СЕРИЯ
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
Том 45, № 5, 1981

УДК 513.835

ДУБРОВИН Б. А.

УРАВНЕНИЕ КАДОМЦЕВА — ПЕТВИАШВИЛИ И СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ПЕРИОДАМИ ГОЛОМОРФНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛОВ НА РИМАНОВЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ

§ 0. Введение

Симметрическая матрица $B=(B_{jk})$ с отрицательно определенной вещественной частью $\operatorname{Re} B<0$ называется *матрицей Римана*. По $g\times g$-матрице Римана $B=(B_{jk})$ можно построить тэта-функцию g комплексных переменных $(z_1, \ldots, z_g)=z$, определяя ее сходящимся рядом Фурье вида

$$\theta(z)=\theta(z\,|\,B)=\sum_{k\in \mathbf{Z}^g} \exp\left\{\frac{1}{2}\langle Bk, k\rangle+\langle k, z\rangle\right\}. \tag{0.1}$$

Суммирование в этой формуле ведется по всем целочисленным векторам $k=(k_1, \ldots, k_g)$; угловые скобки обозначают евклидово скалярное произведение: $\langle Bk, k\rangle=\Sigma B_{ij}k_ik_j$, $\langle k, z\rangle=\Sigma k_iz_i$.

Определим в комплексном пространстве $\mathbf{C}^g$ решетку Λ, состоящую из векторов вида

$$\Lambda=\{2\pi iN+BM\}, \tag{0.2}$$

где $N=(N_1, \ldots, N_g)$, $M=(M_1, \ldots, M_g)$ — целочисленные векторы. При сдвиге на векторы этой решетки тэта-функция преобразуется по следующему закону:

$$\theta(z+2\pi iN+BM)=\exp\left\{-\frac{1}{2}\langle BM, M\rangle-\langle M, z\rangle\right\}\theta(z). \tag{0.3}$$

Решетку Λ назовем решеткой периодов тэта-функции. Фактор пространства $\mathbf{C}^g=\mathbf{R}^{2g}$ по этой решетке есть $2g$-мерный комплексный тор

$$T^{2g}(B)=\mathbf{C}^g/\{2\pi iN+BM\}. \tag{0.4}$$

Этот тор является абелевым тором (или абелевым многообразием). Кэлерова метрика на $T^{2g}(B)$ вида

$$ds^2=-\frac{1}{2\pi}\sum_{j,k=1}^{g}(\operatorname{Re}B)^{-1}_{jk}\,dz_j\,d\bar{z}_k \tag{0.5}$$

является ходжевой; в вещественных координатах x_k, y_k в пространстве $\mathbf{C}^g=\mathbf{R}^{2g}$, где

$$z_k = 2\pi i x_k + \sum_j B_{kj} y_j, \quad k = 1, \ldots, g, \tag{0.6}$$

мнимая часть этой метрики равна

$$\Omega = \frac{1}{4\pi i} \sum_{k,l} (\mathrm{Re}\, B)^{-1}_{k,l}\, dz_k \wedge d\bar{z}_l = \sum_{k=1}^{g} dx_k \wedge dy_k. \tag{0.7}$$

Замечание. Класс когомологий мнимой части ходжевой метрики на абелевом многообразии (т. е. на алгебраическом торе) называется поляризацией этого многообразия. Поляризация называется главной, если этот класс имеет вид (0.7). Таким образом, построенный по матрице Римана тор $T^{2g}(B)$ есть главное поляризованное абелево многообразие, и так получаются все эти многообразия.

Совокупность $\mathbf{H}_g$ всех $g\times g$-матриц Римана B называется (левой) полуплоскостью Зигеля. Модулярной группой Зигеля G_g называется группа всех целочисленных симплектических $2g\times 2g$-матриц $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, профакторизованная по подгруппе $\{\pm 1\}$:

$$G_g = \mathrm{Sp}(g, \mathbf{Z})/\{\pm 1\}. \tag{0.8}$$

Здесь матрица $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}(g, \mathbf{Z})$, если α, β, γ, δ — целочисленные $g\times g$-матрицы, причем

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha^t & \gamma^t \\ \beta^t & \delta^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{0.8'}$$

(значок t обозначает транспонирование). Модулярная группа G_g действует на полуплоскости $\mathbf{H}_g$ по формуле

$$B \mapsto B' = 2\pi i (\alpha B + 2\pi i \beta)(\gamma B + 2\pi i \delta)^{-1}. \tag{0.9}$$

Матрицы Римана B, B', связанные преобразованием из модулярной группы, называются эквивалентными. Они определяют одинаковые абелевы торы $T^{2g}(B) = T^{2g}(B')$ с одинаковой поляризацией. Нетрудно видеть, что неэквивалентным матрицам Римана B, B' отвечают разные торы. Таким образом, фактор-пространство

$$\mathbf{H}_g/G_g = \mathbf{A}_g \tag{0.10}$$

есть пространство модулей главных поляризованных абелевых многообразий (комплексной размерности g). Это пространство является неприводимым алгебраическим многообразием (комплексной) размерности $g(g+1)/2$ (после надлежащей компактификации; см. [14]). Отметим, что при преобразованиях вида (0.9) тэта-функция преобразуется по закону

$$\theta(z' \mid B') = \varkappa \exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_{i\leqslant j} z_i z_j \frac{\partial \ln \det M}{\partial B_{ij}} + \sum_i l_i z_i\right\} \theta(z + \lambda \mid B),$$

где

$$M=(\gamma B+2\pi i\delta)^{-1},\quad z'=2\pi iMz;$$

явный вид множителя $\varkappa$ (не зависящего от z), а также величин l_i, λ для нас несуществен.

