оператора $\hat{T}$ в базисе (1.2) ($i,\ j = 1,\ 2$). Матричные элементы α_{ij} являются, очевидно, целыми функциями от E. Кроме того, $\det\ (\alpha_{ij}) = 1$. Следовательно, характеристический полином матрицы (α_{ij}) имеет вид $\lambda^2 - 2r\lambda + 1$, где $r = \frac{1}{2}\ \mathrm{Sp}\ (\alpha_{ij})$; поскольку собственные числа оператора $\hat{T}$ не зависят от x_0, то r есть функция только от E. Зоны спектра определяются условием $|r\ (E)| \leqslant 1$; собственные числа периодической и антипериодической задач для оператора L находятся из уравнения $1 - r^2\ (E) = 0$. Известно (см. [14]), что целая функция $1 - r^2\ (E)$ имеет лишь вещественные нули не выше второй кратности. Случай наличия двукратно вырожденного нуля E_n у функции $1 - r^2\ (E)$ соответствует тому, что E_n является вырожденным уровнем спектра периодической (или антипериодической) задачи для оператора L. Поэтому матрица оператора $\hat{T}(E_n)$ есть ± 1 в любом базисе. Следовательно, в этом случае

$$\alpha_{12}(x_0, E_n) = \alpha_{21}(x_0, E_n) \equiv 0. \tag{1.4}$$

Наоборот, если E_n — простой нуль функции $1 - r^2(E)$, то матрица оператора $\hat{T}(E_n)$ не приводится к диагональному виду, т. е. оператор $\hat{T}(E_n)$ имеет лишь один собственный вектор. Границы зон спектра отвечают, очевидно, лишь простым нулям $1 - r^2(E)$ (ср. [14], [7]).

Пусть мы находимся в пределах одной зоны спектра. Тогда собственные числа оператора $\hat{T}(E)$ комплексно сопряжены и имеют вид $\exp(\pm ip(E))$, где $p(E)$ вещественно. Поэтому в этом случае у оператора $\hat{T}$ существуют две собственные функции $\psi_\pm$, причем $\psi_- = \bar{\psi}_+$. Нормируем функции $\psi_\pm$ условием

$$\psi_\pm(x_0) = 1. \tag{1.5}$$

Такие функции будут в дальнейшем обозначать через $\psi_\pm(x, x_0, E)$ (индексы $\pm$ часто будут опускаться). Пусть $\chi = -i\psi'/\psi$.

Лемма 1.1. *Функция* $\chi = \chi(x, E)$

a) *не зависит от выбора точки* x_0,

b) *периодична по* x *с периодом* T,

c) *удовлетворяет уравнению* $-i\chi' + \chi^2 + u - E = 0$,

d) *мнимая часть* χ_I *определяется через действительную* χ_R, $\chi_I = \frac{1}{2} \cdot \frac{\chi_R'}{\chi_R}$,

e) *при* $E \to \infty$ *имеет место асимптотическое разложение*

$$\chi(x, E) \sim k + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_n(x)}{(2k)^n} \quad (k^2 = E). \tag{1.6}$$

Доказательство. Пункт a) следует из того, что при изменении x_0 функция ψ может измениться лишь на постоянный множитель. Пункт b) вытекает из того, что $\psi(x+T) = e^{ip}\psi(x)$. Асимптотическое разложение (1.6) хорошо известно (см. [14]).

Отметим, что из пунктов d) и e) следует, что функция $\chi_R(x, E)$ имеет следующее асимптотическое разложение при $E \to \infty$:

$$\chi_R(x, E) \sim k + \sum_{n=0}^{\infty} \chi_{2n+1}(x). \tag{1.7}$$

Следствие. *Имеют место общие тождества*:

$$\psi(x, x_0, E) = \sqrt{\frac{\chi_R(x_0, E)}{\chi_R(x, E)}} \exp\left\{i \int_{x_0}^{x} \chi_R(x, E)\right\}, \tag{1.8}$$

