

Prova scritta di Meccanica superiore: 10 Ottobre 2007

Esercizio 1

Siano (x_1, x_2, x_3) coordinate cartesiane in \mathbb{R}^3 e (p_1, p_2, p_3) coordinate sulle fibre di $T^*\mathbb{R}^3$. Si consideri la parentesi $\{.,.\}$ definita da

$$\begin{aligned} \{x_i, x_j\} &= 0; & \{x_i, p_j\} &= \delta_{ij}, & i, j &= 1, 2, 3; \\ \{p_1, p_2\} &= -x_3, & \{p_1, p_3\} &= 0, & \{p_2, p_3\} &= x_1. \end{aligned} \quad (0.1)$$

1. Si dimostri che questa parentesi è di Poisson.
2. Si dimostri che il campo Hamiltoniano associato dalla parentesi (0.1) alla funzione

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_3^2)$$

é integrabile secondo Liouville.

3. Si determinino le coordinate canoniche $(x_i, s_i)_{i=1,2,3}$ per (0.1.)

Esercizio 2

Scrivere l'Hamiltoniana di un punto materiale di massa m che si muove nello spazio tridimensionale $\mathbf{r} = (r_1, r_2, r_3)$ sotto l'azione di un campo centrale

$$V(\mathbf{r}) = \frac{k}{|\mathbf{r}|^2} + h|\mathbf{r}|^2$$

dove h e k sono due costanti positive.

1. Scrivere e risolvere l'equazione di Hamilton-Jacobi.
2. Determinare le variabili di azione-angolo ed esprimere l'energia in funzione di esse.
3. Calcolare le frequenze dei moti.
4. Esistono orbite periodiche?