

SISSA - Università di Trieste
Corso di Laurea Specialistica in Matematica
A. A. 2004/2005
Appunti sulla Teoria delle Funzioni

Boris DUBROVIN

March 16, 2005

Contents

1	Introduzione	3
1.1	Numeri complessi, piano complesso	3
1.2	Convergenza delle successioni	6
1.3	Funzioni di una variabile complessa	7
2	Funzioni olomorfe	8
2.1	La derivata complessa. Le equazioni di Cauchy - Riemann	8
2.2	Serie di potenze come funzioni olomorfe	13
2.3	Esempi di serie di potenze	17
3	Teorema di Cauchy. Integrale di Cauchy	18
3.1	Integrali curvilinei	18
3.2	Teorema di Cauchy	22
3.3	Grado di un circuito rispetto un punto	25
3.4	Formula integrale di Cauchy	26
3.5	Sviluppo di una funzione olomorfa in serie di potenze	27
3.6	Teorema di Cauchy: versione finale	28
3.7	Principio del prolungamento analitico	28
3.8	Zeri delle funzioni olomorfe	29
3.9	Funzioni meromorfe	30
3.10	Teorema di Morera	31
3.11	Principio di simmetria di Schwarz	32

4	Serie di Taylor e serie di Laurent. Punti singolari e residui	32
4.1	Disuguaglianze di Cauchy per i coefficienti di serie di Taylor	32
4.2	Teorema di Liouville	33
4.3	Teorema del valor medio. Principio del massimo modulo	34
4.4	Lemma di Schwarz	35
4.5	Serie di Laurent	36
4.6	Classificazione dei punti singolari isolati	39
4.7	Residui	42
4.8	Residuo logaritmico	44
5	Varietà complesse	45
5.1	Definizione di una varietà complessa unidimensionale. Funzioni olomorfe su varietà complesse. Mappe olomorfe e equivalenze biolomorfe	45
5.2	La sfera di Riemann	47
5.3	Tori complessi e funzioni ellittiche	49
5.4	Forme olomorfe e meromorfe sulle varietà complesse. Teorema dei residui	54
5.5	Problema di classificazione	57
5.6	Gruppi di automorfismi delle varietà complesse	60
5.7	Geometria complessa e geometria differenziale	63
5.8	Superficie di Riemann	65
5.9	Curve algebriche e superficie di Riemann	67
5.10	Piccolo Teorema di Picard	81
5.11	Teorema di Riemann. Parte 1: la proprietà estrema delle mappe conformi	85
6	Spazi di funzioni olomorfe	88
6.1	Convergenza uniforme sui compatti	88
6.2	La topologia e la metrica negli spazi $\mathcal{C}(D)$ e $\mathcal{H}(D)$	90
6.3	I compatti nello spazio $\mathcal{H}(D)$	92
6.4	Fine della dimostrazione del Teorema di Riemann	95
7	Esercizi	95
7.1	Introduzione	95
7.2	Successioni e serie di numeri complessi	98
7.3	Funzioni elementari di una variabile complessa	99
7.4	Serie di potenze	101
7.5	Varie formule della teoria di funzioni olomorfe	103

7.6	Integrali curvilinei. Teorema di Cauchy	103
7.7	Formula integrale di Cauchy	105
7.8	Prolungamento analitico	106
7.9	Principio del massimo modulo. Lemma di Schwarz	108
7.10	Punti singolari isolati	109
7.11	Applicazioni al calcolo degli integrali	109
7.12	Funzioni ellittiche	111
7.13	Mappe conformi	112
8	Bibliografia	114

1 Introduzione

1.1 Numeri complessi, piano complesso

Si consideri l'insieme

$$\mathbb{C} := \{z := (a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}^2\} (= \mathbb{R}^2)$$

con le operazioni

$$\begin{aligned} (a, b) + (c, d) &= (a + c, b + d) \\ (a, b) (c, d) &= (ac - bd, ad + bc) \end{aligned}$$

Lemma 1.1 *Queste operazioni definiscono su \mathbb{C} una struttura di un campo.*

Divisione:

$$z = (a, b) \neq 0, \quad z^{-1} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, -\frac{b}{a^2 + b^2} \right), \quad z z^{-1} = 1.$$

(**Digressione:** per quali n si può introdurre su \mathbb{R}^n una struttura di un'algebra *con divisione*? Risposta: solo per $n = 1, 2, 4, 8$ (rispettivamente i casi dei numeri reali \mathbb{R} , complessi \mathbb{C} , quaternioni \mathbb{H} e ottonioni \mathbb{O})! Questo è il famoso teorema di J.Adams (1962) dimostrato con metodi di topologia algebrica.)

Usuale forma dei numeri complessi:

$$z = a + ib, \quad i^2 = -1.$$

Altre notazioni:

La parte reale

$$a = \operatorname{Re} z$$

e la parte immaginaria

$$b = \operatorname{Im} z.$$

Due numeri complessi z e w sono uguali se e solo se

$$\operatorname{Re} z = \operatorname{Re} w \quad \text{e} \quad \operatorname{Im} z = \operatorname{Im} w.$$

Numero complesso coniugato

$$\bar{z} = a - ib.$$

Esercizio 1.2 Quali sono i numeri complessi z che soddisfano l'equazione

$$\bar{z} = z?$$

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}, \quad z \neq 0.$$

Alcune proprietà

$$\overline{z \pm w} = \bar{z} \pm \bar{w}, \quad \overline{z w} = \bar{z} \bar{w}$$

$$\operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad \operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

Piano complesso $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, **il modulo e l'argomento** di un numero complesso $z = x + iy \neq 0$, sono, rispettivamente

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z \bar{z}}$$

e

$$\arg z = \phi \pmod{2\pi}, \text{ tale che } \cos \phi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin \phi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Lemma 1.3 (Esercizio).

$$||z| - |w|| \leq |z + w| \leq |z| + |w|.$$

Semplici esempi:

- la mappa $z \mapsto \bar{z}$ è una simmetria (riflessione) rispetto all'asse x .
- l'insieme $|z - z_0| = R$ è il cerchio del raggio R con centro nel punto z_0 .
- l'insieme $|\arg z - \theta| < \epsilon$ è il settore circolare di apertura 2ϵ . La bisettrice del settore forma l'angolo θ con la direzione positiva dell'asse x .

Lemma 1.4

$$|z w| = |z| |w|$$

$$\arg z w = \arg z + \arg w \pmod{2\pi}.$$

Dimostrazione: Rappresento

$$z = x + iy = \sqrt{x^2 + y^2} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + i \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) = |z|(\cos \phi + i \sin \phi), \quad \phi = \arg z.$$

Allora

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= |z_1| |z_2| (\cos \phi_1 + i \sin \phi_1) (\cos \phi_2 + i \sin \phi_2) \\ &= |z_1| |z_2| [\cos \phi_1 \cos \phi_2 - \sin \phi_1 \sin \phi_2 + i (\sin \phi_1 \cos \phi_2 + \cos \phi_1 \sin \phi_2)] \\ &= |z_1| |z_2| [\cos(\phi_1 + \phi_2) + i \sin(\phi_1 + \phi_2)] \end{aligned}$$

(ho usato le formule di addizione per il seno e il coseno). □

Corollario 1.5 *La mappa $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$*

$$z \mapsto \lambda z, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad \lambda \neq 0$$

è una rotazione di angolo $\arg \lambda$ seguita da un'omotetia con coefficiente $|\lambda|$.

Esercizio 1.6 *Dimostrare che la matrice, rispetto a una qualsiasi base ortonormale, della trasformazione lineare*

$$\mathbf{A} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

composta da una rotazione attorno all'origine ed un'omotetia con il centro nell'origine stessa è

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Dimostrare che tale trasformazione può essere rappresentata come

$$\mathbf{A} z = \lambda z, \quad z \in \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$$

per un numero opportuno $\lambda \in \mathbb{C}$.

Le formule di Eulero: per $\phi \in \mathbb{R}$ definiamo

$$e^{i\phi} := \cos \phi + i \sin \phi. \tag{1.1}$$

La proprietà principale è:

$$e^{i\phi_1} e^{i\phi_2} = e^{i(\phi_1 + \phi_2)}$$

(vedi sopra). Allora, se $\phi = \arg z$, $r = |z|$ otteniamo **la forma trigonometrica**

$$z = r e^{i\phi}. \tag{1.2}$$

Osservazione 1.7

$$\bar{z} = r e^{-i\phi} \quad (\arg \bar{z} = -\arg z).$$

Da ciò si ricavano le formule di Eulero

$$\begin{aligned} \cos \phi &= \frac{1}{2} (e^{i\phi} + e^{-i\phi}) \\ \sin \phi &= \frac{1}{2i} (e^{i\phi} - e^{-i\phi}). \end{aligned} \tag{1.3}$$

1.2 Convergenza delle successioni

su \mathbb{C} viene definita allo stesso modo che per i punti sul piano \mathbb{R}^2 , cioè per

$$z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = w \quad \text{se e solo se} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |z_n - w| = 0.$$

Criterio di Cauchy: $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} z_n$ se e solo se

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists n_0 = n_0(\epsilon)$$

tale che

$$\forall n > n_0 \text{ e } m > n_0 \quad |z_n - z_m| < \epsilon.$$

Esercizio 1.8 Se $w = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n$, allora $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = |w|$. È sempre vero che anche $\lim_{n \rightarrow \infty} \arg z_n = \arg w$?

La convergenza di una **serie**

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z_1 + z_2 + \dots + z_n + \dots$$

significa la convergenza della successione

$$w_n = z_1 + z_2 + \dots + z_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

Lemma 1.9 Se la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ converge, allora converge anche la serie $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ e

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} z_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |z_n|.$$

Dimostrazione: Per $m < n$

$$|w_n - w_m| = \left| \sum_{k=m+1}^n z_k \right| \leq \sum_{k=m+1}^n |z_k| = s_n - s_m$$

dove

$$s_n = \sum_{k=1}^n |z_k|.$$

L'applicazione del criterio di Cauchy alla serie convergente $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ implica la validità della condizione del criterio di Cauchy per $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$. Poi,

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} z_n \right| = \left| \lim_{m \rightarrow \infty} w_m \right| = \lim_{m \rightarrow \infty} |w_m| \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^m |z_n| = \sum_{n=1}^{\infty} |z_n|.$$

□

Definizione 1.10 Se la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ converge, allora si dice che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ **converge assolutamente**.

Esercizio 1.11 Se $w^{(1)} = \sum_{n=1}^{\infty} z_n^{(1)}$, $w^{(2)} = \sum_{n=1}^{\infty} z_n^{(2)}$ sono due serie che convergono assolutamente, allora anche le serie $\sum_{n=1}^{\infty} (c_1 z_n^{(1)} + c_2 z_n^{(2)})$ e $\sum_{m,n=1}^{\infty} z_n^{(1)} z_m^{(2)}$ convergono assolutamente e

$$\sum_{n=1}^{\infty} (c_1 z_n^{(1)} + c_2 z_n^{(2)}) = c_1 w^{(1)} + c_2 w^{(2)}$$

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} z_n^{(1)} z_m^{(2)} = w^{(1)} w^{(2)}.$$

1.3 Funzioni di una variabile complessa

Consideriamo funzioni definite sui sottoinsiemi $D \subset \mathbb{C}$

$$f : D \rightarrow \mathbb{C}$$

a valori complessi, scritte anche come

$$w = f(z), \quad z \in D, \quad w \in f(D) \subset \mathbb{C}.$$

I limiti e la continuità delle funzioni di una variabile complessa si definiscono come nella teoria delle funzioni su \mathbb{R}^2 . In particolare se $c \in \mathbb{C}$ è un punto di accumulazione del sottoinsieme D , si dice che $\lim_{z \rightarrow c} = \gamma$ se

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$$

tale che

$$\forall z \text{ tale che } 0 < |z - c| < \delta \text{ abbiamo } |f(z) - \gamma| < \epsilon.$$

Chiamo

$$z = x + iy, \quad f(z) = u(x, y) + iv(x, y).$$

Se $c = a + ib$, $\gamma = \alpha + i\beta$, allora

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} u(x, y) = \alpha, \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} v(x, y) = \beta.$$

Esercizio 1.12 Formulare il criterio di Cauchy per l'esistenza del limite di una funzione di una variabile complessa.

Se il punto di accumulazione $c = a + ib$ appartiene a D , e $\lim_{z \rightarrow c} f(z) = f(c)$, allora la funzione $f(z)$ si chiama **continua** nel punto c .

Esercizio 1.13 La funzione $f(z)$ è continua nel punto di accumulazione $c \in D$ se e solo se la parte reale $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$ e quella immaginaria $v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$ sono continue nel punto (a, b) .

Esercizio 1.14 Dimostrare le note proprietà delle funzioni continue nel punto $c \in D$: una combinazione lineare $c_1f(z) + c_2g(z)$ di due funzioni continue, il loro prodotto $f(z)g(z)$ è di nuovo una funzione continua. Il rapporto $f(z)/g(z)$ è una funzione continua nel punto c se $g(c) \neq 0$.

Esempi di funzioni continue:

1) $f(z) = z$.

2) $f(z) = \bar{z}$.

Più generalmente, $f(z) = \sum_{k=0}^m \sum_{l=0}^n a_{kl} z^k \bar{z}^l$.

Osservazione 1.15 Le funzioni continue su un'insieme $D \subset \mathbb{C}$ chiuso e limitato (cioè, su un insieme **compatto**) sono **uniformemente continue**:

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$$

tale che

$$\forall z, w \in D, \quad |z - w| < \delta \text{ implica } |f(z) - f(w)| < \epsilon.$$

Inoltre, le funzioni continue su un compatto raggiungono il valore massimale/minimale, i.e., esistono punti $z_1 \in D, z_2 \in D$ tali che

$$\forall z \in D \quad |f(z_1)| \leq |f(z)| \leq |f(z_2)|.$$

2 Funzioni olomorfe

2.1 La derivata complessa. Le equazioni di Cauchy - Riemann

Sia $D \subset \mathbb{C}$ un **dominio**, cioè, un aperto connesso e $f(z)$ una funzione di una variabile complessa definita su D .

Definizione 2.1 Si dice che per la funzione $f(z)$ esiste la **derivata complessa** $f'(z)$ nel punto $z \in D$ se e solo se esiste il limite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} =: f'(z). \tag{2.1}$$

Esempio 1. Per la funzione $f(z) = z$ esiste la derivata complessa $f'(0) = 1$ nel punto $z = 0$. Infatti,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = 1.$$

Esempio 2. La funzione $f(z) = \bar{z}$ non ammette la derivata complessa nel punto $z = 0$ (e neanche in nessun altro punto). Infatti, calcolando il limite (2.1) lungo l'asse reale $h \in \mathbb{R}$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\bar{h}}{h} = 1$$

(dato che $\bar{h} = h$ per $h \in \mathbb{R}$). Calcolando lo stesso limite per $h \in i\mathbb{R}$ ottengo il valore diverso

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\bar{h}}{h} = -1$$

(dato che $\bar{h} = -h$ per $h \in i\mathbb{R}$).

Definizione 2.2 Una funzione $f(z)$ definita sul dominio $D \subset \mathbb{C}$ si chiama **olomorfa** su D se per ogni punto $z \in D$ esiste la derivata complessa $f'(z)$.

Teorema 2.3 La funzione olomorfa $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ su $D \subset \mathbb{C}$ è differenziabile in ogni punto $z \in D$. Le derivate parziali delle funzioni $u = u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$, $v = v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$ soddisfano le **equazioni di Cauchy - Riemann**

$$\begin{aligned} u_x &= v_y \\ u_y &= -v_x. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Viceversa, se $u(x, y)$, $v(x, y)$ sono due funzioni differenziabili su $D \subset \mathbb{R}^2$ a valori reali che soddisfano le equazioni di Cauchy - Riemann, allora $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ è una funzione olomorfa.

Dimostrazione: Dalla definizione della derivata complessa si ottiene

$$f(z+h) - f(z) = f'(z)h + o(|h|).$$

In questa equazione, e anche in seguito, il simbolo $o(|h|)$ significa una funzione non specificata tale che

$$\frac{o(|h|)}{|h|} \rightarrow 0 \quad \text{per} \quad |h| \rightarrow 0.$$

Chiamo $z = x + iy$, $h = \Delta x + i \Delta y$, $f'(z) = \alpha + i\beta$. Separando le parti reale ed immaginaria riscrivo l'ultima formula come

$$\begin{aligned} f(z+h) - f(z) &= [u(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y)] + i [v(x + \Delta x, y + \Delta y) - v(x, y)] \\ &= (\alpha + i\beta)(\Delta x + i \Delta y) + o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}). \end{aligned}$$

Raccolgo le parti reale e immaginaria:

$$\begin{aligned} u(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y) &= \alpha \Delta x - \beta \Delta y + o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}) \\ v(x + \Delta x, y + \Delta y) - v(x, y) &= \beta \Delta x + \alpha \Delta y + o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}). \end{aligned}$$

Quindi la mappa

$$(x, y) \mapsto (u(x, y), v(x, y)) \tag{2.3}$$

è differenziabile, ovvero il **differenziale** della mappa si scrive così:

$$\begin{aligned} du &= \alpha dx - \beta dy \\ dv &= \beta dx + \alpha dy. \end{aligned}$$

Il confronto con le solite formule

$$\begin{aligned} du &= u_x dx + u_y dy \\ dv &= v_x dx + v_y dy \end{aligned}$$

mostra che

$$\begin{aligned} u_x(x, y) &= \alpha = \operatorname{Re} f'(z) \\ u_y(x, y) &= -\beta = -\operatorname{Im} f'(z) \\ v_x(x, y) &= \beta = \operatorname{Im} f'(z) \\ v_y(x, y) &= \alpha = \operatorname{Re} f'(z). \end{aligned}$$

Viceversa, per una mappa differenziabile f le equazioni di Cauchy - Riemann implicano che

$$\begin{aligned} f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) &= [u_x \Delta x + u_y \Delta y] + i [v_x \Delta x + v_y \Delta y] + o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}) \\ &= [u_x \Delta x - v_x \Delta y] + i [v_x \Delta x + u_x \Delta y] + o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}) \\ &= (u_x + i v_x)(\Delta x + i \Delta y) + o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}). \end{aligned}$$

Allora

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta x + i \Delta y} = u_x + i v_x = f'(z), \quad z = x + iy, \quad h = \Delta x + i \Delta y.$$

□

Osservazione 2.4 Come è noto dal corso di analisi, il differenziale di una mappa

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \mapsto (u(x, y), v(x, y))$$

è la mappa lineare che approssima f vicino al punto (x, y) in considerazione. La matrice della mappa lineare è la matrice di Jacobi calcolata nel punto stesso

$$J = \begin{pmatrix} u_x(x, y) & u_y(x, y) \\ v_x(x, y) & v_y(x, y) \end{pmatrix}.$$

Le equazioni di Cauchy - Riemann dicono che, per una mappa che ammette la derivata complessa $f'(z) \neq 0$, questa matrice ha la forma

$$J = \begin{pmatrix} u_x & -v_x \\ v_x & u_x \end{pmatrix}$$

ovvero è la matrice di una rotazione seguita da un'omotetia (cf. Esercizio 1.6). Quindi intorno al punto z la funzione olomorfa può essere approssimata da una **rotazione** di angolo $\arg f'(z)$ seguita da un'omotetia con coefficiente $|f'(z)|$.

Notazioni alternative: introduco gli operatori

$$\frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right). \quad (2.4)$$

Per qualsiasi funzione differenziabile $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ è valida la seguente identità

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \quad (2.5)$$

$$dz := dx + i dy, \quad d\bar{z} := dx - i dy.$$

Lemma 2.5 (Esercizio.) *Dimostrare che le equazioni di Cauchy - Riemann possano essere scritte nella forma*

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0. \quad (2.6)$$

Possiamo interpretare le formule introdotte per dz , $d\bar{z}$ e $\partial/\partial z$, $\partial/\partial \bar{z}$ come il risultato di un cambio delle variabili indipendenti

$$(x, y) \leftrightarrow (z, \bar{z})$$

$$z = x + iy$$

$$\bar{z} = x - iy$$

e vice versa

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2}$$

$$y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

Le equazioni di Cauchy - Riemann scritte nella forma (2.6) possono essere interpretate come l'**indipendenza** della funzione $f(z)$ **dalla variabile** \bar{z} .

Esercizio 2.6 *Mostrare che qualsiasi polinomio*

$$P(z, \bar{z}) = \sum_{k=0}^m \sum_{l=0}^n c_{kl} z^k \bar{z}^l$$

a coefficienti complessi c_{kl} è una mappa differenziabile. Dimostrare che questa funzione è olomorfa su \mathbb{C} se e solo se

$$c_{kl} = 0 \quad \text{per} \quad l > 0.$$

Calcolare la derivata complessa del polinomio

$$p(z) = \sum_{k=0}^m a_k z^k.$$

Lemma 2.7 (Esercizio.) *Date due funzioni $f(z)$, $g(z)$ olomorfe su un dominio $D \subset \mathbb{C}$, dimostrare che la combinazione lineare*

$$a f(z) + b g(z), \quad a, b \in \mathbb{C}$$

e anche il prodotto $f(z)g(z)$ sono funzioni oloedorfe su D . Il rapporto $f(z)/g(z)$ di due funzioni oloedorfe è una funzione oloedorfa se $g(z) \neq 0 \forall z \in D$. Le derivate complesse della combinazione lineare, prodotto e rapporto di due funzioni oloedorfe sono date dalle seguenti formule

$$(a f(z) + b g(z))' = a f'(z) + b g'(z)$$

$$(f(z)g(z))' = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$$

$$\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right)' = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g^2(z)}.$$

Osservazione 2.8 In particolare, il risultato di questo Lemma assieme con quello dell'Esercizio 2.6 mostra che le funzioni razionali

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$$

rappresentate come i rapporti di due polinomi $p(z)$, $q(z)$ sono funzioni oloedorfe sul dominio

$$D = \{z \in \mathbb{C} \mid q(z) \neq 0\}.$$

Più avanti verrà dimostrato che l'insieme degli zeri di un qualsiasi polinomio $q(z)$ è sempre finito.

Lemma 2.9 (Esercizio.) Date due funzioni oloedorfe sui domini $U, V \subset \mathbb{C}$

$$f : U \rightarrow \mathbb{C}, \quad g : V \rightarrow \mathbb{C}$$

tali che

$$f(U) \subset V,$$

allora la composizione $g(f(z))$ è una funzione oloedorfa su U e

$$\frac{d}{dz}g(f(z)) = g'(f(z))f'(z).$$

Lemma 2.10 (Esercizio). Data una funzione oloedorfa $w = f(z)$ sul dominio D tale che $f'(z_0) \neq 0$ per $z_0 \in D$. Allora esiste un disco

$$U := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < \rho\} \subset D$$

sufficientemente piccolo tale che la mappa

$$f : U \rightarrow V = f(U)$$

è una corrispondenza biunivoca tra U e il dominio V . Inoltre la mappa inversa $z = f^{-1}(w)$,

$$f^{-1} : V \rightarrow U$$

è una funzione oloedorfa sul dominio V , e la derivata complessa è data dalla seguente formula

$$\frac{d}{dw}f^{-1}(w) = \frac{1}{f'(z)}.$$

Lemma 2.11 (Esecizio) Dato un polinomio $F(z, w)$ in due variabili e un punto $(z_0, w_0) \in \mathbb{C}$ tale che

$$F(z_0, w_0) = 0, \quad F_w(z_0, w_0) \neq 0,$$

allora esiste ed è unica una funzione $w = w(z)$ olomorfa per $|z - z_0| < \epsilon$ per un certo numero positivo ϵ sufficientemente piccolo tale che

$$F(z, w(z)) \equiv 0 \quad \text{per} \quad |z - z_0| < \epsilon, \quad w(z_0) = w_0.$$

2.2 Serie di potenze come funzioni olomorfe

In questa Sezione sono considerate successioni e serie di funzioni definite su un dominio

$$D \subset \mathbb{C}.$$

Ricordiamo che la successione

$$f_1(z), f_2(z) \dots f_n(z), \dots \quad z \in D$$

converge uniformemente al suo limite $f(z)$ se per ogni $\epsilon > 0$ esiste un numero naturale $n_0 = n_0(\epsilon)$ tale che per ogni $z \in D$ ed ogni $n > n_0$

$$|f_n(z) - f(z)| < \epsilon.$$

La convergenza uniforme di serie di funzioni viene definita in modo simile. In particolare, il seguente **teorema di Weierstrass** sarà molto usato nel corso.

Teorema 2.12 Data una serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(z) \tag{2.7}$$

definite su $z \in D$, supponiamo che soddisfino

$$\forall z \in D \quad |u_n(z)| \leq A_n, \quad \forall n \geq 1$$

e la serie dei numeri

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n$$

converga. Allora la serie (2.7) converge uniformemente e assolutamente su D e

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} u_n(z) \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} A_n.$$

Si consideri il caso delle **serie di potenze**

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n = c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \dots + c_n(z - z_0)^n + \dots$$

Il numero complesso z_0 si chiama *il centro* della serie di potenze. Più specificatamente considero le serie di potenze con centro $z_0 = 0$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n; \quad (2.8)$$

il caso generale si ottiene applicando lo shift $z \mapsto z - z_0$.

Data una serie di potenze, introduco il **raggio di convergenza** R ,

$$0 \leq R \leq +\infty$$

dove

$$R := \frac{1}{\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |c_n|^{1/n}} \quad (2.9)$$

(se il valore del limite al denominatore è infinito, allora pongo $R = 0$; il caso $R = +\infty$ corrisponde a $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |c_n|^{1/n} = 0$). La formula (2.9) per il raggio di convergenza della serie (2.8) si chiama formula di **Cauchy - Hadamard**.

Teorema 2.13 *Supponiamo che $R > 0$.*

1) *La serie (2.8) converge assolutamente per $|z| < R$ e, se $R < +\infty$, diverge per $|z| > R$.*

2) *Qualunque sia il numero positivo r , tale che*

$$0 < r < R,$$

la serie (2.8) converge uniformemente e assolutamente sul cerchio

$$|z| < r.$$

3) *La somma della serie di potenze (2.8) con raggio di convergenza $R > 0$ è una funzione olomorfa sul cerchio (finito o infinito)*

$$|z| < R. \quad (2.10)$$

Il disco (2.10) si chiama **disco di convergenza**.

Dimostrazione: Dimostriamo prima il seguente

Lemma 2.14 *Supponiamo che esistano i numeri positivi $M > 0$, $\rho > 0$ tali che*

$$\forall n > 0 : |c_n| \rho^n \leq M.$$

Allora la serie (2.8) converge assolutamente sul disco

$$|z| \leq r$$

per qualsiasi $r < \rho$.

Dimostrazione: Infatti, per $|z| < r$

$$|c_n z^n| \leq |c_n| r^n \leq M \left(\frac{r}{\rho} \right)^n.$$

La convergenza della serie geometrica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{\rho} \right)^n$$

implica la convergenza assoluta della serie di partenza (2.8). □

Ora dimostriamo il n. 1) del Teorema. Ricordiamo la definizione del limite superiore di una successione a_n di numeri reali:

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n := \lim_{p \rightarrow \infty} \left(\sup_{n \geq p} a_n \right).$$

Usiamo anche la seguente “regola di Cauchy” dalla teoria delle serie di numeri reali: una serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ di numeri nonnegativi $b_n \geq 0$ converge se $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} b_n^{1/n} < 1$ e diverge a $+\infty$ se $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} b_n^{1/n} > 1$. Applicando la regola di Cauchy alla serie con

$$b_n := |c_n| r^n$$

troviamo che

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} b_n^{1/n} = r \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |c_n|^{1/n} = \frac{r}{R}.$$

La prima, e anche la seconda parti del Teorema sono state dimostrate.

La dimostrazione dell’ultima parte segue dal

Lemma 2.15 *I raggi di convergenza della serie (2.8) e*

$$\sum_{n=0}^{\infty} n c_n z^{n-1} \tag{2.11}$$

coincidono. Chiamiamo

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \quad g(z) := \sum_{n=0}^{\infty} n c_n z^{n-1}$$

per $|z| < R$. Allora

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = g(z) \tag{2.12}$$

per ogni z nel disco di convergenza.

Dimostrazione: Chiamo R' il raggio di convergenza della serie (2.11). Se $r < R'$, allora la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} n |c_n| r^{n-1}$$

converge. Quindi

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| r^n \leq r \left(\sum_{n=0}^{\infty} n |c_n| r^{n-1} \right) < +\infty$$

da ciò si ricava che $r \leq R$, ovvero $R' \leq R$.

Viceversa, se $r < R$, scegliamo r' tale che $r < r' < R$. Allora

$$n |c_n| r^{n-1} = \frac{1}{r'} (|c_n| r'^n) \cdot n \left(\frac{r}{r'} \right)^{n-1}.$$

Dato che $r' < R$, allora esiste $M > 0$ tale che

$$\forall n \text{ abbiamo } |c_n| r'^n < M.$$

Quindi

$$n |c_n| r^{n-1} \leq \frac{M}{r'} n \left(\frac{r}{r'} \right)^{n-1}.$$

La convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{r}{r'} \right)^{n-1}$$

implica la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n |c_n| r^{n-1}.$$

Quindi, $r \leq R'$, ovvero $R \leq R'$.

Le due disuguaglianze dimostrano che $R' = R$. Rimane da dimostrare l'equazione (2.12).

Per un valore di z nel disco di convergenza scegliamo r tale che $|z| < r < R$. Per un qualsiasi h che soddisfi

$$0 < |h| \leq r - |z|$$

è definito il valore $f(z+h)$ e, in più

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} - g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(z, h)$$

dove

$$u_n(z, h) := c_n [(z+h)^{n-1} + z(z+h)^{n-2} + \dots + z^{n-1} - n z^{n-1}].$$

Siccome $|z| < r$, $|z+h| < r$, allora

$$|u_n(z, h)| \leq 2n |c_n| r^{n-1}.$$

Dalla convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n |c_n| r^{n-1}$$

si ricava che, $\forall \epsilon > 0$ esiste n_0 tale che

$$\sum_{n>n_0}^{\infty} 2n |c_n| r^{n-1} \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Inoltre, dato che la somma finita

$$\sum_{n \leq n_0} u_n(z, h)$$

è un polinomio in h che prende il valore zero per $h = 0$, esiste un numero positivo ρ tale che

$$\left| \sum_{n \leq n_0} u_n(z, h) \right| \leq \frac{\epsilon}{2} \quad \forall z \quad \text{tale che } |z| < \rho.$$

Da ciò si ricava la validità della disuguaglianza

$$\left| \frac{f(z+h) - f(z)}{h} - g(z) \right| \leq \left| \sum_{n \leq n_0} u_n(z, h) \right| + \sum_{n > n_0} 2n |c_n| r^{n-1} \leq \epsilon$$

per ogni h tale che $0 < |h| < r - |z|$ e $|h| < \rho$. Abbiamo dimostrato che la somma $f(z)$ della serie di potenze ammette derivata complessa e, di più, quest'ultima è uguale a $g(z) = f'(z)$.

□

Corollario 2.16 *La somma di una serie di potenze*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

convergente per $|z| < R$ è infinitamente differenziabile nel cerchio stesso. Per le derivate la seguente rappresentazione è valida per $|z| < R$

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} c_n z^{n-k}.$$

In particolare i coefficienti della serie sono univocamente determinati dalla funzione $f(z)$ secondo formule di Taylor

$$c_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0), \quad n \geq 0. \quad (2.13)$$

2.3 Esempi di serie di potenze

• La funzione esponenziale. Consideriamo la serie

$$e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}. \quad (2.14)$$

Il raggio di convergenza $R = \infty$. Usando l'Esercizio 1.11 otteniamo

$$e^z e^w = \sum_{k,l} \frac{z^k}{k!} \frac{w^l}{l!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k+l=n} \frac{n!}{k!l!} z^k w^l = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (z+w)^n = e^{z+w}.$$

• Seno/coseno. Queste funzioni della variabile complessa z sono definite dalle serie

$$\sin z := z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad (2.15)$$

$$\cos z := 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}. \quad (2.16)$$

Anche queste serie convergono per qualsiasi $z \in \mathbb{C}$. In particolare, per $\phi \in \mathbb{C}$ abbiamo

$$e^{i\phi} = \sum_{n=1}^{\infty} i^n \frac{\phi^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\phi^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\phi^{2k+1}}{(2k+1)!} = \cos \phi + i \sin \phi.$$

Questa formula è stata già usata prima per un numero reale ϕ (vedi (1.1) sopra).

- La funzione logaritmica è data dalla serie

$$\log(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n} + \dots$$

Questa serie converge per $|z| < 1$. Per questi valori di z abbiamo

$$e^{\log(1+z)} = 1 + z.$$

Nel punto $z = -1$ del bordo del disco di convergenza la serie diverge.

Osservazione 2.17 *Il logaritmo di un numero complesso qualsiasi $z \neq 0$ è definito ponendo*

$$\log z := \log |z| + i \arg z \text{ (modulo } 2\pi i). \quad (2.17)$$

La proprietà principale

$$e^{\log z} = z$$

rimane comunque valida indipendentemente dalla scelta del rappresentante nella classe di equivalenza (2.17). Le proprietà di questa funzione “multivalued” dal punto di vista dell’idea generale del prolungamento analitico verranno discusse più avanti.

3 Teorema di Cauchy. Integrale di Cauchy

3.1 Integrali curvilinei

L’integrale di una **1-forma**

$$\omega = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

lungo una **curva liscia**

$$\gamma : t \mapsto \gamma(t) = (x(t), y(t)), \quad t \in [a, b], \quad x(t), y(t) \in C^1[a, b]$$

dal punto $\gamma(a)$ al punto $\gamma(b)$ si definisce tramite la formula

$$\int_{\gamma} \omega := \int_a^b \gamma^* \omega$$

dove

$$\gamma^* \omega := [P(x(t), y(t)) \dot{x}(t) + Q(x(t), y(t)) \dot{y}(t)] dt.$$

È sottointeso che i coefficienti $P(x, y)$, $Q(x, y)$ della 1-forma ω sono funzioni (a valori complessi o reali) continue su un dominio $D \subset \mathbb{R}^2$ e che la curva $\gamma \subset D$. L'integrale cosidefinito è invariante rispetto alle sostituzioni monotone del parametro $t = t(s)$, $dt/ds > 0$. Se, invece, la sostituzione $t = t(s)$ inverte l'orientazione della curva, cioè $dt/ds < 0$, allora l'integrale cambia il segno.