Пусть Γ — компактная риманова поверхность рода g (гладкая алгебраическая кривая). Выберем канонический базис циклов $a_1, \ldots, a_g$, $b_1, \ldots, b_g$ в целочисленных гомологиях $H_1(\Gamma, \mathbf{Z})$ с матрицей пересечений вида $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Этому базису соответствует базис голоморфных дифференциалов $\omega_1, \ldots, \omega_g$, нормированных условиями

$$\oint_{a_j} \omega_k = 2\pi i\delta_{jk}. \tag{0.11}$$

Тогда b-периоды этих дифференциалов определяют матрицу Римана

$$B_{jk} = \oint_{b_j} \omega_k. \tag{0.12}$$

Соответствующая тэта-функция $\theta(z)=\theta(z|B)$ называется тэта-функцией римановой поверхности Γ, а соответствующий абелев тор $T^{2g}(B)$ — многообразием Якоби или якобианом этой римановой поверхности. Переход к другому каноническому базису циклов дается целочисленным симплектическим преобразованием. При этом матрица Римана B римановой поверхности Γ перейдет в эквивалентную, а якобиан вообще не изменится.

Пусть $\mathbf{R}_g$— пространство модулей римановых поверхностей рода $g\geqslant 2$. Это пространство — неприводимое многообразие размерности $3g-3$. Определено отображение периодов

$$\mathbf{R}_g \xrightarrow{\mathbf{B}} \mathbf{A}_g;\quad \Gamma \mapsto \mathbf{B}(\Gamma), \tag{0.13}$$

сопоставляющее каждой кривой Γ класс эквивалентности ее матрицы Римана (см. [15]). Классическая теорема Торелли утверждает, что это отображение является вложением. Доказательство этой теоремы неэффективно, так как требует знания всего «тэта-дивизора» $\{\theta(z)=0\}$ (см. [1]). Задача нахождения уравнений, выделяющих образ отображения периодов (0.13),— это проблема Римана — Шоттки. Другими словами, эта проблема заключается в следующем: указать набор уравнений на матрицу Римана (B_{jk}), выделяющих матрицы периодов римановых поверхностей. Проблема Римана—Шоттки нетривиальна при $g\geqslant 4$. Для $g=4$ уравнение, выделяющее матрицы периодов, найдено Шоттки [3] (см. также [4], [5], где указаны обобщения соотношений Шоттки на случай больших родов). Метод Шоттки был существенно продвинут Фаркашем и Раухом [6]. В этой работе был предложен метод, позволяющий получать большое число явных тождеств на тэта-функции, используя теорию многообразий Прима. Однако вопрос о полноте этой системы тождеств, насколько известно автору, не исследован (даже не ясен вопрос о том, хватает ли их по размерности). Наконец, еще один подход к проблеме Римана—Шоттки найден Андреотти и Майером [7], применившими для решения этой проблемы информацию о сингулярностях θ-дивизора (эти сингулярности для якобиевых многообразий римановых поверхностей имеют коразмерность 4). Уравнений Андреотти—Майера (мы укажем их в конце работы) хватает по размерности, однако процедура их написания сильно неэффективна. Кроме того, известно, что решения этих уравнений имеют лишние компоненты в $\mathbf{A}_g$ (не относящиеся к матрицам периодов) — см. [13].

В настоящей работе получены явные формулы для обращения отображения периодов (0.13), т. е. для восстановления римановой поверхности по ее якобиану (другими словами, по ее матрице периодов (B_{jk})). Кроме того, проблема Римана—Шоттки о выделении образа отображения периодов (0.13) решена с точностью до компонент.

Для решения этих классических алгебро-геометрических задач автор использует, согласно идее С. П. Новикова, важное в математической физике уравнение Кадомцева—Петвиашвили (КП)

$$3u_{yy}=(4u_t-6uu_x-u_{xxx})_x. \tag{0.14}$$

И. М. Кричевер нашел широкий класс точных решений этого уравнения, каждое из которых конструируется исходя из произвольной гладкой алгебраической кривой Γ (см. [9]). Эти решения имеют вид

$$u(x, y, t)=2\partial_x^2\ln\theta(Ux+Vy+Wt+z_0); \tag{0.15}$$

здесь $\theta(z)=\theta(z|B)$ — тэта-функция кривой Γ; векторы U, V, W задаются весьма сложно кривой Γ и точкой P на ней (см. ниже формулы (1.6)); z_0— произвольный вектор.

Возьмем теперь произвольную матрицу Римана B и некоторые векторы U, V, W и попытаемся удовлетворить уравнению КП выражением (0.15), где $\theta(z)=\theta(z|B)$. После подстановки получится некоторая система соотношений на переменные U, V, W и матрицу B:

$$\text{КП}(U, V, W, B)=0 \tag{0.16}$$

(явный вид этих уравнений будет указан ниже, см. теорему 1). С. П. Новиков высказал гипотезу, что, решая систему (0.16) относительно матрицы B, мы получим матрицы периодов римановых поверхностей и только их, т. е. получим решение проблемы Римана—Шоттки. Оказалось также, что если известно уже, что B — матрица периодов некоторой римановой поверхности Γ, то, решая систему (0.16) относительно переменных U, V, W, мы получим явные уравнения этой римановой поверхности.