$$\psi_+\psi_- = |\psi|^2 = \frac{\chi_R(x_0, E)}{\chi_R(x, E)}, \tag{1.9}$$

$$p(E) = \int_{x_0}^{x_0+T} \chi_R(x, E)\,dx + 2\pi n. \tag{1.10}$$

Лемма 1.2. *Вариационная производная* $p(E)$ *равна*

$$\frac{\delta p(E)}{\delta u(x)} = -\frac{1}{2\chi_R(x, E)}. \tag{1.11}$$

Доказательство. Если L_1 и L_2 — два оператора с потенциалом u_1 и u_2 соответственно и $L_i y_i = E y_i$ ($i = 1, 2$), то имеет место очевидное тождество

$$\frac{d}{dx}\{y_1, y_2\} = (u_1 - u_2)\, y_1 y_2. \tag{1.12}$$

Здесь $\{y_1, y_2\} = y_1' y_2 - y_1 y_2'$ — определитель Вронского. Полагая в (1.12) $y_1 = \psi_{1+}$, $y_2 = \psi_{2-}$ и интегрируя по периоду, получаем

$$i\,(e^{i(p_1-p_2)} - 1)\,(\chi_1(x_0) + \bar{\chi}_2(x_0)) = \int\limits_{x_0}^{x_0+T} (u_1 - u_2)\,\psi_{1+}\psi_{2-}\,dx. \tag{1.13}$$

Переходя в (1.13) от разностей к вариациям, получаем (1.11).

Лемма 1.3.

$$\chi(x, E) = \frac{\sqrt{1 - r^2(E)}}{\alpha_{21}(x, E)} + \frac{i}{2}\,\frac{\alpha_{11}(x, E) - \alpha_{22}(x, E)}{\alpha_{21}(x, E)}. \tag{1.14}$$

Доказательство. Так как $\psi(x, x_0, E)$ — собственный вектор матрицы $\alpha_{ij}(x_0, E)$, нормированный условием (1.5), то

$$\psi(x, x_0, E) = c(x, x_0, E) + i\xi(x_0, E)\, s(x, x_0, E), \tag{1.15}$$

где $\xi(x_0, E) = \dfrac{\sqrt{1 - r^2(E)}}{\alpha_{21}(x_0, E)} + \dfrac{i}{2}\,\dfrac{\alpha_{11}(x_0, E) - \alpha_{22}(x_0, E)}{\alpha_{21}(x_0, E)}$. С другой стороны, из определения χ следует, что вронскиан

$$\{\psi(x, x_0, E), c(x, x_0, E)\} = i\chi(x_0, E). \tag{1.16}$$

Сравнивая (1.16) и (1.15) и учитывая п. а) леммы 1.1, получаем (1.14).

§ 2. Конечнозонные потенциалы

Пусть теперь потенциал $u(x)$ имеет лишь конечное число зон спектра. В силу сказанного в § 1 это эквивалентно тому, что функция $1 - r^2(E)$ имеет лишь конечное число простых нулей (очевидно, их количество нечетно). Пусть эти нули суть $E_1, \ldots, E_{2N+1}$ (т. е. в спектре оператора L ровно N лакун). Заметим, что тогда радикал $\sqrt{[1 - r^2(E)]/R(E)}$ очевидным образом продолжается до целой аналитической функции; все нули этой функции простые и совпадают с вырожденными нулями функции $1 - r^2(E)$. Поэтому, в силу (1.4), $\alpha_{21}(x, E)$ и $\alpha_{12}(x, E)$ делятся на этот радикал, т. е.

$$\alpha_{21}(x, E) = \tilde{\alpha}_{21}(x, E)\cdot\sqrt{\frac{1 - r^2(E)}{R(E)}}. \tag{2.1}$$

Подставляя (2.1) в (1.14), получаем $\chi_R(x, E) = \dfrac{\sqrt{R(E)}}{\tilde{\alpha}_{21}(x, E)}$.

Если $k^2 = E$, то $\sqrt{R(E)}$ имеет на бесконечности асимптотику $k\cdot E^N$. Поэтому, в силу (1.7), целая функция $\tilde{\alpha}_{21}(x, E)$ обязана иметь асимптотику E^N на бесконечности, т. е. быть полиномом N-й степени по E. Обозначим этот полином через $\tilde{\alpha}_{21}(x, E) = P(E, x) = \prod\limits_{i=1}^{N}(E - \gamma_i(x))$.