Questa definizione si generalizza per il caso delle curve lisce a tratti:

$$\gamma = \gamma_0 \cup \gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_n$$

spezzando l'intervallo $[a, b]$ in piccoli pezzi

$$[a, t_1], [t_1, t_2], \dots, [t_{n-1}, t_n], [t_n, b]$$

dove

$$a < t_1 < t_2 < \dots < t_n < b$$

e supponendo che le curve elementari

$$\gamma_i := \gamma|_{[t_{i-1}, t_i]}, \quad i = 1, \dots, n+1$$

siano tutte lisce: mettiamo

$$\int_{\gamma} \omega := \sum_i \int_{\gamma_i} \omega.$$

Per esempio, ha senso l'integrale della 1-forma ω lungo il bordo orientato del rettangolo.

Si considerino domini D sul piano orientato tali che

$$\bar{D} \subset \mathbb{R}^2$$

sia compatto con bordo

$$\partial D := \bar{D} \setminus D$$

fatto da curve lisce a tratti. Dalla geometria differenziale sappiamo come definire un'orientazione naturale sul bordo ∂D : rispetto alla direzione scelta su ∂D il dominio D deve rimanere a sinistra. Per una 1-forma ω con i coefficienti P, Q di classe C^1 è valido

Teorema di Stokes.

$$\int_{\partial D} \omega = \int_D d\omega \tag{3.1}$$

dove il differenziale $d\omega$ è la 2-forma

$$d\omega := \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy.$$

La 1-forma ω si chiama **chiusa** se $d\omega = 0$. In particolare, il differenziale

$$\omega = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

di una qualsiasi funzione $f = f(x, y)$ è 1-forma chiusa. Dalla formula di Stokes si ricava che

$$\int_{\partial D} \omega = 0 \tag{3.2}$$

per una qualsiasi 1-forma chiusa $\omega \in C^1(D)$.

Osservazione 3.1 Usando le notazioni complesse dz , $d\bar{z}$ ecc. possiamo riscrivere qualsiasi 1-forma come

$$\begin{aligned}\omega &= Pdx + Qdy = \tilde{P}dz + \tilde{Q}d\bar{z} \\ \tilde{P} &= \frac{1}{2}(P - iQ), \quad \tilde{Q} = \frac{1}{2}(P + iQ).\end{aligned}$$

La formula per il differenziale della 1-forma si riscrive così:

$$d\omega = \left(\frac{\partial \tilde{Q}}{\partial z} - \frac{\partial \tilde{P}}{\partial \bar{z}} \right) dz \wedge d\bar{z} \quad (3.3)$$

dove gli operatori $\partial/\partial z$ e $\partial/\partial \bar{z}$ sono stati introdotti in (2.4) e

$$dz \wedge d\bar{z} = (dx + idy) \wedge (dx - idy) = -2idx \wedge dy.$$

Si ricordi che due curve γ_0 , γ_1 lisce (oppure, lisce a tratti) definite sull'intervallo stesso $[a, b]$ tali che

$$\gamma_0(a) = \gamma_1(a), \quad \gamma_0(b) = \gamma_1(b)$$

si chiamano **omotope** se esiste una mappa (liscia, o liscia a tratti)

$$\Gamma : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow D \subset \mathbb{R}^2, \quad (t, s) \mapsto \Gamma(t, s) \quad (3.4)$$

tale che

$$\Gamma(t, 0) = \gamma_0(t), \quad \Gamma(t, 1) = \gamma_1(t), \quad t \in [a, b], \quad (3.5)$$

e

$$\Gamma(a, s) = \gamma_0(a) = \gamma_1(a), \quad \Gamma(b, s) = \gamma_0(b) = \gamma_1(b) \quad s \in [0, 1].$$

La mappa Γ si chiama una **omotopia** tra γ_0 e γ_1 .

Dal Teorema di Stokes si deriva l'importante

Corollario 3.2 Data una qualsiasi 1-forma chiusa $\omega \in C^1(D)$ e due curve omotope $\gamma_0, \gamma_1 \subset D$, abbiamo

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_0} \omega.$$

Dimostrazione: La differenza degli integrali può essere rappresentata come l'integrale sul bordo orientato dell'immagine del rettangolo

$$\int_{\gamma_1} \omega - \int_{\gamma_0} \omega = \oint_{\Gamma([a,b] \times [0,1]) \subset D} \omega = \int_{[a,b] \times [0,1]} \Gamma^* \omega.$$

Usando la proprietà del differenziale

$$d\Gamma^* \omega = \Gamma^* d\omega$$

e applicando il Teorema di Stokes al rettangolo $[a, b] \times [0, 1]$, otteniamo la dimostrazione. \square

Una piccola modifica della definizione si applica alle omotopie di curve chiuse che non necessariamente passano attraverso punti comuni. Si dice che due curve chiuse $\gamma_0 : [a, b] \rightarrow D$ e $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow D$ tali che

$$\gamma_0(a) = \gamma_0(b), \quad \gamma_1(a) = \gamma_1(b)$$

sono omotope se esiste un'omotopia Γ come in (3.4), (3.5) tale che

$$\Gamma(a, s) = \Gamma(b, s) \quad \forall s \in [a, b]. \quad (3.6)$$

Definizione 3.3 Si dice che la curva chiusa (liscia, oppure liscia a tratti)

$$\gamma : [a, b] \rightarrow D, \quad \gamma(a) = \gamma(b)$$

è **contraibile** in D se esiste un'omotopia (3.4) - (3.6) tra questa curva chiusa $\gamma_0 := \gamma$ e la mappa a un punto $P \in D$

$$\gamma_1(t) \equiv P \in D, \quad t \in [a, b].$$

Il dominio $D \subset \mathbb{R}^2$ si chiama **semplicemente connesso** se qualsiasi curva chiusa $\gamma \subset D$ è contraibile in D .

Esercizio 3.4 Dimostrare che un qualsiasi cerchio sul piano è un dominio semplicemente connesso. Più generale, dimostrare che qualsiasi dominio **stellare** è semplicemente connesso.

Si ricordi che il dominio $D \subset \mathbb{R}^2$ si chiama stellare se esiste un punto $P_0 \in D$ tale che il segmento di una retta che lega P_0 con un qualsiasi punto P appartiene a D :

$$[P_0, P] \subset D \quad \forall P \in D.$$

Corollario 3.5 Dato un dominio semplicemente connesso D , allora l'integrale di una 1-forma chiusa $\omega \in C^1(D)$ per un qualsiasi circuito $\gamma \subset D$ è uguale a zero:

$$\oint_{\gamma} \omega = 0. \quad (3.7)$$

Corollario 3.6 Dato un dominio semplicemente connesso D e una 1-forma chiusa $\omega \in C^1(D)$, allora esiste una funzione $f(x, y)$ su D tale che

$$\omega = df.$$

Dimostrazione: Scegliamo un punto qualsiasi $P_0 \in D$, pongo

$$f(P) := \int_{\gamma} \omega, \quad \gamma : [a, b] \rightarrow D, \quad \gamma(a) = P_0, \quad \gamma(b) = P$$

per un qualsiasi curva γ in D . Questo integrale non dipende dalla scelta della cammino dell'integrazione grazie a Corollario 3.5. Il differenziale di questa funzione è uguale a ω . \square

Esercizio 3.7 Dato un dominio D , dimostrare che se l'integrale $\int_{\gamma} \omega = 0$ per un qualsiasi circuito chiuso γ , allora la 1-forma $\omega \in C^1(D)$ è chiusa.

Esercizio 3.8 *Dimostrare che la 1-forma*

$$\omega = \frac{dz}{z} = \frac{(x - iy) dx + (y + ix) dy}{x^2 + y^2}$$

è chiusa nel dominio $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus 0$. Trovare un circuito $\gamma \subset D$ tale che

$$\oint_{\gamma} \frac{dz}{z} \neq 0.$$

Dal risultato di questo esercizio segue che il dominio $\mathbb{C} \setminus 0$ non è semplicemente connesso.

3.2 Teorema di Cauchy

In questa Sezione vogliamo studiare il caso particolare di 1-forme date da come

$$\omega = f(z)dz = P dx + Q dy, \quad P = f(z), \quad Q = if(z)$$

per una funzione olomorfa $f(z)$.

Teorema 3.9 *Dato un dominio semplicemente connesso $D \subset \mathbb{C}$ e una funzione olomorfa $f(z)$, $z \in D$, l'integrale $\oint_{\gamma} f(z) dz$ è uguale a zero per un qualsiasi circuito $\gamma \subset D$.*

Prima dimostrazione: sotto l'assunzione **aggiuntiva** $f \in C^1(D)$: usando la formula (3.3) per il differenziale della 1-forma $\omega = f(z)dz$ assieme con le equazioni di Cauchy - Riemann scritte nella forma (2.6) si ottiene

$$d(f(z)dz) = -\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} dz \wedge d\bar{z} = 0.$$

Allora la forma ω è chiusa. Applicando Corollario 3.5 completiamo la dimostrazione. \square

In realtà l'ipotesi $f \in C^1(D)$ non è indispensabile. Per vederlo bisogna usare però una versione più raffinata del Teorema di Stokes.

Seconda dimostrazione: senza **nessuna ipotesi aggiuntiva**, dimostriamo che

$$\oint_{\partial\Pi} f(z)dz = 0$$

per un qualsiasi rettangolo $\Pi \subset D$. Prima di tutto, conviene considerare l'integrale

$$\oint_{\partial\Pi} f(z)dz =: \alpha(\Pi)$$

come una funzione del rettangolo Π . Dividiamo il rettangolo Π in quattro rettangoli uguali Π_1, \dots, Π_4 . È chiaro che

$$\alpha(\Pi) = \oint_{\partial\Pi} f(z)dz = \sum_{k=1}^4 \oint_{\partial\Pi_k} f(z)dz = \sum_{k=1}^4 \alpha(\Pi_k).$$

Allora, tra i quattro rettangoli c'è almeno uno tale che

$$|\alpha(\Pi_k)| \geq \frac{1}{4} |\alpha(R)|.$$

Chiamiamo $\Pi^{(1)}$ questo rettangolo. Poi, dividiamo in quattro parti uguali il rettangolo $\Pi^{(1)}$; scelgo uno tra questi, diciamo $\Pi^{(2)}$ tale che

$$|\alpha(\Pi^{(2)})| \geq \frac{1}{4^2} |\alpha(R)|.$$

Continuando questa procedura arriviamo a una successione $\Pi^{(1)}, \Pi^{(2)}, \dots, \Pi^{(k)}, \dots$ tale che

$$4^k \left| \oint_{\partial\Pi^{(k)}} f(z) dz \right| \geq |\alpha(\Pi)|.$$

Applicando criterio di Cauchy si dimostra l'esistenza di unico punto comune $z_0 \in D$ di tutti i rettangoli. Siccome la funzione $f(z)$ è olomorfa nel punto z_0 , abbiamo la rappresentazione

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + o(|z - z_0|)$$

per $z \in D$ sufficientemente vicino a z_0 . Quindi

$$\alpha(\Pi^{(k)}) = \oint_{\partial\Pi^{(k)}} f(z) dz = f(z_0) \oint_{\partial\Pi^{(k)}} dz + f'(z_0) \oint_{\partial\Pi^{(k)}} (z - z_0) dz + \oint_{\partial\Pi^{(k)}} o(|z - z_0|) dz.$$

Nella parte destra dell'ultima equazione i primi due termini sono nulli. Il terzo tende a zero più velocemente che l'area del rettangolo $\Pi^{(k)}$, cioè,

$$\frac{\left| \oint_{\partial\Pi^{(k)}} o(|z - z_0|) dz \right|}{\text{area}(\Pi^{(k)})} = 4^k \frac{\left| \oint_{\partial\Pi^{(k)}} o(|z - z_0|) dz \right|}{\text{area}(\Pi)} \rightarrow 0.$$

Dividendo il modulo della parte sinistra della stessa equazione per $\text{area}(\Pi^{(k)})$ si ottiene invece che

$$\frac{|\alpha(\Pi^{(k)})|}{\text{area}(\Pi^{(k)})} = 4^k \frac{|\alpha(\Pi^{(k)})|}{\text{area}(\Pi)} \geq \frac{|\alpha(\Pi)|}{\text{area}(\Pi)}$$

da ciò si ricava che $\alpha(\Pi) = 0$.

Per completare la dimostrazione del Teorema di Cauchy dimostriamo un lemma che comunque sarà usato anche indipendentemente.

Lemma 3.10 *Data una funzione olomorfa $f(z)$ in un dominio semplicemente connesso D , allora esiste una funzione olomorfa $F(z)$, $z \in D$ tale che*

$$F'(z) = f(z).$$

Dimostrazione: Costruiamo la funzione F come nel Corollario 3.6

$$F(P) := \int_{\gamma} f(z) dz, \quad \gamma: [a, b] \rightarrow D, \quad \gamma(a) = P_0, \gamma(b) = P$$

usando come curve γ dal punto iniziale P_0 al punto P le curve composte dai segmenti delle rette parallele all'asse x o y . Usando il Teorema di Cauchy già dimostrato per un rettangolo, è facile stabilire che l'integrale non dipende dalla scelta della curva γ . Siccome

$$dF = \omega = f(z) dz,$$

la funzione $F(z)$ è olomorfa. □

Corollario 3.11 *Data una funzione $f(z)$ olomorfa in un dominio qualsiasi D , vale che*

$$\oint_{\gamma} f(z)dz = 0$$

per qualsiasi circuito contraibile $\gamma \subset D$ in D .

L'enunciato del Teorema di Cauchy segue dal Corollario. □

Osservazione 3.12 *Come un esempio di applicazione del Lemma 3.10 possiamo costruire la funzione olomorfa $\log z$ su qualsiasi dominio D tale che $D \setminus 0$ sia semplicemente connesso. Come nella dimostrazione del Lemma, pongo*

$$\log z := \int_1^z \frac{dz}{z}.$$

L'integrale non dipende dal cammino di integrazione e rappresenta una funzione olomorfa per $z \in D \setminus 0$. Per vedere che la funzione così definita soddisfa le solite proprietà del logaritmo, dimostriamo l'identità

$$\log e^z \equiv z, \quad z \in D \setminus 0.$$

Infatti, differenziando l'ultima equazione rispetto a z e usando la regola per la derivata della composizione delle funzioni olomorfe (vedi Lemma 2.9) otteniamo

$$\frac{d}{dz} \log e^z = \frac{1}{e^z} e^z = 1.$$

Allora, la differenza

$$\log e^z - z$$

è uguale a una costante. Calcolando il valore della costante per $z = 0$ si ottiene l'identità voluta.

Si possono rilassare ancora le condizioni del Teorema di Cauchy (vedremo però che questa generalizzazione è puramente tecnica):

Teorema 3.13 *Data una funzione $f(z)$ continua sul dominio qualsiasi D e olomorfa su D tranne possibilmente un sottoinsieme dei punti su una retta Δ parallela all'asse reale, allora*

$$\oint_{\gamma} f(z)dz = 0 \tag{3.8}$$

per qualsiasi circuito contraibile $\gamma \subset D$. In particolare, (3.8) è valido se la funzione $f(z)$ è olomorfa su D tranne un sottoinsieme di punti isolati.

Dimostrazione: Come è stato appena fatto, basta dimostrare (3.8) per il caso $\gamma = \partial\Pi$ per un qualsiasi rettangolo Π . In realtà non c'è nulla da dimostrare se Π non interseca Δ . Consideriamo ora il caso che un lato del rettangolo appartiene a Δ . Siano $u, u + a, u + ib, u + a + ib$ i vertici del rettangolo. Supponiamo che i vertici u e $u + a$ siano su Δ e che

$a, b \in \mathbb{R}, b > 0$. Per un numero positivo $\epsilon > 0$ chiamiamo $\Pi(\epsilon)$ il rettangolo con i vertici $u + i\epsilon, u + a + i\epsilon, u + ib, u + a + ib$. Abbiamo

$$\oint_{\partial\Pi(\epsilon)} f(z)dz = 0, \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \oint_{\partial\Pi(\epsilon)} f(z)dz = \oint_{\partial\Pi} f(z)dz.$$

Quindi l'ultimo integrale è uguale a zero. Infine, se la retta Δ divide Π in due rettangoli Π' e Π'' , abbiamo

$$\oint_{\partial\Pi} f(z)dz = \oint_{\partial\Pi'} f(z)dz + \oint_{\partial\Pi''} f(z)dz = 0.$$

□

3.3 Grado di un circuito rispetto un punto

Dato un punto $z_0 \in \mathbb{C}$ e un circuito γ non passante tramite z_0

$$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \setminus z_0, \quad \gamma(a) = \gamma(b)$$

ci chiediamo: come possiamo “misurare” la posizione del punto z_0 rispetto al circuito?

Pongo

$$\deg(\gamma, z_0) := \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0}.$$

(Si ricordi che la forma $\frac{dz}{z - z_0}$ è chiusa - vedi Esercizio 3.8.)

Esercizio 3.14 *Dimostrare che il numero $\deg(\gamma, z_0)$ è un numero intero. Dimostrare inoltre che per due circuiti omotopi γ_0, γ_1 tali che l'omotopia*

$$\Gamma : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \setminus z_0, \quad \Gamma|_{[a, b] \times \{0\}} = \gamma_0, \quad \Gamma|_{[a, b] \times \{1\}} = \gamma_1$$

non passa per z_0 i numeri $\deg(\gamma_0, z_0)$ e $\deg(\gamma_1, z_0)$ coincidono.

[Hint: usando le coordinate polari

$$z - z_0 = r e^{i\phi}, \quad \phi = \arg(z - z_0)$$

riscrivere l'integrale nella forma

$$\deg(\gamma, z_0) := \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{d(r e^{i\phi})}{r e^{i\phi}} = \deg(\gamma, z_0) := \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma} d\arg(z - z_0).$$

]

Dal risultato dell'ultimo esercizio si vede che, se il circuito γ è omotopo nel dominio $\mathbb{C} \setminus z_0$ a un circuito banale

$$[a, b] \rightarrow \text{un punto} \in \mathbb{C} \setminus z_0,$$

allora $\deg(\gamma, z_0) = 0$. In tal caso si dice che il punto z_0 **si trova fuori** dalla parte del piano complesso limitata dal circuito γ . Viceversa, se $\deg(\gamma, z_0) \neq 0$, allora il circuito γ

non è omotopo a un circuito banale, cioè, il punto z_0 **si trova dentro** alla parte del piano complesso limitata dal circuito γ .

In particolare, per $\gamma =$ circonferenza $|z| = 1$ orientata nella direzione antioraria abbiamo

$$\deg(\gamma, z_0) = \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z - z_0} = \begin{cases} 1, & |z_0| < 1 \\ 0, & |z_0| > 1 \end{cases}. \quad (3.9)$$

3.4 Formula integrale di Cauchy

Teorema 3.15 *Data una funzione olomorfa $f(z)$ su un dominio D , allora*

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial U} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = f(z) \quad (3.10)$$

per qualsiasi sottodominio semplicemente connesso U tale che

$$\bar{U} \subset D \quad \text{è compatto con il bordo liscio a tratti, } z \in U.$$

Dimostrazione: Definiamo la funzione $g(\zeta)$, $\zeta \in D$ ponendo

$$g(\zeta) = \begin{cases} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} & \text{per } \zeta \neq z \\ f'(z) & \text{per } \zeta = z \end{cases}$$

La funzione g è continua e, anzi, è olomorfa su $D \setminus z$. Applicando Teorema 3.13, si dimostra che

$$\oint_{\partial U} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta = 0.$$

L'integrale

$$\oint_{\partial U} \frac{f(z) d\zeta}{\zeta - z}$$

si calcola usando il seguente metodo. Possiamo sostituire il circuito ∂U con una piccola circonferenza $C_\rho(z)$ con centro z e raggio $\rho > 0$. Le curve chiuse orientate ∂U e $C_\rho(z)$ sono omotope. Rimane osservare che l'integrale

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_\rho(z)} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = 1.$$

□

Osservazione 3.16 *L'ipotesi che U sia semplicemente connesso non è indispensabile. Il Teorema rimane vero anche nel caso più generale, tenendo presente che il bordo orientato ∂U è composto da più pezzi (vedi sotto Esercizio 3.21).*

Esercizio 3.17 *Data una funzione $f(z)$ olomorfa su un dato dominio D e un circuito $\gamma : [a, b] \rightarrow D$, dimostrare che*

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = \deg(\gamma, z) f(z).$$

3.5 Sviluppo di una funzione olomorfa in serie di potenze

Teorema 3.18 *Data una funzione olomorfa $f(z)$ sul cerchio $|z - z_0| < \rho$, allora $f(z)$ può essere rappresentata come la somma di una serie convergente su tale cerchio.*

Dimostrazione: Per semplificare le notazioni possiamo assumere $z_0 = 0$. Fissando un numero positivo $r < \rho$, costruiamo una serie che converge assolutamente a $f(z)$ per $|z| \leq r$. Data l'unicità della serie (vedi eq. (2.13)) vediamo che la serie costruita non dipende dalla scelta di r .

Scegliamo un numero positivo r_0 tale che $r < r_0 < \rho$ ed applichiamo la formula integrale di Cauchy al cerchio $|z| \leq r_0$. Otteniamo che

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=r_0} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} \quad \text{per } |z| < r.$$

Sviluppando la funzione $\frac{1}{\zeta - z}$ in serie geometrica

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta} \left(1 + \frac{z}{\zeta} + \cdots + \frac{z^n}{\zeta^n} + \cdots \right)$$

si ottiene

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=r_0} \sum_{n=0}^{\infty} z^n \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta.$$

Applicando il Teorema di Weierstrass si vede che la serie sotto l'integrale converge per $|z| \leq r$ e $|\zeta| = r_0$. Allora possiamo integrarla termine a termine. Si ottiene una rappresentazione di $f(z)$ con una serie convergente

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

dove

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=r_0} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta, \quad n \geq 0. \quad (3.11)$$

□

Osservazione 3.19 *Le funzioni rappresentate come somme delle serie di potenze si chiamano **funzioni analitiche**. Dai risultati di questa Sezione insieme a quelli della Sezione 2.2 si conclude che nella teoria delle funzioni di una variabile complessa le classi delle funzioni analitiche e quelle olomorfe coincidono.*

In particolare, applicando il Corollario 2.16 otteniamo

Teorema 3.20 *Dato uno dominio $D \subset \mathbb{C}$, allora qualsiasi funzione $f(z)$ olomorfa su D è infinitamente differenziabile su D . Inoltre, tutte le derivate della funzione $f(z)$ sono olomorfe su D .*

3.6 Teorema di Cauchy: versione finale

Ora tutto è pronto per dimostrare il Teorema di Cauchy nella sua forma finale.

Esercizio 3.21 Dato un dominio $D \subset \mathbb{C}$ tale che \bar{D} è compatto e il bordo $\partial D = \bar{D} \setminus D$ è una curva liscia a tratti, e una funzione $f(z)$ olomorfa su D e continua su \bar{D} , dimostrare che l'integrale

$$\oint_{\partial D} f(z) dz = 0.$$

In questa formula ∂D è il bordo orientato del dominio.

3.7 Principio del prolungamento analitico

Teorema 3.22 Data una funzione olomorfa su un dominio $D \subset \mathbb{C}$, sia $z_0 \in D$ un punto qualsiasi. Allora i seguenti enunciati sono equivalenti:

- $f^{(n)}(z_0) = 0$ per ogni $n \geq 0$.
- $f(z)$ è uguale identicamente a zero per qualsiasi z in un cerchio sufficientemente piccolo attorno a z_0 .
- $f(z) \equiv 0$ per ogni $z \in D$.

Dimostrazione: L'implicazione c) \Rightarrow a) è ovvia. Allora, supponendo a) dimostriamo b). Possiamo sviluppare la funzione $f(z)$ in una serie convergente in un cerchio attorno a z_0 con coefficienti

$$c_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0), \quad n \geq 0.$$

Quindi tutti i termini della serie sono nulli.

Dimostriamo ora l'implicazione b) \Rightarrow c). Sia $D' \subset D$ il sottoinsieme dei punti $z' \in D$ tali che la funzione $f(z)$ è uguale a zero in un certo cerchio $\{|z - z'| < \rho\} \subset D$ (sappiamo già che $z_0 \in D'$; allora il sottoinsieme D' non è vuoto). Dalla definizione si vede subito che il sottoinsieme D' è aperto. Ora dimostriamo che D' è anche chiuso. Dato un punto di accumulazione $z_1 \in D$ dei punti del sottoinsieme D' , ovvero

$$z_1 = \lim_{k \rightarrow \infty} u_k, \quad u_k \in D'$$

vediamo che tutte le derivate $f^{(n)}(z)$ si annullano nei punti $z = u_k$. Dalla continuità si ottiene che le derivate si annullano anche nel punto di limite z_1 . Allora D' è un sottoinsieme chiuso. Siccome per definizione il dominio D è connesso, otteniamo che $D' = D$. \square

Corollario 3.23 (principio del prolungamento analitico). Se due funzioni f e g olomorfe sul dominio D coincidono in un intorno di un punto $z_0 \in D$, allora $f(z) \equiv g(z)$ per ogni $z \in D$.

3.8 Zeri delle funzioni olomorfe

Data una funzione olomorfa $f(z)$ sul dominio D , non identicamente uguale a 0, e un punto $z_0 \in D$ tale che

$$f(z_0) = 0,$$

si dice che z_0 è **uno zero** della funzione $f(z)$.

Definizione 3.24 *Il numero intero positivo*

$$\text{mult}_{z_0} f(z) := \max \{n \mid f^{(k)}(z_0) = 0 \quad \forall k < n\}$$

si chiama **la molteplicità dello zero** z_0 .

Ricordiamo che secondo il principio del prolungamento analitico non tutte le derivate sono uguali a 0.

Se $\text{mult}_{z_0} f(z) = 1$ allora si dice che la funzione $f(z)$ ha **uno zero semplice** nel punto z_0 , altrimenti si dice che lo zero della funzione è **multiplo**. Nello zero semplice abbiamo

$$f(z_0) = 0, \quad f'(z_0) \neq 0.$$

Allora la funzione $w = f(z)$ è localmente invertibile e la funzione inversa $z = f^{-1}(w)$ è olomorfa per $|w| < \epsilon$ per un $\epsilon > 0$ sufficientemente piccolo.

Vicino a uno zero multiplo l'invertibilità della funzione non è più valida. Infatti, la funzione $w = z^m$ nel punto $z = 0$ ha uno zero di molteplicità m . Per $m > 1$ abbiamo m rami della funzione inversa, ovvero m valori per la radice del numero complesso $w \neq 0$:

$$\left(w^{\frac{1}{m}}\right)_k = r^{\frac{1}{m}} e^{i\frac{\phi}{m} + \frac{2\pi ik}{m}}, \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \quad \text{dove } r = |w|, \phi = \arg w$$

(formule di de Moivre).

Esercizio 3.25 *Dimostrare che per uno zero multiplo della molteplicità $m := \text{mult}_{z_0} f(z)$ esiste un numero positivo ϵ tale che l'equazione*

$$f(z) = w \quad \text{per } 0 < |w| < \epsilon$$

ha esattamente m soluzioni

$$z = f_1^{-1}(w), \dots, z = f_m^{-1}(w)$$

in un cerchio $|z - z_0| < \delta$ per un numero sufficientemente piccolo $\delta > 0$. Inoltre dimostrare che ogni funzione $f_k^{-1}(w)$ è olomorfa sul piccolo cerchio intorno a un qualsiasi punto w_1 tale che $0 < |w_1| < \epsilon$.

Esercizio 3.26 *Verificare che per i polinomi*

$$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$$

considerati come funzioni olomorfe su \mathbb{C} la definizione degli zeri semplici/multipli coincide con la definizione delle radici semplici/multipli.

Se $m = \text{mult}_{z_0} f(z)$, allora vicino a z_0 si può presentare la funzione $f(z)$ nella forma

$$f(z) = (z - z_0)^m \tilde{f}(z) \quad (3.12)$$

tale che la funzione $\tilde{f}(z)$ è olomorfa sull'intorno di z_0 e $\tilde{f}(z_0) \neq 0$. In particolare, si vede che ogni zero di una funzione olomorfa è isolato, cioè, esiste un numero sufficientemente piccolo $\delta > 0$ tale che

$$f(z) \neq 0 \quad \text{per} \quad 0 < |z - z_0| < \delta.$$

Da ciò si ricava

Teorema 3.27 *Data una funzione $f(z)$ olomorfa su un dominio D e diversa dalla funzione identicamente nulla, allora l'insieme degli zeri della funzione è discreto in D .*

Un'altra proprietà importante delle funzioni olomorfe sui domini $D \subset \mathbb{C}$ è il seguente

Teorema 3.28 *L'immagine $f(D)$ di un dominio D rispetto a una funzione $f(z)$ olomorfa su D è un dominio aperto in \mathbb{C} .*

Dimostrazione: Se nel punto $a \in D$ la derivata $f'(a) \neq 0$ allora $f(z)$ è un'omeomorfismo locale e, quindi, esiste un cerchio sufficientemente piccolo con il centro $b = f(a)$ interamente coperto dall'immagine $f(D)$. Se invece a è uno zero multiplo della funzione $f(z) - b$ della molteplicità $m > 1$, allora per ogni valore b' sufficientemente vicino a b l'equazione $f(z) = b'$ ha esattamente m radici nell'intorno del punto a piccolo a piacere. Quindi anche in questo caso il punto $b = f(a)$ appartiene a $f(D)$ insieme con un piccolo cerchio attorno a b . \square

3.9 Funzioni meromorfe

Date due funzioni $f(z)$, $g(z)$ olomorfe sul dominio D , tali che la funzione g non sia identicamente nulla, si consideri il rapporto $f(z)/g(z)$. Questo rapporto è olomorfo fuori dal sottoinsieme discreto degli zeri della funzione g . Se z_0 è uno zero della funzione g , allora localmente si può rappresentare

$$g(z) = (z - z_0)^p \tilde{g}(z), \quad f(z) = (z - z_0)^q \tilde{f}(z)$$

dove

$$\tilde{f}(z_0) \neq 0, \quad \tilde{g}(z_0) \neq 0, \quad p > 0, \quad q \geq 0.$$

Il rapporto quindi ha la forma

$$h(z) := \frac{f(z)}{g(z)} = (z - z_0)^{q-p} \frac{\tilde{f}(z)}{\tilde{g}(z)}.$$

La funzione $\tilde{h}(z) := \frac{\tilde{f}(z)}{\tilde{g}(z)}$ è olomorfa su un certo intorno del punto z_0 e soddisfa $\tilde{h}(z_0) \neq 0$. Consideriamo due casi.

1. $q \geq p$. Allora la funzione $h(z)$ è olomorfa anche nel punto z_0 . Per $q > p$ $h(z_0) = 0$.
2. $q < p$. Allora

$$h(z) = \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{1}{(z - z_0)^m} \tilde{h}(z), \quad m := p - q > 0, \quad \tilde{h}(z_0) \neq 0.$$

In tal caso si dice che la funzione $h(z)$ ha **polo di ordine** m nel punto z_0 . Per $z \rightarrow z_0$ la funzione $|h(z)| \rightarrow \infty$.

Definizione 3.29 Si dice che la funzione $f(z)$ è **meromorfa** sul dominio $D \subset \mathbb{C}$ se $f(z)$ è olomorfa sul

$$D' = D \setminus M$$

dove $M \subset D$ è un sottoinsieme discreto; i punti del sottoinsieme M debbono essere i **poli** della funzione f .

Teorema 3.30 (Esercizio.) L'insieme delle funzioni meromorfe sul dominio D è un campo. Inoltre, se la funzione $f(z)$ è meromorfa su D , allora anche la derivata complessa $f'(z)$ è meromorfa su D .

3.10 Teorema di Morera

Ora dimostriamo la seguente inversione del Teorema di Cauchy (o, meglio dire, del Corollario 3.11)

Teorema 3.31 (Teorema di Morera) Data una funzione $f(z)$ su un dominio D tale che per un qualsiasi circuito chiuso $\gamma \subset D$ contraibile su D

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

Allora la funzione $f(z)$ è olomorfa su D .

Dimostrazione: Per dimostrare che la funzione $f(z)$ è olomorfa in un cerchio sufficientemente piccolo intorno a un punto qualsiasi $z_0 \in D$, costruisco la funzione primitiva $F(z)$ sul cerchio stesso ponendo

$$F(z) := \int_{z_0}^z f(z) dz$$

dove il cammino dell'integrazione appartiene al cerchio scelto. Siccome l'integrale non dipende dalla scelta del cammino, abbiamo

$$dF(z) = f(z) dz.$$

Allora $F'(z) = f(z)$ e la funzione $F(z)$ è olomorfa sul cerchio. Quindi è olomorfa anche la derivata $f(z) = F'(z)$ secondo il Teorema 3.20. \square

Osservazione 3.32 Ora vediamo che nelle ipotesi del Teorema 3.13 la funzione $f(z)$ continua su D e olomorfa fuori di un sottoinsieme con certe proprietà in realtà è olomorfa sull'intero dominio D .

Esercizio 3.33 Dimostrare che la conclusione del Teorema di Morera rimane valida sotto l'ipotesi che per ogni rettangolo $\Pi \subset D$

$$\oint_{\partial\Pi} f(z) dz = 0.$$

3.11 Principio di simmetria di Schwarz

Come abbiamo appena stabilito, una funzione $f(z)$ continua su un dominio D e olomorfa su D salvo possibilmente un sottoinsieme di punti dell'asse reale, allora la funzione $f(z)$ in realtà è olomorfa su tutto il dominio D .

Applichiamo queste considerazioni alla seguente situazione. Consideriamo un dominio D simmetrico rispetto all'asse reale. Chiamiamo D_+ e D_- le parti del dominio che appartengono ai semipiani superiore e inferiore rispettivamente.

Teorema 3.34 *Supponiamo di avere una funzione $f_+(z)$ olomorfa su D_+ e continua fino all'asse reale che prende valori reali per $z \in \bar{D}_+ \cap \mathbb{R}$. Allora esiste una funzione $f(z)$ olomorfa sull'intero dominio D tale che*

$$f|_{D_+} = f_+.$$

Si ricordi che, secondo il principio del prolungamento analitico tale funzione f è determinata univocamente.

