Proposta esercizi 2

Calcolo Numerico (LT Informatica), a.a. 2019-2020

Dipartimento di Scienze Matematiche Fisiche e Informatiche
Università degli Studi di Parma

Docente:
Prof.ssa Chiara Guardasoni

Tutor:
Dott. Ariel S. Boiardi [*]

1 Costruzione di matrici

Esercizio 1: Consideriamo una matrice quadrata di ordine n contenente i primi n^2 numeri naturali, ad esempio

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}.$$

Si scriva una script che, fissato n, costruisca questa matrice in almeno due diversi modi diversi. Ripetere quindi la costruzione, sempre per n generico, per matrici della forma

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Esercizio 2: Costruire una matrice di ordine $2n$ che abbia come blocchi diagonali due copie della matrice costruita nell'esercizio 1 e i restanti blocchi uguali alla matrice identità.

Esercizio 3: Sempre a partire dei blocchi costruiti nell'esercizio 1, costruire la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 6 & 5 & 4 \\ 7 & 8 & 9 & 9 & 8 & 7 \\ 7 & 8 & 9 & 9 & 8 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 6 & 5 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

[*] Per dubbi e segnalazioni: `arielsurya.boiardi@studenti.unipr.it`

Hint. Per riordinare gli elementi di un vettore in matlab si può usare l'indicizzazione con passo negativo e leggere gli elementi dall'ultimo al primo:

```
>> x = 1:10

x =

        1      2      3      4      5      6      7      8      9     10

>> x = x(10:-1:1)

x =

       10      9      8      7      6      5      4      3      2      1
```

Durante il corso è stata frequentemente incontrata la *matrice di Hilbert*, la matrice di Hilbert di ordine 5

$$H(5) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} & \frac{1}{9} \end{bmatrix},$$

quale sarà la formula generale per un elemento H_{ij} della matrice?

Un'altra matrice che spesso appare in problemi di analisi numerica, ad esempio l'interpolazione polinomiale, è la *matrice di Vandermonde*. La matrice di Vandermonde relativa ad un vettore

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}$$

ha la forma

$$V(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_0^0 & x_0^1 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ x_1^0 & x_1^1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ x_2^0 & x_2^1 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n^0 & x_2^1 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \end{bmatrix}.$$

Esercizio 4: Scrivere due functions MATLAB :

- Una function `myhilb` che dato in input un intero n restituisca come output la matrice di Hilbert $H(n)$ di ordine n,
- Una function `myvander` che dato in input un vettore `x` restituisca la matrice di Vandermonde $V(\mathtt{x})$.

Hint. Potete controllare le vostre implementazioni siano corrette confrontando i risultati con quelli delle functions `hilb` e `vander` della libreria di MATLAB .

2 Condizionamento

Esercizio 5: Con le notazioni precedenti, calcolare $H(10) \cdot H(10)^{-1}$, confrontare il risultato con $H(10)^{-1} \cdot H(10)$. Commentare i risultati.

Il *numero di condizionamento* di una matrice A, definito da

$$\operatorname{cond}(A) = \|A\| \left\|A^{-1}\right\| \tag{1}$$

dà una misura di quanto il problema di risoluzione del sistema lineare

$$Ax = b$$

sia mal posto, cioè, in ultima istanza, quanto la precisione del risultato sia sensibile agli errori nei dati.

In particolare è stato mostrato che l'errore relativo sulla soluzione del sistema lineare si stima in norma con

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \operatorname{cond}(A) \frac{\|r\|}{\|b\|}, \tag{2}$$

dove il *residuo* è il vettore definito da

$$r = b - A(x + \delta x) = -A\delta x,$$

che fornisce una misura (sempre calcolabile, anche se non necessariamente esatta) dell'errore commesso nella risoluzione del sistema lineare.

Esercizio 6: Convinciamoci con qualche esempio esplicito che la stima (2) non è stretta, anzi potrebbe essere molto larga...

Esercizio 7: Fissato `x = ones(10,1)`, `H = hilb(10)`, calcolare un termine noto `b` coerente con queste scelte e calcolare (in una norma a piacere) l'errore nella risoluzione di `H \ b`.

Esercizio 8: Al variare di `k = 1 : 100` calcolare il numero di condizionamento della matrice di Hilbert di ordine `k`. Produrre quindi tre grafici affiancati nella stessa finestra che mostrino l'andamento del numero di condizionamento in funziona di `k` in scala lineare, con ordinate in scala logaritmica e con entrambi gli assi in scala logaritmica. Cosa possiamo osservare?

Esercizio 9: Ripetere l'esercizio precedente con la matrice di Vandermonde costruita sui vettori `1:k` e `1./[1:k]`, plottare i risultati in scala logaritmica nella stessa finestra grafica, insieme all'analogo grafico ottenuto per la matrice di Hilbert. Quale è il rapporto fra la matrice di Hilbert e Vandermonde in termini dei determinati? Quanto le proprietà della matrice di Vandermonde dipendono dal vettore su cui è costruita?

3 Matrici di permutazione

Consideriamo un vettore

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}.$$

Esiste una matrice che lo trasforma nel vettore

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_2 & x_3 & \cdots & x_n & x_1 \end{bmatrix}?$$

Esercizio 10: Assegnato un vettore qualunque $x \in \mathbb{R}^n$, calcolare Ax dove A è una matrice di ordine n tutta nulla con la prima sopra-diagonale di 1. Cosa risulta? Proviamo ora con un altro 1 in posizione $(n, 1)$...

Esercizio 11: Generalizzando il risultato precedente, rappresentare mediante matrice la permutazione

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Hint. Notiamo che la rappresentazione matriciale delle permutazioni dipende dall'ordine in cui viene svolto il prodotto (provare per credere!). Per uniformità con la notazione tipica dell'algebra lineare ho sottinteso vettori colonna e moltiplicazione a sinistra per la matrice. Purtroppo questa notazione non è necessariamente la più naturale per MATLAB .

Esercizio 12: Dato un vettore $\mathbf{x}$ di numeri fra 1 ed n

$$\begin{bmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{bmatrix}, \quad i_1, \ldots, i_n \in \{1, \ldots, n\}$$

questo può rappresentare la permutazione

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{bmatrix}.$$

Scrivere una function che, dato in input un vettore come sopra, restituisca la matrice che rappresenta la permutazione corrispondente.

Hint. Anche qui la matrice A che rappresenta la permutazione è intesa come azione per moltiplicazione $Ae = x$ dove $e =$ `1:n` e X è il vettore di input.