§ 1. Формулировки основных результатов

Введем 2^g «тэта-функций второго порядка»

$$\hat{\theta}[n](z) = \sum_{k \in \mathbf{Z}^g} \exp\{\langle B(k+n), k+n\rangle + \langle k+n, z\rangle\}, \tag{1.1}$$

где «характеристика» $n \in \frac{1}{2}(\mathbf{Z}_2)^g$, т. е. все координаты вектора $n = (n_1, \ldots, n_g)$ равны нулю или 1/2. Величины $\hat{\theta}[n](0)$ (зависящие от матрицы Римана B), а также значения любых производных (четного порядка) в нуле — $\hat{\theta}_{ij}[n](0)$, $\hat{\theta}_{ijkl}[n](0)$, ... называются *тэта-константами.* Условимся опускать нулевой аргумент у тэта-констант, т. е. $\hat{\theta}[n] \equiv \hat{\theta}[n](0)$, $\hat{\theta}_{ij}[n] \equiv \hat{\theta}_{ij}[n](0)$ и т. д.

ТЕОРЕМА 1. *Функция вида* (0.15) *является решением уравнения КП* (0.14), *если и только если справедлива система из* 2^g *соотношений на векторы* U, V, W, *матрицу Римана* B *и некоторую лишнюю константу* d:

$$\begin{aligned} f[n] &= f[n](U, V, W, d, B) = \\ &= \sum_{i,j,k,l} U_i U_j U_k U_l \hat{\theta}_{ijkl}[n] + \sum_{i,j} \left(\frac{3}{4} V_i V_j - U_i W_j\right) \hat{\theta}_{ij}[n] + d\hat{\theta}[n] = 0, \end{aligned} \tag{1.2}$$

где $n \in \frac{1}{2}(\mathbf{Z}_2)^g$.

Доказательство этой теоремы см. в обзоре [11] (глава 4).

Введем многообразие $\mathbf{X}_g$, точками которого являются наборы (U, V, W, d, B), где $0 \neq U, V, W \in \mathbf{C}^g$, $d \in \mathbf{C}$, $B \in \mathbf{H}_g$, профакторизованные по действию следующих групп:

$$\begin{gathered} U \mapsto \lambda U, \quad V \mapsto \pm(\lambda^2 V + 2\alpha\lambda U), \\ W \mapsto \lambda^3 W + 3\lambda^2 \alpha V + 3\lambda\alpha^2 U, \quad d \mapsto \lambda^4 d, \quad B \mapsto B \end{gathered} \tag{1.3}$$

(λ, α — произвольные параметры, $\lambda \neq 0$), и

$$\begin{gathered} U \mapsto 2\pi i M U, \quad \text{где} \quad M = (\gamma B + 2\pi i \delta)^{-1}, \\ V \mapsto 2\pi i M V, \\ W \mapsto 2\pi i M W + \pi i M U\{U, U\}, \quad \text{где} \quad \{X, Y\} = X^t M \gamma Y, \\ d \mapsto d + \frac{3}{8}\{V, V\} - \frac{1}{2}\{U, W\} - \frac{3}{4}\{U, U\}^2, \\ B \mapsto 2\pi i(\alpha B + 2\pi i \beta)(\gamma B + 2\pi i \delta)^{-1}. \end{gathered} \tag{1.4}$$

Здесь матрица $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}(g, \mathbf{Z})$ определяет преобразование из модулярной группы G_g (см. выше). Многообразие $\mathbf{X}_g$ (после надлежащей компактификации) алгебраично.

ТЕОРЕМА 2. *Система* (1.2) *выделяет в многообразии* $\mathbf{X}_g$ *алгебраическое подмногообразие* $\mathbf{Y}_g$.

Это сразу вытекает из легко проверяемой инвариантности $\mathbf{Y}_g$ относительно преобразований (1.3), (1.4). Инвариантность системы относительно преобразований (1.3) очевидна. При действии (1.4) модулярной группы система (1.2) не инвариантна (это справедливо лишь относительно некоторой подгруппы конечного индекса в G_g). Но множество нулей $\mathbf{Y}_g$ этой системы инвариантно относительно действия группы G_g. Фактически это связано с тем, что конструкция решений Кричевера не зависит от выбора канонического базиса циклов.

Выше мы ввели пространство $\mathbf{R}_g$, параметризующее римановы поверхности рода $g \geqslant 2$ — многообразие модулей римановых поверхностей. Через $\widetilde{\mathbf{R}}_g$ обозначим естественное расслоение над $\mathbf{R}_g$, слоем которого над данной точкой является соответствующая риманова поверхность. Размерность этого многообразия равна $3g-2$. Отображение периодов (0.13) очевидным образом продолжается до отображения

$$\widetilde{\mathbf{R}}_g \xrightarrow{\mathbf{B}} \mathbf{H}_g/G_g. \tag{1.5}$$

Пусть $\mathbf{B}(\widetilde{\mathbf{R}}_g)$ — график этого отображения. Согласно конструкции Кричевера (см. введение), определено вложение этого графика в многообразие $\mathbf{Y}_g$ решений основной системы (1.2). Это вложение задается следующими формулами: если Γ — риманова поверхность с каноническим базисом циклов a_i, b_j, $\omega_1, \ldots, \omega_g$ — базис дифференциалов на Γ, $P \in \Gamma$ — фиксированная точка, то B — матрица (0.12) периодов поверхности Γ,

$$U_i = -\omega_i(P)/dz, \qquad V_i = -\omega_i'(P)/dz,$$

$$W_i = -\frac{1}{2}\omega_i''(P)/dz - \frac{1}{2}c(P)U \tag{1.6}$$

(штрих обозначает производную относительно фиксированного локального параметра z в окрестности точки P), где $c(P)$ — проективная связность на Γ (см. [2]), имеющая вид