Dimostrazione: Pongo

$$f(z) = \begin{cases} f_+(z), & z \in D_+ \\ \overline{f_+(\bar{z})}, & z \in D_- \end{cases}.$$

Tale funzione è continua su D e olomorfa su $D_+ \cup D_-$. Allora $f(z)$ è olomorfa su tutto il dominio D . \square

Osservazione 3.35 *La funzione $f(z)$ prende valori uguali nei punti simmetrici rispetto all'asse reale. È questa la motivazione del nome di questa Sezione.*

4 Serie di Taylor e serie di Laurent. Punti singolari e residui

4.1 Disuguaglianze di Cauchy per i coefficienti di serie di Taylor

Come sappiamo già, ogni funzione olomorfa $f(z)$ nel cerchio D di un certo raggio $R > 0$ con il centro nell'origine è rappresentabile come la somma di una serie di potenze

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n.$$

Inoltre sappiamo che questa serie coincide con la serie di Taylor della funzione, ovvero

$$c_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0), \quad n \geq 0.$$

Per un qualsiasi numero positivo $r < R$ pongo

$$M(r) := \max_{|z|=r} |f(z)|.$$

Teorema 4.1 *Le seguenti stime sono valide per i coefficienti di serie di Taylor della funzione olomorfa $f(z)$*

$$|c_n| \leq \frac{M(r)}{r^n}, \quad n \geq 0. \quad (4.1)$$

Dimostrazione: Riscrivendo la formula (3.11) per i coefficienti della serie di Taylor nelle coordinate polari $\zeta = \rho e^{i\phi}$ e integrando sulla circonferenza $\rho = r$ otteniamo

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=r} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(re^{i\phi})}{r^n} e^{-in\phi} d\phi. \quad (4.2)$$

Allora

$$|c_n| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|f(re^{i\phi})|}{r^n} d\phi \leq \frac{M(r)}{r^n}.$$

□

4.2 Teorema di Liouville

Teorema 4.2 *Data una funzione $f(z)$ olomorfa e limitata su \mathbb{C} , allora $f(z) \equiv \text{cost.}$*

Dimostrazione: Applichiamo le disuguaglianze di Cauchy (4.1). Secondo l'ipotesi del teorema

$$M(r) \leq M_0 \quad \forall r > 0$$

per una costante M_0 . Allora per i coefficienti della serie di Taylor abbiamo la stima

$$|c_n| \leq \frac{M_0}{r^n}, \quad \forall r > 0, \quad n \geq 0.$$

Quindi $c_n = 0$ per $n > 0$ e $f(z) \equiv c_0$.

□

Corollario 4.3 *Ogni polinomio*

$$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n, \quad a_0 \neq 0$$

con coefficienti complessi ha almeno una radice complessa.

Dimostrazione: Nel caso contrario la funzione $1/P(z)$ è olomorfa su \mathbb{C} . Questa funzione è anche limitata. Infatti, dalla rappresentazione

$$P(z) = z^n \left(a_0 + \frac{a_1}{z} + \dots + \frac{a_n}{z^n} \right)$$

si ricava che $|P(z)| \rightarrow \infty$ per $|z| \rightarrow \infty$. Applicando il Teorema di Liouville si ottiene che $1/P(z) = \text{cost} = 0$. Questa contraddizione completa la dimostrazione. □

4.3 Teorema del valor medio. Principio del massimo modulo

Applicando la formula (4.2) per i coefficienti della serie di Taylor al caso $n = 0$ otteniamo

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{i\phi}) d\phi.$$

Siccome $c_0 = f(0)$, si ottiene il

Teorema 4.4 *Data una funzione olomorfa nel dominio D , per ogni cerchio $U \subset D$ il valore della funzione nel centro del cerchio U è uguale al medio dei valori della funzione sulla circonferenza del cerchio stesso.*

Come verrà dimostrato più avanti, le funzioni sul piano (sia a valori complessi sia a valori reali) che possiedono la proprietà del teorema di valor medio appena formulato sono esattamente *le funzioni armoniche*.

Dimostriamo **principio del massimo modulo** per le funzioni continue $f(z)$ sui domini $D \subset \mathbb{C}$ tali che per f è valido il teorema del valor medio, ovvero

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\phi}) d\phi \quad \forall a \in D \text{ e } \forall r \text{ tale che il cerchio } \{z \mid |z - a| < r\} \subset D. \quad (4.3)$$

Teorema 4.5 *Data una funzione continua $f(z)$ sul dominio $D \subset \mathbb{C}$ che soddisfa la proprietà (4.3), se la funzione $|f(z)|$ nel punto $a \in D$ ha un massimo locale, allora f è costante su un certo intorno del punto a .*

Ricordiamo che la funzione $|f(z)|$ ha massimo locale nel punto a se per ogni punto $z \in D$ sufficientemente vicino al punto a abbiamo

$$|f(a)| \geq |f(z)|.$$

Dimostrazione: L'enunciato è ovvio se $f(a) = 0$ nel punto di massimo locale. Allora consideriamo il caso $f(a) \neq 0$. Moltiplicando se necessario per un numero opportuno c tale che $|c| = 1$

$$f(z) \mapsto cf(z)$$

ottengo una funzione con la stessa proprietà (4.3) tale che $f(a) > 0$. Dato un numero non negativo r sufficientemente piccolo, pongo, come prima,

$$M(r) := \max_{\phi} |f(a + re^{i\phi})|.$$

Secondo l'ipotesi,

$$M(r) \leq f(a)$$

se a è il punto di massimo modulo locale. Ma da (4.3) ottengo

$$f(a) \leq M(r).$$

Quindi $M(r) = f(a)$.

Introduco la funzione

$$g(z) := \operatorname{Re}(f(a) - f(z)).$$

Questa funzione a valori reali è non negativa per il z sufficientemente vicino ad a come segue dall'ipotesi $|f(z)| \leq f(a)$. Inoltre $g(z) = 0$ solo se $f(z) = f(a)$. Ma il valor medio della funzione non negativa $g(z)$ sulla piccola circonferenza $|z - a| = r$ è uguale a zero. Allora la funzione $g(z)$ sulla circonferenza è uguale a zero. \square

Corollario 4.6 *Dato un dominio limitato $D \subset \mathbb{C}$ e una funzione $f(z)$ olomorfa su D e continua su \bar{D} , si definisce*

$$M := \max_{z \in \partial D} |f(z)|.$$

Allora

- 1) $|f(z)| \leq M$ per ogni $z \in D$.
- 2) Se $|f(a)| = M$ per un punto $a \in D$ allora la funzione f è costante su D .

In realtà l'enunciato del teorema rimane valido per una qualsiasi funzione che soddisfa (4.3).

Dimostrazione: Pongo

$$M' := \max_{z \in \bar{D}} |f(z)|.$$

Siccome \bar{D} è un compatto, esiste un punto $a \in \bar{D}$ tale che

$$|f(a)| = M'.$$

Supponiamo che $a \in D$. Allora la funzione $f(z)$ è costante, cioè, $f(z) = f(a)$ su un certo intorno del punto a . Il sottoinsieme di quei punti z tali che $f(z) = f(a)$ è aperto in D , come risulta dal Teorema 4.5. È anche ovvio che è chiuso. Siccome D per definizione è connesso, otteniamo $f(z) \equiv f(a)$ sull'intero \bar{D} . Questo implica, in particolare, che $M' = M$.

Rimane considerare la situazione in cui non esiste il punto interno $a \in D$ tale che $|f(a)| = M'$. In tal caso ovviamente $M' = M$, cioè $|f(z)| < M \forall z \in D$. \square

4.4 Lemma di Schwarz

La seguente proprietà delle mappe olomorfe del cerchio $|z| < 1$ in se stesso sarà usata nella teoria delle mappe conformi.

Teorema 4.7 (Lemma di Schwarz) *Data una funzione $f(z)$ olomorfa sul cerchio $|z| < 1$ tale che*

$$f(0) = 0, \quad |f(z)| < 1 \quad \text{per} \quad |z| < 1,$$

allora:

- 1) Per qualsiasi $|z| < 1$ è valida la disuguaglianza

$$|f(z)| \leq |z|.$$

- 2) Se $|f(z_0)| = |z_0|$ per un certo valore $z_0 \neq 0$, $|z_0| < 1$, allora

$$f(z) = \lambda z, \quad \text{per un certo numero complesso } \lambda \text{ tale che} \quad |\lambda| = 1.$$

Dimostrazione: Siccome $f(0) = 0$, il coefficiente c_0 della serie di Taylor della funzione f è uguale a zero. Allora la funzione

$$\frac{f(z)}{z} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^{n-1}$$

è olomorfa sul cerchio $|z| < 1$. Per un qualsiasi numero positivo $r < 1$ abbiamo

$$\left| \frac{f(z)}{z} \right| < \frac{1}{r} \quad \text{per } |z| = r.$$

Usando il principio del massimo modulo dimostriamo la validità della stessa disuguaglianza per tutti $|z| \leq r$. In altro modo da dire, dato un numero complesso z nel cerchio $|z| < 1$, è valida la disuguaglianza

$$|f(z)| \leq \frac{|z|}{r} \quad \forall r \geq |z| \quad \text{e } r < 1.$$

Considerando il limite dell'ultima disuguaglianza per $r \rightarrow 1$ si ricava la dimostrazione del primo enunciato del teorema.

Per dimostrare la seconda parte del teorema basta osservare che, se $|f(z_0)|/|z_0| = 1$, allora la funzione olomorfa $f(z)/z$ prende valore massimale nel punto interno del cerchio. Quindi questa funzione è costante,

$$\frac{f(z)}{z} \equiv \lambda, \quad \lambda = \frac{f(z_0)}{z_0}, \quad \Rightarrow |\lambda| = 1.$$

□

4.5 Serie di Laurent

Si considerino le **serie di Laurent** infinite in entrambi i lati

$$\sum_{-\infty < n < \infty} c_n z^n.$$

A tale serie si associano due serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n Z^n \quad \text{e} \quad \sum_{n=-1}^{-\infty} c_n Z^{-n}.$$

Chiamiamo R e r^{-1} rispettivamente i raggi di convergenza delle serie di potenze. Supponiamo che $R \neq 0$, $r^{-1} \neq 0$. Sappiamo già che la funzione

$$f_+(z) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

è olomorfa per $|z| < R$.

Lemma 4.8 *La funzione*

$$f_-(z) := \sum_{n=-1}^{-\infty} c_n z^n$$

è olomorfa sul dominio

$$|z| > r.$$

Dimostrazione: La funzione

$$g(Z) := \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} Z^n$$

è olomorfa per $|Z| < r^{-1}$ e la derivata è uguale alla somma della serie

$$g'(Z) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_{-n} Z^{n-1}.$$

Usando lemma 2.9 si ricava che anche la funzione $f_-(z) = g(1/z)$ ammette la derivata complessa e

$$f'_-(z) = -\frac{1}{z^2} g'(1/z) = \sum_{n<0} n c_n z^{n-1}.$$

Quindi per $z > r$ si può differenziare la serie $f_-(z)$ termine a termine. \square

Supponiamo inoltre che

$$r < R \tag{4.4}$$

(non si escludono i casi $r = 0$ o $R = +\infty$). Dai risultati precedenti si ricava

Lemma 4.9 *Sotto le ipotesi appena formulate la serie di Laurent converge assolutamente e uniformemente per*

$$r' \leq |z| \leq R'$$

per qualsiasi coppia di numeri positivi r', R' tali che

$$r < r' < R' < R.$$

Inoltre, la somma della serie di Laurent definita come

$$\sum_{-\infty < n < \infty} c_n z^n = f(z) := f_+(z) + f_-(z)$$

è una funzione olomorfa sulla corona circolare

$$r < |z| < R. \tag{4.5}$$

Definizione 4.10 *Si dice che la funzione $f(z)$ definita sulla corona circolare*

$$r < |z| < R \tag{4.6}$$

ammette uno sviluppo in una **serie di Laurent** se esiste una serie

$$\sum_{-\infty < n < \infty} c_n z^n$$

che converge in ogni punto z della corona circolare tale che la somma della serie è uguale a $f(z)$.

Come è stato appena dimostrato, tale funzione è olomorfa sul dominio (4.6) e, anzi, la serie di Laurent converge assolutamente e uniformemente su ogni sottodominio della forma

$$r' \leq |z| \leq R', \quad r < r' < R' < R. \quad (4.7)$$

Lemma 4.11 *La serie di Laurent della funzione, se esiste, è definita univocamente.*

Dimostrazione: Integrando termine a termine la serie

$$f(\rho e^{i\phi}) = \sum_{-\infty < n < \infty} c_n \rho^n e^{in\phi}$$

che converge uniformemente per $r' \leq \rho \leq R'$ si ottengono le formule per i coefficienti della serie di Laurent

$$c_n = \frac{1}{2\pi\rho^n} \int_0^{2\pi} e^{-in\phi} f(\rho e^{i\phi}) d\phi, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (4.8)$$

□

Teorema 4.12 *Ogni funzione olomorfa sulla corona circolare (4.6) ammette sulla corona stessa uno sviluppo in serie di Laurent.*

Dimostrazione: Scegliendo numeri r', R' come in (4.7), applichiamo la formula integrale di Cauchy alla corona circolare un pò più grande

$$r'' \leq |z| \leq R'', \quad r < r'' < r' < R' < R'' < R. \quad (4.9)$$

Il bordo orientato del dominio (4.9) è fatto da due circonferenze: quella esterna γ_{out} orientata nel senso antiorario e l'altra interna γ_{in} orientata nel senso opposto. La formula integrale di Cauchy dice che

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_{\text{out}}} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_{\text{in}}} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}, \quad r' \leq |z| \leq R'. \quad (4.10)$$

Nel primo integrale $|\zeta| = R'' > R' \geq |z|$; quindi possiamo usare la seguente serie geometrica

$$\frac{1}{\zeta - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\zeta^{n+1}}.$$

L'integrazione termine a termine ci dà

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_{\text{out}}} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \quad (4.11)$$

dove

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_{\text{out}}} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta^{n+1}}, \quad n \geq 0.$$

Nel secondo integrale, dato che $|\zeta| = r'' < r' \leq |z|$, usiamo un'altra serie geometrica

$$\frac{1}{\zeta - z} = - \sum_{n=-1}^{-\infty} \frac{z^n}{\zeta^{n+1}}.$$

L'integrazione termine a termine ci da

$$-\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_{\text{in}}} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = \sum_{n=-1}^{-\infty} c_n z^n \quad (4.12)$$

dove

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_{\text{in}}} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta^{n+1}}, \quad n < 0.$$

Dalle formule (4.10), (4.11) e (4.12) si ricava che

$$f(z) = \sum_{-\infty < n < \infty} c_n z^n, \quad r < |z| < R.$$

□

Corollario 4.13 *Data una funzione $f(z)$ olomorfa sulla corona circolare $r < |z| < R$, allora esistono due funzioni $f_0(z)$ e $f_\infty(z)$ olomorfe rispettivamente per $|z| < R$ e $|z| > r$ tali che*

$$f(z) = f_0(z) + f_\infty(z).$$

Tale decomposizione è unica assumendo che $f_\infty(z) \rightarrow 0$ per $|z| \rightarrow \infty$.

Dimostrazione: Sviluppando la funzione $f(z)$ nella serie di Laurent

$$f(z) = \sum_{-\infty < n < \infty} c_n z^n$$

pongo

$$f_0(z) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \quad f_\infty(z) := \sum_{n < 0} c_n z^n.$$

Tali funzioni soddisfano le proprietà richieste. Se

$$f(z) = \tilde{f}_0(z) + \tilde{f}_\infty(z), \quad \lim_{|z| \rightarrow \infty} \tilde{f}_\infty(z) = 0$$

è un'altra decomposizione, la funzione

$$h(z) := \begin{cases} f_0(z) - \tilde{f}_0(z), & |z| < R \\ f_\infty(z) - \tilde{f}_\infty(z), & |z| > r \end{cases}$$

è olomorfa sul tutto il piano complesso e tende a zero per $|z| \rightarrow \infty$. Dal principio del massimo modulo si ricava che $h(z) \equiv 0$. □

4.6 Classificazione dei punti singolari isolati

Per i coefficienti delle serie di Laurent si ottiene un analogo delle disuguaglianze di Cauchy (4.1):

Lemma 4.14 (Esercizio.) Data una funzione $f(z)$ rappresentata come somma di una serie di Laurent

$$f(z) = \sum_{-\infty < n < \infty} c_n z^n, \quad r < |z| < R,$$

e un numero ρ tale che $r < \rho < R$ chiamiamo

$$M(\rho) := \max_{|z|=\rho} |f(z)|.$$

Allora i coefficienti della serie di Laurent soddisfano le seguenti disuguaglianze;

$$|c_n| \leq \frac{M(\rho)}{\rho^n}, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (4.13)$$

Applichiamo queste disuguaglianze allo studio dei **punti singolari isolati**, ovvero allo studio delle funzioni olomorfe sul cerchio punturato

$$0 < |z| < R \quad (4.14)$$

(in tal caso il punto singolare è $z = 0$).

Teorema 4.15 Data una funzione $f(z)$ olomorfa sul cerchio punturato (4.14), esiste un'estensione della funzione sul cerchio intero $|z| < R$ se e solo se la funzione $f(z)$ è limitata su un intorno del punto $z = 0$.

Dimostrazione: La necessità dell'enunciato del teorema è ovvia. Dimostriamo la sufficienza. Secondo la condizione del teorema, per $\rho > 0$ sufficientemente piccolo esiste un numero M tale che

$$|f(z)| < M \quad \text{per ogni } z \text{ tale che } 0 < |z| < \rho.$$

Applicando la disuguaglianza di Cauchy (4.13) ai coefficienti della serie di Laurent della funzione

$$f(z) = \sum_{-\infty < n < \infty} c_n z^n, \quad 0 < |z| < R,$$

si ottiene

$$|c_n| \leq \frac{M}{\rho^n}.$$

Siccome ρ è un numero arbitrariamente piccolo, dall'ultima disuguaglianza si ricava che $c_n = 0$ per $n < 0$. Quindi la serie di Laurent si riduce alla serie di Taylor ovviamente convergente anche nel punto $z = 0$. \square

Definizione 4.16 1) Si dice che il punto singolare isolato z_0 di una funzione $f(z)$ è una **singolarità eliminabile** se la funzione stessa si estende ad una funzione olomorfa su un intorno del punto stesso. 2) Se esiste un numero intero m tale che i coefficienti c_n della serie di Laurent soddisfano

$$c_n = 0 \quad \text{per tutti gli } n < m$$

si dice che il punto singolare isolato è un **polo** della funzione. 3) Se invece esiste un numero infinito dei coefficienti c_n non nulli della serie di Laurent per $n < 0$, allora si dice che il punto è una **singolarità essenziale**.

Secondo Teorema 4.15 il punto singolare isolato z_0 è eliminabile per la funzione $f(z)$ se e solo se la funzione è limitata sul certo intorno del punto z_0 .

Vicino al polo la funzione $f(z)$ si rappresenta come

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^{-m}}, \quad -m > 0$$

dove $g(z)$ è una funzione olomorfa su un certo intorno del punto z_0 . In tal caso la funzione $f(z)$ è **meromorfa** sul cerchio $|z - z_0| < R$ (vedi Sezione 3.9). Ricordiamo che $|f(z)| \rightarrow \infty$ per $z \rightarrow z_0$.

La funzione

$$f(z) = e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{-n}$$

è un esempio di una funzione con una singolarità essenziale al punto $z = 0$.

Lemma 4.17 (Teorema di Casorati - Weierstrass) *Data una funzione $f(z)$ olomorfa per $0 < |z| < R$ con una singolarità essenziale nel punto $z = 0$, allora per ogni $\epsilon > 0$ l'insieme dei valori che la funzione assume sul disco punturato*

$$0 < |z| < \epsilon$$

è denso in \mathbb{C} .

Dimostrazione: Supponiamo il contrario: che esista un punto $a \in \mathbb{C}$ e un disco $|z - a| < \rho$ che non appartiene all'immagine del disco punturato $0 < |z| < \epsilon$ per un certo numero positivo ϵ . In altro modo da dire, la disuguaglianza

$$|f(z) - a| \geq \rho$$

è valida per qualsiasi $0 < |z| < \epsilon$. Allora la funzione

$$g(z) := \frac{1}{f(z) - a}$$

è olomorfa e limitata su $0 < |z| < \epsilon$. Secondo il Teorema 4.15 $g(z)$ ammette un'estensione ad una funzione olomorfa su $|z| < \epsilon$; da ciò si ricava che la funzione

$$f(z) = a + \frac{1}{g(z)}$$

è meromorfa sul tale disco. Questo contraddice l'ipotesi che $z = 0$ sia punto di singolarità essenziale. \square

In realtà si può dimostrare il risultato molto più forte:

Teorema 4.18 Teorema di Picard. *Data una funzione $f(z)$ olomorfa sul $0 < |z| < R$ con una singolarità essenziale nel punto $z = 0$, allora per ogni $\epsilon > 0$ l'insieme dei valori della funzione sul cerchio punturato*

$$0 < |z| < \epsilon$$

coincide con \mathbb{C} salvo possibilmente un punto.

La dimostrazione del Teorema di Picard può essere trovata ad esempio sul libro: A.I.Markushevich, R.A.Silverman, Theory of functions of a complex variable. 2nd ed. New York, NY, Chelsea Publs., 1985. Nella Sezione 5.10 verrà dimostrata la versione ridotta del Teorema di Picard secondo cui ogni funzione olomorfa su \mathbb{C} prende tutti valori complessi salvo possibilmente uno (il cosiddetto *Piccolo Teorema di Picard*).

Esercizio 4.19 *Dimostrare che la funzione $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ prende qualsiasi valore complesso non nullo su qualsiasi disco punturato $0 < |z| < \epsilon \forall \epsilon > 0$.*

4.7 Residui

Lemma 4.20 *Data una funzione $f(z)$ olomorfa sulla corona circolare $r < |z| < R$ e un qualsiasi circuito γ dentro la corona circolare, allora è valida la seguente formula*

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} f(z) dz = \deg(\gamma, 0)c_{-1} \quad (4.15)$$

dove c_{-1} è il coefficiente di $1/z$ della serie di Laurent

$$f(z) = \sum_n c_n z^n. \quad (4.16)$$

Dimostrazione: Rappresentiamo

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z} + g(z), \quad g(z) := \sum_{n \neq -1} c_n z^n.$$

La funzione $g(z)$ ammette una primitiva dentro la corona circolare

$$g(z) = G'(z), \quad G(z) := \sum_{n \neq -1} \frac{c_n}{n+1} z^{n+1}.$$

La primitiva $G(z)$ è olomorfa sulla corona circolare. Allora

$$\oint_{\gamma} g(z) dz = \oint_{\gamma} G'(z) dz = 0.$$

Quindi

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = \oint_{\gamma} \frac{c_{-1}}{z} dz + \oint_{\gamma} g(z) dz = \oint_{\gamma} \frac{c_{-1}}{z} dz = 2\pi i \deg(\gamma, 0)c_{-1}.$$

□

Corollario 4.21 *Data una funzione $f(z)$ olomorfa sul dominio $D \setminus a$ con un punto singolare isolato a , allora l'integrale*

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-a|=\rho} f(z) dz \quad (4.17)$$

rispetto a una circonferenza sufficientemente piccola attorno il punto a orientata nel senso antiorario non dipende dalla scelta della circonferenza.

Definizione 4.22 Nelle ipotesi di Corollario 4.21, il valore dell'integrale (4.17) si chiama il **residuo** della funzione $f(z)$ nel punto singolare isolato a :

$$\operatorname{res}_a f(z) := \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-a|=\rho} f(z) dz. \quad (4.18)$$

Secondo Lemma 4.20 il residuo è nient'altro che il coefficiente di $1/(z-a)$ della serie di Laurent della funzione $f(z)$:

$$\operatorname{res}_a f(z) = c_{-1}, \quad f(z) = \sum_n c_n (z-a)^n. \quad (4.19)$$

Teorema 4.23 Data una funzione $f(z)$ olomorfa sul dominio $D \subset \mathbb{C}$ salvo possibilmente un sottoinsieme discreto $M \subset D$ di punti singolari isolati, allora per un qualsiasi compatto $\bar{U} \subset D$ con il bordo $\partial U = \bar{U} \setminus U$ tale che $M \cap \partial U = \emptyset$, la seguente formula è valida

$$\oint_{\partial U} f(z) dz = 2\pi i \sum_{z_k \in M \cap U} \operatorname{res}_{z_k} f(z). \quad (4.20)$$

In particolare la somma nella parte destra della formula (4.20) è sempre finita.

Come sempre è sottointeso che ∂U è il bordo orientato del compatto \bar{U} .

Dimostrazione: Per ogni punto z_k dell'insieme discreto M esiste un piccolo cerchio B_k con il centro z_k tale che

$$B_k \cap M = z_k. \quad (4.21)$$

Scegliendo il numero finito di tali cerchi copriamo tutti i punti z_1, z_2, \dots dell'intersezione $M \cap \bar{U}$ con i cerchi B_1, B_2, \dots con la proprietà (4.21). In particolare l'insieme $M \cap \bar{U}$ dei punti singolari nell'ogni compatto \bar{U} è sempre finito.

Chiamiamo

$$U' := U \setminus \cup_k B_k.$$

L'insieme $\bar{U}' \subset D$ è compatto. Inoltre la funzione $f(z)$ è olomorfa su U' . Allora, secondo Teorema di Cauchy l'integrale rispetto il bordo orientato del compatto \bar{U}' è nullo. Se

$$C_k := \partial B_k$$

è la circonferenza del cerchio B_k orientata nel senso antiorario, allora

$$\partial U' = \partial U - \cup_k C_k.$$

(Il segno “-” significa che ogni circonferenza C_k considerata come un pezzo del bordo orientato $\partial U'$ deve essere orientata nel senso **orario**.) Quindi

$$0 = \oint_{\partial U'} f(z) dz = \oint_{\partial U} f(z) dz - \sum_k \oint_{C_k} f(z) dz = \oint_{\partial U} f(z) dz - 2\pi i \sum_{z_k \in M \cap U} \operatorname{res}_{z_k} f(z).$$

□

Osservazione 4.24 Se la funzione $f(z)$ ha un polo semplice nel punto a , allora

$$\operatorname{res}_a f(z) = \lim_{z \rightarrow a} (z - a) f(z).$$

In particolare per $f(z) = P(z)/Q(z)$ per due funzioni $P(z)$, $Q(z)$ olomorfe in $z = a$, se la funzione $Q(z)$ ha uno zero semplice nel punto $z = a$ e $P(a) \neq 0$ allora

$$\operatorname{res}_a \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{P(a)}{Q'(a)}. \quad (4.22)$$

Per il calcolo del residuo della funzione $f(z)$ in polo multiplo di molteplicità n si usa la seguente formula

$$\operatorname{res}_a f(z) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [(z-a)^n f(z)]. \quad (4.23)$$

4.8 Residuo logaritmico

Data una funzione $f(z)$ meromorfa sul dominio $D \subset \mathbb{C}$, consideriamo i residui della derivata logaritmica $f'(z)/f(z)$.

Caso 1: la funzione $f(z)$ è olomorfa nel punto $a \in D$ e $f(a) \neq 0$. In tal caso anche la derivata logaritmica è olomorfa nel a .

Caso 2: a è uno zero della funzione $f(z)$ di molteplicità m . Rappresentando

$$f(z) = (z - a)^m \tilde{f}(z), \quad \tilde{f}(a) \neq 0$$

si ottiene

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m}{z - a} + \frac{\tilde{f}'(z)}{\tilde{f}(z)}.$$

Siccome il secondo termine nell'ultima formula è una funzione olomorfa nel a , allora

$$\operatorname{res}_a \frac{f'(z)}{f(z)} = m. \quad (4.24)$$

Caso 3: a è un polo della funzione $f(z)$ della molteplicità m . Rappresentando

$$f(z) = (z - a)^{-m} \tilde{f}(z), \quad \tilde{f}(a) \neq 0$$

si ottiene

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = -\frac{m}{z - a} + \frac{\tilde{f}'(z)}{\tilde{f}(z)}.$$

Siccome il secondo termine nell'ultima formula è una funzione olomorfa nel a , allora

$$\operatorname{res}_a \frac{f'(z)}{f(z)} = -m. \quad (4.25)$$

Usando queste formule si ottiene

Teorema 4.25 *Data una funzione $f(z)$ meromorfa sul dominio $D \subset \mathbb{C}$ e un compatto $\bar{U} \subset D$ con bordo ∂U liscio a tratti che non contiene né zeri né poli della funzione $f(z)$, allora è valida la seguente formula:*

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial U} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{f(z_k)=0, z_k \in U} \text{mult}_{z_k} f(z) - \sum_{f(z_k)=\infty, z_k \in U} \text{mult}_{z_k} f(z). \quad (4.26)$$

Si osservi che l'integrale nella parte sinistra della formula (4.26) è uguale **all'incremento totale dell'argomento** $\arg f(z)$ lungo ∂U . Per questa ragione il teorema appena dimostrato si chiama il **principio dell'argomento**.

Esercizio 4.26 *Data una funzione*

$$w = f(z) = c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \dots, \quad c_1 \neq 0$$

olomorfa su un piccolo cerchio $|z| < \epsilon$, derivare le seguenti formule per i coefficienti della serie di Taylor della funzione inversa

$$z = f^{-1}(w) = d_1 w + d_2 w^2 + d_3 w^3 + \dots, \\ d_n = \frac{1}{n!} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left(\frac{z}{f(z)} \right)^n, \quad n \geq 1. \quad (4.27)$$

[Hint: Sviluppare in potenze di w l'integrale

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta) - w} d\zeta$$

per un circuito opportuno γ ; usare l'integrazione per parti e la formula (4.23) per calcolare i coefficienti della serie di potenze.]

Per esempio, la soluzione $z = z(w)$ dell'equazione trascendente

$$w = z e^{-z}$$

si ottiene nella forma

$$z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n-1}}{n!} w^n.$$

5 Varietà complesse

5.1 Definizione di una varietà complessa unidimensionale. Funzioni olo-morfe su varietà complesse. Mappe olo-morfe e equivalenze biolomorfe

Definizione 5.1 *Una struttura complessa su una varietà differenziabile bidimensionale M è una scelta dell'atlante delle carte U_α con coordinate locali (x_α, y_α) tale che sulle intersezioni $U_\alpha \cap U_\beta$ le funzioni di transizione*

$$x_\alpha = x_\alpha(x_\beta, y_\beta), \quad y_\alpha = y_\alpha(x_\beta, y_\beta)$$

soddisfino le equazioni di Cauchy - Riemann, ovvero

$$\frac{\partial x_\alpha}{\partial x_\beta} = \frac{\partial y_\alpha}{\partial y_\beta}, \quad \frac{\partial x_\alpha}{\partial y_\beta} = -\frac{\partial y_\alpha}{\partial x_\beta}.$$

Introducendo le coordinate complesse

$$z_\alpha := x_\alpha + iy_\alpha, \quad z_\beta := x_\beta + iy_\beta$$

rispettivamente sulle carte U_α e U_β sulla intersezione si riscrivono le equazioni di Cauchy - Riemann nella forma

$$\frac{\partial z_\alpha}{\partial \bar{z}_\beta} = 0.$$

Si vede che le funzioni di transizione sulla varietà M che ammette una struttura complessa sono tutte **olomorfe**.

Esempio. Qualsiasi dominio sul piano complesso \mathbb{C} ammette una struttura complessa ovvia. Più in generale, ogni sottoinsieme aperto di una varietà con una struttura complessa eredita una struttura complessa. Altri esempi verranno costruiti più avanti.

Definizione 5.2 *Si dice che la funzione*

$$f : M \rightarrow \mathbb{C}$$

*è **olomorfa** rispetto a una struttura complessa (U_α, z_α) su M se per ogni α la restrizione $f|_{U_\alpha}$ è una funzione olomorfa della coordinata complessa z_α . Le funzioni meromorfe sulla varietà si definiscono in modo simile.*

Dal Lemma 2.9 si deriva che sulle intersezioni delle carte $U_\alpha \cap U_\beta$ le funzioni olomorfe/meromorfe della variabile z_α sono anche olomorfe/meromorfe come le funzioni della variabile z_β .

Teorema 5.3 *Se la varietà M è compatta e connessa, allora ogni funzione olomorfa su M è costante.*

Dimostrazione: Supponiamo che $f(z)$ sia una funzione olomorfa su M . Per la compatezza di M la funzione continua $|f|$ prende valore massimale sulla varietà compatta. Se $a \in U_\alpha \subset M$ per un certo α è il punto del massimo di $|f|$, allora la funzione $f(z_\alpha)$ è localmente costante su U_α secondo il principio del massimo modulo. Usando il principio del prolungamento analitico la funzione f è costante su ogni carta U_β che interseca con U_α . Continuando questo processo si ottiene che $f = \text{cost}$ dappertutto. \square

Definizione 5.4 *Si dice che la mappa*

$$f : M \rightarrow N$$

*di due varietà provviste delle strutture complesse (U_α, z_α) e (V_β, w_β) è **olomorfa** se per ogni punto $z_\alpha^0 \in U_\alpha \subset M$ tale che $w_\beta^0 := f(z_\alpha^0) \in V_\beta$ la funzione*

$$w_\beta = f(z_\alpha)$$

è olomorfa su un piccolo cerchio con il centro z_α^0 .

Definizione 5.5 Si dice che due varietà M, N provviste delle strutture complesse sono **bi-olomorfe** se esistono due mappe olomorfe

$$f : M \rightarrow N, \quad g : N \rightarrow M$$

tali che

$$f g = \text{id}_M, \quad g f = \text{id}_N.$$

La classe di equivalenza biolomorfa delle strutture complesse sulla varietà liscia M si chiama **varietà complessa unidimensionale** M .

5.2 La sfera di Riemann

Nello spazio \mathbb{R}^3 con le coordinate (x, y, u) si consideri la sfera S^2 del raggio 1 con il centro nell'origine:

$$x^2 + y^2 + u^2 = 1.$$

Come è ben noto S^2 è una varietà connessa compatta bidimensionale.

Esercizio 5.6 Dimostrare che la sfera S^2 è una varietà semplicemente connessa.

Per costruire la struttura complessa su S^2 usiamo le proiezioni stereografiche.

La proiezione stereografica dal polo nord $N = (0, 0, 1)$ associa al punto $P = (x, y, u) \neq N$ della sfera il punto di intersezione (X, Y) della retta NP con il piano $u = 0$:

$$X = \frac{x}{1-u}, \quad Y = \frac{y}{1-u}.$$

Introducendo la coordinata complessa $z = X + iY$ si ottiene

$$z = \frac{x + iy}{1-u}, \quad u \neq 1.$$

Facendo in modo simile la proiezione stereografica dal polo sud $S = (0, 0, -1)$ si associa a un qualsiasi punto $P = (x, y, u) \neq S$ della sfera il punto di intersezione (X', Y') della retta SP con il piano $u = 0$. Introducendo la coordinata complessa $z' = X' - iY'$ si ottiene

$$z' = \frac{x - iy}{1+u}, \quad u \neq -1.$$

Sull'intersezione delle carte $S^2 \setminus N$ e $S^2 \setminus S$ abbiamo l'identità

$$z z' = 1, \quad z \neq 0, \quad z' \neq 0.$$

Quindi le funzioni di transizione da $S^2 \setminus S$ a $S^2 \setminus N$ sono olomorfe:

$$z = \frac{1}{z'}, \quad z' \neq 0.$$

Si ottiene su S^2 la struttura di una varietà complessa compatta chiamata **la sfera di Riemann**. Si può considerare la sfera di Riemann come il risultato di compattificazione del piano complesso $\mathbb{C} \simeq S^2 \setminus N$ con la coordinata complessa z con un punto $z = \infty$, ovvero $z' = 0$,

corrispondente al polo nord. Per questa ragione si usa anche la notazione $\bar{\mathbb{C}}$ per la sfera di Riemann. Ancora un'altro modo per presentare la sfera di Riemann è l'identificazione

$$\bar{\mathbb{C}} = \mathbf{P}^1$$

con la retta proiettiva

$$\mathbf{P}^1 = \{(z_0 : z_1) \mid |z_0|^2 + |z_1|^2 \neq 0, (z_0 : z_1) \sim (\lambda z_0 : \lambda z_1), 0 \neq \lambda \in \mathbb{C}\}$$

secondo cui al punto di \mathbf{P}^1 con le coordinate omogenee z_0, z_1 si associa il punto $z := z_0/z_1 \in \bar{\mathbb{C}}$.