Имеем, таким образом, следующий результат.

Теорема 2.1. *Для конечнозонного потенциала с границами зон* $E_1, \ldots, E_{2N+1}$ *функция* $\chi(x, E)$, *имеет вид*

$$\chi(x, E) = \left(\sqrt{R(E)} - \frac{i}{2}\,\frac{dP(E, x)}{dx}\right) \Big/ P(E, x). \tag{2.2}$$

Нули $\gamma_i(x)$ полинома $P(E, x)$ вещественны и лежат по одному в лакунах или на их границах.

Доказательство. Осталось доказать только утверждение о расположении нулей $\gamma_i(x)$. Из определения P следует, что $\gamma_i(x_0)$ суть нули функции $\alpha_{21}(x_0, E)$. Следовательно, $E = \gamma_i(x_0)$ суть собственные числа оператора L на отрезке $[x_0, x_0 + T]$ с нулевыми граничными условиями. Отсюда вытекает вещественность нулей $\gamma_i(x_0)$. Из унимодулярности матрицы (α_{ij}) немедленно получаем, что равенство $\alpha_{21}(x_0, E) = 0$ может выполняться, лишь если E лежит в лакуне или на границе. То, что $\gamma_i(x_0)$ лежат ровно по одному в лакуне, очевидно из соображений перемежаемости.

Из теоремы 2.1 выведем утверждение, обратное основной теореме работы [7]. Напомним формулировку этой основной теоремы. Определим набор функционалов $I_n\{u\}$, положив

$$I_n\{u\} = \int\limits_T \chi_{2n+3}(x)\,dx. \tag{2.3}$$

Здесь $\chi_{2n+1}(x)$ — коэффициенты разложения (1.7) функции $\chi_R(x, E)$ при $E \to \infty$. Все $\chi_{2n+1}(x)$ — полиномы от u и производных. *N-м аналогом уравнения КдФ называется уравнение*

$$\dot{u} = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\delta}{\delta u}\sum_{n=0}^{N} c_n I_n. \tag{2.4}$$

В частности, для определения стационарных решений уравнения (2.4) получается обыкновенное дифференциальное уравнение порядка $2N$

$$\frac{\delta}{\delta u}\sum_{n=0}^{N} c_n I_n = d. \tag{2.5}$$

В работе [7] показано, что любое решение уравнения (2.5) есть N-зонный потенциал. Покажем обратное.

Теорема 2.2. *Пусть $u(x)$ есть N-зонный потенциал. Тогда $u(x)$ удовлетворяет некоторому дифференциальному уравнению вида* (2.5)

Доказательство. Из формул (1.10), (1.11) и (2.2) получаем

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2k)^{2n+1}}\frac{\delta I_{n-1}}{\delta u(x)} = -\frac{1}{2}\frac{P(E, x)}{\sqrt{R(E)}} \quad (k^2 = E). \tag{2.6}$$

Из явного вида правой части формулы (2.6) имеем: если $-\frac{1}{2}\frac{P(E, x)}{\sqrt{R(E)}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\beta_{n-1}(x)}{(2k)^{2n+1}}$ — разложение Тейлора в бесконечноудаленной точке, то все величины $\beta_N(x), \beta_{N+1}(x), \ldots$ выражаются линейно через $\beta_{-1}(x) = -1$, $\beta_0(x), \ldots, \beta_{N-1}(x)$ с постоянными коэффициентами. Поэтому то же утверждение справедливо и для ряда, стоящего в левой части (2.6). Получаем

$$\frac{\delta I_N}{\delta u(x)} + \sum_{n=-1}^{N-1} c_n \frac{\delta I_n}{\delta u(x)} = 0. \tag{2.7}$$

Поскольку $\delta I_{-1}/\delta u(x) = -1$, то, полагая, $c_{-1} = d$, получаем уравнение вида (2.5).

Пусть Γ_N — (гиперэллиптическая) риманова поверхность функции $\sqrt{R(E)}$. Тогда, в силу теоремы 2.1, функция $\chi(x, E)$ является однозначной алгебраической функцией на поверхности Γ_N. Покажем, что функция ψ также имеет естественное продолжение на Γ_N.