$$3c(P) = \frac{\sum \omega_i''(P)\,\theta_i(\zeta)}{\sum \omega_i(P)\,\theta_i(\zeta)} - \frac{3}{2}\left[\frac{\sum \omega_i'(P)\,\theta_i(\zeta)}{\sum \omega_i(P)\,\theta_i(\zeta)}\right]^2 + \frac{3}{2}\left[\frac{\theta_{xx}(\zeta)}{\theta_x(\zeta)}\right]^2 - 2\,\frac{\theta_{xxx}(\zeta)}{\theta_x(\zeta)} \tag{1.7}$$

$$\left(\theta_x(\zeta) = \sum U_i\theta_i(\zeta), \ldots\right);$$

здесь ζ — произвольная неособая точка тэта-дивизора, т. е. $\theta(\zeta)=0$, $\operatorname{grad}\theta(\zeta) \neq 0$; $d = d(P)$ — квартичный дифференциал на Γ, имеющий вид

$$8d(P) = -(\ln\theta(\xi))_{xxxx} - 6\left[(\ln\theta(\xi))_{xx}\right]^2 + 4(\ln\theta(\xi))_{xt} - 3(\ln\theta(\xi))_{yy} \tag{1.8}$$

(ξ — произвольный вектор). Легко проверяется корректность этого отображения (независимость от выбора базиса циклов и локального параметра z). В действительности (см. [11]), график $\mathbf{B}(\widetilde{\mathbf{R}}_g)$ содержится в открытом подмножестве $\mathbf{X}_g^0 \subset \mathbf{X}_g$, выделяемом следующим *условием невырожденности*:

$$\text{ранг } (\hat{\theta}_{ij}[n], \hat{\theta}[n]) = \frac{g(g+1)}{2} + 1. \tag{1.9}$$

(Матрица, входящая в это условие, составлена из тэта-констант и имеет размер $\left[\frac{g(g+1)}{2} + 1\right] \times 2^g$.)

Теперь мы уже можем дать точную алгеброгеометрическую формулировку основной гипотезы.

Гипотеза (С. П. Новиков). *Пересечение множества нулей* $\mathbf{Y}_g$ *системы* (1.2) *с областью* $\mathbf{X}_g^0$ *совпадает с графиком* $\mathbf{B}(\widetilde{\mathbf{R}}_g)$ *отображения периодов* (1.5).

(Нужно брать пересечение с $\mathbf{X}_g^0$, чтобы отбросить «тривиальные» решения системы (1.2), отвечающие прямым произведениям якобианов на произвольное абелево многообразие.)

Для $g=2$, 3, где уравнений на матрицу Римана еще не возникает, эта гипотеза была доказана автором в работе [10], что позволило решить задачу эффективизации формул для решений уравнений КП и уравнений, с ним связанных (доказательство см. в обзоре [11]). При $g>3$ справедливо более слабое утверждение:

ТЕОРЕМА 3. *Неприводимая компонента многообразия* $\mathbf{Y}_g$, *содержащая график* $\mathbf{B}(\widetilde{\mathbf{R}}_g)$, *совпадает с ним. Другими словами, гипотеза Новикова справедлива с точностью до, возможно, лишних компонент многообразия решений системы* (1.2).

Доказательство этой теоремы будет дано в следующем параграфе (идея доказательства опубликована в обзоре [11]).

§ 2. Доказательство основной теоремы

В силу алгебраичности всех конструкций достаточно подсчитать размерность той компоненты $\mathbf{Y}_g^0$ многообразия $\mathbf{Y}_g$ нулей системы (1.2), которая содержит график $\mathbf{B}(\widetilde{\mathbf{R}}_g)$, и доказать, что она равна $3g-2$. Покажем, что в качестве локальных координат в общей точке на $\mathbf{Y}_g^0$ можно взять переменные $U_1, \ldots, U_g, V_1, \ldots, V_g$ (определенные с точностью до преобразований $U \mapsto \lambda U$, $V \mapsto \pm(\lambda^2 V + 2\lambda\alpha U)$) и $\varepsilon_i = \exp B_{ii}$ ($i=1, \ldots, g$). Для этого нужно доказать, что ранг матрицы Якоби

$$\left(\frac{\partial f[n]}{\partial d}, \frac{\partial f[n]}{\partial W_i}, \frac{\partial f[n]}{\partial B_{ij}}\right) \tag{2.1}$$

равен $\frac{g(g+1)}{2} + 1$. Здесь $f[n]$ — левые части системы (1.2), причем в матрице (2.1) аргументы U, V, W, d, B лежат на графике $\mathbf{B}(\widetilde{\mathbf{R}}_g)$, т. е. имеют вид (1.6)—(1.8) для некоторой римановой поверхности Γ и точки на ней P. Будем деформировать эту поверхность Γ, перетягивая на ней a-циклы. При этом величины $\varepsilon_i = \exp B_{ii}$ будут стремиться к нулю (см. [2]). Предельное подмногообразие $\{\varepsilon_1 = \ldots = \varepsilon_g = 0\}$ отвечает так называемым «кривым Энриквеса», т. е. рациональным кривым с g двойными точками. Основная идея доказательства теоремы 3 заключается в том, чтобы решить систему (1.2) в окрестности подмногообразия $\{\varepsilon = 0\}$ «по теории возмущений» *. Из всей основной системы $f[n] = 0$ выберем только $\frac{g(g+1)}{2} + 1$ уравнения, отвечающие следующим характеристикам:

1) $n = 0$;

2) $n = n_{(p)} = \frac{1}{2} e_p$, где $e_p = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ — p-й базисный вектор (единица на p-м месте).