Secondo la definizione il cerchio di raggio R con il centro nel punto $z = \infty$ è l'insieme dei punti $z \in \bar{\mathbb{C}}$ tali che

$$\frac{1}{R} < |z| \leq \infty. \quad (5.1)$$

Sulla sfera di Riemann si definiscano anche le curve lisce, lisce a tratti, e il bordo orientato di un compatto. Per esempio, l'asse reale $\text{Im } z = 0$ diventa il circuito chiuso sulla sfera di Riemann. Orientandolo come il bordo del semipiano superiore si ottiene la direzione naturale dell'asse reale.

Le funzioni olomorfe sul cerchio di raggio R con il centro nel punto $z = \infty$ per la definizione sono quelle olomorfe in $z' = 1/z$ sull'insieme $|z'| < R$. Tali funzioni ammettono uno sviluppo nelle serie di Taylor della forma

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_{-n}}{z^n}$$

convergente su (5.1). In particolare il valore della funzione nel punto $z = \infty$ si definisce come

$$f(\infty) := c_0.$$

Analogamente, le funzioni meromorfe con il polo nel punto $z = \infty$ ammettono lo sviluppo

$$f(z) = c_m z^m + c_{m-1} z^{m-1} + \dots + c_1 z + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_{-n}}{z^n}.$$

Il numero intero positivo m è la molteplicità del polo se $c_m \neq 0$. Per esempio, ogni polinomio in z di grado m è una funzione meromorfa sulla sfera di Riemann.

Come sappiamo già, le funzioni olomorfe sulla sfera di Riemann sono necessariamente costanti.

Teorema 5.7 *Le funzioni meromorfe sulla sfera di Riemann sono funzioni razionali.*

Dimostrazione: L'insieme dei poli di una funzione non identicamente nulla $f(z)$ meromorfa sul compatto $\bar{\mathbb{C}}$ è discreto e, quindi, finito. Applicando lo stesso ragionamento alla funzione meromorfa $1/f(z)$ si ricava che il numero dei zeri della funzione $f(z)$ è finito. Se a_1, a_2, \dots, a_k sono tutti i poli *finiti* della funzione $f(z)$ con le molteplicità m_1, m_2, \dots, m_k rispettivamente, e b_1, b_2, \dots, b_l sono tutti gli zeri *finiti* della funzione $f(z)$ con le molteplicità n_1, n_2, \dots, n_l rispettivamente allora consideriamo i polinomi

$$P(z) := (z - a_1)^{m_1} (z - a_2)^{m_2} \dots (z - a_k)^{m_k}, \quad Q(z) := (z - b_1)^{n_1} (z - b_2)^{n_2} \dots (z - b_l)^{n_l}.$$

La funzione

$$g(z) := f(z) \frac{P(z)}{Q(z)}$$

è meromorfa su $\bar{\mathbb{C}}$ e diversa da zero su \mathbb{C} . Se all'infinito la funzione $g(z)$ ha lo zero, allora $g(z) \equiv 0$, quindi $f(z) \equiv 0$. L'altra possibilità di un polo all'infinito si elimina considerando la funzione $1/g(z)$. Allora la funzione $g(z)$ ha il punto singolare eliminabile a $z = \infty$. Secondo il Teorema di Liouville $g(z) = \text{cost}$, ovvero

$$f(z) = \text{cost} \frac{Q(z)}{P(z)}.$$

□

Osservazione 5.8 *Data una funzione $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ meromorfa sulla varietà complessa M con i poli nei punti z_1, z_2, \dots si consideri la mappa*

$$F : M \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$$

definita come

$$F(P) = \begin{cases} f(P), & P \in M \text{ non è polo di } f \\ \infty, & P = \text{polo di } f \end{cases}$$

La mappa F è una mappa olomorfa. Viceversa, le mappe olomorfe $M \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$ sono le funzioni meromorfe su M .

Da Teorema 5.7 si ricava

Corollario 5.9 *Le mappe olomorfe $\bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$ sono le funzioni razionali.*

Esercizio 5.10 *Data una funzione $f(z)$ olomorfa su \mathbb{C} con un polo all'infinito, dimostrare che $f(z)$ è un polinomio.*

5.3 Tori complessi e funzioni ellittiche

Il gruppo \mathbb{Z} di numeri interi agisce in modo discreto sul piano complesso come

$$z \mapsto z + n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Il quoziente

$$\mathbb{C}/\mathbb{Z}$$

ha una struttura naturale di varietà complessa. Una carta complessa intorno a un punto $z_0 \in \mathbb{C}$ si ottiene come

$$U_{z_0} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < \frac{1}{2}\}$$

con la coordinata complessa $z - z_0$. Le funzioni di transizione sono tutte lineari (le traslazioni).

Esercizio 5.11 *Dimostrare che la mappa*

$$\mathbb{C}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}^*, \quad z \mapsto e^{2\pi iz}$$

stabilisce un isomorfismo delle varietà complesse \mathbb{C}/\mathbb{Z} e $\mathbb{C}^ = \mathbb{C} \setminus 0$.*

Si consideri ora un *reticolo* sul piano complesso \mathbb{C} , cioè, l'insieme dei punti della forma

$$\Lambda = \{w = 2m\omega_1 + 2n\omega_2 \mid m, n \in \mathbb{Z}\} \quad (5.2)$$

dove ω_1, ω_2 sono due numeri complessi tali che

$$\operatorname{Im} \frac{\omega_2}{\omega_1} \notin \mathbb{R}.$$

Quest'ultima condizione garantisce che $\Lambda \subset \mathbb{C}$ è un sottoinsieme discreto. Di solito si sceglie la base del reticolo in modo tale che

$$\tau := \operatorname{Im} \frac{\omega_2}{\omega_1} > 0. \quad (5.3)$$

Si può considerare Λ come un sottogruppo discreto del gruppo addittivo \mathbb{R}^2 . Il quoziente

$$T(\omega_1, \omega_2) := \mathbb{R}^2/\Lambda \quad (5.4)$$

ha una struttura naturale di una varietà compatta bidimensionale. Come una varietà liscia $T(\omega_1, \omega_2)$ è ovviamente equivalente al toro

$$T(\omega_1, \omega_2) \simeq \{\mathbb{R}/\mathbb{Z}\} \times \{\mathbb{R}/\mathbb{Z}\} = S^1 \times S^1.$$

Un'altro modo per presentare il toro è di considerare il *parallelogramma dei periodi*

$$\Pi := \{z = 2\omega_1 s_1 + 2\omega_2 s_2 \mid 0 \leq s_1, s_2 \leq 1\}. \quad (5.5)$$

Si ottiene il toro $T(\omega_1, \omega_2)$ identificando i lati opposti del parallelogramma. Il toro non è una varietà semplicemente connessa: il gruppo fondamentale del toro è isomorfo a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

La struttura complessa sul toro $T(\omega_1, \omega_2)$ viene introdotta in modo analogo a quella su \mathbb{C}/\mathbb{Z} . Otteniamo un altro esempio di una varietà complessa compatta. A differenza dalla sfera di Riemann questa varietà non è semplicemente connessa.

Le funzioni sul toro $T(\omega_1, \omega_2)$ sono le funzioni *doppiamente periodiche*

$$f(z + 2\omega_1) = f(z), \quad f(z + 2\omega_2) = f(z). \quad (5.6)$$

Come sappiamo già le funzioni olomorfe sulla varietà compatta $T(\omega_1, \omega_2)$ sono necessariamente costanti. Consideriamo ora le funzioni meromorfe sul toro complesso $T(\omega_1, \omega_2)$. [Si ricordi che le funzioni meromorfe possono essere considerate come le mappe olomorfe $T(\omega_1, \omega_2) \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$ del toro alla sfera di Riemann.]

Definizione 5.12 *Le funzioni meromorfe sul toro $T(\omega_1, \omega_2)$ si chiamano **funzioni ellittiche**.*

Un esempio di tale funzione è *la funzione di Weierstrass*

$$\wp(z; \omega_1, \omega_2) := \frac{1}{z^2} + \sum_{w \in \Lambda \setminus 0} \left[\frac{1}{(z-w)^2} - \frac{1}{w^2} \right]. \quad (5.7)$$

Teorema 5.13 *La serie (5.7) converge uniformemente e assolutamente su ogni compatto in $\mathbb{C} \setminus \Lambda$. La somma $\wp(z; \omega_1, \omega_2)$ è una funzione doppiamente periodica meromorfa in $z \in \mathbb{C}$ con poli doppi sui punti del reticolo Λ .*

Dimostrazione: Dimostriamo prima la seguente

Lemma 5.14 *La serie*

$$\sum'_{w \in \Lambda} \frac{1}{|w|^3}$$

converge.

La notazione $\sum'_{w \in \Lambda}$ sarà usata per le somme su tutti punti diversi da zero del reticolo Λ .

Dimostrazione: Per ogni numero intero positivo n calcoliamo il contributo nella serie dei punti del reticolo al bordo del parallelogramma

$$\Pi_n := \{z = 2\omega_1 s_1 + 2\omega_2 s_2 \mid -n \leq s_1, s_2 \leq n\}.$$

Su $\partial\Pi_n$ abbiamo $8n$ punti del reticolo (senza contare lo zero). Chiamiamo d la distanza minima dallo zero dei vertici del parallelogramma Π_1 . Allora, la distanza dallo zero di ogni punto al bordo $\partial\Pi_n$ è maggiore o uguale a dn , cioè,

$$\frac{1}{|w|^3} \leq \frac{1}{d^3 n^3}, \quad w \in \Lambda \cap \partial\Pi_n, \quad w \neq 0.$$

Dall'ultima disuguaglianza segue che

$$\sum'_{w \in \Lambda \cap \partial\Pi_n} \frac{1}{|w|^3} \leq \frac{8}{d^3 n^2}.$$

Otteniamo che

$$\sum'_{w \in \Lambda} \frac{1}{|w|^3} \leq \frac{8}{d^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

□

Ora siamo in grado di dimostrare che la serie 5.7 converge assolutamente e uniformemente su ogni cerchio $|z| \leq r$. Per ogni r positivo dentro il cerchio del raggio $2r$ c'è solo un numero finito dei punti del reticolo. Considerando solo i punti $w \in \Lambda$ tali che $|w| \geq 2r$ le seguenti disuguaglianze sono valide

$$\left| \frac{1}{(z-w)^2} - \frac{1}{w^2} \right| = \left| \frac{2wz - z^2}{w^2(w-z)^2} \right|$$

$$= \frac{|z(2 - z/w)|}{|w|^3|1 - z/w|^2} \leq \frac{\frac{5}{2}r}{\frac{1}{4}|w|^3} \leq \frac{10r}{|w|^3} \quad \text{per } |z| \leq r, z \notin \Lambda.$$

Usando il lemma otteniamo la dimostrazione della convergenza.

Per z nel cerchio $|z| < r$, $z \notin \Lambda$ rappresentando

$$\begin{aligned} \wp(z; \omega_1, \omega_2) &:= \frac{1}{z^2} + \sum_{w \in \Lambda, 0 < |w| < 2r} \left[\frac{1}{(z-w)^2} - \frac{1}{w^2} \right] \\ &+ \sum_{w \in \Lambda, |w| \geq 2r} \left[\frac{1}{(z-w)^2} - \frac{1}{w^2} \right] \end{aligned}$$

vediamo che l'ultima somma è una funzione olomorfa per $|z| \leq r$. La prima somma, assieme al termine $1/z^2$ è una funzione meromorfa sul cerchio. Quindi la funzione di Weierstrass è meromorfa su \mathbb{C} con poli doppi nei punti del reticolo Λ .

Consideriamo ora la derivata

$$\wp'(z; \omega_1, \omega_2) = -2 \sum_{w \in \Lambda} \frac{1}{(z-w)^3}.$$

è chiaro che questa è una funzione doppiamente periodica: la traslazione $z \mapsto z + 2k\omega_1 + 2l\omega_2$ viene assorbita dalla rideterminazione degli indici della somma in $w = 2m\omega_1 + 2n\omega_2$,

$$m \mapsto m + k, \quad n \mapsto n + l.$$

Per dimostrare doppia periodicità della funzione di Weierstrass osserviamo prima che la differenza

$$\wp(z + 2k\omega_1 + 2l\omega_2) - \wp(z)$$

è una costante per ogni $k, l \in \mathbb{Z}$. Infatti, la derivata di questa differenza è uguale a zero:

$$\wp'(z + 2k\omega_1 + 2l\omega_2) - \wp'(z) = 0.$$

Per calcolare la costante $\wp(z + 2\omega_1) - \wp(z)$ basta sostituire $z = -\omega_1$ e osservare che la funzione di Weierstrass è una funzione pari,

$$\wp(-z) = \wp(z).$$

In modo simile si dimostra che $\wp(z + 2\omega_2) - \wp(z) = 0$. □

Deriviamo ora l'equazione differenziale per la funzione di Weierstrass. Introduciamo le seguenti notazioni

$$g_2 := 60 \sum'_w \frac{1}{w^4}, \quad g_3 := 140 \sum'_w \frac{1}{w^6}. \quad (5.8)$$

Come nel Lemma 5.14 è facile dimostrare la convergenza assoluta di queste serie.

Teorema 5.15 *La funzione di Weierstrass $\wp = \wp(z; \omega_1, \omega_2)$ soddisfa l'equazione differenziale*

$$(\wp')^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3. \quad (5.9)$$

Dimostrazione: Usando la serie geometrica

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{z}{w}\right)^2} = 1 + \frac{2z}{w} + \frac{3z^2}{w^3} + \frac{4z^3}{w^4} + \frac{5z^4}{w^5} + \dots$$

vediamo che la serie di Laurent intorno allo zero della funzione pari $\wp(z)$ ha la forma

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \frac{g_2}{20}z^2 + \frac{g_3}{28}z^4 + \dots$$

Quindi

$$\begin{aligned} (\wp'(z))^2 &= \frac{4}{z^6} - \frac{2g_2}{5z^2} - \frac{4g_3}{7} + \dots \\ (\wp(z))^3 &= \frac{1}{z^6} + \frac{3g_2}{20z^2} + \frac{3}{28}g_3 + \dots \end{aligned}$$

Quindi

$$\wp'^2 - 4\wp^3 = -\frac{g_2}{z^2} - g_3 + O(z^2)$$

da ciò si deriva che la funzione ellittica

$$\wp'^2 - 4\wp^3 + g_2\wp + g_3 = O(z^2)$$

in realtà è olomorfa in $z = 0$. Usando la doppia periodicità si deriva che questa funzione ellittica è olomorfa dappertutto. Quindi questa funzione è costante. Siccome la differenza $\wp'^2 - 4\wp^3 + g_2\wp + g_3$ è uguale a 0 per $z = 0$, questa costante è nulla. \square

Osservazione 5.16 *L'equazione (5.9) dice che i punti (x, y) del piano complesso con le coordinate*

$$\left. \begin{aligned} x &= \wp(z) \\ y &= \wp'(z) \end{aligned} \right\} \quad (5.10)$$

sono sulla curva ellittica

$$y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3. \quad (5.11)$$

*Più in avanti dimostriamo che in realtà la parametrizzazione (5.10) rappresentano **tutti** i punti della curva. Si dice che (5.10) è l'**uniformizzazione ellittica** della curva (5.11). Inoltre, verrà dimostrato che ogni curva ellittica con i coefficienti g_2, g_3 tali che*

$$g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$$

ammette l'uniformizzazione ellittica per un reticolo opportuno Λ .

Un'altro modo per spiegare perché la curva (5.11) è un toro sarà chiarito dallo studio della superficie di Riemann della funzione algebrica

$$y = \sqrt{4x^3 - g_2x - g_3}.$$

Consideriamo ora le mappe olomorfe tra i tori complessi

$$f : T(\omega_1, \omega_2) \rightarrow T(\omega'_1, \omega'_2) \quad (5.12)$$

Esercizio 5.17 Dimostrare che ogni mappa dei tori soddisfa la seguente proprietà

$$\begin{aligned} f(z + 2\omega_1) &= f(z) + 2m_{11}\omega'_1 + 2m_{12}\omega'_2 \\ f(z + 2\omega_2) &= f(z) + 2m_{21}\omega'_1 + 2m_{22}\omega'_2 \end{aligned}$$

con certi numeri interi m_{ij} . In particolare dimostrare che per le mappe olomorfe la funzione $f(z)$ deve essere lineare

$$f(z) = az + b, \quad a, b \in \mathbb{C}.$$

Esercizio 5.18 Dimostrare che i tori complessi $T(\omega_1, \omega_2)$ e $T(\omega'_1, \omega'_2)$ sono biolomorfi se e solo se i rapporti

$$\tau = \frac{\omega_2}{\omega_1}, \quad \tau' = \frac{\omega'_2}{\omega'_1}, \quad \text{Im } \tau > 0, \quad \text{Im } \tau' > 0$$

soddisfano l'equazione

$$\tau' = \frac{a\tau + b}{b\tau + c}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}). \quad (5.13)$$

Osservazione 5.19 Si può dimostrare che **ogni** struttura complessa sul toro bidimensionale è equivalente a un toro della forma $T(\omega_1, \omega_2)$. Dal risultato dell'ultimo esercizio si ottiene quindi che lo spazio delle strutture complesse sul toro, considerate modulo equivalenze biolomorfe, ha dimensione 1. Più generalmente, si può dimostrare che lo spazio delle strutture complesse (lo spazio di moduli) sulla sfera con g manichi ha dimensione complessa $3g - 3$ per $g > 1$.

5.4 Forme olomorfe e meromorfe sulle varietà complesse. Teorema dei residui

Definizione 5.20 Si dice che sulla varietà complessa M è data una 1-forma olomorfa ω se per ogni carta (U_α, z_α) è definita una 1-forma

$$\omega_\alpha = f_\alpha(z_\alpha) dz_\alpha$$

dove la funzione $f_\alpha(z_\alpha)$ è olomorfa su U_α ; sulle intersezioni delle carte $U_\alpha \cap U_\beta$ le forme ω_α e ω_β debbono essere legate dalle equazioni

$$f_\alpha(z_\alpha) = f_\beta(z_\beta) \frac{dz_\beta}{dz_\alpha}. \quad (5.14)$$

Le 1-forme meromorfe sono definite in modo simile, ma le funzioni f_α possono avere poli.

Esempi.

- Per $M = \mathbb{C}$ o, più generale, per qualsiasi dominio in \mathbb{C} ogni funzione $f(z)$ olomorfa su M definisce una 1-forma olomorfa $\omega = f(z)dz$.
- Sulla sfera di Riemann $M = \bar{\mathbb{C}}$ consideriamo la 1-forma

$$\omega = dz.$$

Vicino al punto $z = \infty$ bisogna cambiare il parametro locale, $z = 1/z'$. Otteniamo

$$\omega = -\frac{dz'}{z'^2}.$$

Quindi la 1-forma ω è *meromorfa* sulla sfera di Riemann: all'infinito ω ha il polo di ordine 2.

- Sul toro complesso $T(\omega_1, \omega_2)$ la 1-forma

$$\omega = dz$$

è olomorfa.

Le 1-forme sulle varietà complesse possono essere integrate su qualsiasi curva liscia a tratti γ : l'integrale sull'intersezione $\gamma_\alpha := \gamma \cap U_\alpha$ viene definito come

$$\int_{\gamma_\alpha} \omega_\alpha(z_\alpha(t)) \dot{z}_\alpha(t) dt;$$

sulle intersezioni delle carte i risultati delle integrazioni coincidono grazie a (5.14).

È possibile definire il bordo orientato di un compatto (è importante ricordare che le varietà complesse sono sempre orientate) e dimostrare l'analogo del Teorema di Cauchy. In particolare dal Teorema di Cauchy si ricava

Teorema 5.21 *Per una qualsiasi 1-forma olomorfa ω sulla varietà complessa M l'integrale*

$$\oint_{\gamma} \omega$$

prende lo stesso valore su circuiti omotopi γ .

Esempio. Sul toro $T(\omega_1, \omega_2)$ consideriamo i circuiti γ_1, γ_2 della forma

$$\gamma_k = \{z = 2t\omega_k \mid 0 \leq t \leq 1\}, \quad k = 1, 2.$$

Gli integrali

$$\oint_{\gamma_1} dz = 2\omega_1, \quad \oint_{\gamma_2} dz = 2\omega_2$$

sono diversi da 0. Quindi i circuiti γ_1 e γ_2 non sono omotopi al circuito banale (e nemmeno sono omotopi tra di loro).

Definiamo ora i **residui** di 1-forme su varietà complesse. Data 1-forma ω olomorfa su un certo intorno del punto $P \in M$ salvo eventualmente il punto stesso, sviluppiamo la 1-forma in serie di Laurent

$$\omega = \left(\frac{c_{-1}}{z} + \frac{c_{-2}}{z^2} + \dots \right) dz + \omega_1 \tag{5.15}$$

dove ω_1 è una 1-forma olomorfa anche nel punto $P = \{z = 0\}$.

Definizione 5.22 *Il coefficiente c_{-1} dello sviluppo (5.15) si chiama il **residuo** della 1-forma ω nel punto singolare isolato $P \in M$:*

$$\text{res } P\omega := c_{-1}.$$

Lemma 5.23 *Il residuo non dipende dalla scelta del parametro locale z .*

Dimostrazione: Integrando la 1-forma rispetto a un piccolo circuito γ attorno al punto P otteniamo

$$\oint_{\gamma} \omega = 2\pi i c_{-1}.$$

L'integrale nella parte sinistra non dipende dalla scelta del parametro locale z . □

Esempio. Una 1-forma sulla sfera di Riemann olomorfa intorno al punto $z = \infty$ può essere rappresentata come

$$\omega = f(z) dz, \quad f(z) = \sum_n c_n z^n$$

dove la serie converge per $|z| > R$ per un certo raggio positivo R . Il residuo di questa 1-forma nel punto $z = \infty$ è uguale a

$$\text{res}_{z=\infty} \omega = \text{res}_{z'=0} \sum_n c_n \frac{1}{z'^n} \left(-\frac{dz'}{z'^2} \right) = -c_{-1}$$

dove, come solito, $z = 1/z'$. Si osservi che per la funzione $f(z)$ il coefficiente c_{-1} corrisponde alla parte *regolare* al punto $z = \infty$.

Il risultato centrale della teoria dei residui di 1-forme sulle varietà complesse è

Teorema 5.24 (Teorema dei Residui.) *Data una 1-forma meromorfa su varietà complessa compatta M , allora*

$$\sum_{\omega(P)=\infty} \text{res}_P \omega = 0.$$

Dimostrazione: Siccome l'insieme dei poli di 1-forma meromorfa è discreto, allora su compatto M abbiamo solo numero finito dei poli P_1, P_2, \dots di ω . Per piccoli cerchi B_1, B_2, \dots attorno ai poli abbiamo

$$2\pi i \sum_k \text{res}_{P_k} \omega = \sum_k \oint_{B_k} \omega = - \oint_{\partial(M \setminus \cup_k B_k)} \omega = 0.$$

□

Esempi.

- Per un polinomio

$$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$$

consideriamo la 1-forma

$$\omega = \frac{dP(z)}{P(z)}.$$

Questa 1-forma è meromorfa sulla sfera di Riemann. Come sappiamo già, negli zeri del polinomio la 1-forma ha i poli semplici con i residui uguali alle molteplicità dei poli. Calcoliamo il residuo all'infinito. Per $z \rightarrow \infty$

$$\omega = n \frac{dz}{z} + \text{termini regolari} = -n \frac{dz'}{z'} + \text{termini regolari}$$

Allora

$$\operatorname{res}_{z=\infty}\omega = -n.$$

Applicando il teorema principale si vede subito che il numero delle radici contate con le molteplicità è uguale al grado del polinomio.

- Data una funzione ellittica $f(z)$ sul toro $T(\omega_1, \omega_2)$ consideriamo la 1-forma meromorfa

$$\omega = f(z) dz.$$

Applicando il teorema principale dimostriamo che la somma dei residui della funzione ellittica dentro il parallelogramma dei periodi (5.5) è uguale a zero. [Possiamo sempre assumere che sul bordo del parallelogramma Π non ci siano i poli della funzione $f(z)$.] Di conseguenza otteniamo che non esistano funzioni ellittiche con unico polo semplice dentro il parallelogramma dei periodi. Per l'esempio della funzione di Weierstrass abbiamo avuto un polo doppio per ogni parallelogramma dei periodi.

Esercizio 5.25 *Data una funzione ellittica $f(z)$ tale che $f(z) \neq 0, \infty$ sul bordo del parallelogramma dei periodi Π , dimostrare che il numero degli zeri della funzione $f(z)$ dentro Π è uguale al numero dei poli dentro Π (sia i poli che gli zeri sono contati con le loro molteplicità).*

Esercizio 5.26 *Data una funzione ellittica $f(z)$, chiamiamo a_1, \dots, a_n e b_1, \dots, b_n rispettivamente gli zeri e i poli della funzione $f(z)$ dentro il parallelogramma dei periodi Π (supponendo che non ci siano né zeri né poli della funzione sul bordo del parallelogramma); ogni zero/polo della molteplicità m viene scritto m volte. Dimostrare che*

$$a_1 + \dots + a_n - b_1 - \dots - b_n \in \Lambda.$$

[Hint: applicare il Teorema dei Residui alla 1-forma $\omega = \frac{z df(z)}{f(z)}$.]

Esercizio 5.27 *Dimostrare che ogni funzione ellittica $f(z)$ ammetta una rappresentazione*

$$f(z) = R_1(\wp(z)) + \wp'(z)R_2(\wp(z))$$

dove $R_1(p)$ e $R_2(p)$ sono due funzioni razionali.

[Hint: considerare prima il caso delle funzioni ellittiche pari.]

5.5 Problema di classificazione

Date due varietà complesse unidimensionali M, N si chiede: esiste un'equivalenza biolomorfa tra queste varietà? Visto che ogni equivalenza biolomorfa è un omeomorfismo, la condizione necessaria è che le varietà M e N siano omeomorfe. In particolare, se M compatto, connesso o semplicemente connesso, allora anche N deve essere compatto, connesso o semplicemente connesso rispettivamente. Però l'esistenza di un omeomorfismo tra le varietà non è sufficiente per l'esistenza di un'equivalenza biolomorfa:

Teorema 5.28 *Il piano complesso \mathbb{C} non è biolomorfo al cerchio $|z| < 1$.*

È facile costruire un omeomorfismo tra queste varietà: il punto z del cerchio $|z| < 1$ va al $w = \frac{z}{1-|z|^2} \in \mathbb{C}$.

Dimostrazione: Supponiamo che $f : \mathbb{C} \rightarrow \{|z| < 1\}$ è un'equivalenza biolomorfa. Allora $f(z)$ è una funzione olomorfa su \mathbb{C} e limitata $|f(z)| < 1$. Secondo il Teorema di Liouville $f \equiv \text{cost}$, cioè f non è 1-to-1. \square

Data una mappa olomorfa $f : M \rightarrow N$ una condizione necessaria per essere un'equivalenza biolomorfa è la seguente proprietà:

Definizione 5.29 *Si dice che la mappa $f : M \rightarrow N$ è **univalente** se $f(a_1) \neq f(a_2)$ per ogni $a_1, a_2 \in M$ tali che $a_1 \neq a_2$.*

La descrizione locale delle mappe univalenti può essere fatta in seguente modo.

Data una mappa olomorfa $f : M \rightarrow N$ tale che $f(a) = b$, $a \in M$, $b \in N$ introduciamo coordinate complesse z su M intorno al punto a e w su N intorno al punto b tali che

$$z(a) = 0, \quad w(b) = 0.$$

Localmente la mappa viene rappresentata da una funzione olomorfa

$$w = f(z), \quad f(0) = 0.$$

Se $df|_a \neq 0$, ovvero $f'(0) \neq 0$ allora la mappa f è un'isomorfismo locale, cioè, f è localmente univalente.

Definizione 5.30 *La molteplicità dello zero a $z = 0$ del differenziale $df = f'(z)dz$, $df|_a = f'(0)dz$, si chiama **l'indice di ramificazione** della mappa $f : M \rightarrow N$ al punto $a \in M$. Dato un punto $b \in N$ si dice che b è un **punto di diramazione** della mappa f se almeno per un punto $a \in M$ tale che $f(a) = b$ si ha $df|_a = 0$. Si dice che la mappa olomorfa f è **non ramificata** se $df \neq 0$ su tutta la varietà M .*

Esercizio 5.31 *Dimostrare che l'indice di ramificazione non dipende dalla scelta delle coordinate locali z e w .*

Se l'indice di ramificazione m della mappa f al punto $a \in M$ è maggiore di 0 (cioè, se $f(0) = f'(0) = 0$), allora ogni punto $b' \in N$ sufficientemente vicino a $b = f(a)$ ha esattamente $m + 1$ preimmagini a'_1, \dots, a'_m ,

$$f(a'_k) = b', \quad k = 1, \dots, m$$

(vedi Esercizio 3.25).

Corollario 5.32 *Ogni mappa olomorfa univalente è non ramificata.*

Il seguente esempio mostra che in generale una mappa non ramificata non è necessariamente univalente.

Esempio. Consideriamo la mappa $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$, $z \mapsto e^{2\pi iz}$. Questa mappa non è ramificata: la derivata $(e^{2\pi iz})' = 2\pi i e^{2\pi iz} \neq 0$ per ogni z . Però la mappa f non è univalente:

$$e^{2\pi iz} = e^{2\pi i(z+2\pi n)} \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Sul quoziente \mathbb{C}/\mathbb{Z} la mappa diventa l'equivalenza biolomorfa $\mathbb{C}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}^*$.

Dimostriamo ora una proprietà importante delle mappe olomorfe $f : D \rightarrow N$ definite sui domini aperti di una varietà complessa $D \subset M$ con i valori nella varietà complessa N .

Lemma 5.33 *L'immagine $f(D)$ del dominio D è un aperto in N .*

In particolare, l'insieme di valori di una funzione olomorfa sul dominio $D \in \mathbb{C}$ è un aperto in \mathbb{C} .

La dimostrazione è praticamente identica a quella di Teorema 3.28. □

Teorema 5.34 *Una mappa olomorfa suriettiva $f : M \rightarrow N$ di varietà complesse unidimensionale è un'equivalenza biolomorfa se e solo se f è univalente.*

Dimostrazione: La parte “solo se” dell'enunciato del teorema è ovvia. Dimostriamo che ogni mappa olomorfa univalente suriettiva è un'equivalenza biolomorfa. Basta dimostrare che la mappa inversa $f^{-1} : N \rightarrow M$ definita globalmente su N è olomorfa. Infatti, siccome la mappa è non ramificata, allora localmente vicino a ogni $b \in N$, $a \in M$ tale che $f(a) = b$ esiste una unica mappa olomorfa f^{-1} tale che $f^{-1}(b) = a$. Quindi, la mappa inversa globale deve essere olomorfa. □

Esercizio 5.35 *Data una mappa olomorfa univalente $f : M \rightarrow N$ delle varietà connesse compatte, dimostrare che f è un'equivalenza biolomorfa.*

Esercizio 5.36 *Data una funzione meromorfa f sulla varietà complessa connessa compatta M con l'unico polo semplice su M , dimostrare che f stabilisce un'equivalenza biolomorfa $f : M \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$.*

[Hint: per ogni valore complesso a applicare Teorema dei Residui alla 1-forma $\omega = \frac{df}{f-a}$.]

Il risultato principale di classificazione delle varietà complesse unidimensionali è

Teorema 5.37 (Teorema di Uniformizzazione) *Ogni varietà complessa unidimensionale connessa e semplicemente connessa è biolomorfo equivalente a una delle seguenti: 1) sfera di Riemann $\bar{\mathbb{C}}$; 2) piano complesso \mathbb{C} ; 3) cerchio $\mathbf{D} := \{|z| < 1\}$.*

La classificazione delle varietà complesse unidimensionali M non semplicemente connesse viene ridotta allo studio dei quozienti delle varietà semplicemente connesse \hat{M} rispetto ai sottogruppi $\Gamma \subset \text{Aut}(\hat{M})$ che agiscono discretamente e liberamente su \hat{M} , $M = \hat{M}/\Gamma$ secondo il seguente schema:

- Il rivestimento universale \hat{M} della varietà M ha una struttura naturale di una varietà complessa connessa tale che la proiezione $\hat{M} \rightarrow M$ è una mappa olomorfa non ramificata.
- L'azione del gruppo fondamentale $\pi_1(M)$ su \hat{M} dato dalle “deck transformations” del rivestimento universale definisce un sottogruppo nel gruppo $\text{Aut}(\hat{M})$ degli isomorfismi biolomorfi $\hat{M} \rightarrow \hat{M}$. Il gruppo Γ agisce su \hat{M} in modo discreto e libero, cioè, per ogni $a \in \hat{M}$ esiste un cerchio U_a con il centro a tale che i cerchi $\gamma(U_a)$ e U_a non si intersecano $\forall \gamma \in \Gamma$, $\gamma \neq 1$.

Questi risultati non verranno dimostrati nel presente corso. Le dimostrazioni possono essere trovate, ad esempio, sul libro: O.Forster, Lectures on Riemann surfaces. New York, NY, Springer-Verlag, 1981. Più avanti sarà dimostrato però il seguente risultato:

Teorema di Riemann. *Ogni dominio semplicemente connesso $D \subset \mathbb{C}$, $D \neq \mathbb{C}$ è biolomorfo al cerchio $|z| < 1$.*

Osservazione 5.38 *Ultimo commento generale: ogni equivalenza biolomorfa $f : M \rightarrow N$ è una mappa **conforme**, cioè, una corrispondenza biunivoca tra M e N che preserva gli angoli tra le curve lisce. Infatti, siccome il differenziale df non si annulla in ogni punto di M , allora questo differenziale è composto da una rotazione e un'omotetia con coefficiente non zero. Tali trasformazioni preservano gli angoli.*

5.6 Gruppi di automorfismi delle varietà complesse

Si dice che la mappa olomorfa $f : M \rightarrow M$ è un'automorfismo se esiste una mappa olomorfa inversa $f^{-1} : M \rightarrow M$. È chiaro che tutti automorfismi della varietà complessa M formano un gruppo $\text{Aut}(M)$. È anche chiaro che i gruppi di automorfismi $\text{Aut}(M)$ e $\text{Aut}(N)$ per due varietà M e N biolomorfe sono isomorfi.