Теорема 2.3. *Собственная функция $\psi(x, x_0, E)$ продолжается до мероморфной функции на $\Gamma_N \setminus \infty$, имеет там N полюсов, лежащих над точками $E = \gamma_i(x_0)$ и N нулей, лежащих над точками $E = \gamma_i(x)$, а также существенно особую точку в бесконечности с асимптотикой вида* $\exp[ik(x - x_0)]$.

Доказательство. Напомним, что по лемме 1.3 имеем

$$\psi(x, x_0, E) = c(x, x_0, E) + i\chi(x_0, E)\, s(x, x_0, E). \qquad (2.9)$$

Так как χ алгебраична на Γ_N, а c и s суть целые функции от E, то ψ продолжается очевидным образом до однозначной функции на Γ_N. Полюсы функции ψ могут лежать лишь там, где $\chi(x_0, E)$ может иметь полюсы, т. е. над точками $E = \gamma_i(x_0)$. Покажем, что в действительности ψ имеет ровно один полюс над каждой из точек $E = \gamma_i(x_0)$. Действительно, в силу формул (1.9) и (2.2) имеем

$$\text{\textit{норма}}\ (\psi) = \psi(x, x_0, E_+)\cdot\psi(x, x_0, E_-) = \frac{P(x, E)}{P(x_0, E)} \qquad (2.10)$$

(здесь E_+, E_- — две точки на Γ_N, лежащие над E).

Из (2.10) вытекает, что *норма* (ψ) имеет лишь простые полюсы при $E = \gamma_i(x_0)$, поэтому ψ не может иметь двух полюсов над точкой $E = \gamma_i(x_0)$. Из формулы (2.10), очевидно, следует и утверждение о расположении нулей ψ.

В дальнейшем, допуская вольность обозначений, будем обозначать нули и полюсы функций ψ на Γ_N теми же символами $\gamma_i(x)$ и $\gamma_i(x_0)$.

Из теоремы 2.3 очевидна еще одна спектральная интерпретация уровней энергии $E = \gamma_i(x)$: это есть собственные числа дискретного спектра оператора L на одной из полупрямых $[x_0, \pm\infty)$ с нулевыми граничными условиями, т. е. условные собственные числа в терминологии работы [15]. Получим дифференциальные уравнения для условных собственных чисел.

Из теоремы 2.3 немедленно вытекает, что функция $\chi(x, E)$ также имеет на $\Gamma_N \setminus \infty$ N полюсов в точках $\gamma_i(x)$, поэтому числитель формулы (2.2) обращается в нуль при $E = \gamma_i(x)$ на одном из листов Γ_N. Имеем, следовательно, систему уравнений

$$P'(E, x)\,|_{E=\gamma_j(x)} = 2i\sqrt{R(\gamma_j)} \qquad (j = 1, \ldots, N) \qquad (2.11)$$

(знак перед корнем выбирается соответственно тому листу, где лежит полюс $\gamma_j(x)$). Систему (2.11) легко переписать в виде

$$\gamma_j' = -\frac{2i\sqrt{R(\gamma_j)}}{\prod\limits_{j\neq k}(\gamma_j - \gamma_k)} \qquad (j = 1, \ldots, N). \qquad (2.12)$$

Уравнения (2.12) дают закон движения точек γ_j по циклам на Γ_N, лежащим над лакунами. Дадим явную замену переменных, интегрирующую систему уравнений (2.12). Идея этой замены базируется на методе работы [12]. Введем на Γ_N базис циклов a_j, b_k $(j, k = 1, \ldots, N)$ так, чтобы индексы пересечений имели следующий вид:

$$(a_j, b_k) = \delta_{jk}, \quad (a_j, a_k) = (b_j, b_k) = 0.$$

Пусть $\omega_1, \ldots, \omega_N$ — базис голоморфных дифференциалов (дифференциалов первого рода) на Γ_N, нормированных условием

$$\oint_{a_k} \omega_j = 2\pi i \delta_{jk}. \tag{2.13}$$

Пусть Ω — дифференциал второго рода на поверхности Γ_N с двукратным полюсом в бесконечности, нормированный условием