3) $n = n_{(p,q)} = \frac{1}{2}(e_p + e_q)$, $p \neq q$.

Функции $\hat\theta[n](z|B)$ становятся аналитическими (по ε) в окрестности подмногообразия $\{\varepsilon = 0\}$ после несложной перенормировки. Для перечисленных выше характеристик явный вид этих перенормированных функций при $\varepsilon \to 0$ таков:

$$\hat\theta[0](z) = 1 + 2\sum_{i=1}^{g} \varepsilon_i \operatorname{ch} z_i + \cdots;$$

$$\frac{1}{2\sqrt[4]{\varepsilon_p}} \hat\theta[n_{(p)}](z) = \operatorname{ch}\frac{z_p}{2} + \sum_{i \neq p} \varepsilon_i \left\{ \zeta_{pi} \operatorname{ch}\left(z_i + \frac{z_p}{2}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{\zeta_{pi}} \operatorname{ch}\left(z_i - \frac{z_p}{2}\right)\right\} + \cdots; \tag{2.2}$$

здесь введено обозначение $\zeta_{ij} = \exp B_{ij}$ при $i \neq j$;

$$\frac{\sqrt{\zeta_{pq}}}{2\sqrt[4]{\varepsilon_p\varepsilon_q}} \hat\theta[n_{(p,q)}](z) = \zeta_{pq} \operatorname{ch}\frac{z_p + z_q}{2} + \operatorname{ch}\frac{z_p - z_q}{2} +$$
$$+ \sum_{i \neq p,q} \varepsilon_i \left\{ \zeta_{pq}\zeta_{pi}\zeta_{qi} \operatorname{ch}\left(z_i + \frac{z_p + z_q}{2}\right) + \frac{\zeta_{pq}}{\zeta_{pi}\zeta_{qi}} \operatorname{ch}\left(z_i - \frac{z_p + z_q}{2}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{\zeta_{qi}}{\zeta_{pi}} \operatorname{ch}\left(z_i + \frac{z_q - z_p}{2}\right) + \frac{\zeta_{pi}}{\zeta_{qi}} \operatorname{ch}\left(z_i + \frac{z_p - z_q}{2}\right)\right\} + \cdots. \tag{2.3}$$

В этих формулах многоточием всюду обозначены члены более высокой степени по ε. Соответствующую перенормировку для тех же самых характеристик сделаем и для функций $f[n]$ (обозначения для этих функций менять не будем). Будем искать неизвестные d, W_i, $\zeta_{ij} = \exp B_{ij}$ в

* Для рода $g=2$ и уравнения Кортевега — де Фриза подобные вычисления по теории возмущений впервые были проделаны С. Ю. Доброхотовым — см. [12].

виде рядов по степеням $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_g$:

$$d = d^{(0)} + d^{(1)} + \cdots, \quad W_i = W_i^{(0)} + W_i^{(1)} + \ldots, \quad \zeta_{ij} = \zeta_{ij}^{(0)} + \zeta_{ij}^{(1)} + \ldots, \tag{2.4}$$

где верхний индекс $(k) = (0), (1), \ldots$ обозначает в разложении соответствующей величины компоненту k-й степени по ε («k-е приближение»). Подставляя разложения (2.2), (2.3) в соответствующие уравнения $f[n]=0$ системы (1.2) и полагая $\varepsilon_1 = \ldots = \varepsilon_g = 0$, получим уравнения для нулевого приближения. Уравнение $f[0]=0$ даст

$$d^{(0)} = 0. \tag{2.5}$$

Потребуем, далее, чтобы у вектора U все координаты были отличны от нуля. Тогда уравнение $f[n_{(p)}]=0$ вместе с (2.5) даст

$$W_p^{(0)} = \frac{1}{4} U_p^3 + \frac{3}{4} \frac{V_p^2}{U_p}. \tag{2.6}$$

Введем вместо переменных U, V новые переменные векторы X, Y, полагая

$$U_i = X_i - Y_i, \quad V_i = X_i^2 - Y_i^2 \quad (i = 1, \ldots, g). \tag{2.7}$$

Тогда формула (2.6) перепишется в виде

$$W_p^{(0)} = X_p^3 - Y_p^3. \tag{2.8}$$

Наконец, из уравнения $f[n_{(p,q)}]=0$ находим:

$$\zeta_{pq}^{(0)} = \frac{(X_p - X_q)(Y_q - Y_p)}{(X_q - Y_p)(X_p - Y_q)} \tag{2.9}$$

(предполагая величины X_i, Y_j попарно различными). Итак, в нулевом приближении система (1.2) решена. Переменные $X_1, \ldots, X_g, Y_1, \ldots, Y_g$, определенные с точностью до преобразований вида

$$\begin{gathered} X_i \mapsto \lambda X_i, \quad Y_i \mapsto \lambda Y_i, \\ X_i \mapsto X_i + \alpha, \quad Y_i \mapsto Y_i + \alpha, \end{gathered} \tag{2.10}$$

являются координатами в пересечении $\mathbf{Y}_g \cap \{\varepsilon = 0\}$. Это и означает справедливость теоремы 3 в нулевом приближении (для кривых Энриквеса).