Calcoliamo il gruppo di automorfismi per alcuni esempi di varietà complesse unidimensionali.

Esempio 1. Piano complesso.

Teorema 5.39 *Il gruppo $\text{Aut}(\mathbb{C})$ consiste in tutte trasformazioni lineari*

$$z \mapsto az + b, \quad a \neq 0.$$

Dimostrazione: Dato un automorfismo $z \mapsto f(z) \in \mathbb{C}$, la funzione $f(z)$ è olomorfa sul piano complesso. L'immagine $f(D')$ del dominio $D' := \{|z| > 1\}$ non interseca con $f(D)$ del cerchio $D := \{|z| < 1\}$. Quindi la funzione $f(z)$ non può avere una singolarità essenziale all'infinito. Infatti, l'insieme dei valori $f(D')$ non contiene l'aperto $f(D)$ e quindi non è denso in \mathbb{C} (cf. Lemma 4.17). Allora $f(z)$ ha il polo all'infinito e, quindi, $f(z)$ è un polinomio (v. Esercizio 5.10). Se n è il grado del polinomio allora l'equazione $f(z) = w$ ha n radici per quasi tutti i valori w . Allora per avere una mappa univalente bisogna che $n = 1$. \square

Esercizio 5.40 Dimostrare che ogni sottogruppo $\Gamma \subset \text{Aut}(\mathbb{C})$ delle trasformazioni che agiscono in modo discreto e libero su \mathbb{C} è uno di seguenti: 1) $\Gamma = \{z \mapsto z + 2n\omega \mid n \in \mathbb{Z}\}$ per un numero complesso ω . 2) $\Gamma = \{z \mapsto z + 2m\omega_1 + 2n\omega_2 \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$ per due numeri complessi ω_1, ω_2 tali che $\text{Im} \frac{\omega_2}{\omega_1} \neq 0$.

Esempio 2. Sfera di Riemann.

Teorema 5.41 Il gruppo $\text{Aut}(\bar{\mathbb{C}})$ consiste dalle omografie

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc \neq 0.$$

Dimostrazione: Come abbiamo già visto, le mappe olomorfe $f : \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$ sono funzioni razionali, $f = P(z)/Q(z)$. Se n è il massimo dei gradi dei polinomi $P(z), Q(z)$, allora l'equazione

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = w$$

ha n soluzioni per quasi tutti i valori w . Allora per avere una mappa univalente bisogna che $n = 1$. \square

Alcune proprietà del gruppo $\text{Aut}(\bar{\mathbb{C}})$.

• $\text{Aut}(\bar{\mathbb{C}}) \simeq PSL_2(\mathbb{C}) := SL_2(\mathbb{C})/\{\pm 1\}$. Per dimostrare questa identificazione basta controllare la composizione di due omografie

$$z' = \frac{az + b}{cz + d}, \quad z'' = \frac{a'z' + b'}{c'z' + d'}$$

viene data dal prodotto delle matrici

$$z'' = \frac{(aa' + b'c)z + a'b + b'd}{(ac' + cd')z + bc' + dd'}, \quad \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' + b'c & a'b + b'd \\ ac' + cd' & bc' + dd' \end{pmatrix}.$$

Inoltre, moltiplicazione della matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ per un fattore comune non zero non cambia

l'omografia. Possiamo quindi normalizzare la matrice in modo tale che $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 1$.

Rimane la libertà di moltiplicare la matrice per il fattore ± 1 .

• Le omografie con $c = 0$ sono le trasformazioni lineari di \mathbb{C} . Ogni omografia con $c \neq 0$ è la composizione di due traslazioni, un'omotetia e un'inversione

$$z_1 = z + \frac{d}{c}, \quad z_2 = \frac{1}{z_1}, \quad z_3 = \frac{bc - ad}{c^2} z_2, \quad w = z_3 + \frac{a}{c}.$$

Infatti basta rappresentare

$$w = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{a}{c} + \frac{(bc - ad)/c^2}{z + d/c}.$$

Da questa rappresentazione si deriva facilmente l'importante proprietà delle omografie: l'immagine di una retta o una circonferenza rispetto a un'omografia è di nuovo una retta o una circonferenza. Siccome le omografie sono mappe conformi, circonferenze/rette ortogonali vengono mappate in circonferenze/rette ortogonali.

- Il birapporto di quattro punti distinti z_1, z_2, z_3, z_4 è invariante rispetto alle omografie

$$\frac{z'_3 - z'_1}{z'_4 - z'_1} : \frac{z'_3 - z'_2}{z'_4 - z'_2} = \frac{z_3 - z_1}{z_4 - z_1} : \frac{z_3 - z_2}{z_4 - z_2}, \quad z'_i = \frac{az_i + b}{cz_i + d}, \quad i = 1, \dots, 4.$$

- Ogni omografia è univocamente determinata dalle immagini di tre punti arbitrari distinti.

Esempio 3. Cerchio $\mathbf{D} = \{|z| < 1\}$. Osserviamo prima che il cerchio è biolomorfo al semipiano superiore. L'equivalenza è stabilita dall'omografia

$$w = \frac{z - i}{z + i} \tag{5.16}$$

che mappa il **semipiano superiore** $\mathbf{H} := \{\text{Im } z > 0\}$ nel cerchio $|z| < 1$. Infatti, l'asse reale $\text{Im } z = 0$ viene mappato alla circonferenza $|w| = 1$. Per vederlo basta calcolare gli immagini di tre punti dell'asse reale

$$z = 0 \mapsto w = -1, \quad z = 1 \mapsto w = -i, \quad z = \infty \mapsto w = 1.$$

Quindi l'immagine del semipiano superiore coincide o con la parte interna del cerchio oppure con quella esterna. Siccome il punto $z = i$ del semipiano superiore viene mappato a $w = 0$, otteniamo il risultato voluto.

Siccome le varietà biolomorficamente equivalenti hanno gruppi di automorfismi isomorfi, otteniamo che

$$\text{Aut}(\mathbf{D}) \simeq \text{Aut}(\mathbf{H}).$$

Per costruire il secondo gruppo prima si osservi che ogni omografia con i coefficienti *reali*

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad ad - bc = 1$$

mappa il semipiano superiore in se stesso. Infatti, l'immagine dell'asse reale è l'asse reale e, inoltre, la parte immaginaria

$$\text{Im} \frac{ai + b}{ci + d} = \frac{ad - bc}{c^2 + d^2} > 0.$$

Otteniamo che

$$PSL_2(\mathbb{R}) \subset \text{Aut}(\mathbf{H}) \simeq \text{Aut}(\mathbf{D}). \tag{5.17}$$

Teorema 5.42 $\text{Aut}(\mathbf{H}) = PSL_2(\mathbb{R})$.

Dimostrazione: Chiamiamo $G := PSL_2(\mathbb{R})$ il sottogruppo del gruppo $\text{Aut}(\mathbf{H})$ costruito come prima. Questo gruppo agisce in modo transitivo sul semipiano superiore. Infatti, applicando la trasformazione lineare $z \mapsto az + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$ a $z = i$ otteniamo qualsiasi punto

$ai + b$ del semipiano superiore. Quindi basta dimostrare che anche il sottogruppo stazionario $G_0 \subset \text{Aut}(\{\text{Im } z > 0\})$ del punto $z = i$,

$$G_0 = \{f \in \text{Aut}(\mathbf{H}) \mid f(i) = i\}$$

è un sottogruppo di G . Passando dal semipiano al cerchio con la trasformazione (5.16), il problema si riduce alla determinazione del sottogruppo stazionario del punto $w = 0$ nel gruppo $\text{Aut}(\{|w| < 1\})$.

Lemma 5.43 *Se un'automorfismo $z \mapsto f(z)$ del cerchio \mathbf{D} è tale che $f(0) = 0$ allora $f(z) = e^{i\theta}z$ per un numero reale θ .*

Dimostrazione: Data una mappa del cerchio nel se stesso abbiamo $|f(z)| < 1$ per ogni $|z| < 1$. Secondo il Lemma di Schwarz, dato che $f(0) = 0$, abbiamo quindi la disuguaglianza più forte

$$|f(z)| \leq |z| \quad \text{per } |z| < 1.$$

Applicando il lemma stesso alla mappa inversa abbiamo un'altra disuguaglianza

$$|z| \leq |f(z)|.$$

Quindi $|f(z)| = |z|$. In tal caso Lemma di Schwarz ci dice che $f(z) = cz$ con $|c| = 1$. Questo dimostra il Lemma e anche il Teorema. \square

Esercizio 5.44 *Dimostrare che il gruppo di automorfismi del cerchio consiste di tutte le omografie della forma*

$$z \mapsto e^{i\theta} \frac{z + a}{1 + \bar{a}z}, \quad \theta \in \mathbb{R}, \quad |a| < 1.$$

Inoltre dimostrare che gruppo degli automorfismi di \mathbf{D} è isomorfo al gruppo

$$SU(1, 1) = \left\{ \begin{pmatrix} a & \bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix} \mid |a|^2 - |b|^2 = 1 \right\}$$

delle trasformazioni lineari dello spazio $\mathbb{C}^2 = \{(z_1, z_2)\}$ che preservano la forma quadratica $|z_1|^2 - |z_2|^2$ e l'orientazione.

5.7 Geometria complessa e geometria differenziale

Introduciamo la *metrica iperbolica* sul semipiano superiore

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2} = -4 \frac{dz d\bar{z}}{(z - \bar{z})^2}, \quad z = x + iy, \quad \text{Im } z > 0. \quad (5.18)$$

Questa metrica è stata introdotta da Poincaré per costruire un modello di geometria di Lobachevsky. Le geodetiche di questa metrica sono le semicirconferenze con i centri sull'asse reale $y = 0$ oppure, nel caso limite, le semirette verticali. La curvatura gaussiana della metrica (5.18) è costante uguale a -1 .

La metrica di Poincaré introduce sulle semipiano superiore una struttura di varietà Riemanniana \mathbf{H} . Si ricordi che le *isometrie* di una varietà Riemanniana sono i diffeomorfismi $f : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}$ tali che

$$f^* ds^2 = ds^2.$$

Teorema 5.45 Ogni automorfismo della varietà complessa \mathbf{H} definisce un'isometria della varietà Riemanniana \mathbf{H} . Viceversa, ogni isometria della varietà Riemanniana \mathbf{H} che preserva l'orientazione è data da un automorfismo della varietà complessa \mathbf{H} .

Dimostrazione: Per l'automorfismo complesso

$$z' = \frac{az + b}{cz + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad ad - bc = 1$$

abbiamo

$$dz' = \frac{dz}{(cz + d)^2}, \quad d\bar{z}' = \frac{d\bar{z}}{(c\bar{z} + d)^2}, \quad z' - \bar{z}' = \frac{z - \bar{z}}{(cz + d)(c\bar{z} + d)}.$$

Quindi

$$-4 \frac{dz' d\bar{z}'}{(z' - \bar{z}')^2} = -4 \frac{dz d\bar{z}}{(z - \bar{z})^2}.$$

Abbiamo dimostrato la prima parte del teorema. La seconda parte segue dai risultati generali della geometria differenziale: ogni isometria f che preserva l'orientazione di una varietà Riemanniana bidimensionale, un punto della varietà stessa e un vettore tangente alla varietà nel punto fisso, è l'identità. \square

Esercizio 5.46 Usando l'isomorfismo

$$w = \frac{z - i}{z + i}$$

del semipiano superiore $\mathbf{H} = \{\text{Im} z > 0\}$ con il cerchio $\mathbf{D} = \{|w| < 1\}$ dimostrare che la varietà Riemanniana \mathbf{H} con la metrica (5.18) è isometrica alla varietà Riemanniana \mathbf{D} con la metrica

$$ds^2 = 4 \frac{dw d\bar{w}}{(1 - |w|^2)^2}. \quad (5.19)$$

Esercizio 5.47 Usando la proiezione stereografica dimostrare che la metrica della sfera $x^2 + y^2 + u^2 = 1$ nello spazio euclideo \mathbb{R}^3

$$ds^2 = (dx^2 + dy^2 + du^2)_{x^2+y^2+u^2=1}$$

nelle coordinate complesse sulla sfera di Riemann prende la forma

$$ds^2 = 4 \frac{dz d\bar{z}}{(1 + |z|^2)^2}. \quad (5.20)$$

Inoltre, dimostrare che il sottogruppo in $\text{Aut}(\bar{\mathbb{C}})$ di isometrie della varietà Riemanniana $\bar{\mathbb{C}}$ è isomorfo al gruppo $SU(2)/\{\pm 1\}$:

$$z \mapsto \frac{az - \bar{b}}{bz + \bar{a}}, \quad SU(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix} \right\}.$$

5.8 Superficie di Riemann

Definizione 5.48 *Data una varietà complessa N , una superficie di Riemann sopra N è una coppia (M, f) dove M è una varietà complessa connessa e $f : M \rightarrow N$ è una mappa olomorfa suriettiva.*

I casi più importanti sono $N = \mathbb{C}$ o $N = \bar{\mathbb{C}}$.

Come abbiamo visto prima, localmente, vicino a un punto $a \in M$, la mappa olomorfa f è un isomorfismo locale (vicino a un punto generico a , dove $df|_a \neq 0$) oppure la mappa f è localmente $(m+1) : 1$ se nel punto a il differenziale df ha lo zero del ordine m . Gli immagini $f(a) \in N$ dei punti di secondo tipo si chiamano *punti di diramazione* della superficie di Riemann. I punti di diramazione formano un sottoinsieme discreto della varietà complessa N . In particolare per le superficie di Riemann sopra sfera di Riemann il numero dei punti di diramazione è sempre finito.

Teorema 5.49 *Data una superficie di Riemann (M, f) sopra una varietà complessa connessa N , chiamiamo $W \subset N$ l'insieme di tutti i punti di diramazione. Supponiamo che la preimmagine $f^{-1}(b)$ di ogni punto $b \in N \setminus W$ sia finito. Allora per qualsiasi due punti $b, b' \in N \setminus W$ abbiamo $\# f^{-1}(b') = \# f^{-1}(b)$.*

Dimostrazione: Siccome l'insieme W è discreto in N , quindi $N \setminus W$ è un dominio connesso. La restrizione

$$f : M \setminus f^{-1}(W) \rightarrow N \setminus W$$

quindi è una mappa non ramificata delle varietà complesse connesse. Allora il risultato del teorema viene ricavato dal seguente

Lemma 5.50 *Data una mappa olomorfa suriettiva non ramificata $f : X \rightarrow Y$ delle varietà complesse connesse X, Y tale che la preimmagine di ogni punto $b \in Y$ è finito, allora per ogni curva liscia $\gamma : [0, 1] \rightarrow Y$ e ogni punto $a \in X$ tale che $f(a) = \gamma(0)$ esiste unica curva $\hat{\gamma} : [0, 1] \rightarrow X$ tale che*

$$\hat{\gamma}(0) = a, \quad f(\hat{\gamma}(t)) = \gamma(t) \quad \forall t \in [0, 1].$$

Inoltre, date due curve omotope $\gamma_1 \sim \gamma_2$, $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$, $\gamma_1(1) = \gamma_2(1)$, allora i punti finali dei sollevamenti $\hat{\gamma}_1, \hat{\gamma}_2$ tali che $\hat{\gamma}_1(0) = \hat{\gamma}_2(0)$ sono identici:

$$\hat{\gamma}_1(1) = \hat{\gamma}_2(1).$$

Dimostrazione: L'unicità della curva $\hat{\gamma}$ è ovvia. Dimostriamo l'esistenza. Per ogni punto $\gamma(t)$ della curva esiste un piccolo cerchio U_t tale che la mappa f è un isomorfismo locale

$$f : V(a_i(t)) \rightarrow U_t \quad \text{per ogni} \quad a_i(t) \in f^{-1}(\gamma(t)).$$

Grazia alla compattezza della curva γ , possiamo coprirla con un numero finito di tali cerchi. Sopra ogni cerchio U_t la preimmagine $f^{-1}(\gamma \cap U_t)$ è un insieme disgiunto delle curve su M . Incollando queste piccole curve tutte insieme dimostriamo che la preimmagine $f^{-1}(\gamma)$ è un

insieme finito delle curve in X . Scegliendo quella che passa attraverso a per $t = 0$, otteniamo la $\hat{\gamma}$.

Per dimostrare il secondo enunciato del lemma bisogna costruire il sollevamento $\hat{F}(t, s)$ dell'omotopia $F(t, s)$ tra le curve γ_1 e γ_2 ,

$$F(t, 0) = \gamma_1(t), \quad F(t, 1) = \gamma_2(t), \quad F(0, s) \equiv \gamma_1(0) = \gamma_2(0), \quad F(1, s) \equiv \gamma_1(1) = \gamma_2(1)$$

tale che

$$\hat{F}(t, 0) = \hat{\gamma}_1(t), \quad \hat{F}(t, 1) = \hat{\gamma}_2(t), \quad \hat{F}(0, s) \equiv \hat{\gamma}_1(0) = \hat{\gamma}_2(0).$$

La costruzione del sollevamento dell'omotopia lasciamo come un esercizio. □

Fine della dimostrazione del teorema: collegando i punti b e b' con una curva $\gamma \in N \setminus W$, possiamo univocamente costruire k curve $\hat{\gamma}_1, \dots, \hat{\gamma}_k$ tale che

$$\hat{\gamma}_i(0) = a_i, \quad f(\hat{\gamma}_i(t)) = \gamma(t) \quad \forall t \in [0, 1]$$

dove $f^{-1}(b) = a_1 \cup a_2 \cup \dots \cup a_k$. Siccome $f(\hat{\gamma}_i(1)) = b'$, allora le curve stabiliscono una corrispondenza 1-a-1 tra gli insiemi $f^{-1}(b)$ e $f^{-1}(b')$. □

Osservazione 5.51 *Si può dimostrare che la mappa f ristretta a*

$$f : M \setminus f^{-1}(W) \rightarrow N \setminus W \tag{5.21}$$

è un rivestimento.

Definizione 5.52 *Data una superficie di Riemann (M, f) sopra una varietà complessa connessa N , tale che la preimmagine di ogni punto $b \in N$ sia finito, il numero k dei punti $f^{-1}(b)$ per $b \in N$ che non è un punto di diramazione si chiama **numero dei fogli della superficie**.*

Esempio 1. Ogni polinomio $P(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$ realizza $\bar{\mathbb{C}}$ come una superficie di Riemann sopra $\bar{\mathbb{C}}$. I punti di diramazione sono i valori $z = \lambda$ tali che il polinomio $P(z) - \lambda$ ha almeno una radice multipla. Inoltre $z = \infty$ è un punto di diramazione di indice $n - 1$. Questa superficie ha n fogli.

Esempio 2. La mappa $w = e^{2\pi iz}$ realizza il piano complesso \mathbb{C} come una superficie di Riemann sopra \mathbb{C} . Lo zero $w = 0$ è l'unico punto di diramazione di questa superficie di Riemann. Il numero di fogli di questa superficie è infinito.

Esercizio 5.53 *Dimostrare che la funzione di Weierstrass $w = \wp(z) = \wp(z; \omega_1, \omega_2)$ realizza il toro complesso $T(\omega_1, \omega_2)$ come una superficie di Riemann sopra \mathbb{C} . Questa superficie ha due fogli e quattro punti di diramazione*

$$w = e_1 = \wp(\omega_1), \quad w = e_2 = \wp(\omega_1 + \omega_2), \quad w = e_3 = \wp(\omega_3), \quad w = \infty$$

Esercizio 5.54 *Data una superficie di Riemann $f : M \rightarrow N$ con il numero finito di fogli tale che: 1) la varietà N è semplicemente connessa, e 2) la mappa f non è ramificata, dimostrare che f è un'equivalenza biolomorfa.*

[Hint: usare Lemma 5.50 per dimostrare che la mappa inversa f^{-1} definita localmente è univalente.]

5.9 Curve algebriche e superficie di Riemann

Si consideri le curve in \mathbb{C}^2 definite dalle equazioni

$$\Gamma := \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid F(x, y) = 0\} \quad (5.22)$$

dove $F(x, y)$ è un polinomio in due variabili complesse x, y . Un caso particolare è

$$F(x, y) = y^n + a_1(x)y^{n-1} + \dots + a_n(x) \quad (5.23)$$

dove $a_1(x), \dots, a_n(x)$ sono polinomi in una variabile x .

Definizione 5.55 *Si dice che la curva (5.22) è **non singolare** se il “gradiente” complesso $(F_x(x, y), F_y(x, y))$ è diverso da zero per ogni punto $(x, y) \in \Gamma$.*

Su una curva algebrica non singolare si può introdurre una struttura naturale di una varietà complessa unidimensionale. Per semplificare le notazioni consideriamo il caso più specifico delle curve definite da polinomi della forma (5.23).

Dato un punto $(x_0, y_0) \in \Gamma$ si considerino i seguenti due casi.

Caso 1: $F_y(x_0, y_0) \neq 0$. Allora per $\epsilon > 0$ sufficientemente piccolo esiste ed è unica la funzione olomorfa $y = y(x)$ definita per $|x - x_0| < \epsilon$ tale che

$$F(x, y(x)) \equiv 0, \quad y(x_0) = y_0$$

(versione complessa del teorema della funzione implicita - vedi l'Esercizio 2.11). Usiamo x come coordinata complessa sull'aperto intorno a (x_0, y_0) .

Caso 2: $F_x(x_0, y_0) \neq 0$. Usando lo stesso ragionamento possiamo prendere un piccolo $\epsilon > 0$ tale che per $|y - y_0| < \epsilon$ esiste ed è unica la funzione olomorfa $x = x(y)$ tale che

$$F(x(y), y) \equiv 0, \quad x(y_0) = x_0.$$

Sulle intersezioni, dove $F_x(x, y) \neq 0, F_y(x, y) \neq 0$ degli aperti di tipo 1 e 2 abbiamo due tipi di coordinate complesse. Infatti, possiamo usare sia x che y come coordinata complessa. Le funzioni di transizione sono olomorfe

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)}, \quad \frac{dx}{dy} = -\frac{F_y(x, y)}{F_x(x, y)}.$$

Secondo l'ipotesi di non singolarità, gli aperti di tipo 1 e tipo 2 coprono tutta la curva Γ . Quindi Γ ammette una struttura complessa.

Alla curva complessa non singolare si associa una superficie di Riemann

$$f : \Gamma \rightarrow \mathbb{C}, \quad f(x, y) = x \in \mathbb{C}. \quad (5.24)$$

I punti di diramazione di questa superficie sono i numeri complessi x tali che

$$F(x, y) = 0 \quad \text{e} \quad F_y(x, y) = 0.$$

Questi valori possono essere determinati dall'equazione

$$\Delta(x) = 0, \quad \Delta(x) := \gcd(F(x, y), F_y(x, y))$$

(il polinomio $\Delta(x)$ si chiama *il discriminante* del polinomio $F(x, y)$). Per $\Delta(x_0) \neq 0$ l'equazione $F(x_0, y) = 0$ ha esattamente n radici distinte. Quindi la superficie di Riemann (5.24) ha n fogli.

Osservazione 5.56 *Si può associare una superficie di Riemann a qualsiasi curva algebrica irriducibile $F(x, y) = 0$, ma la costruzione diventa più complicata.*

Esempio 1. La curva

$$\Gamma := \{y^2 = x - a\}. \quad (5.25)$$

Abbiamo $F = y^2 - x + a$,

$$F_x = -1, \quad F_y = 2y.$$

Allora questa curva è sempre non singolare. Il punto di diramazione per la proiezione $(x, y) \rightarrow x$ è

$$x = a, \quad y = 0.$$

Fuori da questo punto la variabile x può servire come coordinata complessa locale. I due rami della curva possono essere rappresentati tramite funzioni olomorfe per $x \neq a$

$$y = \sqrt{x - a}, \quad y = -\sqrt{x - a}.$$

Vicino al punto di diramazione la coordinata complessa è y . La curva complessa viene rappresentata localmente come

$$x = y^2 + a.$$

Possiamo dire che la funzione “multivalued” $y = \pm\sqrt{x - a}$ diventa una funzione olomorfa ben definita sulla superficie di Riemann (5.25) come la proiezione sull'altro asse

$$(x, y) \mapsto y.$$

Si può rappresentare la struttura di varietà sulla superficie di Riemann (5.25) nel seguente modo. Consideriamo due copie identiche F_1, F_2 del piano complesso con il taglio lungo la semiretta $(-\infty, a]$. Identifichiamo con i simboli “+” e “-” i due lati del taglio. Allora, la superficie di Riemann si ottiene incollando il lato “+” del foglio F_1 con il lato “-” del foglio F_2 (Fig. 1).

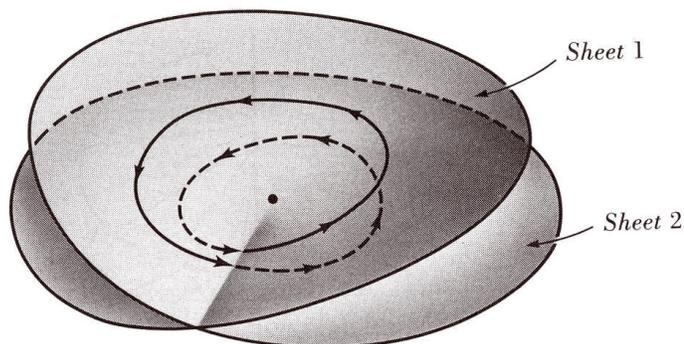


Fig.1: La superficie di Riemann $y^2 = x$

Infatti, sollevando la curva

$$x = \gamma(t) = a - e^{2\pi t}, \quad t \in [0, 1]$$

sulla superficie partendo dal punto $x = a - 1, y = -i$ si ottiene la curva $\hat{\gamma}$ su Γ della seguente forma

$$x = a - e^{2\pi t}, \quad y = -i e^{\pi t}.$$

Allora il punto finale della curva $\hat{\gamma}(1)$ è $x = a - 1, y = i$. Se invece partiamo dal punto $x = a - 1, y = i$, allora arriviamo a $\hat{\gamma}(1) = (x = a - 1, y = -i)$.

Osservazione 5.57 *In generale si ottiene la superficie di Riemann $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ con k fogli incollando k copie del piano complesso con i tagli che vanno dai punti di diramazione all'infinito. La regola dell'identificazione dei lati dei tagli viene definita dalla struttura delle "deck transformations" del rivestimento*

$$f : M \setminus f^{-1}(W) \rightarrow \mathbb{C} \setminus W$$

dove W è l'insieme dei punti di diramazione.

La superficie di Riemann (5.25) può essere *compattificata* aggiungendo un punto all'infinito nel seguente modo. Facendo la trasformazione

$$x' = \frac{1}{x}, \quad y' = \frac{1}{y}$$

riscriviamo l'equazione della curva complessa nella forma

$$y'^2 = \frac{x'}{1 - ax'} = x' + ax'^2 + \dots$$

Per piccoli x' (ovvero, vicino a $x = \infty$) questa curva ha il punto di diramazione solo per $x' = 0$, cioè, per $x = \infty$. La coordinata complessa locale vicino a questo punto di diramazione può essere scelta come

$$\xi := \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Le coordinate x' e y' sono funzioni di ξ olomorfe per $|\xi|$ sufficientemente piccolo:

$$x' = \xi^2, \quad y' = \xi + \frac{a}{2}\xi^3 + O(\xi^5).$$

La superficie compatta è biomorfa alla sfera di Riemann. La mappa $g : \Gamma \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$ che stabilisce l'equivalenza viene fatta così:

$$g(x, y) = y, \quad x \neq \infty, \quad g(\infty) = \infty \in \bar{\mathbb{C}}.$$

Esempio 2. La curva algebrica

$$x^2 + y^2 = a^2 \tag{5.26}$$

è non singolare per $a \neq 0$. I punti di diramazione rispetto alla proiezione $(x, y) \rightarrow x$ sono due:

$$x = \pm a, \quad y = 0.$$

Vicino ai punti di diramazione possiamo usare le variabili

$$\xi_{\pm} = \sqrt{x \mp a}$$

come le coordinate complesse locali. La superficie di Riemann si ottiene incollando due copie (fogli) dei piani complessi \mathbb{C} con il taglio lungo il segmento $[-a, a]$ identificando il lato “+” del taglio su un foglio con il lato “-” del taglio sull’altro foglio e viceversa.

Consideriamo ora la compattificazione della superficie di Riemann. In questo caso bisogna aggiungere due punti ∞_+ e ∞_- . Infatti, dopo la sostituzione $x' = 1/x$, $y' = 1/y$ si ottiene

$$y'^2 = -x'^2 + a^2(x'y')^2.$$

In questo caso possiamo scegliere $\xi = x' = 1/x$ come la coordinata locale vicino al punto $x = \infty$ per entrambi i rami della superficie:

$$x' = \xi, \quad y' = \pm i \left(\xi + \frac{a^2}{2} \xi^3 + O(\xi^5) \right).$$

Anche in questo caso la superficie di Riemann è biolomorfa alla sfera di Riemann. L’equivalenza viene stabilita dalla seguente *uniformizzazione razionale* della superficie:

$$x = a \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad y = \frac{2at}{1+t^2}, \quad t \in \bar{\mathbb{C}}.$$

Possiamo dire, come prima, che la funzione algebrica $y = \pm \sqrt{a^2 - x^2}$ “multivalued” diventa una funzione meromorfa ben definita su Γ con due poli semplici nei punti ∞_+ e ∞_- .

Esempio 3. Si consideri la curva complessa definita nello spazio \mathbb{C}^2 dalla equazione

$$x = e^y, \quad (x, y) \in \mathbb{C}^2.$$

Questa non è una curva algebrica; ciononostante possiamo applicare il procedimento come quello sopra per descrivere la struttura della superficie di Riemann sopra \mathbb{C}^* . Il numero dei fogli di questa superficie è infinito. La variabile x può essere usata ovunque come coordinata complessa locale. L’altra coordinata y diventa una funzione olomorfa $y = y(x)$ definita localmente, ovvero $y =$ uno dei rami della funzione $\log x$. Globalmente la funzione $y = y(x)$ non è ben definita su \mathbb{C}^* ; diventa però una funzione olomorfa sulla superficie di Riemann considerando semplicemente la proiezione $(x, y) \mapsto y$.

La struttura della superficie di Riemann può essere descritta anche nel seguente modo. Consideriamo un numero infinito di fogli F_n , $n \in \mathbb{Z}$ identici che sono copie del piano complesso con il taglio lungo il semiasse negativo. Su ogni foglio definiamo il ramo del logaritmo mettendo

$$y = \log x + 2\pi i n \quad \text{sul foglio } F_n.$$

In questa formula $\log x$ è il ramo principale del logaritmo che prende valori reali sull’asse reale. Indichiamo con “+” il lato superiore del taglio e con “-” quello inferiore. Allora, per

costruire la superficie di Riemann bisogna identificare il lato “+” del foglio F_n con il lato “-” del foglio F_{n+1} per ogni $n \in \mathbb{Z}$ (Fig. 2).

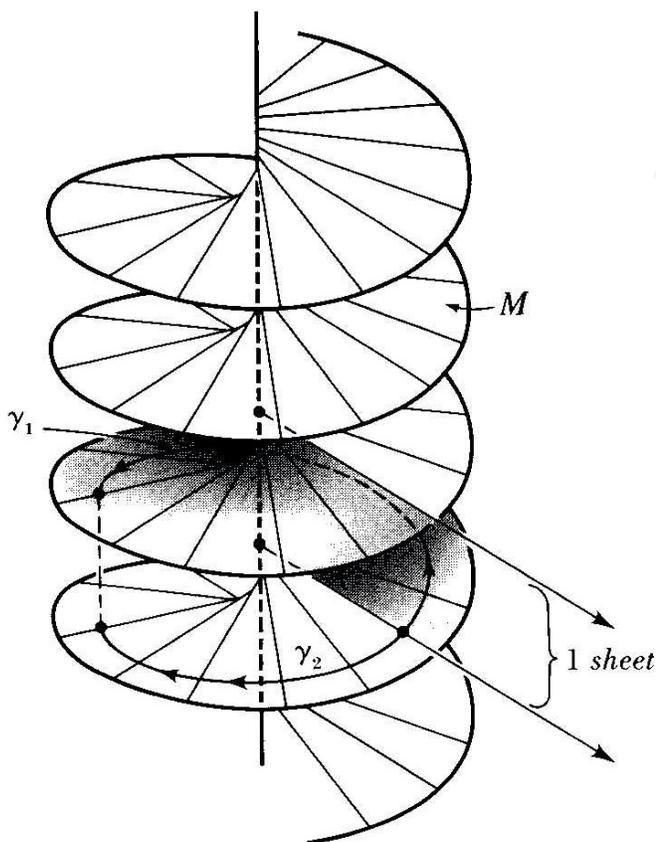


Fig.2: La superficie di Riemann del logaritmo, ovvero la curva $e^y = x$

Infatti, il sollevamento $\hat{\gamma}$ della circonferenza

$$x = -e^{2\pi it}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

sulla superficie di Riemann con il punto iniziale

$$\hat{\gamma}(0) = (x = -1, \quad y = -\pi i + 2\pi in)$$

da

$$\hat{\gamma}(t) = (x = -e^{2\pi it}, \quad y = -\pi i + 2\pi i(n + t)).$$

Allora

$$\hat{\gamma}(1) = (x = -1, \quad y = -\pi i + 2\pi i(n + 1)).$$

Siccome la funzione e^y ha una singolarità essenziale per $y = \infty$, la superficie di Riemann non ammette compattificazione all'infinito.

Esempio 4. Si consideri la curva ellittica

$$\Gamma : \{y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3\}. \quad (5.27)$$

Abbiamo

$$F_x = 12x^2 - g_2, \quad F_y = -2y.$$

Quindi i candidati per i punti singolari vengono trovati dal sistema (5.27) insieme alle equazioni

$$y = 0, \quad 12x^2 - g_2 = 0.$$

Questo sistema è compatibile se e solo se

$$g_2^3 - 27g_3^2 = 0. \quad (5.28)$$

Questo è il *discriminante* del polinomio $4x^3 - g_2x - g_3$. L'equazione (5.28) è valida se e solo se il polinomio in questione ha radici multiple.

Supponiamo che

$$g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0.$$

In tal caso tutte le radici e_1, e_2, e_3 del polinomio

$$4x^3 - g_2x - g_3 = 4(x - e_1)(x - e_2)(x - e_3) = 0$$

sono distinte. Per $x \neq e_i$ possiamo usare la variabile x come coordinata complessa locale sulla superficie di Riemann; otteniamo due rami della superficie

$$y = \pm \sqrt{4x^3 - g_2x - g_3}.$$

Nei punti di diramazione $x = e_i, y = 0, i = 1, 2, 3$ possiamo usare

$$\xi_i = \sqrt{x - e_i}$$

rispettivamente come coordinate locali: infatti, ad esempio, vicino al punto $x = e_1$ la curva complessa ammette la parametrizzazione

$$x = e_1 + \xi_1^2, \quad y = 2\xi_1 \sqrt{(e_1 - e_2 + \xi_1^2)(e_1 - e_3 + \xi_1^2)} \quad (5.29)$$

con funzioni olomorfe per piccoli valori di $|\xi_1|$.