$$\oint_{a_k} \Omega = 0 \qquad (k = 1, \ldots, N). \tag{2.14}$$

Пусть, далее,

$$\oint_{b_k} \Omega = iU_k. \tag{2.15}$$

Фиксируем отображение

$$A:\ S^N\Gamma_N \to J(\Gamma_N) \tag{2.16}$$

N-й симметрической степени Γ_N в ее многообразие Якоби (отображение Абеля). В координатах это отображение записывается так:

$$[A(P_1, \ldots, P_N)]_n = \sum_{i=1}^{N} \int_{\infty}^{P_i} \omega_n \quad (n = 1, \ldots, N). \tag{2.17}$$

Теорема Ахиезера утверждает, что для полюсов и нулей функции, обладающей свойствами, описанными в теореме 2.3, имеет место соотношение на многообразии Якоби

$$A(\gamma_1(x), \ldots, \gamma_N(x)) = A(\gamma_1(x_0), \ldots, \gamma_N(x_0)) + \mathbf{U}\cdot(x - x_0). \tag{2.18}$$

Теперь в силу того, что A есть бирациональный изоморфизм, уравнение (2.18) можно решить при почти всех x и найти нули $\gamma_i(x), \ldots, \gamma_N(x)$.

Для нахождения потенциала, однако, нет нужды явно разрешать систему уравнений (2.18) относительно $\gamma_1(x), \ldots, \gamma_N(x)$. Действительно, для $\chi(x, E)$ имеется разложение (1.7) в котором $\chi_1(x) = -u(x)$. С другой стороны, из формулы (2.2) имеем, что тот же коэффициент равен $2\sum\gamma_i(x) - \sum E_i$. Поэтому получаем

$$u(x) = -2\sum \gamma_i(x) + \sum E_i. \tag{2.19}$$

Сопоставим теперь формулы (2.18) и (2.19). Для окончательной формулировки алгебро-геометрического описания многообразия конечнозонных потенциалов определим на якобиевом многообразии $J(\Gamma_N)$ функцию σ_1, полагая

$$\sigma_1 \circ A((Q_1, \sqrt{R(Q_1)}), \ldots, (Q_N, \sqrt{R(Q_N)})) = Q_1 + \ldots + Q_N. \tag{2.20}$$

σ_1, очевидно, есть алгебраическая функция на $J(\Gamma_N)$ (в работе [9] указано явное выражение σ_1 через θ-функцию Римана). Получаем следующую теорему.

Т е о р е м а 2.4. *Каждый потенциал с границами зон $E_1, \ldots, E_{2N+1}$ определяется заданием начальной точки на многообразии Якоби $J(\Gamma_N)$ и является ограничением функции $-2\sigma_1 + \sum_i E_i$ на прямолинейную обмотку тора $J(\Gamma\ )$, выпущенную из этой точки с направлением вектора $\mathbf{U}$.*

Следствие. *Многообразие N-зонных потенциалов совпадает с полным многообразием модулей гиперэллиптических якобианов с отмеченной точкой второго порядка.*

Мы видим, таким образом, что при заданных границах зон потенциал получается, вообще говоря, условно периодическим с N независимыми периодами (впервые это было замечено в работе [7]).

§ 3. Эволюция во времени конечнозонных потенциалов в силу уравнения КдФ и его высших аналогов

Пусть теперь $u = u(x, t)$ зависит от параметра t в силу уравнения вида (2.4). Тогда оператор L также зависит от параметра t. Лакс заметил, что тогда найдется такой вещественный кососимметрический оператор A порядка $2N+1$ с коэффициентами, зависящими от $u, u', \ldots$, что уравнение (2.4) эквивалентно уравнению

$$\dot{L} = [A, L] \tag{3.1}$$

([2]; см. также [16]). Для собственных функций (1.1) тогда имеет место уравнение

$$\frac{\partial y}{\partial t} = Ay + \lambda y + \mu \bar{y}, \tag{3.2}$$

где λ, μ не зависят от x. В работе [7] показано, что собственные числа оператора $\hat{T}$, т. е. функция $p(E)$, не зависят от времени t. Поэтому, если в качестве y взять функцию $\psi(x, x_0, E)$, то $\mu = 0$, $\lambda = \lambda(x_0, E)$. Заметим, что действие оператора A на собственную функцию ψ можно представить в виде

$$\begin{aligned} A\psi(x, x_0, E) &= \Lambda(x, E)\,\psi'(x, x_0, E) + \Xi(x, E)\,\psi(x, x_0, E) = \\ &= [i\,\Lambda(x, E)\,\chi(x, E) + \Xi(x, E)]\,\psi(x, x_0, E), \end{aligned} \tag{3.3}$$