Теперь легко вычислить матрицу Якоби (2.1) при $\varepsilon = 0$ с заменой $\frac{\partial}{\partial B_{ij}} \to \frac{\partial}{\partial \zeta_{ij}}$. Эта матрица имеет вид

$$\begin{array}{c} \\ n = 0 \\ n = n_{(p)} \\ n = n_{(p,q)} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \frac{\partial f[n]}{\partial d} & \frac{\partial f[n]}{\partial W_i} & \qquad\qquad \frac{\partial f[n]}{\partial \zeta_{ij}} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ * & -\delta_{ip} & 0 \\ * & * & \delta_{ip}\delta_{jq} U_p U_q (X_q - Y_p)(X_p - Y_q) \end{pmatrix} \end{array} \tag{2.11}$$

где звездочками обозначены несущественные для нас члены. Очевидно, ранг этой матрицы максимальный. Отсюда и из комплексно-аналитической теоремы о неявной функции мы получаем решение системы (1.2) в виде

$$U_i=X_i-Y_i, \quad V_i=X_i^2-Y_i^2, \tag{2.12}$$

$$d=d(X, Y, \varepsilon), \quad W_i=W_i(X, Y, \varepsilon), \quad \zeta_{ij}=\zeta_{ij}(X, Y, \varepsilon), \tag{2.13}$$

где (2.13) — однозначные аналитические по ε (при малых ε) функции. Коэффициенты разложений этих функций в ряд по ε могут быть найдены рекуррентно путем подстановки рядов (2.4) в систему (1.2) (с теми же характеристиками, что и выше). Очевидно, эти разложения будут инвариантны относительно преобразований (2.10). Получаем в точности $(3g-2)$-параметрическое семейство решений. Значит, оно совпадает с $\mathbf{B}(\widetilde{\mathbf{R}}_g)$, имеющим такую же размерность и неприводимым. Теорема 3 доказана.

§ 3. Заключительные замечания

1. Компонента $\mathbf{Y}_g^0$ совокупности $\mathbf{Y}_g$ решений системы (1.2), найденная в основной теореме (и совпадающая с $\mathbf{B}(\widetilde{\mathbf{R}}_g)$), может быть задана частью из уравнений системы (1.2). Достаточно взять уравнения $f[n]=0$ для таких характеристик $n^1, \ldots, n^r$ $(r=g(g+1)/2+1)$, которые являются номерами строк ненулевого минора матрицы (1.9). Например, для матриц (B_{jk}) с малыми $\varepsilon_i=\exp B_{ii}$ такими характеристиками являются $n=0$, $n=n_{(p)}$ $(p=1, \ldots, g)$, $n=n_{(p,q)}$ $(p, q=1, \ldots, g;\ p<q)$ в обозначениях предыдущего параграфа. Интересно отметить, что, исключая переменные U, V, W, d, среди которых имеется $3g-1$ независимых, из системы

$$f[n^1]=0, \ldots, f[n^r]=0 \quad \left(r=\frac{g(g+1)}{2}+1\right), \tag{3.1}$$

мы получим лишь

$$\frac{g(g+1)}{2}+1-(3g-1)=\frac{(g-1)(g-4)}{2}$$

соотношений на матрицу Римана (B_{jk}) — на единицу меньше, чем нужное число таких соотношений, равное $(g-2)(g-3)/2$. Структура многообразия $\mathbf{B}(\widetilde{\mathbf{R}}_g)=\mathbf{Y}_g^0$ объясняет вид недостающего соотношения: если (B_{jk}) — матрица периодов некоторой римановой поверхности Γ, то ее прообраз $\mathbf{B}^{-1}(B_{jk})$ — сама эта поверхность Γ, а не изолированные точки (что вытекало бы из простой совместности системы (1.2)). Поясним, как получить нужное число соотношений на тэта-константы на первом нетривиальном примере $g=4$. Пусть $n^1, \ldots, n^{11}$ — номера строк ненулевого минора матрицы (1.9):

$$\det(\hat{\theta}_{ij}[n],\ \hat{\theta}[n])\neq 0 \quad (1\leqslant i\leqslant j\leqslant 4;\quad n=n^1, \ldots, n^{11}). \tag{3.2}$$

Обозначим через

$$(a_{ij}[n],\ a[n]) \qquad (1\leqslant i\leqslant j\leqslant 4;\quad n=n^1,\ \dots,\ n^{11}) \tag{3.3}$$

обратную матрицу. Тогда из системы (1.2) при $n=n^1, \dots, n^{11}$ получим:

$$\frac{3}{4}V_p^2 - U_pW_p = -Q_{pp}(U), \quad p=1, \dots, 4, \tag{3.4}$$

$$\frac{3}{2}V_pV_q - U_pW_q - U_qW_p = -Q_{pq}(U), \quad 1\leqslant p<q\leqslant 4, \tag{3.5}$$

где многочлены $Q_{pq}(U)$ **имеют вид**

$$Q_{pq}(U) = \sum_{i,j,k,l=1}^{4} U_iU_jU_kU_l\left(\sum_{s=1}^{11} a_{pq}[n^s]\,\hat{\theta}_{ijkl}[n^s]\right). \tag{3.6}$$

Переменные W сразу исключаются. После простых преобразований получим:

$$U_pV_q - U_qV_p = \frac{2i}{\sqrt{3}}\sqrt{P_{pq}(U)} \quad (1\leqslant p<q\leqslant 4), \tag{3.7}$$

где многочлены $P_{pq}(U)$ имеют вид:

$$P_{pq}(U) = U_p^2Q_{qq}(U) - U_pU_qQ_{pq}(U) + U_q^2Q_{pp}(U). \tag{3.8}$$

Условия совместности системы (3.7) имеют вид:

$$\begin{gathered} U_2\sqrt{P_{13}(U)} - U_3\sqrt{P_{12}(U)} - U_1\sqrt{P_{23}(U)} = 0, \\ U_2\sqrt{P_{14}(U)} - U_4\sqrt{P_{12}(U)} - U_1\sqrt{P_{24}(U)} = 0, \\ U_3\sqrt{P_{14}(U)} - U_4\sqrt{P_{13}(U)} - U_1\sqrt{P_{34}(U)} = 0. \end{gathered} \tag{3.9}$$

Вектор $U=(U_1, U_2, U_3, U_4)$ можно нормировать так, чтобы $U_1=1$. Находя из первых двух уравнений системы (3.9) неизвестные U_2, U_3 и подставляя их в третье уравнение, получим некоторое соотношение

$$P(U_4)=0,$$

где $P(U_4)$ — многочлен. Приравнивая нулю любой из его коэффициентов, получим искомое соотношение на тэта-константы. Очевидно, точно так же получается нужное число соотношений и в общем случае $g>4$.