All'infinito bisogna aggiungere un punto ∞ per ottenere la compattificazione della superficie di Riemann. Introducendo il parametro locale

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

per $x \rightarrow \infty$ parametrizziamo la curva come

$$x' = \frac{1}{x} = \xi^2, \quad y' = \frac{1}{y} = \frac{1}{2}\xi^3 + \frac{1}{8}g_2\xi^7 + \dots$$

La struttura topologica della superficie si ottiene incollando due copie del piano complesso con i tagli $[e_1, e_2]$ e $[e_3, \infty]$ (supponiamo che i tagli non si intersechino) identificando il lato “+” di ogni taglio su un foglio con il lato “-” dello stesso taglio sull'altro foglio (Fig. 3).

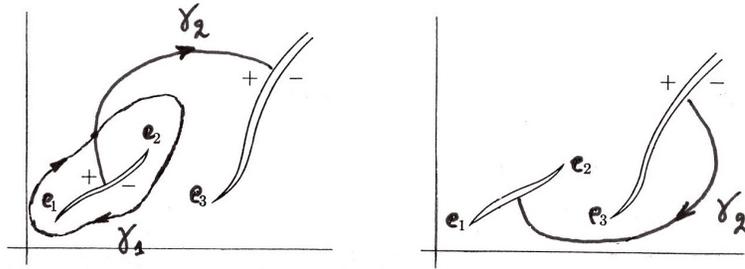


Fig.3: Due fogli della superficie di Riemann $y^2 = 4(x - e_1)(x - e_2)(x - e_3)$

È chiaro che la superficie di Riemann compatta è topologicamente equivalente al toro (Figg. 4-9).

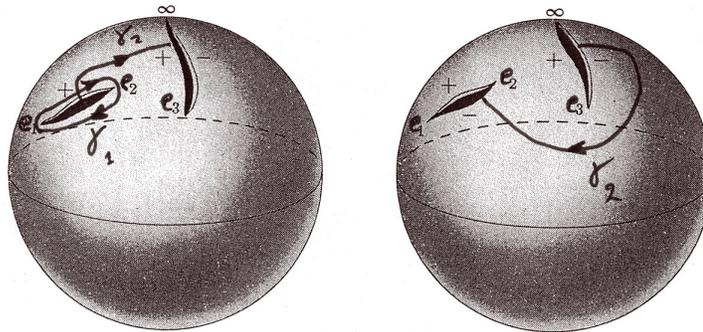


Fig.4: Topologia della superficie di Riemann ellittica

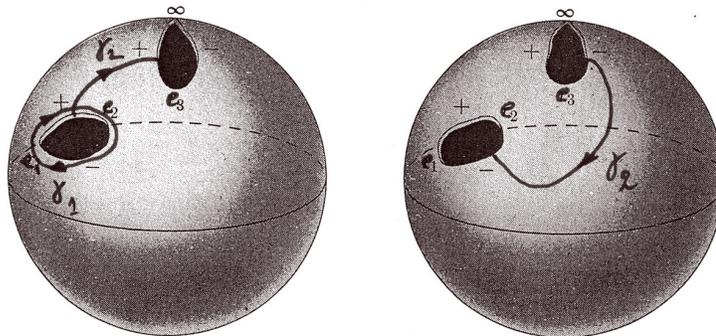


Fig.5

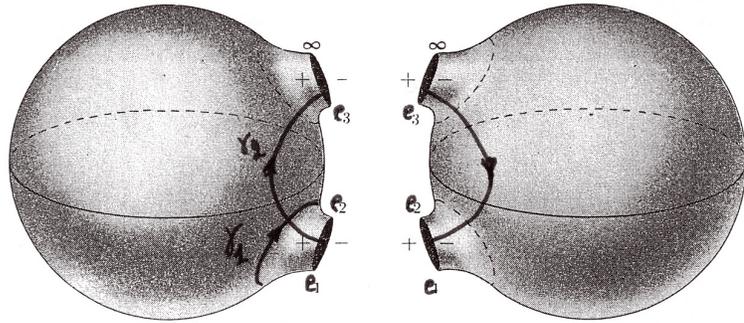


Fig.6

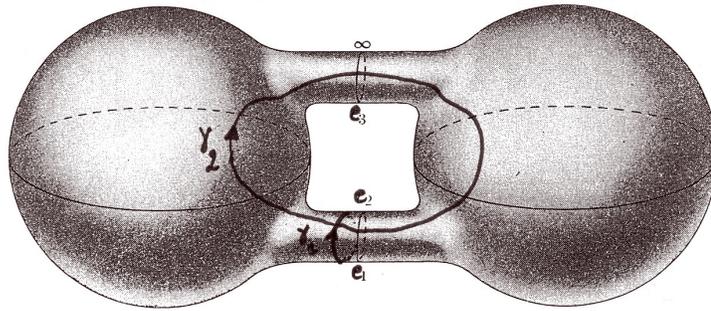


Fig.7

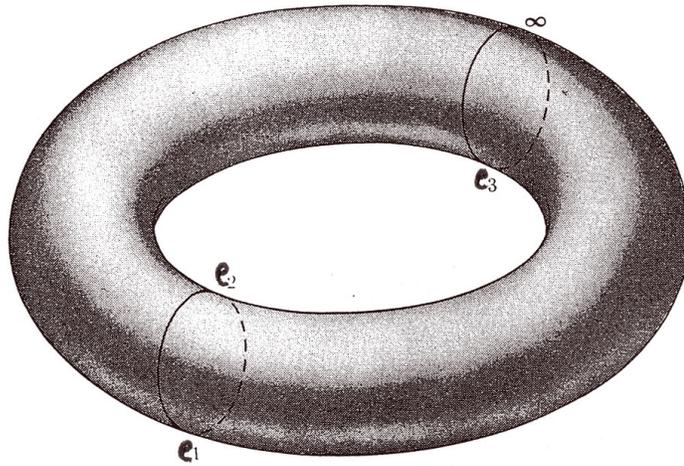


Fig.8

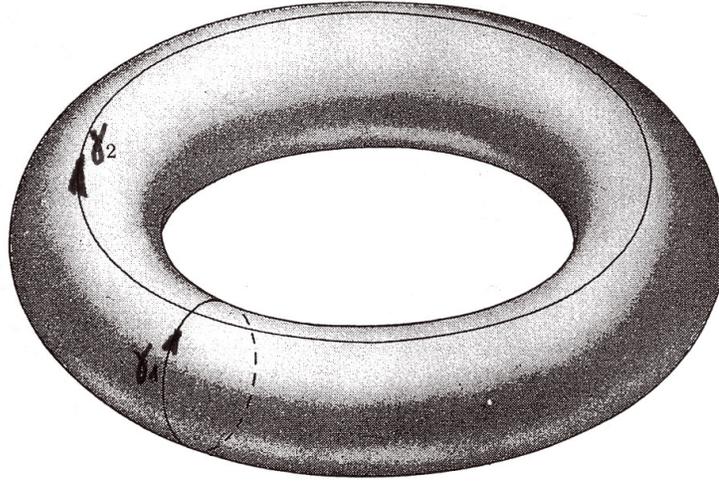


Fig.9: Base dei circuiti γ_1, γ_2 sul toro

Il nostro scopo ora è di costruire un'equivalenza biolomorfa tra la superficie di Riemann (5.27) e il toro complesso della forma C/Λ per un reticolo opportuno Λ .

Introduciamo la 1-forma

$$\omega = \frac{dx}{y} = \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2x - g_3}}. \quad (5.30)$$

Lemma 5.58 *La ω è una 1-forma olomorfa sulla curva ellittica compatta.*

Dimostrazione: La 1-forma è ovviamente olomorfa su Γ vicino a un punto (x, y) qualsiasi con $y \neq 0$, ovvero per $x \neq e_1, e_2, e_3, \infty$ dove possiamo usare x come la coordinata locale. Dimostriamo ora che la 1-forma è olomorfa anche vicino ai punti di diramazione. Consideriamo il punto $(x = e_1, y = 0) \in \Gamma$. Vicino a questo punto possiamo usare la coordinata locale $\xi_1 = \sqrt{x - e_1}$ parametrizzando i punti della superficie come in (5.29). Allora

$$\omega = \frac{d(e_1 + \xi_1^2)}{2\xi_1 \sqrt{(e_1 - e_2 + \xi_1^2)(e_1 - e_3 + \xi_1^2)}} = \frac{d\xi_1}{\sqrt{(e_1 - e_2 + \xi_1^2)(e_1 - e_3 + \xi_1^2)}}.$$

Questa 1-forma è olomorfa per $|\xi_1|$ sufficientemente piccolo. In modo simile possiamo analizzare anche gli altri punti di diramazione finiti.

Consideriamo allora il punto infinito della superficie di Riemann usando il parametro locale $\xi = 1/\sqrt{x}$:

$$\omega = \frac{d(1/\xi^2)}{\sqrt{\frac{4}{\xi^6} - \frac{g_2}{\xi^4} - g_3}} = -\frac{d\xi}{\sqrt{1 - \frac{1}{4}g_2\xi^2 - \frac{1}{4}g_3\xi^4}}.$$

Si vede che questa 1-forma è olomorfa per i valori di $|\xi|$ sufficientemente piccoli. \square

Supponiamo ora che i numeri complessi g_2, g_3 sono dati dalle formule (5.8) da un reticolo $\Lambda = \{2m\omega_1 + 2n\omega_2, \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$. Abbiamo già costruito una mappa del toro complesso $T(\omega_1, \omega_2)$ nella curva ellittica (5.27):

$$T(\omega_1, \omega_2) \ni z \mapsto (x = \wp(z), y = \wp'(z)) \in \Gamma.$$

Dimostriamo prima che le radici e_1, e_2, e_3 sono tutte distinte, ovvero i punti di diramazione della superficie di Riemann sono distinti.

Lemma 5.59 *Se $g_2 = g_2(\omega_1, \omega_2)$, $g_3 = g_3(\omega_1, \omega_2)$ sono dati dalle formule (5.8) da un reticolo $\Lambda \subset \mathbb{C}$, allora*

$$g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0.$$

Dimostrazione: La funzione $\wp'(z)$ è dispari, con i poli tripli sui punti del reticolo Λ . Dimostriamo che $\wp'(\omega_1) = 0$. Infatti,

$$\wp'(-\omega_1) = -\wp'(\omega_1) = -\wp'(-\omega_1 + 2\omega_1) = -\wp'(\omega_1).$$

In modo simile dimostriamo che $\wp'(\omega_2) = 0$, $\wp'(\omega_1 + \omega_2) = 0$. Usando l'Esercizio 5.25 si deriva che $\omega_1, \omega_2, \omega_1 + \omega_2$ sono *tutti* gli zeri della funzione $\wp'(z)$ dentro il parallelogramma dei periodi Π . Dall'equazione

$$(\wp'(z))^2 = 4\wp^3(z) - g_2\wp(z) - g_3$$

otteniamo che

$$e_1 = \wp(\omega_1), \quad e_2 = \wp(\omega_1 + \omega_2), \quad e_3 = \wp(\omega_2)$$

sono le radici dell'equazione $4x^3 - g_2x - g_3 = 0$. Per dimostrare che queste radici sono distinte usiamo il seguente metodo. Applicando Teorema dei Residui alla 1-forma

$$\frac{d\wp(z)}{\wp(z) - e_1}$$

dimostriamo che il numero delle soluzioni dell'equazione

$$\wp(z) = e_1$$

sul toro \mathbb{C}/Λ è uguale al numero totale dei poli, ovvero a due. Siccome abbiamo già una radice $z = \omega_1$ almeno doppia

$$\wp(\omega_1) = e_1, \quad \wp'(\omega_1) = 0,$$

allora non possono esserci le altre soluzioni. In particolare, $e_1 \neq e_2$, $e_1 \neq e_3$. In modo simile si dimostra che $e_2 \neq e_3$. \square

Abbiamo costruito una mappa olomorfa

$$f : \mathbb{C}/\Lambda \rightarrow \Gamma, \quad f(z) = (\wp(z), \wp'(z)) \tag{5.31}$$

delle varietà complesse compatte.

Esercizio 5.60 *Dimostrare che questa mappa è non ramificata.*

Allora per dimostrare che questa mappa è un'equivalenza biolomorfa basta dimostrare che la mappa f è univalente.

Lemma 5.61 *Qualunque siano due numeri complessi z_1, z_2 tali che $z_1 - z_2 \notin \Lambda$, allora i punti*

$$P_1 = (\wp(z_1), \wp'(z_1)), \quad P_2 = (\wp(z_2), \wp'(z_2))$$

della superficie Γ sono distinti.

Dimostrazione: Se $z_1 \in \Lambda$, allora P_1 è il punto infinito della superficie Γ . Sapendo che i poli della funzione di Weierstrass sono esattamente nei punti del reticolo, dimostriamo che $P_2 \neq \infty \in \Gamma$. Il secondo caso particolare è quello considerato nel lemma precedente: se z_1 è uno dei semiperiodi ω_1, ω_2 o $\omega_1 + \omega_2$, allora P_1 è uno dei punti $(e_1, 0), (e_2, 0)$ o $(e_3, 0)$. Questi punti sono diversi da P_2 se $z_2 - z_1 \notin \Lambda$.

Consideriamo ora il caso generale $2z_1 \notin \Lambda, 2z_2 \notin \Lambda$. Applicando Teorema dei Residui alla 1-forma

$$\frac{d\wp(z)}{\wp(z) - \wp(z_1)}$$

dimostriamo che l'equazione

$$\wp(z) = \wp(z_1)$$

ha esattamente due soluzioni sul toro \mathbb{C}/Λ . Per $2z_1 \notin \Lambda$ abbiamo due soluzioni distinte ovvie: $z = z_1$ e $z = -z_1$. Quindi, se $P_2 = P_1$, allora $z_2 = z_1$ o $z_2 = -z_1$. Ora bisogna escludere il secondo caso. Infatti, se $z_2 = -z_1$, allora

$$\wp'(-z_2) = -\wp'(z_1).$$

Quindi $P_2 \neq P_1$. □

Abbiamo dimostrato il

Teorema 5.62 *Dato qualsiasi reticolo $\Lambda = \{2m\omega_1 + 2n\omega_2 \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$, $\text{Im} \frac{\omega_2}{\omega_1} \neq 0$, allora la mappa (5.31) stabilisce un'equivalenza biolomorfa tra il toro $T(\omega_1, \omega_2) = \mathbb{C}/\Lambda$ e la superficie di Riemann compatta (5.27).*

Esercizio 5.63 *Dimostrare che il pullback $f^*\omega$ della 1-forma $\omega = dx/y$ olomorfa sulla superficie Γ rispetto alla mappa (5.31) è dato dalla formula*

$$f^*\omega = dz.$$

Dimostriamo ora che, qualunque siano due numeri complessi g_2, g_3 tali che $g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$, allora esiste un reticolo Λ tale che la mappa (5.31) è un'equivalenza biolomorfa.

Siccome la superficie di Riemann Γ topologicamente è il toro bidimensionale T^2 , possiamo scegliere due circuiti γ_1, γ_2 sul toro tali che qualsiasi altro circuito γ su T^2 è omotopo alla combinazione lineare

$$\gamma \sim m\gamma_1 + n\gamma_2, \quad m, n \in \mathbb{Z}$$

(usiamo la forma additiva per rappresentare gli elementi del gruppo fondamentale $\pi_1(T^2) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$). Per esempio, si possono scegliere i circuiti come è mostrato sulla Fig. 3 (vedi anche Fig. 9): il circuito γ_1 gira attorno il taglio $[e_1, e_2]$ su uno dei fogli (diciamo, su F_1) della superficie; il circuito γ_2 interseca i tagli $[e_1, e_2]$ e $[e_3, \infty]$; metà di γ_2 è sullo stesso foglio F_1 su cui si trova γ_1 , l'altra metà è sul foglio opposto F_2 . Pongo

$$2\omega_1 := \oint_{\gamma_1} \omega, \quad 2\omega_2 := \oint_{\gamma_2} \omega. \quad (5.32)$$

Esercizio 5.64 *Dimostrare che*

$$\omega_1 = \int_{e_1}^{e_2} \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2x - g_3}}, \quad \omega_2 = \int_{e_3}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2x - g_3}} \quad (5.33)$$

per una scelta opportuna dei segni dei radicali.

Lemma 5.65 *I numeri ω_1, ω_2 soddisfano la condizione*

$$\operatorname{Im} \frac{\omega_2}{\omega_1} \neq 0.$$

Dimostrazione: Prima dimostriamo il seguente risultato ausiliario.

Lemma 5.66 *Dato un dominio limitato $D \subset \mathbb{C}$, allora l'area A del dominio è data dalla seguente formula*

$$A = \frac{1}{2i} \oint_{\partial D} \bar{z} dz. \quad (5.34)$$

Dimostrazione: Applicando Teorema di Stokes si ottiene

$$\frac{1}{2i} \oint_{\partial D} \bar{z} dz = \frac{1}{2i} \int_D d\bar{z} \wedge dz.$$

Ma

$$d\bar{z} \wedge dz = (dx - idy) \wedge (dx + idy) = 2i dx \wedge dy.$$

Quindi

$$\frac{1}{2i} \oint_{\partial D} \bar{z} dz = \int_D dx \wedge dy = A.$$

□

In particolare, l'integrale (5.34) è sempre positivo.

Per ridurre la dimostrazione del Lemma all'argomento precedente, usiamo la seguente costruzione. Tagliando il toro Γ lungo le curve γ_1, γ_2 (vedi Fig. 9 sopra) otteniamo un dominio semplicemente connesso $\tilde{\Pi}$. Dentro questo dominio la 1-forma olomorfa ω diventa differenziale di una funzione olomorfa $z(P)$,

$$\omega = dz, \quad z = z(P), \quad P \in \tilde{\Pi}.$$

Siccome la 1-forma ω è diversa da zero su γ_1, γ_2 , la funzione $P \mapsto z(P)$ mappa il dominio $\tilde{\Pi}$ su un certo dominio $D \subset \mathbb{C}$. Quindi l'area di quel dominio

$$A = \frac{1}{2i} \oint_{\partial D} \bar{z} dz = \frac{1}{2i} \oint_{\partial \tilde{\Pi}} \bar{z} \omega > 0.$$

Ora calcoliamo questo integrale in un altro modo.

Per definizione l'incremento della funzione sui lati del taglio γ_1 è uguale a $2\omega_2$; l'incremento sui lati del taglio γ_1 è $-2\omega_1$. In altro modo da dire, se $P' \in \gamma'_1, P \in \gamma_1$ sono due punti corrispondenti su due lati del taglio γ_1 (cioè, rappresentano lo stesso punto sulla superficie Γ), allora

$$z(P') - z(P) = 2\omega_2.$$

Quindi

$$\int_{\gamma'_1} \bar{z} \omega - \int_{\gamma_1} \bar{z} \omega = 2\bar{\omega}_2 \int_{\gamma_1} \omega = 4\bar{\omega}_2 \omega_1.$$

Analogamente, se $P' \in \gamma'_2, P \in \gamma_2$ sono due punti corrispondenti su due lati del taglio γ_2 , allora

$$z(P') - z(P) = -2\omega_1.$$

Quindi

$$\int_{\gamma'_2} \bar{z} \omega - \int_{\gamma_2} \bar{z} \omega = -2\bar{\omega}_1 \int_{\gamma_2} \omega = -4\bar{\omega}_1 \omega_2.$$

È stato dimostrato che

$$2iA = \oint_{\partial \tilde{\Pi}} \bar{z} \omega = \left(\int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2} - \int_{\gamma'_1} - \int_{\gamma'_2} \right) \bar{z} \omega = 4(\bar{\omega}_1 \omega_2 - \bar{\omega}_2 \omega_1).$$

Arriviamo alla disuguaglianza

$$\frac{2}{i}(\bar{\omega}_1 \omega_2 - \bar{\omega}_2 \omega_1) = 4|\omega_1|^2 \operatorname{Im} \frac{\omega_2}{\omega_1} = A > 0.$$

□

Secondo il lemma appena dimostrato, possiamo costruire il reticolo $\Lambda = \{2m\omega_1 + 2n\omega_2\}$ usando gli integrali (5.32) come base del reticolo stesso. Definiamo ora la mappa

$$g : \Gamma \rightarrow \mathbb{C}/\Lambda \tag{5.35}$$

della superficie di Riemann nel toro complesso:

$$z = g(P) := \int_{\infty}^P \omega. \tag{5.36}$$

Il cammino α di integrazione dal punto $\infty \in \Gamma$ al punto qualsiasi $P \in \Gamma$ può essere scelto in modo arbitrario. Se α' è un altro cammino, allora otteniamo il circuito

$$\gamma = \alpha \cup (-\alpha').$$

Quindi la differenza tra gli integrali è

$$\int_{\alpha} \omega - \int_{\alpha'} \omega = \oint_{\gamma} \omega.$$

Rappresentando il circuito γ come una combinazione lineare con coefficienti costanti dei circuiti della base

$$\gamma \sim m\gamma_1 + n\gamma_2, \quad m, n \in \mathbb{Z}$$

si ottiene che la differenza degli integrali è un vettore del reticolo Λ

$$\int_{\alpha} \omega - \int_{\alpha'} \omega = 2m\omega_1 + 2n\omega_2 \in \Lambda.$$

Quindi, la mappa (5.35) è ben definita.

Dimostriamo che questa mappa è olomorfa. Infatti, il differenziale dell'integrale è la forma ω olomorfa sulla superficie:

$$dg = \omega.$$

Si osserva anche che la 1-forma ω è diversa da zero in ogni punto della superficie Γ . Allora la mappa g è non ramificata.

Rimane dimostrare che la mappa (5.35) è univalente. Per semplificare le notazioni consideriamo il caso delle curve ellittiche con i coefficienti g_2, g_3 reali (il caso generale si tratta analogamente; lasciamo la dimostrazione generale come un esercizio). Anzi, supponiamo che le radici e_1, e_2, e_3 del polinomio $4x^3 - g_2x - g_3 = 0$ sono tutte reali ordinati come

$$e_1 < e_2 < e_3.$$

Quindi per $x \in \mathbb{R}$ la radice $\sqrt{4x^3 - g_2x - g_3}$ prende valori reali per $e_1 \leq x \leq e_2$ e per $e_3 \leq x < \infty$. Fuori da questi intervalli la radice prende valori immaginari. Scegliamo i circuiti γ_1, γ_2 in modo tale che sulla parte del circuito γ_1 orientata verso l'incremento di x la radice $\sqrt{4x^3 - g_2x - g_3}$ è **positiva**. Questa scelta corrisponde, per definizione, al foglio F_1 della superficie.

Esercizio 5.67 Sotto le ipotesi appena formulate dimostrare che i numeri ω_1 e $\frac{1}{i}\omega_2$ sono reali positivi. Inoltre dimostrare la validità delle seguenti equazioni

$$\int_{-\infty}^{e_1} \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2x - g_3}} = -\omega_2, \quad \int_{e_3}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2x - g_3}} = -\omega_1. \quad (5.37)$$

I cammini degli integrali sono tutti sul foglio F_1 .

Consideriamo la mappa (5.36) $P \mapsto z(P)$ solo per i punti P sul semipiano superiore del foglio F_1 .

Lemma 5.68 La mappa $P \mapsto z(P)$ stabilisce un'equivalenza biolomorfa della metà F_1^+ del foglio F_1 ,

$$P \in F_1^+ \leftrightarrow \operatorname{Im} x > 0, \quad \sqrt{4x^3 - g_2x - g_3} > 0 \text{ per } x \in [e_1, e_2] \quad (5.38)$$

con il quarto del parallelogramma dei periodi

$$\Pi_1^+ := \{z = s_1\omega_1 + s_2\omega_2 \mid 0 \leq s_1 \leq 1, \quad -1 \leq s_2 \leq 0\}. \quad (5.39)$$

Dimostrazione: Basta dimostrare che il bordo del semipiano (5.38) viene mappato sul bordo orientato del rettangolo (5.39). Infatti, per $x \in [-\infty, e_1]$ l'integrale

$$z(x) = \int_{-\infty}^x \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2x - g_3}}$$

prende i valori immaginari; la parte immaginaria $\text{Im } z(x)$ decresce da 0 a $-\omega_2$ (cf. la prima delle formule (5.37)). Per $x \in [e_1, e_2]$ la radice sotto l'integrale prende valori reali positivi; allora la parte immaginaria $\text{Im } z(x) \equiv -\omega_2$ è costante, quella reale cresce da 0 a ω_1 . Poi, nell'intervallo $x \in [e_2, e_3]$ la parte reale è costante, $\text{Re } z(x) \equiv \omega_1$ ma quella immaginaria cresce da $-\omega_2$ a 0. Finalmente nell'intervallo $x \in [e_3, \infty]$ la parte immaginaria $\text{Im } z(x) \equiv 0$ è costante; la parte reale invece decresce da ω_1 a 0 (cf. la seconda delle formule (5.37)). Applicando il principio dell'argomento si ottiene la univalenza della mappa

$$F_1^+ \rightarrow \Pi_1^+.$$

□

In modo simile si dimostra che l'immagine del semipiano inferiore del foglio F_1 viene mappato sul rettangolo

$$\Pi_1^- = \{z = s_1\omega_1 + s_2\omega_2 \mid -1 \leq s_1 \leq 0, -1 \leq s_2 \leq 0\}.$$

Sull'altro foglio F_2 possiamo applicare la procedura analoga: il semipiano superiore del foglio F_2 viene mappato (per una scelta opportuna del cammino di integrazione) sul rettangolo

$$\Pi_2^+ = \{z = s_1\omega_1 + s_2\omega_2 \mid -1 \leq s_1 \leq 0, 0 \leq s_2 \leq 1\},$$

e il semipiano inferiore del foglio F_2 viene mappato a

$$\Pi_2^- = \{z = s_1\omega_1 + s_2\omega_2 \mid 0 \leq s_1 \leq 1, 0 \leq s_2 \leq 1\}.$$

Tutte queste mappe sono univalente. Quindi, la mappa (5.36) della superficie Γ con i tagli sul rettangolo fondamentale

$$\Pi = \{z = s_1\omega_1 + s_2\omega_2 \mid -1 < s_1 < 1, -1 < s_2 < 1\}$$

è univalente. Questo dimostra che

$$\Gamma \rightarrow \mathbb{C}/\Lambda$$

è una equivalenza biolomorfa delle due varietà complesse compatte.

5.10 Piccolo Teorema di Picard

In questa sezione applichiamo la teoria dei tori complessi appena sviluppata alla dimostrazione della versione ridotta del Teorema di Picard formulato nella sezione 4.6.

Ricapitolando i risultati della sezione precedente ricordiamo che sono state costruite due mappe

$$\begin{aligned} & \left\{ \text{reticoli } \Lambda = \{2m\omega_1 + 2n\omega_2 \mid m, n \in \mathbb{Z}, \text{Im } \frac{\omega_2}{\omega_1} > 0\} \right\} \\ & \quad \downarrow \\ & \left\{ \text{curve ellittiche } y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3, g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0 \right\} \end{aligned} \tag{5.40}$$

e

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{curve ellittiche } y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3, \quad g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0, \text{ con una base di cicli } \gamma_1, \gamma_2 \\ \downarrow \\ \text{reticoli } \Lambda = \{2m\omega_1 + 2n\omega_2 \mid m, n \in \mathbb{Z}, \operatorname{Im} \frac{\omega_2}{\omega_1} > 0\} \end{array} \right\} \quad (5.41)$$

Queste mappe sono inverse una all'altra nel seguente senso:

Esercizio 5.69 Dato un reticolo Λ come in (5.40), se la curva ellittica $\Gamma : \{y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3\}$ è associata a Λ secondo le formule

$$g_2 = 60 \sum'_{w \in \Lambda} \frac{1}{w^4}, \quad g_3 = 140 \sum'_{w \in \Lambda} \frac{1}{w^6},$$

allora per qualsiasi scelta della base di circuiti γ_1 e γ_2 orientati come spiegato sopra, i numeri complessi

$$2\omega'_1 = \oint_{\gamma_1} \omega, \quad 2\omega'_2 = \oint_{\gamma_2} \omega, \quad \omega = \frac{dx}{y}$$

sono legati a ω_1, ω_2 secondo le formule

$$\left. \begin{array}{l} \omega'_2 = a\omega_2 + b\omega_1 \\ \omega'_1 = c\omega_2 + d\omega_1 \end{array} \right\}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}). \quad (5.42)$$

Dal risultato di questo esercizio segue che il rapporto

$$\tau = \frac{\omega_2}{\omega_1} \in \mathbf{H}$$

si trasforma come in (5.13):

$$\tau' = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}).$$

Come sappiamo già, la classe di equivalenza del toro \mathbb{C}/Λ dipende solo dal numero complesso τ nel semipiano superiore \mathbf{H} considerato modulo **trasformazioni modulari** (5.13)

Consideriamo ora le funzioni F olomorfe o meromorfe sul semipiano superiore invarianti rispetto alle trasformazioni modulari:

$$F\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = F(\tau), \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}). \quad (5.43)$$

Tali funzioni possono essere considerate come definite sullo spazio dei tori complessi \mathbb{C}/Λ considerati modulo equivalenze biolomorfe.

Esempio 1. L'invariante modulare assoluto $J(\tau)$ è definito come

$$J = \frac{g_2^3}{g_2^3 - 27g_3^2}$$

dove $g_2 = g_2(\omega_1, \omega_2)$, $g_3 = g_3(\omega_1, \omega_2)$ sono date dalle formule appena scritte. Da queste formule segue che

$$g_2(\omega'_1, \omega'_2) = g_2(\omega_1, \omega_2), \quad g_3(\omega'_1, \omega'_2) = g_3(\omega_1, \omega_2)$$

se le coppie (ω_1, ω_2) e (ω'_1, ω'_2) sono legate dalla trasformazione (5.42). Per vedere che la funzione J dipende solo dal rapporto ω_2/ω_1 bisogna studiare che cosa succede a g_2, g_3 facendo omotetie

$$\omega_1 \mapsto k\omega_1, \quad \omega_2 \mapsto k\omega_2$$

per qualsiasi coefficiente non nullo k . Infatti, è facile da vedere che

$$g_2 \mapsto k^{-4}g_2, \quad g_3 \mapsto k^{-6}g_3.$$

Quindi

$$g_2^3 - 27g_3^2 \mapsto k^{-12}(g_2^3 - 27g_3^2), \quad g_2^3 \mapsto k^{-12}g_2^3$$

e la funzione J rimane invariante: $J \mapsto J$. Quindi, $J = J(\tau)$ e questa funzione soddisfa la proprietà (5.43). Siccome $g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$ per ogni reticolo Λ , la funzione $J(\tau)$ è olomorfa sul semipiano superiore.

Esempio 2. Come nella sezione precedente chiamiamo e_1, e_2, e_3 le radici del polinomio $4x^3 - g_2x - g_3 = 0$. Per queste radici abbiamo ottenuto le seguente formule

$$e_1 = \wp(\omega_1), \quad e_2 = \wp(\omega_1 + \omega_2), \quad e_3 = \wp(\omega_2) \quad (5.44)$$

dove

$$\wp(z) = \wp(z; \omega_1, \omega_2) = \frac{1}{z^2} + \sum'_{w \in \Lambda} \left[\frac{1}{(z-w)^2} - \frac{1}{w^2} \right]$$

è la funzione di Weierstrass definita dal reticolo Λ . Le funzioni $e_1 = e_1(\omega_1, \omega_2)$, $e_2 = e_2(\omega_1, \omega_2)$, $e_3 = e_3(\omega_1, \omega_2)$ *non sono* invarianti rispetto alle trasformazioni della base del reticolo Λ : la trasformazione generale della forma (5.13) può provocare una permutazione delle radici del polinomio cubico. Queste funzioni sono però invarianti rispetto al *sottogruppo* delle trasformazioni della seguente forma

$$\left. \begin{array}{l} \omega'_2 = a\omega_2 + b\omega_1 \\ \omega'_1 = c\omega_2 + d\omega_1 \end{array} \right\}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}), \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{2}. \quad (5.45)$$

[Le trasformazioni di questa forma costituiscono il sottogruppo $\Gamma_2 \subset PSL_2(\mathbb{Z})$.] Infatti, la definizione delle trasformazioni (5.45) può essere riscritta come

$$\omega'_1 \equiv \omega_1 \pmod{\Lambda}, \quad \omega'_2 \equiv \omega_2 \pmod{\Lambda}.$$

Quindi $\wp(\omega'_1) = \wp(\omega_1)$, $\wp(\omega'_1 + \omega'_2) = \wp(\omega_1 + \omega_2)$, $\wp(\omega'_2) = \wp(\omega_2)$.

Esercizio 5.70 *Dimostrare che il gruppo Γ_2 è generato dalle trasformazioni α, β della forma*

$$\tau \mapsto \alpha(\tau) = \tau + 2, \quad \tau \mapsto \beta(\tau) = \frac{\tau}{2\tau + 1}.$$

Esercizio 5.71 Dimostrare che l'azione del gruppo Γ_2 sul semipiano superiore ammetta un dominio fondamentale che può essere scelto come l'insieme definito dalle seguenti disuguaglianze:

$$\operatorname{Im} \tau > 0, \quad \left| \tau - \frac{1}{2} \right| > \frac{1}{2}, \quad \left| \tau + \frac{1}{2} \right| \geq \frac{1}{2}, \quad -1 \leq \operatorname{Re} \tau < 1.$$

Derivare da questo risultato che il gruppo Γ_2 agisce sul semipiano superiore in modo discreto e libero.

Consideriamo ora la seguente funzione

$$\lambda = \frac{e_3 - e_2}{e_1 - e_2}. \quad (5.46)$$

Come prima si dimostra che la funzione λ dipende solo dal rapporto dei periodi, $\lambda = \lambda(\tau)$, e che questa funzione è invariante alle trasformazioni modulari dal sottogruppo Γ_2 . Per vedere le proprietà analitiche della funzione $\lambda(\tau)$ bisogna prima dimostrare il seguente risultato algebrico:

Esercizio 5.72 Dato qualsiasi polinomio cubico $4x^3 - g_2x - g_3$ tale che $g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$ dimostrare che il rapporto (5.46) è diverso da 0, 1. Viceversa, dato qualsiasi valore complesso $\lambda \neq 0, 1$ dimostrare che esiste un polinomio cubico $4x^3 - g_2x - g_3$ con le radici e_1, e_2, e_3 distinte tali che

$$\frac{e_3 - e_2}{e_1 - e_2} = \lambda.$$

Inoltre dimostrare che se $4x^3 - g'_2x - g'_3$ è un altro polinomio cubico con la stessa proprietà, allora i coefficienti dei polinomi sono legati da

$$g'_2 = \kappa^2 g_2, \quad g'_3 = \kappa^3 g_3$$

dove κ è un numero complesso non nullo.