где Λ и Ξ — вещественные функции, полиномиально зависящие от E и от $u, u', \ldots$ Тогда, учитывая нормировку (1.5), получаем

$$-\lambda(x_0, E) = i\,\Lambda(x_0, E)\,\chi(x_0, E) + \Xi(x_0, E) \tag{3.4}$$

Дифференцируя уравнение (3.2) по x, имеем

$$\dot{\chi}(x, E) = [\Lambda(x, E)\,\chi(x, E) - i\Xi(x, E)]' = i\lambda'(x, E). \tag{3.5}$$

Используя соотношение $\chi_I = \frac{1}{2} \cdot \frac{\chi_R'}{\chi_R}$, получаем

$$\Xi(x, E) = -\frac{1}{2}\Lambda'(x, E). \tag{3.6}$$

Пусть теперь потенциал u конечнозонный. Тогда для производной по времени полинома $P(E, x)$ из (3.5) получаем выражение

$$\dot{P} = \Lambda P' - \Lambda' P. \tag{3.7}$$

Это равенство справедливо при любых E. Подставив $E = \gamma_j$ и учитывая (2.11), получим

$$\dot{P}|_{E=\gamma_j} = 2i\Lambda(\gamma_j)\sqrt{R(\gamma_j)} \qquad (j = 1, \ldots, N) \tag{3.8}$$

(соглашение о знаках такое же, как в (2.11) и (2.12)). Отсюда

$$\dot{\gamma}_j = -\frac{2i\Lambda(\gamma_j)\sqrt{R(\gamma_j)}}{\prod\limits_{k\neq j}(\gamma_j-\gamma_k)} \qquad (j=1,\ldots,N). \tag{3.9}$$

Покажем, что система (3.9) при помощи отображения Абеля сводится к системе с постоянными коэффициентами. Будем в дальнейшем оперировать с высшим аналогом уравнения КдФ стандартного вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\delta I_n}{\delta u(x)}. \tag{3.10}$$

При $n=1$ получаем стандартное уравнение КдФ $\dot{u}=6uu'-u'''$. Полином $\Lambda(x, E)$ для уравнения (3.10) обозначим через $\Lambda_n(x, E)$. Дадим явное выражение для полинома $\Lambda_n(x, E)$.

Лемма 3.1. *Имеет место формула*

$$\Lambda_n = (4E)^n\frac{\delta}{\delta u}\left(I_{-1}+\frac{I_0}{4E}+\cdots+\frac{I_{n-1}}{(4E)^n}\right). \tag{3.11}$$

Для доказательства леммы рассмотрим оператор

$$A_z = \frac{1}{8}\left[\frac{1}{\chi_R(x,z)}\frac{d}{dx}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\chi_R(x,z)}\right)'\right]\frac{1}{L-z} \tag{3.12}$$

(идея рассмотрения оператора такого типа была высказана С. П. Новиковым).

Лемма 3.2. *Коммутатор операторов A_z и L есть оператор умножения на следующую функцию*:

$$[A_z, L] = \frac{1}{4}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\chi_R(x,z)}\right) = -\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\frac{\delta p(x)}{\delta u(x)}. \tag{3.13}$$

Доказательство. Вычислим значение указанного оператора на собственных функциях оператора L. Имеем

$$[A_z, L]\,\psi(x, x_0, E) = (E-L)\,A_z\psi(x, x_0, E).$$

После вычисления получаем

$$[A_z, L]\,\psi(x, x_0, E) = \frac{1}{8(E-z)}\left[-\frac{1}{2}f'''+2f'(u-E)+fu'\right]\psi(x, x_0, E),$$

где $f=1/\chi_R(x, z)$. Поскольку с точностью до множителя, не зависящего от x, f есть просто $|\psi(x, x_0, z)|^2$ (см. ((1.9)), f удовлетворяет уравнению

$$-\frac{1}{2}f'''+2f'(u-z)+fu'=0,$$

что и завершает доказательство.