2. Указанная в доказательстве основной теоремы процедура построения решений системы (1.2) для компоненты $\mathbf{Y}_g^0$ в виде функций от координат $\{X, Y, \varepsilon\}$ проходит и на подмногообразиях в $\mathbf{B}(\tilde{\mathbf{R}}_g)$, отвечающих гиперэллиптическим или тригональным (трехлистным накрытиям над $\mathbf{C}P^1$) римановым поверхностям. При этом для гиперэллиптических поверхностей координаты X и Y должны быть связаны соотношениями

$$X_i+Y_i=0 \quad (i=1, \dots, g), \tag{3.10}$$

$\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_g$ произвольны. Действительно, в силу формул (1.6) вектор $(V_i)=(X_i^2-Y_i^2)$ обращается в нуль в $2g+2$ точках Вейерштрасса гиперэллиптической поверхности рода g. Поэтому наложение соотношений (3.10) вырезает в многообразии $\mathbf{Y}_g^0$ $(2g+2)$-листное накрытие совокупности всех гиперэллиптических кривых. Формулы (2.13) тогда дадут явные выражения для матриц периодов гиперэллиптических кривых. Аналогично, совокупность периодов тригональных кривых выделяется в $\mathbf{Y}_g^0$ соотношениями

$$W_i(X, Y, \varepsilon)=X_i-Y_i, \quad i=1, \ldots, g. \tag{3.11}$$

3. Как уже было указано в первом замечании, если (B_{jk}) — матрица периодов некоторой римановой поверхности Г, то решения соответствующей системы (1.2), лежащие в $\mathbf{Y}_g^0$, дают саму риманову поверхность Г. Причем в силу предыдущего замечания это справедливо и для гиперэллиптического и для тригонального случаев. Сопоставление с теоремой Нётера—Энриквеса о канонических кривых (см. [1], а также главу 4 обзора [11]) позволяет сделать следующее

Утверждение. *Если (B_{jk}) — матрица периодов общей негиперэллиптической римановой поверхности* Г, *то проекция решений соответствующей системы* (1.2) *в пространство* $\mathbf{C}P_U^{g-1}$ *с однородными координатами* $(U_1\colon \ldots \colon U_g)$ *есть образ канонического вложения кривой* Г.

Таким образом, если (B_{jk}) — матрица периодов Г, то, исключая из системы (1.2) переменные V, W, d, мы получим канонические уравнения поверхности Г. Для гиперэллиптического случая достаточно исключить только переменные W и d.

4. В настоящее время известно большое число важных нелинейных уравнений, проинтегрированных в тэта-функциях (см. [8], [9], а также обзор [11]). Метод, развитый автором в работах [10], [11], позволяет выводить из этих нелинейных уравнений ряд полезных соотношений для тэта-функций *. Укажем здесь один простой пример — двумеризованная цепочка Тода, проинтегрированная в тэта-функциях И. М. Кричевером (см. приложение к обзору [11]). Уравнения здесь дифференциально-разностные:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial v_n}{\partial y} &= c_{n+1}-c_n,\\ \frac{\partial c_n}{\partial x} &= c_n(v_n-v_{n-1}) \end{aligned}\right\} \quad (n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \tag{3.12}$$

Решения этой системы параметризуются произвольной римановой поверхностью Г и парой ее точек P^+ и P^- и имеют вид (вектор z_0 произволен):

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{\theta(xU^+ + yU^- + (n+1)\Delta + z_0)\,\theta(xU^+ + yU^- + (n-1)\Delta + z_0)}{\varepsilon^2\theta^2(xU^+ + yU^- + n\Delta + z_0)},\\ v_n &= \frac{\partial}{\partial x}\ln\frac{\theta(xU^+ + yU^- + (n+1)\Delta + z_0)}{\theta(xU^+ + yU^- + n\Delta + z_0)}. \end{aligned} \tag{3.13}$$

* Вне связи с нелинейными уравнениями некоторые из этих тождеств появлялись и раньше — см. [2]. Так, например, следствие 2.12 из [2] легко сопоставляется с уравнением КП; тождество (39) — с цепочкой Тода.