[Hint: dimostrare che le radici del polinomio cubico debbono avere la forma

$$e_1 = \kappa(2 - \lambda), \quad e_2 = -\kappa(1 + \lambda), \quad e_3 = \kappa(2\lambda - 1)$$

per un numero non nullo κ .]

Da questo risultato e dalla teoria di tori complessi e di curve ellittiche si deriva

Esercizio 5.73 Dimostrare che la funzione $\lambda(\tau)$ è olomorfa sul semipiano superiore $\tau \in \mathbf{H}$. Inoltre dimostrare che questa funzione definisce una mappa suriettiva

$$\lambda : \mathbf{H} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0 \cup 1\}. \quad (5.47)$$

Infine, dimostrare che

$$\lambda(\tau') = \lambda(\tau), \quad \tau, \tau' \in \mathbf{H}$$

se e solo se

$$\tau' = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_2 \subset SL_2(\mathbb{Z}). \quad (5.48)$$

Derivare da questa proprietà che la mappa (5.47) non è ramificata.

Ora usiamo la funzione $\lambda(\tau)$ per dimostrare il

“Piccolo” Teorema di Picard. *Data una funzione $f(z)$ olomorfa su \mathbb{C} , allora f prende tutti valori complessi salvo possibilmente uno.*

Dimostrazione: Supponiamo che la funzione f non prenda due valori complessi a, b . La sostituzione

$$\tilde{f}(z) = \frac{f(z) - a}{b - a}$$

dà un'altra funzione olomorfa su \mathbb{C} che non prende i valori 0, 1. Senza perdita di generalità possiamo quindi considerare solo il caso $a = 0, b = 1$.

Consideriamo la superficie di Riemann sopra il piano complesso $\mathbb{C} \ni z$ data dall'equazione

$$\lambda(\tau) = f(z). \tag{5.49}$$

Questa superficie ha un numero infinito di fogli. Infatti, secondo la nostra ipotesi insieme ai risultati dell'esercizio 5.73 l'equazione (5.49) ammette soluzione $\tau = \tau(z)$ per ogni $z \in \mathbb{C}$. Tutte queste soluzioni sono legate dalle trasformazioni (5.48) dal gruppo Γ_2 . Siccome la mappa (5.47) è non ramificata, la superficie di Riemann (5.49) è un rivestimento sopra \mathbb{C} . Siccome \mathbb{C} è semplicemente connesso, questo rivestimento è banale (vedi l'Esercizio 5.54 sopra¹), ovvero la superficie di Riemann (5.49) è un insieme disgiunto di un numero infinito di fogli isomorfi a \mathbb{C} . Scegliendo uno dei fogli otteniamo una mappa olomorfa

$$\mathbb{C} \rightarrow \mathbf{H}, \quad z \mapsto \tau(z).$$

Quindi la funzione olomorfa

$$w = \frac{\tau(z) - i}{\tau(z) + i}$$

mappa il piano complesso nel cerchio unitario. Secondo il Teorema di Liouville questa funzione deve essere costante. Questa contraddizione dimostra il Teorema di Picard. \square

5.11 Teorema di Riemann. Parte 1: la proprietà estrema delle mappe conformi

In questa sezione cominciamo la dimostrazione di seguente

Teorema 5.74 (Teorema di Riemann) *Ogni dominio semplicemente connesso $D \subset \mathbb{C}$, $D \neq \mathbb{C}$, è biolomorfo al cerchio unitario $\mathbf{D} = \{|z| < 1\}$.*

Dimostrazione: Come il primo passo riduciamo la dimostrazione al caso di un dominio limitato.

Lemma 5.75 *Dato un dominio D come nell'ipotesi del Teorema di Riemann, allora esiste un'equivalenza biolomorfa del dominio D con un dominio limitato in \mathbb{C} .*

¹L'enunciato dell'esercizio riguarda le superficie di Riemann con un numero finito di fogli. Il risultato però rimane valido anche per il caso di superficie con un numero infinito di fogli se la mappa $f : M \rightarrow N$ viene ottenuta come il quoziente rispetto a un'azione di un gruppo che agisce su M in modo discreto e libero.

Dimostrazione: Secondo l'ipotesi, esiste $a \in \mathbb{C}$, $a \notin D$. Consideriamo la funzione $\log(z - a)$ per $z \in D$. Questa funzione è localmente olomorfa su D ; siccome D è semplicemente connesso possiamo scegliere un ramo del logaritmo globalmente su D come

$$g(z) := \log(z - a) - \log(z_0 - a) = \int_{z_0}^z \frac{dz}{z - a}$$

per un punto qualsiasi $z_0 \in D$. La funzione $g(z)$ è olomorfa e univalente su D . Infatti, se $g(z_1) = g(z_2)$, allora $e^{g(z_1)} = e^{g(z_2)}$ e, quindi, $z_1 - a = z_2 - a$.

La funzione $g(z)$ prende tutti valori complessi contenuti in un cerchio B sufficientemente piccolo con centro $g(z_0) = 0$. Usando l'univalenza si dimostra che il cerchio traslato

$$B' := B + 2\pi i$$

non interseca il dominio $g(D)$. Allora la funzione

$$G(z) := \frac{1}{g(z) - 2\pi i}$$

è olomorfa, univalente e limitata sul dominio D . Otteniamo l'equivalenza biolomorfa

$$G : D \rightarrow G(D) =: D'$$

tra D e il dominio limitato D' . □

Senza perdita di generalità possiamo quindi assumere che il dominio D soddisfi le condizioni

$$D \subset \mathbf{D}, \quad 0 \in D. \tag{5.50}$$

La proprietà estrema di cui si tratta nel titolo della sezione è descritta nel seguente

Teorema 5.76 *Si consideri l'insieme \mathcal{A} delle mappe olomorfe univalenti $f : D \rightarrow \mathbf{D}$ del dominio semplicemente connesso $D \subset \mathbf{D}$, $0 \in D$, nel cerchio \mathbf{D} tali che $f(0) = 0$. Data una mappa $f_0 \in \mathcal{A}$, allora $f_0 : D \rightarrow \mathbf{D}$ è un'equivalenza biolomorfa se e solo se $\forall f \in \mathcal{A}$*

$$|f'(0)| \leq |f_0'(0)|. \tag{5.51}$$

Si osservi che lo spazio \mathcal{A} è non vuoto. Infatti, la mappa $f(z) = z$ appartiene a \mathcal{A} secondo le assunzioni per il dominio D .

Dimostrazione: Dimostriamo prima che la proprietà estrema (5.51) è necessaria, cioè, la disuguaglianza (5.51) è valida per un isomorfismo $f_0 : D \rightarrow \mathbf{D}$ tale che $f_0(0) = 0$. Data una mappa olomorfa univalente $f : D \rightarrow \mathbf{D}$, $f(0) = 0$, allora f stabilisce un'equivalenza biolomorfa D con $D' := f(D)$. La composizione

$$h := f \cdot f_0^{-1} : D' \subset \mathbf{D}$$

è un isomorfismo del cerchio \mathbf{D} con il dominio D' tale che $h(0) = 0$. Si ottiene la rappresentazione

$$f = h \cdot f_0.$$

Applicando la disuguaglianza di Cauchy alla funzione $h(z)$ olomorfa sul cerchio $|z| < 1$ si ottiene

$$|h'(0)| \leq 1;$$

l'uguaglianza è possibile solo nel caso in cui $D' = \mathbf{D}$ e h sia un isomorfismo (vedi il principio del massimo modulo). Siccome $f'(0) = h'(0)f'_0(0)$, arriviamo a

$$|f'(0)| \leq |f'_0(0)|;$$

l'uguaglianza è possibile solo per il caso $D' = \mathbf{D}$, ovvero la mappa f è un isomorfismo tra il dominio D e il cerchio \mathbf{D} .

Dimostriamo ora la sufficienza della condizione estrema del teorema. Basta dimostrare che la funzione f_0 che soddisfa la disuguaglianza (5.51) per ogni $f \in \mathcal{A}$ è una mappa suriettiva $f_0 : D \rightarrow \mathbf{D}$. Infatti, supponiamo che esista $a \in \mathbf{D}$, $a \notin f_0(D)$. Bisogna dimostrare che esiste una funzione $g \in \mathcal{A}$ tale che

$$|g'(0)| > |f'_0(0)|.$$

Il primo passo nella costruzione della funzione g è di considerare la funzione

$$F(z) = \log \frac{f_0(z) - a}{1 - \bar{a}f_0(z)}$$

(possiamo scegliere il ramo principale del logaritmo sul dominio semplicemente connesso D). Questa funzione è olomorfa e univalente su D . Siccome $w = f_0(z)$ soddisfa $|w| < 1$, e la trasformazione

$$w \mapsto \frac{w - a}{1 - \bar{a}w}$$

mappa il cerchio $|w| < 1$ in se stesso (v. Esercizio 5.44), allora

$$\operatorname{Re} F(z) < 0, \quad z \in D. \tag{5.52}$$

Pongo

$$g(z) = \frac{F(z) - F(0)}{F(z) + \overline{F(0)}}.$$

Da (5.52) si ottiene che la funzione $g(z)$ è olomorfa su D ; è facile da controllare che la funzione $g(z)$ è anche univalente su D e soddisfa $g(0) = 0$. Dimostriamo che

$$|g(z)| < 1 \quad \text{per } z \in D.$$

Infatti, dati due numeri complessi p, q con $\operatorname{Re} p < 0$, $\operatorname{Re} q < 0$, abbiamo

$$\left| \frac{p - q}{p + \bar{q}} \right| < 1.$$

Allora, abbiamo dimostrato che $g \in \mathcal{A}$.

Calcoliamo la derivata $g'(0)$:

$$g'(0) = \frac{F'(0)}{F(0) + \overline{F(0)}}, \quad F'(0) = \left(\bar{a} - \frac{1}{a} \right) f'_0(0).$$

Quindi

$$g'(0) = \frac{\bar{a} - a^{-1}}{\log(a\bar{a})} f'_0(0),$$

$$\frac{|g'(0)|}{|f'_0(0)|} = \frac{1 - a\bar{a}}{2|a| \log \left| \frac{1}{a} \right|}.$$

Usando la seguente disuguaglianza

$$\frac{1 - t^2}{t} - 2 \log \frac{1}{t} > 0 \quad \text{per } 0 < t < 1 \quad (5.53)$$

con $t = |a|$, dimostriamo che

$$|g'(0)| > |f'_0(0)|.$$

[Per dimostrare la disuguaglianza (5.53) basta osservare che la derivata

$$-\frac{1}{t^2} - 1 + \frac{2}{t} = -\left(\frac{1}{t} - 1\right)^2$$

della parte destra è negativa sull'intervallo $(0, 1]$; quindi questa funzione è decrescente sull'intervallo. Ma per $t = 1$ il valore della funzione è uguale a 0.] Siccome questa disuguaglianza contraddice la proprietà estrema della mappa f_0 , abbiamo dimostrato che la mappa univalente $f_0 : D \rightarrow \mathbf{D}$ è suriettiva e, quindi, è un'equivalenza biolomorfa. \square

Per completare la dimostrazione del Teorema di Riemann usiamo la seguente strategia. Secondo il teorema appena dimostrato basta trovare una funzione $f \in \mathcal{A}$ su cui il valore $|f'(0)|$ è massimale. Allora, si consideri $f \mapsto |f'(0)|$ come un funzionale sullo spazio \mathcal{A} , ovvero, su un opportuno sottospazio compatto in \mathcal{A} . Dimostriamo che il funzionale è continuo e, quindi, prende il valore massimale in un certo punto f_0 . Questo punto è la mappa conforme $D \rightarrow \mathbf{D}$.

Questo ultimo passo nella dimostrazione del Teorema di Riemann richiede uno studio più approfondito degli spazi di funzioni olomorfe.

6 Spazi di funzioni olomorfe

In questa sezione $D \subset \mathbb{C}$ è un dominio qualsiasi, chiamiamo $\mathcal{C}(D)$ lo spazio lineare di funzioni continue sul dominio D , $\mathcal{H}(D)$ lo spazio di funzioni olomorfe su D .

6.1 Convergenza uniforme sui compatti

Definizione 6.1 *Data una successione $f_n \in \mathcal{C}(D)$, si dice che la successione converge uniformemente sui compatti se, per ogni compatto $K \subset D$ la successione delle restrizioni*

$$f_n|_K$$

converge uniformemente. La serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(z), \quad u_n \in \mathcal{C}(D)$$

converge uniformemente sui compatti se ciò è vero per la successione delle somme parziali

$$f_n = \sum_{k=0}^n u_k.$$

La stessa definizione è applicabile alle successioni e serie in $\mathcal{H}(D)$.

Esercizio 6.2 *Dimostrare che la successione $f_n \in \mathcal{C}(D)$ converge uniformemente sui compatti se e solo se per ogni cerchio chiuso $B \in D$ le restrizioni $f_n|_B$ convergono uniformemente. Lo stesso discorso è valido per le serie.*

È facile vedere che il limite di una successione / la somma di una serie che converge uniformemente sui compatti è una funzione continua su D .

Teorema 6.3 *Data una successione delle funzioni $f_n \in \mathcal{H}(D)$, se la successione converge uniformemente sui compatti, allora anche il limite f è una funzione olomorfa su D .*

Dimostrazione: Secondo Teorema di Morera basta dimostrare che

$$\oint_{\partial\Pi} f(z) dz = 0$$

per ogni rettangolo $\Pi \in D$. Siccome le restrizioni $f_n|_{\Pi}$ convergono uniformemente, usando il Teorema di Cauchy si ottiene

$$\oint_{\partial\Pi} f(z) dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \oint_{\partial\Pi} f_n(z) dz = 0.$$

□

Il risultato analogo è applicabile alle somme delle serie delle funzioni olomorfe che convergono uniformemente sui compatti.

Teorema 6.4 *Data una successione delle funzioni olomorfe $f_n \in \mathcal{H}(D)$ convergente uniformemente sui compatti a una funzione $f \in \mathcal{H}(D)$, allora anche la successione di derivate f'_n converge uniformemente sui compatti alla funzione f' .*

Dimostrazione: Dato un cerchio chiuso $B \subset D$ del raggio $r > 0$ con il centro z_0 , dalla formula integrale di Cauchy si ottiene che

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial B} \frac{f(t) dt}{(t-z)^2}, \quad |z - z_0| \leq \frac{r}{2}.$$

Quindi

$$f'(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial B} \frac{f_n(t) dt}{(t-z)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(z), \quad |z - z_0| \leq \frac{r}{2};$$

la convergenza è uniforme sul cerchio $|z - z_0| \leq r/2$.

□

Dimostrare il risultato analogo per le serie non richiede sforzi aggiuntivi.

Teorema 6.5 *Data una successione f_n di funzioni olomorfe su D tali che per ogni n $f_n(z) \neq 0 \forall z \in D$, se la successione converge uniformemente sui compatti a una funzione $f \in \mathcal{H}(D)$ allora la funzione f o è uguale identicamente a zero oppure $f(z) \neq 0 \forall z \in D$.*

Dimostrazione: Supponiamo che la funzione olomorfa $f(z)$ non sia uguale a zero identicamente. Se $f(z_0) = 0$, $z_0 \in D$, allora esiste un piccolo $\rho > 0$ tale che il cerchio $|z - z_0| \leq \rho$ è interamente in D e $f(z) \neq 0$ per $0 < |z - z_0| \leq \rho$. La molteplicità m dello zero $z = z_0$ della funzione f viene data dalla formula

$$m = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=\rho} \frac{f'(z)}{f(z)} dz.$$

Siccome le funzioni $f'_n(z)/f_n(z)$ convergono sulla circonferenza $|z - z_0| = \rho$ a $f'(z)/f(z)$, abbiamo

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=\rho} \frac{f'_n(z)}{f_n(z)} dz \rightarrow m \neq 0.$$

Questa contraddizione dimostra il Teorema. □

Consideriamo ora le successioni di funzioni univalenti.

Corollario 6.6 *Data una successione f_n di funzioni olomorfe univalenti su D che converge uniformemente sui compatti a una funzione $f \in \mathcal{H}(D)$ allora la funzione f o è uguale identicamente a una costante oppure f è univalente su D .*

Dimostrazione: Supponiamo il contrario: $f(z_1) = f(z_2) = a$, $z_1, z_2 \in D$, $z_1 \neq z_2$. Secondo il teorema, le funzioni $f_n(z) - a$ debbono avere gli zeri su piccoli cerchi con i centri z_1, z_2 contenuti nel dominio D . Questo contraddice l'univalenza di f_n . □

6.2 La topologia e la metrica negli spazi $\mathcal{C}(D)$ e $\mathcal{H}(D)$

La base della topologia dello spazio $\mathcal{C}(D)$ viene definita in seguente modo. Si considerino gli insiemi $V(K, \epsilon)$, per ogni compatto $K \subset D$ e ogni $\epsilon > 0$:

$$V(K, \epsilon) = \{f \in \mathcal{C}(D) \mid \max_{z \in K} |f(z)| \leq \epsilon\}. \quad (6.1)$$

Gli insiemi $V(K, \epsilon)$ formano la base degli intorni con il centro zero. Applicando le traslazioni si ottengono gli intorni di altri punti dello spazio $\mathcal{C}(D)$. Siccome $\mathcal{H}(D) \subset \mathcal{C}(D)$, la topologia dello spazio $\mathcal{H}(D)$ viene definita come la topologia indotta. La convergenza delle successioni nello spazio topologico $\mathcal{C}(D)$ è esattamente la convergenza uniforme sui compatti.

Per costruire una metrica nello spazio $\mathcal{C}(D)$ bisogna fissare una *sequenza saturante* di compatti

$$\cdots \subset K_i \subset K_{i+1} \subset \cdots \subset D$$

tale che ogni compatto $K \subset D$ sta dentro di uno dei compatti K_i della sequenza.

Lemma 6.7 *Per ogni dominio D sul piano esiste una sequenza saturante di compatti.*

Dimostrazione: Consideriamo tutti cerchi chiusi dentro il dominio D con i raggi e le coordinate del centro tutti razionali. Siccome questo insieme è numerabile, otteniamo una sequenza dei cerchi B_1, B_2, \dots . Il compatto K_i viene definito come

$$K_i := \cup_{k \leq i} B_k.$$

Se $K \subset D$ è un compatto, allora K può essere coperto da un numero finito dei cerchi B_k . Quindi $K \subset K_i$ per un certo i . \square

Data una sequenza saturante di compatti in D , possiamo definire una metrica sullo spazio $\mathcal{C}(D)$. Pongo

$$d(f) = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} \min(1, M_i(f)) \quad (6.2)$$

con $M_i(f) := \max_{z \in K_i} |f(z)|.$

Esercizio 6.8 *Data una funzione $f \in \mathcal{C}(D)$ dimostrare che $d(f)$ soddisfi le seguenti proprietà:*

$$d(f) = 0 \quad \text{se e solo se} \quad f = 0 \quad (6.3)$$

$$d(f + g) \leq d(f) + d(g) \quad (6.4)$$

$$2^{-i} \min(1, M_i(f)) \leq d(f) \leq M_i(f) + 2^{-i}. \quad (6.5)$$

Usando la funzione $d(f)$ possiamo definire un'altra base di intorni di zero nello spazio $\mathcal{C}(D)$ considerando le palle

$$U(\delta) = \{f \in \mathcal{C}(D) \mid d(f) \leq \delta\} \quad (6.6)$$

per ogni $\delta > 0$

Lemma 6.9 *Le topologia dello spazio $\mathcal{C}(D)$ definita dalle basi $V(K, \epsilon)$ e $U(\delta)$ sono equivalenti.*

Dimostrazione: Dato un numero positivo $\epsilon > 0$ e un compatto $K \subset D$, troviamo i tale che $K \subset K_i$. Usando la prima delle disuguaglianze (6.5) otteniamo

$$U(2^{-i}\epsilon) \subset V(K, \epsilon).$$

Viceversa, dato un numero positivo δ , troviamo i in modo tale che $2^{-i} \leq \delta/2$. Usando la seconda delle disuguaglianze (6.5) otteniamo

$$V(K_i, \frac{\delta}{2}) \subset U(\delta).$$

\square

Corollario 6.10 *La topologia dello spazio $\mathcal{C}(D)$ è metrizzabile.*

Dimostrazione: La topologia viene definita dalla metrica

$$\text{dist}(f, g) := d(f - g).$$

□

Applicando la teoria generale degli spazi topologici metrizzabili, si derivano le seguenti proprietà.

- Lo spazio topologico $\mathcal{C}(D)$ (e, quindi, il sottospazio $\mathcal{H}(D)$) soddisfa la proprietà di Hausdorff.

- Il sottospazio $E \subset \mathcal{C}(D)$ (o $E \subset \mathcal{H}(D)$) è chiuso se e solo se il limite di ogni successione convergente degli elementi di E appartiene ad E .

- Lo spazio topologico $\mathcal{C}(D)$ è *completo*, cioè, ogni successione di Cauchy converge in $\mathcal{C}(D)$.

- Il sottospazio $\mathcal{H}(D) \subset \mathcal{C}(D)$ è *chiuso* (vedi Teorema 6.3).

- Il funzionale $F : \mathcal{C}(D) \rightarrow \mathbb{C}$ (o $F : \mathcal{H}(D) \rightarrow \mathbb{C}$) è continuo se e solo se per ogni successione $f_n \in \mathcal{C}(D)$ (risp., $f_n \in \mathcal{H}(D)$) convergente a f abbiamo:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(f_n) = F(f).$$

In modo simile si definiscono i funzionali a valori reali.

Esercizio 6.11 Dato un dominio $D \subset \mathbb{C}$ e un punto $z_0 \in D$, dimostrare che la mappa

$$\mathcal{H}(D) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f \mapsto |f'(z_0)|$$

è un funzionale continuo su $\mathcal{H}(D)$.

[Hint: usare il Teorema 6.4.]

6.3 I compatti nello spazio $\mathcal{H}(D)$

Definizione 6.12 Dato un sottoinsieme $A \subset \mathcal{H}(D)$, si dice che A è limitato se per ogni compatto $K \in D$ esiste un numero positivo $M(K)$ tale che

$$|f(z)| \leq M(K) \quad \text{per ogni } z \in K \text{ e per ogni } f \in A.$$

Esercizio 6.13 Dato un sottoinsieme limitato $A \subset \mathcal{H}(D)$, dimostrare che anche l'insieme \bar{A} è limitato.

Esercizio 6.14 La corrispondenza $f \mapsto f'$ mappa ogni sottoinsieme limitato in $\mathcal{H}(D)$ su un sottoinsieme limitato.

Il risultato principale di questa sezione è il

Teorema 6.15 *Il sottoinsieme $A \subset \mathcal{H}(D)$ è compatto se e solo se A è chiuso e limitato.*

Dimostrazione: La necessità delle condizioni del Teorema è ovvia. Dimostriamo la sufficienza.

Siccome lo spazio topologico $\mathcal{H}(D)$ è metrizzabile, basta dimostrare che ogni successione $f_k \in A$ contenga una sottosuccessione convergente. (Questo risultato si chiama **Teorema di Montel**).

Lemma 6.16 *Dato un cerchio $D := \{|z - z_0| < R\}$, si consideri un sottoinsieme limitato A dello spazio $\mathcal{H}(D)$. La successione $f_k \in A$ converge uniformemente sui compatti in D se e solo se la seguente condizione $C(z_0)$ sia valida:*

$$C(z_0) : \quad \forall n \geq 0 \quad \exists \lim_{k \rightarrow \infty} f_k^{(n)}(z_0).$$

Dimostrazione: Secondo il Teorema 6.4 la condizione $C(z_0)$ è necessaria. Dimostriamo che, viceversa dalla validità della condizione $C(z_0)$ segue convergenza delle funzioni $f_k(z)$ uniforme sul cerchio $|z - z_0| \leq r$ per ogni $r < R$.

Scegliamo r_0 tale che $r < r_0 < R$. Siccome l'insieme A è limitato, esiste un numero M tale che

$$|f_k(z)| \leq M \quad \text{per ogni } z \text{ tale che } |z - z_0| \leq r_0.$$

Per i coefficienti delle serie di Taylor

$$f_k(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,k}(z - z_0)^n$$

sono valide le disuguaglianze di Cauchy:

$$|a_{n,k}| \leq \frac{M}{r_0^n}.$$

Quindi per ogni z tale che $|z - z_0| \leq r$ abbiamo:

$$|f_k(z) - f_l(z)| \leq \sum_{0 \leq n \leq p} |a_{n,k} - a_{n,l}| r^n + 2M \sum_{n > p} \left(\frac{r}{r_0}\right)^n.$$

Siccome $\frac{r}{r_0} < 1$, per p sufficientemente grande la seconda somma è piccola a piacere:

$$2M \sum_{n > p} \left(\frac{r}{r_0}\right)^n < \frac{\epsilon}{2}$$

per un qualsiasi numero positivo ϵ . Usando la condizione $C(z_0)$ si deriva che le differenze tra i numeri

$$a_{n,k} = \frac{1}{n!} f_k^{(n)}(z_0)$$

sono piccole a piacere, ovvero esiste un numero N tale che

$$\sum_{0 \leq n \leq p} |a_{n,k} - a_{n,l}| r^n \leq \frac{\epsilon}{2}$$

per ogni $k \geq N, l \geq N$. Quindi,

$$|f_k(z) - f_l(z)| \leq \epsilon \quad \text{per ogni } k \geq N, l \geq N, \quad |z - z_0| \leq r.$$

Abbiamo dimostrato che la successione $f_k(z)$ converge uniformemente su ogni cerchio $|z - z_0| \leq r, r < R$. \square

Torniamo alla dimostrazione del teorema principale. Scegliendo un insieme di cerchi $|z - z_i| < R_i, i \in \mathbb{N}, R_i > 0$ che coprono il dominio D , si ottiene una famiglia di funzionali

$$F_i^n : \mathcal{H}(D) \rightarrow \mathbb{C}, \quad F_i^n(f) = f^{(n)}(z_i).$$

Data una successione f_k di funzioni appartenenti al dominio limitato A , bisogna dimostrare l'esistenza di un sottoinsieme $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$ tale che

$$\lim_{k \in \mathbb{N}'} F_i^n(f_k) \quad \text{esiste per ogni } (i, n). \quad (6.7)$$

Fissando i, n , l'insieme dei numeri $F_i^n(f_k), k \in \mathbb{N}$, è limitato, come segue dall'ipotesi che A è limitato. Raccolgo l'insieme dei funzionali F_i^n in una sequenza G_1, G_2, \dots scegliendo l'ordine arbitrariamente. Bisogna dimostrare l'esistenza di un sottoinsieme $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$ tale che

$$\lim_{k \in \mathbb{N}'} G_m(f_k) \quad \text{esiste per ogni } m \text{ intero, } m \geq 1.$$

Usiamo la seguente costruzione. Siccome l'insieme dei valori $G_1(f_k), k \in \mathbb{N}$, è limitato, allora esiste un sottoinsieme $\mathbb{N}_1 \subset \mathbb{N}$ tale che esiste il limite

$$\lim_{k \in \mathbb{N}_1} G_1(f_k).$$

Poi, l'insieme dei valori $G_2(f_k), k \in \mathbb{N}_1$ è limitato, allora esiste un sottoinsieme $\mathbb{N}_2 \subset \mathbb{N}_1$ tale che

$$\text{esiste } \lim_{k \in \mathbb{N}_2} G_2(f_k).$$

Continuando questo processo, si ottiene una sequenza di sottoinsiemi infiniti

$$\dots \mathbb{N}_{m+1} \subset \mathbb{N}_m \subset \dots \subset \mathbb{N}_2 \subset \mathbb{N}_1 \subset \mathbb{N}.$$

Il sottoinsieme $\mathbb{N}_{m+1} \subset \mathbb{N}_m$ viene definito come il sottoinsieme in \mathbb{N}_m tale che esiste il limite

$$\lim_{k \in \mathbb{N}_{m+1}} G_{m+1}(f_k).$$

Ora siamo in grado a costruire il sottoinsieme voluto $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$. Usiamo la "procedura diagonale": per ogni $m \geq 1$ l'elemento m -esimo dell'insieme \mathbb{N}' definiamo come l'elemento m -esimo dell'insieme \mathbb{N}_m . Per definizione ogni elemento dell'insieme \mathbb{N}' maggiore o uguale m appartiene anche all'insieme \mathbb{N}_m per ogni $m \geq 1$. Quindi, l'insieme \mathbb{N}' soddisfa (6.7). \square

6.4 Fine della dimostrazione del Teorema di Riemann

Dato un dominio semplicemente connesso $D \subset \mathbb{C}$ tale che $0 \in D \subset \mathbf{D}$, si consideri l'insieme $\mathcal{A} \subset \mathcal{H}(D)$ delle funzioni $f \in \mathcal{H}(D)$ univalenti su D tali che $f(0) = 0$, $f(D) \subset \mathbf{D}$. Secondo il Teorema 5.76 per costruire la mappa conforme $f_0 : D \rightarrow \mathbf{D}$ basta trovare una funzione $f_0 \in \mathcal{A}$ su cui il funzionale $f \mapsto |f'(0)|$ prende valore massimale.

Consideriamo il sottoinsieme $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ delle funzioni f tali che

$$|f'(0)| \geq 1. \quad (6.8)$$

Questo sottoinsieme è non vuoto: infatti, la funzione $f(z) = z$ appartiene a \mathcal{B} . Usando il Teorema 6.4 e il Corollario 6.6 si dimostra che, data una successione $f_n(z) \in \mathcal{B}$ che converge a una funzione $f(z)$ uniformemente sui compatti, allora la funzione $f(z)$ soddisfa $f(0) = 0$, (la condizione (6.8)) ed è univalente. Inoltre, le disuguaglianze $|f_n(z)| < 1$, $z \in D$ implicano che $|f(z)| \leq 1$ per $z \in D$. Ma, se $|f(z)| = 1$ per un punto $z \in D$, allora, secondo il Principio del massimo modulo, $f = \text{cost}$. Questo contraddice l'univalenza. Quindi, $f(D) \subset \mathbf{D}$. Abbiamo dimostrato che l'insieme $\mathcal{B} \subset \mathcal{H}(D)$ è chiuso.

L'ultima osservazione è che l'insieme \mathcal{B} è limitato:

$$|f(z)| < 1, \quad z \in D.$$

Quindi, $\mathcal{B} \subset \mathcal{H}(D)$ è un compatto. Il funzionale continuo

$$f \mapsto |f'(0)|$$

prende il valore massimale sul compatto nel punto $f = f_0$. Come è stato già spiegato, f_0 è la mappa conforme $D \rightarrow \mathbf{D}$. \square

7 Esercizi

7.1 Introduzione

1. Trovare la parte reale e quella immaginaria dei numeri

$$\frac{1}{1-i} \quad (7.1)$$

$$\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3 \quad (7.2)$$

$$\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 \quad (7.3)$$

$$\left(\frac{i^5 + 2}{i^{19} + 1}\right)^2 \quad (7.4)$$

$$\frac{(1+i)^5}{(1-i)^3} \quad (7.5)$$

2. Calcolare il modulo e l'argomento dei numeri complessi:

$$i \quad (7.6)$$

$$-3 \quad (7.7)$$

$$1 + i^{123} \quad (7.8)$$

$$-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (7.9)$$

$$\frac{1-i}{1+i} \quad (7.10)$$

$$-\cos \frac{\pi}{7} + i \sin \frac{\pi}{7} \quad (7.11)$$

$$(-4 + 3i)^3 \quad (7.12)$$

$$(1+i)^8(1-i\sqrt{3})^{-6}. \quad (7.13)$$

3. Dato un polinomio

$$P(z) = \sum_{k=0}^n c_k z^k,$$

determinare tutti i valori dei coefficienti $c_k \in \mathbb{C}$ necessari e sufficienti per la validità di una delle seguenti identità:

$$1) \forall z \in \mathbb{C} \quad \overline{P(\bar{z})} = P(z).$$

$$2) \forall z \in \mathbb{C} \quad \overline{P(\bar{z})} = -P(z).$$

4. Trovare l'interpretazione geometrica dei sottoinsiemi dei numeri $z \in \mathbb{C}$ che soddisfino una delle seguenti condizioni:

$$\operatorname{Re} z > 0 \quad (7.14)$$

$$\operatorname{Im} z \leq 1 \quad (7.15)$$

$$|\operatorname{Re} z| < 1 \quad (7.16)$$

$$|\operatorname{Im} z| < 1 \quad (7.17)$$

$$0 < \operatorname{Re} z < 1 \quad (7.18)$$

$$|z| \leq 1 \quad (7.19)$$

$$|z - i| > 1 \quad (7.20)$$

$$0 < |z + i| < 2 \quad (7.21)$$

$$1 < |z - 1| < 3 \quad (7.22)$$

$$0 < \arg z < \frac{\pi}{4} \quad (7.23)$$

$$|\pi - \arg z| < \frac{\pi}{4}. \quad (7.24)$$

5. Dati due numeri complessi $z_1 \neq z_2$, trovare l'interpretazione geometrica dei sottoinsiemi

dei numeri $z \in \mathbb{C}$ che soddisfino una delle seguenti equazioni:

$$|z - z_1| = |z - z_2| \quad (7.25)$$

$$|z - 1| = \operatorname{Re} z \quad (7.26)$$

$$|z - z_1| + |z - z_2| = 2a, \quad a > \frac{1}{2}|z_2 - z_1| \quad (7.27)$$

$$||z - z_1| - |z - z_2|| = 2a. \quad (7.28)$$

6. Trovare la descrizione geometrica delle curve sul piano complesso definite dalle equazioni

$$\operatorname{Re} \frac{1}{z} = \frac{1}{a}, \quad a > 0. \quad (7.29)$$

$$\operatorname{Re} \frac{z-1}{z+1} = 0 \quad (7.30)$$

$$\operatorname{Im} \frac{z-1}{z+1} = 0 \quad (7.31)$$

$$\operatorname{Re} \frac{z-a}{z+a} = 0, \quad a > 0. \quad (7.32)$$

7. Trovare la descrizione geometrica dei sottoinsiemi del piano complesso definiti da ciascuna delle seguenti disuguaglianze:

$$|z - i| + |z + i| < 4 \quad (7.33)$$

$$\operatorname{Re} \frac{1}{z} < \frac{1}{2} \quad (7.34)$$

$$|z - 2| - |z + 2| < 2 \quad (7.35)$$

$$|1 + z| < |1 - z| \quad (7.36)$$

$$0 < \arg \frac{i - z}{z + i} < \frac{\pi}{2} \quad (7.37)$$

$$\operatorname{Re} [z(1 - i)] < \sqrt{2} \quad (7.38)$$

$$\frac{\pi}{4} < \arg(z + i) < \frac{\pi}{2} \quad (7.39)$$

$$|z| > 1 - \operatorname{Re} z \quad (7.40)$$

$$\operatorname{Re} z^4 > \operatorname{Im} z^4 \quad (7.41)$$

8. Dati due numeri reali A, C e un numero complesso B tale che $AC < |B|^2$, dimostrare che l'equazione

$$A|z|^2 + \bar{B}z + B\bar{z} + C = 0 \quad (A > 0) \quad (7.42)$$

determina una circonferenza. Trovare il centro e il raggio della circonferenza.