Доказательство леммы 3.1. Разложим A_z в ряд по степеням $\varkappa^{-1}$, где $\varkappa=\sqrt{z}$,

$$A_z = \sum_n \frac{A_{n-1}}{(2\varkappa)^{2n+1}}. \tag{3.14}$$

Тогда из (3.14) и (1.11) следует, что

$$[A_n, L] = -\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\frac{\delta I_n}{\delta u(x)}, \tag{3.15}$$

т. е. оператор A_n дает коммутационное представление Лакса для уравнения (3.10). Заметим, что для оператора A_z соответствующая функция Λ_z имеет вид

$$\Lambda_z(x, E) = +\frac{1}{8(E-z)\chi_R(x, z)}. \tag{3.16}$$

Разлагая (3.16) в ряд по $\varkappa^{-1}$ и вновь учитывая (1.11), получаем утверждение леммы.

Пусть Ω_n — дифференциал второго рода на поверхности Γ_N с полюсом порядка $2n+2$ в бесконечности, нормированный условиями $\oint\limits_{a_k} \Omega_n = 0$. Пусть (ср. (2.14), (2.15))

$$iU_k^{(n)} = -\oint\limits_{b_k} \Omega_n. \tag{3.17}$$

Т е о р е м а 3.1. *При отображении* Абеля A *система* (3.9) *переходит в систему с постоянными коэффициентами, т. е.*

$$A(\gamma_1(t), \ldots, \gamma_N(t)) = A(\gamma_1(t_0), \ldots, \gamma_N(t_0)) + 2^{2n}\,\mathrm{U}^{(n)}(t-t_0) \tag{3.18}$$

(*все* γ *берутся при одном* x).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из (3.2) и (3.4) получаем

$$\psi_t(x, x_0, E) = \frac{\varphi_x(t, t_0, E)}{\varphi_{x_0}(t, t_0, E)}\,\psi_{t_0}(x, x_0, E), \tag{3.19}$$

где функция

$$\varphi_x(t, t_0, E) = \exp\left\{-\int\limits_{t_0}^{t} \lambda_t(x, E)\,dt\right\} \tag{3.20}$$

является, следовательно, однозначной функцией на Γ_N, мероморфной на $\Gamma_N \setminus \infty$, имеет там N полюсов при $E = \gamma_i(x, t_0)$ и N нулей при $E = \gamma_i(x, t)$. Вычислим поведение $\varphi_x(t, t_0, E)$ при $E \to \infty$. Заметим, что из формул (3.11), (3.4) и (1.11) немедленно вытекает, что $\lambda_t(x, E)$ при $E \to \infty$ имеет вид

$$\lambda_t(x, E) \sim 2^{2n} i k^{2n+1} + O\left(\frac{1}{k}\right) \qquad (k^2 = E). \tag{3.21}$$

Поэтому функция $\varphi_x(t, t_0, E)$ на бесконечности имеет асимптотику вида $\exp(-2^{2n} i k^{2n+1}(t-t_0))$. Формула (3.18) теперь получается после применения к функции $\varphi_x(t, t_0, E)$ процедуры Ахиезера.

Таким образом, координаты точек на якобиевом многообразии $J(\Gamma_N)$ являются естественными угловыми переменными для гамильтонова уравнения КдФ (ср. [17]).

С л е д с т в и е. При отождествлении полного многообразия модулей гиперэллиптических якобианов с отмеченной точкой второго порядка с пространством решений уравнений вида (2.5), получающемся из сопоставления результатов работы [7] с результатами § 2 настоящей работы, торы $J(\Gamma_N)$ переходят в инвариантные торы вполне интегрируемых гамильтоновых систем (2.5), явно вычисленные в [7].

Обсуждение алгебро-геометрических выводов, получающихся при таком сопоставлении, см. в [18].