Здесь $\Delta=(\Delta_1, \ldots, \Delta_g)$, $U^{\pm}=(U_1^{\pm}, \ldots, U_g^{\pm})$, причем

$$\Delta_i = \int_{P-}^{P+} \omega_i, \quad U_i^{\pm} = -\frac{\omega_i(P^{\pm})}{dz_{\pm}}, \tag{3.14}$$

где $\omega_1, \ldots, \omega_g$ — базис голоморфных дифференциалов на Γ с нормировкой (0.11), $z_{\pm}$ — локальные параметры в окрестностях точек P^+, P^-, ε^2 — константа, зависящая от точек P^+, P^-. Подстановка этих формул в систему (3.12) после несложных преобразований дает:

$$\frac{\theta(z_0+\Delta)\,\theta(z_0-\Delta)}{\varepsilon^2\theta^2(z_0)} = a + \sum_{i,j=1}^{g} U_i^+U_j^-(\ln\theta)_{ij}(z_0) \tag{3.15}$$

(a — новая константа). Применение теоремы сложения (см. [11]) даст следующую систему соотношений, эквивалентную (3.15):

$$\frac{1}{\varepsilon^2}\hat{\theta}[n](2\Delta) = a\hat{\theta}[n] + 2\sum_{i,j} U_i^+U_j^-\hat{\theta}_{ij}[n], \tag{3.16}$$

где $n\in\frac{1}{2}(\mathbf{Z}_2)^g$. Эта система уже трансцендентна относительно величины Δ. От трансцендентности можно легко избавиться следующим образом. Рассмотрим g-мерное подмногообразие $K^g(B)$ в пространстве $\mathbf{C}P^N (N=2^g-1)$ с однородными координатами $\lambda[n]$, $n\in\frac{1}{2}(\mathbf{Z}_2)^g$, имеющее параметрическое представление

$$\lambda[n] = \hat{\theta}[n](2\Delta), \tag{3.17}$$

где $\Delta\in\mathbf{C}^g$ — произвольный вектор, $n\in\frac{1}{2}(\mathbf{Z}_2)^g$. Это — многообразие Куммера; коэффициенты его уравнений в $\mathbf{C}P^N$ могут быть выражены через тэта-константы (см. [7]). Пусть

$$g_k(\lambda[n])=0, \quad k=1, \ldots, N-g, \tag{3.18}$$

— эти уравнения. Тогда из системы (3.16) вытекает:

$$g_k\left(a\hat{\theta}[n] + 2\sum_{i,j} U_i^+U_j^-\hat{\theta}_{ij}[n]\right) = 0, \tag{3.19}$$

т. е. совокупность векторов вида

$$\lambda[n] = a\hat{\theta}[n] + \sum_{i,j} U_i^+U_j^-\hat{\theta}_{ij}[n] \tag{3.20}$$

имеет непустое пересечение с поверхностью $K^g(B)$. Исключая из (3.20) величины a и U^+, U^-, можно получить искомые соотношения на тэта-константы. Интересно отметить аналогию между полученными соотношениями и соотношениями Андреотти—Майера [7], которые имеют вид: совокупность векторов $\lambda[n]$ в $\mathbf{C}P^N$, удовлетворяющих уравнениям

$$\begin{gathered}\sum_n \lambda[n]\hat{\theta}[n] = 0, \\ \sum_n \lambda[n]\hat{\theta}_{ij}[n] = 0, \quad i, j = 1, \ldots, g,\end{gathered} \tag{3.21}$$

имеет непустое пересечение с многообразием Куммера.

В заключение автор считает своим приятным долгом поблагодарить А. Н. Тюрина за ряд полезных обсуждений.

Литература

1. *Griffiths P., Harris J.* Principles of algebraic geometry.— Wiley Intersci. Publ., 1978.
2. *Fay J.* Theta-functions on Riemann surfaces.— Lect. notes in math., 1973, № 352, Springer.
3. *Schottky F.* Zur Theorie der Abel'schen Funktionen von vier Variabeln.— J. Reine Angew. Math., 1888, B. 102, s. 304—352.
4. *Schottky F.* Über die Moduln der Thetafunktionen.— Acta Math., 1903, B. 27, s. 235—288.
5. *Schottky F., Jung H.* Neue Sätze über Symmetralfunktionen und die Abel'schen Funktionen der Riemann'schen Theorie.— Preuss. Akad. Wiss. (Berlin), Phys. Math. Kl., 1909, B. 1, s. 282—297.
6. *Farkas H. M., Rauch H. E.* Period relations of Schottky type on Riemann surfaces.— Ann. Math., 1970, v. 92, № 3, p. 434—461.
7. *Andreotti A., Mayer A. L.* On period relations for abelian integrals on algebraic curves.— Ann. Scuola Norm. Super. Pisa, Ser. 3, 1967, v. 21, № 2, p. 189—238.
8. Теория солитонов. Под ред. С. П. Новикова. М.: Наука, 1980.
9. *Кричевер И. М.* Интегрирование нелинейных уравнений методами алгебраической геометрии.— Функц. анализ, 1977, т. 11, вып. 2, с. 15—32.
10. *Дубровин Б. А.* О гипотезе С. П. Новикова в теории тэта-функций и нелинейных уравнений типа Кортевега — де Фриза и Кадомцева — Петвиашвили.— Докл. АН СССР, 1980, т. 251, № 3, с. 541—544.
11. *Дубровин Б. А.* Тэта-функции и нелинейные уравнения.— Успехи матем. наук, 1981, т. 36, № 2, с. 11—80.
12. *Доброхотов С. Ю., Маслов В. П.* Конечнозонные почти периодические решения в ВКБ-приближениях.— В сб. Современные проблемы математики, 1980, т. 15, с. 3—94.
13. *Beauville A.* Prym varieties and the Schottky problem.— Invent. Math., 1977, v. 41, № 2, p. 149—196.
14. *Satake I.* On the compactification of the Siegel space.— J. Indian Math. Soc., 1956, v. 20, p. 259—281.
15. *Baily W. L.* On the theory of θ-functions, the moduli of abelian varieties and the module of curves.— Ann. of Math., 1962, v. 75, № 2, p. 342—381.

Поступила в редакцию
13.IV.1981