9. Dimostrare che l'equazione della circonferenza con il centro passante attraverso tre punti z_1, z_2, z_3 può essere scritta nella forma

$$\det \begin{vmatrix} |z|^2 & z & \bar{z} & 1 \\ |z_1|^2 & z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ |z_2|^2 & z_2 & \bar{z}_2 & 1 \\ |z_3|^2 & z_3 & \bar{z}_3 & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (7.43)$$

10. Dimostrare che per una qualsiasi costante $K \neq 1$ l'equazione

$$\left| \frac{z - z_1}{z - z_2} \right| = K, \quad z_1 \neq z_2 \quad (7.44)$$

determina una circonferenza. Determinare il centro e il raggio di questa circonferenza.

11. Dimostrare che quattro punti z_1, z_2, z_3, z_4 tutti distinti appartengono a una circonferenza (oppure a una retta) se e solo se il numero

$$\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} : \frac{z_2 - z_4}{z_3 - z_4} \in \mathbb{R}. \quad (7.45)$$

12. Dato un numero complesso a , $\text{Im } a > 0$, considerare il rapporto

$$\left| \frac{z - a}{z - \bar{a}} \right|. \quad (7.46)$$

Dimostrare che questo rapporto è maggiore di 1 esattamente sul semipiano inferiore, minore di uno sul semipiano superiore, e è uguale a 1 esattamente sull'asse reale.

7.2 Successioni e serie di numeri complessi

13. Dato $z = x + iy$, dimostrare che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n} \right)^n = e^x (\cos y + i \sin y).$$

14. Siano $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ numeri complessi tali che

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n} \leq 1.$$

Dimostrare che le serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \text{e} \quad \sum_{n=0}^{\infty} s_n z^n$$

dove

$$s_n := \sum_{k=1}^n a_k$$

convergono per $|z| < 1$ e le loro somme sono legate dall'equazione

$$\sum_{n=0}^{\infty} s_n z^n = \frac{1}{1-z} \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

7.3 Funzioni elementari di una variabile complessa

15. Trovare l'immagine dell'insieme E rispetto all'applicazione $w = f(z)$:

$$E : \operatorname{Im} z = 1; \quad w = \frac{z-1}{z+1} \quad (7.1)$$

$$E : x^2 + y^2 + 2x + 2y + 1 = 0; \quad w = \frac{2z+3}{z+i} \quad (7.2)$$

$$E : |z+1| = 1; \quad w = \frac{1}{z} \quad (7.3)$$

$$E : \left| z - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{4}; \quad w = -\frac{1}{z} \quad (7.4)$$

$$E : |z| = 2; \quad w = \frac{z}{z+1} \quad (7.5)$$

$$E : \operatorname{Re} z = 1; \quad w = \frac{z}{1+z} \quad (7.6)$$

$$E : |z| = 1; \quad w = \frac{i+z}{i-z} \quad (7.7)$$

$$E : |z| \leq 1; \quad w = \frac{z+2}{1+2z} \quad (7.8)$$

$$E : |z| \geq 1; \quad w = 2 \frac{2z-1}{z-2} \quad (7.9)$$

$$E : \operatorname{Re} z > 0; \quad w = \frac{z+a}{z-a}, \quad a > 0. \quad (7.10)$$

16. Trovare l'immagine dell'insieme E rispetto all'applicazione $w = f(z)$:

$$E : \left\{ |z| = 1, \quad 0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{4} \right\}; \quad w = z^4 \quad (7.11)$$

$$E : \{ |z| > 2, \quad 0 < \arg z < \pi \}; \quad w = z^3 \quad (7.12)$$

$$E : \operatorname{Re} z = 1; \quad w = z^2 \quad (7.13)$$

$$E : |z| = 2; \quad w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) \quad (7.14)$$

$$E : |z| = \frac{1}{2}; \quad w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) \quad (7.15)$$

$$E : \{ |z| < 1, \quad \operatorname{Im} z > 0 \}; \quad w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) \quad (7.16)$$

$$E : \arg z = \frac{\pi}{4}; \quad w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) \quad (7.17)$$

$$E : \frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{3\pi}{4}; \quad w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right). \quad (7.18)$$

17. Dimostrare che

$$\sinh iz = i \sin z \quad (7.19)$$

$$\cos iz = \cosh z \quad (7.20)$$

$$\tan iz = i \tanh z. \quad (7.21)$$

18. Per $z = x + iy$ dimostrare che

$$|\sin z| = \sqrt{\cosh^2 y - \cos^2 x} \quad (7.22)$$

$$|\cos z| = \sqrt{\cosh^2 y - \sin^2 x} \quad (7.23)$$

$$\operatorname{Re} \sin z = \sin x \cdot \cosh y \quad (7.24)$$

$$\operatorname{Im} \cos z = -\sin x \cdot \sinh y \quad (7.25)$$

$$\operatorname{Re} \tan z = \frac{\sin 2x}{\cos 2x + \cosh 2y} \quad (7.26)$$

$$\operatorname{Im} \cot z = -\frac{\sinh 2y}{\cosh 2y - \cos 2x}. \quad (7.27)$$

19. Descrivere gli insiemi dei punti z su cui le seguenti funzioni $f(z)$ prendono valori reali

$$f(z) = \cos z \quad (7.28)$$

$$f(z) = \cosh z \quad (7.29)$$

$$f(z) = \sin z \quad (7.30)$$

$$f(z) = \tan z \quad (7.31)$$

$$f(z) = \coth z. \quad (7.32)$$

20. Dimostrare la formula

$$\cos xz = \frac{\sin \pi z}{\pi z} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2z \sin \pi z}{n^2 - z^2} \cos nx, \quad -\pi \leq x \leq \pi. \quad (7.33)$$

[Hint: sviluppare la funzione $\cos xz$ in serie di Fourier sul $-\pi \leq x \leq \pi$.]

21. Dimostrare la validità di seguenti sviluppi:

$$\pi \cot \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2} \quad (7.34)$$

$$\frac{\pi}{\sin \pi z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z - n} \quad (7.35)$$

$$\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^2} \quad (7.36)$$

$$\frac{\pi}{\cos \pi z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z-n-\frac{1}{2}} \quad (7.37)$$

$$\sin \pi z = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right). \quad (7.38)$$

[Hint: usare il risultato dell'esercizio precedente.]

22. Dato un polinomio $P(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$, dimostrare che, qualunque sia il numero positivo α tale che

$$\alpha < \frac{\pi}{2n}$$

la funzione

$$w = e^{P(z)}$$

tende a zero per $z \rightarrow \infty$ dentro i settori circolari

$$\left| \arg z - \frac{(2k+1)\pi}{n} \right| \leq \alpha, \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \quad (7.39)$$

7.4 Serie di potenze

23. Trovare il raggio di convergenza delle serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^k z^n \quad (7.1)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} [\log(n+2)]^k z^n \quad (7.2)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n!)^\alpha}, \quad \alpha > 0 \quad (7.3)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} z^n \quad (7.4)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(kn)!}{n!(n+1)! \dots (n+k-1)!} z^n. \quad (7.5)$$

24. Studiare la convergenza delle seguenti serie al bordo del disco di convergenza:

$$z + \frac{2}{1 \cdot 3} z^2 + \frac{2 \cdot 4}{1 \cdot 3 \cdot 5} z^3 + \dots \quad (7.6)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n\sqrt{n}} \quad (7.7)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} z^n \quad (7.8)$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \log n} z^{3n} \quad (7.9)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{\pi i n^2}{2}}}{\sqrt{n}} z^n. \quad (7.10)$$

25. Dati tre numeri complessi a, b, c , tali che $c \neq 0, -1, -2, \dots$ determinare il raggio di convergenza R della serie

$$F(z) = 1 + \frac{ab}{c} z + \frac{a(a+1) \cdot b(b+1)}{c(c+1)} \frac{z^2}{2!} + \dots$$

$$+ \frac{a(a+1) \dots (a+n-1) \cdot b(b+1) \dots (b+n-1)}{c(c+1) \dots (c+n-1)} \frac{z^n}{n!} + \dots$$

Dimostrare che per $|z| < R$ la funzione $F(z)$ soddisfi l'equazione differenziale

$$z(1-z)F'' + (c - (a+b+1)z)F' - abF = 0.$$

26. Considerare la serie

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$$

sull'intersezione dei cerchi

$$|z| < 1, \quad |z-1| < 1.$$

Dimostrare la convergenza della serie sull'intersezione. Inoltre dimostrare la validità della formula

$$f(z) + f(1-z) = a - \log z \log(1-z), \quad a = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

[Hint: dimostrare prima che, data una serie $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ con il raggio di convergenza $R = 1$, tale che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ converge, allora

$$\lim_{x \rightarrow 1, x < 1} g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n.$$

]

7.5 Varie formule della teoria di funzioni olomorfe

27. Dimostrare che l'equazione di Laplace

$$\Delta f \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y} = 0$$

è equivalente a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}} = 0.$$

28. Calcolare $\frac{\partial f}{\partial z}$ e $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ per le seguenti funzioni:

$$f = |z| \tag{7.11}$$

$$f = |z - a|^p, \quad -\infty < p < \infty \tag{7.12}$$

$$f = \sqrt{|z - a|^2 + |z - b|^2}. \tag{7.13}$$

29. Data una funzione olomorfa $f(z)$, dimostrare che

$$\frac{\partial}{\partial z} (|f(z)|) = \frac{1}{2} |f(z)| \frac{f'(z)}{f(z)} \tag{7.14}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \operatorname{Re} f(z) = \frac{1}{2} f'(z) \tag{7.15}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \operatorname{Im} f(z) = \frac{1}{2i} f'(z) \tag{7.16}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \log(1 + |f(z)|^2) = \frac{|f'(z)|^2}{(1 + |f(z)|^2)^2}. \tag{7.17}$$

30. Dimostrare che il polinomio $P(x, y)$ soddisfa l'equazione di Laplace $\Delta P = 0$ se e solo se P si rappresenta come

$$P = Q_1(z) + Q_2(\bar{z})$$

dove Q_1 e Q_2 sono due polinomi.

7.6 Integrali curvilinei. Teorema di Cauchy

31. Dato un dominio $D \subset \mathbb{R}^2$, dimostrare che ogni curva $\gamma : [a, b] \rightarrow D$ liscia a tratti è omotopa in D a una spezzata $\tilde{\gamma} : [a, b] \rightarrow D$, $\gamma(a) = \tilde{\gamma}(a)$, $\gamma(b) = \tilde{\gamma}(b)$. Dimostrare un risultato simile per circuiti.

32. Dimostrare che un circuito $\gamma \subset \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus 0$ è omotopo in \mathbb{C}^* a un circuito banale se e solo se $\deg(\gamma, z_0) = 0$. [Hint: usare il risultato dell'esercizio precedente.]

33. a) Data una curva $\gamma \subset \mathbb{C}$ liscia a tratti, chiamiamo $\bar{\gamma}$ l'immagine di γ rispetto alla coniugazione $z \mapsto \bar{z}$. Dimostrare che per una funzione $f(z)$ continua su γ la nuova funzione $\overline{f(\bar{z})}$ è continua su $\bar{\gamma}$ e

$$\overline{\int_{\gamma} f(z) dz} = \int_{\bar{\gamma}} \overline{f(\bar{z})} dz.$$

- b) In particolare, per una funzione $f(z)$ continua sul cerchio $|z| = 1$ dimostrare che

$$\overline{\oint_{|z|=1} f(z) dz} = - \oint_{|z|=1} \overline{f(z)} \frac{dz}{z^2}.$$

34. Si consideri una funzione $f(z)$ continua sul cerchio $|z| \leq 1$. Il bordo orientato del cerchio si chiami γ :

$$\gamma(t) = r e^{it}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Inoltre consideriamo una successione dei cerchi

$$\gamma_n(t) = r_n e^{it}, \quad r_n := \left(1 - \frac{1}{n}\right) r, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Dimostrare che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \oint_{\gamma_n} f(z) dz = \oint_{\gamma} f(z) dz.$$

35. Per una funzione $f(z)$ olomorfa sul cerchio $|z| < r$ e *continua* nel cerchio chiuso $|z| \leq r$ dimostrare che

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta|=r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

per ogni z tale che $|z| < r$.

36. Data una funzione olomorfa $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ nel dominio D , tale che, per certi numeri complessi costanti a, b, c , è valida l'identità

$$a u(x, y) + b v(x, y) \equiv c \quad \forall z = x + iy \in D,$$

dimostrare che $f(z) \equiv \text{cost}$ in D .

37. Data un circuito liscio a tratti e orientato $\gamma \subset \mathbb{C}$ e una funzione $\varphi(z)$ continua su γ definire una funzione $f(z)$ su $D := \mathbb{C} \setminus \gamma$ ponendo

$$f(z) := \oint_{\gamma} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

- a) Dimostrare che la funzione $f(z)$ è olomorfa su D (NB: D non è un insieme connesso!).
 b) Per ogni numero intero positivo n e per ogni $z \in D$ dimostrare che

$$f^{(n)}(z) = n! \oint_{\gamma} \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta.$$

38. Supponiamo che la funzione $f(z)$ sia olomorfa sulla striscia $-a < \operatorname{Im} z < a$ e soddisfi la condizione

$$f(z) \rightarrow 0 \quad \text{per } z \rightarrow \infty, \quad -a < \operatorname{Im} z < a.$$

Dato che l'integrale $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ converge, dimostrare convergenza degli integrali

$$\int_{i\alpha-\infty}^{i\alpha+\infty} f(z) dz$$

per ogni α tale che $-a < \alpha < a$. Inoltre dimostrare che questi integrali non dipendono da α .

39. Calcolare l'integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cos \alpha x dx, \quad \alpha \in \mathbb{R}. \quad (7.18)$$

[Hint: usare l'integrale $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ assieme con il risultato dell'esercizio precedente.]

40. Supponiamo che la funzione $f(z)$ sia olomorfa sul settore circolare $-a < \arg z < a$ e soddisfi le condizioni

$$z f(z) \rightarrow 0 \quad \text{per } z \rightarrow 0, \quad |\arg z| < a$$

$$z f(z) \rightarrow 0 \quad \text{per } z \rightarrow \infty, \quad |\arg z| < a.$$

Dato che l'integrale $\int_0^{\infty} f(x) dx$ converge, dimostrare convergenza degli integrali

$$\int_{\arg z=\alpha} f(z) dz$$

per ogni α tale che $-a < \alpha < a$. Inoltre dimostrare che questi integrali non dipendono da α .

41. Calcolare gli integrali di Fresnel

$$\int_0^{\infty} \cos x^2 dx \quad \text{e} \quad \int_0^{\infty} \sin x^2 dx.$$

[Hint: usare la formula $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ assieme con il risultato dell'esercizio precedente.]

7.7 Formula integrale di Cauchy

42. Calcolare gli integrali

$$\oint_{|z+i|=3} \sin z \frac{dz}{z+i} \quad (7.19)$$

$$\oint_{|z|=2} \frac{dz}{z^2+1} \quad (7.20)$$

$$\oint_{|z|=2} \frac{e^z}{z^2-1} dz \quad (7.21)$$

$$\oint_{|z|=4} \frac{\cos z}{z^2 - \pi^2} dz \quad (7.22)$$

$$\oint_{|z+1|=1} \frac{dz}{(1+z)(z-1)^3} \quad (7.23)$$

$$\oint_{|z-i|=1} \frac{\cos z}{(z-i)^3} dz \quad (7.24)$$

$$\int_{|z|=r} \frac{dz}{(z-a)^n(z-b)}, \quad |a| < r < |b|, \quad n = 1, 2, \dots \quad (7.25)$$

$$\oint_{\partial D} \frac{e^z dz}{z(1-z)^3} \quad (7.26)$$

per i seguenti domini D :

a)

$$D = \left\{ z \mid |z| < \frac{1}{2} \right\}$$

b)

$$D = \left\{ z \mid |z| < \frac{3}{2} \right\}$$

c)

$$D = \left\{ z \mid |z-1| < \frac{1}{2} \right\}.$$

In tutti i casi si assume che il circuito è orientato in senso antiorario.

7.8 Prolungamento analitico

43. Date due funzioni olomorfe $f_1(z)$, $f_2(z)$ su un dominio D che soddisfano l'equazione differenziale $f'(z) = P(z, f(z))$ per un polinomio $P = P(z, w)$. Dimostrare che, se $f_1(z_0) = f_2(z_0)$ per un punto $z_0 \in D$, allora $f_1(z) \equiv f_2(z)$.
44. La funzione $f(z)$ olomorfa sull'intorno del punto $z = 0$ soddisfa l'equazione $f(2z) = f(z)$. Dimostrare che $f(z) = \text{cost}$.
45. Dato un numero reale α , dimostrare l'esistenza e l'unicità della funzione $f(z)$ olomorfa sul piano complesso \mathbb{C} tagliato lungo la semiasse negativa tale che per i valori reali positivi $z = x \in \mathbb{R}$, $x > 0$ $f(z) = x^\alpha$.
46. La funzione gamma di Eulero è definita dall'integrale

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt.$$

Dimostrare che la funzione gamma ammetta un prolungamento analitico sul dominio

$$D = \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}.$$

47. Data una funzione $\varphi(z)$ olomorfa sulla striscia $-a \leq \operatorname{Re} z \leq 0$ tale che

$$|\varphi(z)| \leq M(1 + |z|)^{-\alpha}, \quad \alpha > 0, \quad -a \leq \operatorname{Re} z \leq 0$$

dimostrare che la funzione

$$f(z) := \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

ammetta un prolungamento analitico nel semipiano $\operatorname{Re} z > -a$.

48. Dimostrare che la somma della serie

$$f(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^\alpha}, \quad 0 < \alpha \in \mathbb{R}$$

sia una funzione olomorfa sul cerchio $|z| < 1$. Inoltre dimostrare l'esistenza di un prolungamento analitico della funzione stessa su $\mathbb{C} \setminus [1, \infty)$. [Hint: usare la formula

$$n^{-\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-nt} dt.$$

]]

49. Usando opportunamente il prolungamento analitico dimostrare le seguenti formule:

$$\int_0^1 t^{z-1} e^{-t} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(z+n)} \quad (7.27)$$

$$\int_1^\infty \frac{t^{z-1}}{t^2+1} dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z-2n} \quad (7.28)$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-atz}}{e^{-t}+1} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+\alpha z}, \quad \alpha > 0 \quad (7.29)$$

$$\int_0^\infty \frac{t^{z-1}}{t+1} dt = \sum_{-\infty < n < \infty} \frac{(-1)^n}{z-n} \quad (7.30)$$

$$\int_0^\infty \frac{t e^{-tz}}{1-e^{-t}} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z+n)^2}. \quad (7.31)$$

50. Usando la formula

$$\frac{\pi}{\sin \pi z} = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z-n}$$

(vedi Esercizio 21, formula (7.35)) dimostrare l'identità

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}.$$

[Hint: usare l'espressione della funzione beta tramite funzioni gamma

$$B(z, w) := \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1} dt = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)};$$

e anche lo sviluppo (7.30).]

7.9 Principio del massimo modulo. Lemma di Schwarz

51. Data una funzione olomorfa sulla striscia $|\operatorname{Re} z| < \frac{\pi}{4}$ che soddisfa $f(0) = 0$ e la disuguaglianza $|f(z)| < 1$, dimostrare che $|f(z)| \leq |\tan z|$ sulla striscia stessa.

52. Data una funzione olomorfa e limitata

$$|f(z)| \leq M$$

sul cerchio $|z| < r$ tale che $f(a) = 0$, $|a| < r$, dimostrare le seguenti disuguaglianze

$$|f(z)| \leq M \frac{r|z-a|}{r^2 - \bar{a}z}, \quad |z| < r, \quad |f'(a)| \leq \frac{Mr}{r^2 - |a|^2}.$$

53. Data una funzione $f(z)$ olomorfa sul semipiano $\operatorname{Re} z > 0$ tale che $|f(z)| < 1$ per ogni z nel semipiano, $f(z_1) = 0, \dots, f(z_m) = 0$. Dimostrare che

$$|f(z)| \leq \frac{|z-z_1||z-z_2|\dots|z-z_m|}{|z+\bar{z}_1||z+\bar{z}_2|\dots|z+\bar{z}_m|}, \quad \operatorname{Re} z > 0.$$

54. Data una funzione olomorfa e limitata $f(z)$ sul semipiano superiore $\operatorname{Re} z > 0$ non identicamente uguale a zero con i zeri nei punti $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$, tale che $z_n \rightarrow \infty$, dimostrare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} \frac{1}{z_n}.$$

55. Dato un polinomio

$$P(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$$

tale che non tutti i coefficienti a_1, \dots, a_n siano uguali a 0, dimostrare che $|P(z)| > 1$ in almeno un punto z della circonferenza $|z| = 1$.

56. Data una funzione $f(z)$ olomorfa sul settore circolare $\alpha < \arg z < \beta$ e continua sui bordi $\arg z = \alpha$ e $\arg z = \beta$ del settore, tale che sui bordi

$$|f(z)| \leq M \quad \text{per} \quad \arg z = \alpha \quad \text{o} \quad \arg z = \beta$$

e sull'interno

$$|f(z)| < M_1 e^{|z|^m}, \quad \alpha < \arg z < \beta$$

per un numero intero positivo m tale che

$$m < \frac{\pi}{\beta - \alpha}$$

dimostrare *teorema di Phragmen - Lindelöf*, ovvero la validità della disuguaglianza

$$|f(z)| \leq M$$

su tutto il settore $\alpha \leq \arg z \leq \beta$.

[Hint: Prima dimostrare la disuguaglianza $u_\epsilon(z) \leq \log M$ per

$$u_\epsilon(z) := \log |f(z)| - \epsilon |z|^\mu \cos \mu \left(\arg z - \frac{\alpha + \beta}{2} \right), \quad m < \mu < \frac{\pi}{\beta - \alpha}$$

per $\epsilon > 0$ e poi passare al limite $\epsilon \rightarrow 0$.]

7.10 Punti singolari isolati

57. Trovare tutti punti singolari isolati e determinare i loro tipi per le seguenti funzioni:

$$\frac{z}{\sin z} \quad (7.32)$$

$$\frac{1 - \cos z}{\sin^2 z} \quad (7.33)$$

$$z^2 \sin \frac{z}{z+1} \quad (7.34)$$

$$\frac{1}{z^2 - 1} \cos \frac{\pi z}{z+1} \quad (7.35)$$

$$\cot z - \frac{1}{z} \quad (7.36)$$

$$z \left(e^{\frac{1}{z}} - 1 \right) \quad (7.37)$$

$$e^{\cot \frac{\pi}{z}} \quad (7.38)$$

$$\sin e^{\frac{1}{z}}. \quad (7.39)$$

58. Data una funzione $f(z)$ olomorfa sul dominio $0 < |z| < r$ tale che

$$|f(z)| < M |z|^{-m} \quad \text{per } 0 < |z| < r$$

per certe costanti positive M e m , dimostrare che $z = 0$ non è una singolarità essenziale per la funzione f .

59. Data una funzione $f(z)$ olomorfa, salvo per i poli $z = a_1, \dots, z = a_n$, sul semipiano $\text{Im } z > 0$ e continua fino all'asse reale, che soddisfa inoltre la condizione $f(z) = o(1/z)$ per $z \rightarrow \infty$ sul semipiano $\text{Im } z \geq 0$, dimostrare la validità della seguente formula

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{res}_{z=a_k} f(z). \quad (7.40)$$

7.11 Applicazioni al calcolo degli integrali

60. Calcolare i seguenti integrali:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + 1)(x^2 + 9)} \quad (7.41)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 - x + 2}{x^4 + 10x^2 + 9} dx \quad (7.42)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx \quad (7.43)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^3} \quad (7.44)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(a + bx^2)^n}, \quad a > 0, b > 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (7.45)$$

61. Data una funzione $f(z)$ continua sul semipiano $\text{Im } z \geq 0$, $|z| \geq R$ che soddisfi la proprietà $f(z) \rightarrow 0$ per $|z| \rightarrow \infty$, $\text{Re } z \geq 0$, dimostrare *lemma di Jordan*:

$$\int_{C_r} f(z)e^{iz} dz \rightarrow 0; \quad C_r : |z| = r, \quad \text{Re } z \geq 0.$$

[Hint: usare disuguaglianza $\sin \phi \geq \frac{2}{\pi}\phi$ valida per qualsiasi $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$.]

62. Data una funzione $f(z)$ olomorfa, salvo per i poli $z = a_1, \dots, z = a_n$, sul semipiano $\text{Im } z > 0$ e continua fino all'asse reale, che soddisfa la condizione $f(z) = o(1)$ per $|z| \rightarrow \infty$, $\text{Im } z \geq 0$, dimostrare che

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ix} dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{res}_{z=a_k} f(z)e^{iz}.$$

63. Calcolare i seguenti integrali:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-1)e^{ix}}{x^2 - 2x + 2} dx \quad (7.46)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{(x^2 + 4ix - 5)^3} dx \quad (7.47)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2 + 2ix - 2)^2} dx \quad (7.48)$$

$$\int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{e^{zt}}{(z^2 - 1)^2} dz \quad \text{per : a) } t > 0; \text{ b) } t < 0. \quad (7.49)$$

$$\int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\cosh zt}{(z+1)(z+2)} dz, \quad t > 0 \quad (7.50)$$

$$\int_{2i-\infty}^{2i+\infty} \frac{z \sin zt}{z^2 + 1} dz, \quad t > 0 \quad (7.51)$$

64. Nelle ipotesi di Esercizio 62 supponiamo che la funzione $f(z)$ prenda valori reali sull'asse reale. Dimostrare le seguenti formule:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos x dx = -2\pi \text{Im} \sum_{k=1}^n \text{res}_{z=a_k} f(z)e^{iz}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin x dx = 2\pi \text{Re} \sum_{k=1}^n \text{res}_{z=a_k} f(z)e^{iz}.$$

65. Calcolare i seguenti integrali:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x+1) \sin 2x}{x^2 + 2x + 2} dx \quad (7.52)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 \sin x}{x^4 + 5x^2 + 4} dx \quad (7.53)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + a^2} dx, \quad a > 0 \quad (7.54)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x \sin x}{(x^2 + a^2)^2} dx, \quad a > 0 \quad (7.55)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos x dx}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)}, \quad \operatorname{Re} a > 0, \quad \operatorname{Re} b > 0 \quad (7.56)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{x^4 + x^2 + 1} dx, \quad a > 0. \quad (7.57)$$

66. Calcolare i seguenti integrali:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax} dx}{1 + e^x} \quad (7.58)$$

$$\int_0^{\infty} e^{-\pi x} \frac{\sin ax}{\sinh \pi x} dx \quad (7.59)$$

[Hint: considerare la funzione $f(z) = \frac{e^{iaz}}{e^{2\pi z} - 1}$.]

$$\int_0^{\infty} \frac{\log x dx}{(x^2 + 1)^2} \quad (7.60)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\log x dx}{(x+a)^2 + b^2} \quad (7.61)$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(a + b \cos t)^2} \quad (7.62)$$

7.12 Funzioni ellittiche

In questi esercizi

$$\Lambda = \{2m\omega_1 + 2n\omega_2 \mid m, n \in \mathbb{Z}\}, \quad \operatorname{Im} \frac{\omega_2}{\omega_1} > 0.$$

67. La funzione zeta di Weierstrass è definita dalla serie

$$\zeta(z) = \zeta(z; \omega_1, \omega_2) = \frac{1}{z} + \sum'_{w \in \Lambda} \left[\frac{1}{z-w} + \frac{1}{w} + \frac{z}{w^2} \right].$$

Dimostrare che la funzione $\zeta(z)$ è meromorfa su $\mathbb{C} \setminus \Lambda$ e soddisfa le equazioni

$$\zeta(z + 2\omega_1) = \zeta(z) + 2\eta_1, \quad \zeta(z + 2\omega_2) = \zeta(z) + 2\eta_2$$

dove

$$\eta_1 = \zeta(\omega_1), \quad \eta_2 = \zeta(\omega_2).$$

Dimostrare inoltre l'identità di Legendre

$$\eta_1\omega_2 - \eta_2\omega_1 = \frac{\pi i}{2}.$$

68. Dati qualsiasi numeri complessi z_1, \dots, z_k tali che $z_j \notin \Lambda$, si consideri la funzione

$$f(z) = \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{j=1}^k c_{j,m} \zeta^{(m)}(z - z_j) \quad (7.63)$$

dove $\zeta(z) = \zeta(z; \omega_1, \omega_2)$ è la funzione zeta di Weierstrass e $c_{j,m}$ sono numeri complessi qualsiasi tali che

$$\sum_{j=1}^k c_{j,0} = 0. \quad (7.64)$$

Dimostrare che $f(z)$ è una funzione ellittica. Inoltre dimostrare che qualsiasi funzione ellittica $f(z)$ ammetta una rappresentazione nella forma (7.63), (7.64).

69. Dimostrare la formula di addizione per la funzione \wp di Weierstrass:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & \wp(u) & \wp'(u) \\ 1 & \wp(v) & \wp'(v) \\ 1 & \wp(u+v) & -\wp'(u+v) \end{pmatrix} = 0$$

per ogni $u, v \in \mathbb{C}$ tali che $u, v, u+v \notin \Lambda$.

70. Si consideri il moto sulla retta di un punto di massa 1 in un potenziale cubico $U(x) = -2x^3 + bx + c$, dove b, c sono numeri reali, $b > 0$. Usando le funzioni di Weierstrass derivare le formule per le soluzioni periodiche delle equazioni del moto. Inoltre calcolare le variabili canoniche d'azione-angolo.

7.13 Mappe conformi

71. Dati due domini semplicemente connessi $D, D' \subset \mathbb{C}$ tali che il dominio D' è limitato, e una mappa $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ olomorfa sul D è continua sul \bar{D} tale che la restrizione della f al bordo ∂D stabilisce una corrispondenza biunivoca e liscia a tratti tra i bordi orientati ∂D e $\partial D'$ che rispetta l'orientazione, allora dimostrare che la mappa f sia una mappa conforme del dominio D sul dominio D' .

72. Costruire una mappa conforme del dominio definito da

$$y^2 > 4(x+1)$$

$(x + iy = z)$ sul cerchio $\mathbf{D} = |w| < 1$.

73. Costruire una mappa conforme del dominio definito da

$$|\arg z| < \frac{\pi}{4}$$

sul cerchio $\mathbf{D} = |w| < 1$.

74. Trovare gli immagini delle seguenti linee rispetto alla mappa $w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$

$$|z| = 1, \quad \operatorname{Im} z > 0 \tag{7.65}$$

$$|z| = 2 \tag{7.66}$$

$$|z| = \frac{1}{2} \tag{7.67}$$

$$\arg z = \frac{\pi}{4} \tag{7.68}$$

$$\arg z = \frac{3\pi}{4}. \tag{7.69}$$

75. Trovare gli immagini dei seguenti domini rispetto alla mappa $w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$

$$|z| > 1, \quad z \notin [0, i], \quad z \notin [1, +\infty] \tag{7.70}$$

$$\operatorname{Im} z > 0, \quad z \notin \left\{ |z| = 1, \quad 0 < \arg z < \frac{\pi}{4}, \quad \frac{3\pi}{4} < \arg z < \pi \right\} \tag{7.71}$$

$$|z| < 1, \quad \operatorname{Im} z < 0, \quad z \notin \left[-i, -\frac{1}{2} \right] \tag{7.72}$$

$$|z| < 1, \quad 0 < \arg z < \frac{\pi}{2}. \tag{7.73}$$

76. Trovare gli immagini del dominio D sottoindicato rispetto alle seguenti mappe $w = f(z)$:

$$D : \{-\pi < \operatorname{Im} z < 0\}, \quad w = e^z \tag{7.74}$$

$$D : \{0 < \operatorname{Im} z < \pi/2, \quad \operatorname{Re} z > 0\}, \quad w = e^{2z} \tag{7.75}$$

$$D : \{z \notin [0, +\infty]\}, \quad w = \log z, \quad w(-1) = -\pi i \tag{7.76}$$

$$D : \{|\operatorname{Im} z| < \frac{\pi}{4}\}, \quad w = \tanh z \tag{7.77}$$

$$D : \{0 < \operatorname{Re} z < \pi/4\}, \quad w = \cot z \tag{7.78}$$

$$D : \{0 < \operatorname{Im} z < \pi\}, \quad w = \cosh z \tag{7.79}$$

$$D : \{0 < \operatorname{Re} z < 2\pi, \quad \operatorname{Im} z > 0\}, \quad w = \sin z. \tag{7.80}$$

77. Costruire una mappa conforme della striscia

$$-\frac{\pi}{4} < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{4}$$

sul cerchio $\mathbf{D} = |w| < 1$.

78. Costruire una mappa conforme del semipiano superiore $\text{Im } z > 0$ con il taglio lungo il segmento $[a, a + ih]$, $a, h \in \mathbb{R}$, $h > 0$ sul cerchio \mathbf{D} .
79. Costruire una mappa conforme del piano \mathbb{C} con i tagli $(-\infty, -a]$ e $[a, \infty)$, $a > 0$, sulla striscia $0 < \text{Re } w < 1$.
80. Costruire la mappa conforme della striscia

$$0 < \text{Im } z < 2H$$

con un taglio $(-\infty + iH, a + iH]$ sulla striscia stessa ma senza il taglio.

81. Costruire una mappa conforme della striscia $0 < \text{Im } z < 1$ con il taglio $[a, a + ih]$ sulla striscia stessa ma senza il taglio.

8 Bibliografia

Per preparare i presenti appunti sono stati usati i seguenti libri.

1. H.Cartan, Elementary theory of analytic functions of one or several complex variables. Reading, Mass., Addison-Wesley, 1963.
2. M.A.Lavrentiev, B.V.Chabat, Methodes de la theorie des fonctions d'une variable complexe. Moscou, Editions MIR, 1972.
3. M.A.Evgrafov *et al.*, Recueil de problemes sur la theorie des fonctions analytiques. Moscou, Editions MIR, 1974.

Per i disegni sono stati usati i seguenti libri:

1. J.E.Marsden, M.J.Hoffman, Basic complex analysis. San Francisco, W. H. Freeman, 1987.
2. G.Springer, Introduction to Riemann surfaces. Reading, Mass., Addison-Wesley Pub. Co. [1957]