Теорема 3.1 позволяет теперь полностью решить задачу Коши для уравнения КдФ для конечнозонных начальных условий. Некоторые конкретные вычисления, связанные со спецификой двухзонного случая, см. в [19].

Примечание. Как выяснилось на Международном математическом конгрессе в Ванкувере, одновременно с работой С. П. Новикова [7] появилась работа Лакса [20], в которой также доказано (совсем другим методом), что стационарные периодические решения высших аналогов уравнения КдФ (см. уравнение (2.5)) являются конечнозонными потенциалами. В отличие от работы [7], доказательство Лакса не эффективно и не позволяет получить полную интегрируемость уравнений (2.5). Класс почти периодических конечнозонных потенциалов в работе Лакса не обсуждается. Доказательство гипотезы, сформулированной Лаксом в конце работы [20], содержится в теореме 2 работы автора [8] (см. также теорему 2.2 настоящей работы).

Московский государственный университет

Поступила в редакцию 17 сентября 1974 г.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Gardner C., Green J., Kruskal M., Miura R., A method for solving the Korteweg — de Vries equation, Phys. Rev. Lett. **19** (1967), 1095—1098.
2. Lax P., Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves, Comm. Pure Appl. Math. **21**, № 2 (1968), 467—490.
3. Гельфанд И. М., Левитан Б. М., Об определении дифференциального уравнения по его спектральной функции, Изв. АН СССР, серия матем. **15** (1951), 309—360.
4. Марченко В. А., Некоторые вопросы теории одномерных дифференциальных операторов. I, Труды Моск. матем. об-ва **I** (1952), 327—420.
5. Фаддеев Л. Д., Свойства S-матрицы одномерного уравнения Шредингера, Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова **LXXIII** (1964), 314—336.
6. Захаров В. Е., Кинетическое уравнение для солитонов, ЖЭТФ **60**, № 3 (1971), 993—1000.
7. Новиков С. П., Периодическая задача для уравнения Кортевега — де Фриза. I, Функц. анализ 8, вып. 3 (1974), 54—66.
8. Дубровин Б. А., Обратная задача теории рассеяния для периодических конечнозонных потенциалов, Функц. анализ 9, вып. 1 (1975), 65—66.
9. Итс А. Р., Матвеев В. Б., Об операторах Хилла с конечным числом лакун, Функц. анализ 9, вып. 1 (1975), 69—70.
10. Марченко В. А., Периодическая задача Кортевега — де Фриза, ДАН СССР **217**, № 2 (1974), 276—279.
11. Ince E. L., Further investigations into the periodic Lame functions, Proc. Roy. Soc. Edinburgh **60** (1940), 83—99.
12. Ахиезер Н. И., Континуальный аналог ортогональных многочленов на системе интервалов, ДАН СССР **141**, № 2 (1961), 263—266.
13. Hochstadt H., On the determination of a Hill's equation from its spectrum, Arch. Rat. Mech. and Anal. **19**, № 5 (1965), 353—362.
14. Титчмарш Э. Ч., Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка, т. 2, гл. XXI, М., ИЛ, 1961.
15. Шабат А. Б., О потенциалах с нулевым коэффициентом отражения, Сб. «Динамика сплошной среды», Новосибирск, вып. 5 (1970), 130—156.
16. Miura R., Gardner C., Kruskal M., Kortweg — de Vries equation and generalisations, J. Math. Phys. **9**, № 8 (1968), 1202—1209.
17. Захаров В. Е., Фаддеев Л. Д., Уравнение Кортевега — де Фриза — вполне интегрируемая гамильтонова система, Функц. анализ 5, вып. 4 (1971), 18—27.
18. Дубровин Б. А., Новиков С. П., Периодическая задача для уравнения Кортевега — де Фриза и Штурма — Лиувилля. Их связь с алгебраической геометрией, ДАН СССР **219**, № 3, (1974), 19—22.
19. Дубровин Б. А., Новиков С. П., Периодический и условно-периодический аналоги многосолитонных решений уравнения КдФ, ЖЭТФ **12** (1974), 2131—2144.
20. Lax P., Periodic solutions of the KdV equations, Lectures in Appl. Math. **15** (1974), 85—96.