# Неголономный мир

Андрей Аграчёв*

**1.** Странный термин "неголономная связь" происходит из механики; кажется, первым его ввёл Фридрих Герц, всем известный немецкий физик. Первоначально это относилось к законам движения механизмов с колёсами, подшибниками и тому подобными вращающимися частями. Теперь, однако, ясно, что речь идёт о фундаментальной математической модели пространства, вообще говоря, многомерного пространства, имеющей важнейшее общепознавательное значение. Кроме того, на мой взгляд, у этой темы — огромный популяризаторский потенциал, до сего времени практически не использованный. Собственно, по последней причине я и выбрал её для сегодняшней лекции.

Видимо, для начала следует в нескольких словах напомнить о том, что такое, вообще, многомерное пространство. Собственно, научно–популярная литература и научная фантастика с давних пор полны спекуляций на эту тему. Обычный способ (крайне важный и для профессиональных математиков) — прямая аналогия: для того, чтобы дать представление о четвёртом и других "невидимых" измерениях, описывается жизнь существ в двумерном мире, для которых и третье измерение невидимо; см., например, замечательную книжку "Флатландия" Эbботта, впервые изданную ещё в 19 веке.

Простейший пример: оставаясь в плоскости, невозможно переместить фигуру "$\geqslant$" в положение "$\leqslant$", однако это очень легко сделать, выйдя в трёхмерное пространство. Оставаясь в трёхмерном пространстве, невозможно превратить левую руку в правую, однако это ничего не стоит сделать, выйдя в четырёхмерное пространство. Наличие зеркально отражённых предметов — это, как бы, намёк на четвёртое измерение.

**2.** Что же такое многомерное пространство и, вообще, размерность для математика? Излишне говорить, что для математика нет никакого

*SISSA, Триест & МИАН, Москва

единого абсолютного пространства, их великое множество.

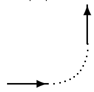
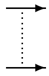
Собственнно, пространством можно назвать совокупность возможных состояний любой системы: механической, биологической, социальной, — какой угодно, если каждое состояние кодируется конечным набором чисел, причём так, что коды меняются непрерывно при непрерывном изменении состояния. В математике для такого рода пространств используется специальный термин "многообразие", а размерностью многообразия считается количество чисел, нужных для кодировки каждого состояния ("точки" многообразия).

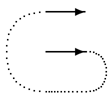
Наше обычное интуитивно понятное трёхмерное евклидово пространство есть совокупность возможных состояний классической материальной точки, которые кодируются тремя координатами. А вот пространство состояний этого апельсина 6-мерно: его состояние кодируется координатами центра и ещё тремя углами, задающими ориентацию.

Для того, чтобы удовлетворительно закодировать любое возможное положение человеческого тела, нужно, конечно, очень много параметров; тем не менее, разумно рассматривать эти положения, как точки некоего пространства (многообразия) очень большой размерности.

Вообще говоря, одни и те же состояния можно кодировать по-разному, например, меняя систему координат, и это сразу указывает на слабость, неудовлетворительность нашего определения размерности: кто знает, быть может, возможны кодировки с разным числом параметров, да и сами параметры могут быть очень неравнозначными. Хотелось бы иметь более естественное "внутреннее" определение.

**3.** К вопросу об естественном определении размерности мы вернёмся позже, а пока попробуем несколько обогатить наше чересчур примитивное понятие о пространстве. В действительности, кроме описания возможных состояний системы, нужно ещё указать направления, в которых это состояние может меняться. Как правило, эти направления далеко не произвольны, и именно наличие таких првилегированных напрвалений, в которых только и можно двигаться, смотреть, получать и передавать информацию, делает осмысленным рассуждение о виртуально существующих, но невидимых (или почти невидимых) измерениях.

Поясню это на простенькой модели. Пусть эта ручка символизирует игрушечную машинку с воображаемыми колёсами, катающуюся по плоскости. Её состояния кодируются тремя параметрами: координатами центра и одним углом, задающим ориентацию. Однако эти состояния дозволено менять далеко не произвольным образом: дюбой ребёнок знает, как можно катать машинку, а как нельзя. Вполне можно представить себе гипотетический трёхмерный мир, где роль точек играют состояния нашей машинки, то есть, фактически, стрелочки на плоскости. При этом свет и, вообще, вся информация в этом мире распространяется только в разрешённых направлениях. Иными словами, движение стрелки должно быть согласовано с её орентацией; вот так двигаться можно:  , а вот так нельзя:  . В этом трёхмерном мире, в принципе, все состояния достижимы:

 ,

но если не заглядывать далеко (для близоруких или не слишком изобретатальных), он будет почти плоским: одно направление запрещено.

**4.** Вот более интересный пример, который часто называют эффектом падающей кошки. Хорошо известно, что, если кошку взять за лапы и отпустить, то, при падении, она обязательно перевернётся и встанет на лапы. Менее ловким животным, например, собакам, это не удаётся. Казалось бы, это явление противоречит простейшим законам механики. Действительно, момент вращения любого тела при свободном движении сохраняется. Иными словами, если мы сами кошку не закрутим, то она не сможет перевернуться. В чём секрет? В том, что кошка — система весьма гибкая. Если бы она была твёрдым телом и не умела менять свою конфигурацию, то, действительно, не смогла бы перевернуться. Поясню подробнее. Пространство состояний нашей "кошки" имеет достаточно большую размерность, ведь нужно учитывать не только координаты центра и ориентацию кошки, но и взаимное расположение ног, головы, хвоста, то есть её конфигурацию. Как и в случае машинки, не все направления движения в этом пространстве допустимы. А именно, мы считаем, что кошка меняет своё состояние самостоятельно, без посторонеей помощи, а значит, согласно законам механики, сумма моментов вращения всех её частей равна нулю.

Итак, непосредственно менять ориентацию запрещено (углы ориентации — это почти невидимые измерения), но, за счёт достаточно хитроумной комбинации допустимых движений, сменить ориентацию (например, перевернуться) всё же можно, и, в конечном счёте, все состояния оказываются достижимыми!

На самом деле, подобные явления встречаются сплошь и рядом и где угодно, в том числе и в социальной жизни. Во всяком случае, как русским людям, так и итальянцам, хорошо известно, что путём более или менее хитроумной серии вполне легальных шагов часто достигается результат, который, на первый взгляд, представляется совершенно незаконным, невозможным в рамках действующее системы. Эффект падающей кошки!

**5.** Итак, в самых разных областях нам встречаются пространства состояний, в которых некоторые направления движения запрещены, но, в принципе, при достаточной изобретательности и терпении, любое состояние достижимо.

Кто знает, быть может, мы и сами живём в таком пространстве. Во всяком случае, все они описываются единой универсальной математической схемой, которую я сейчас попытаюсь более или менее наглядно объяснить. Да, и пора сказать, что в математике ограничения на направления движения, дающие, тем не менее, шанс добраться до любого состояния, называются неголономными, в отличие от голономных ограничений, действующих, как глухая стена, и не дающих никакого шанса. Что-то вроде разницы между полусвободным и тоталитарным обществами.

Теперь — общая схема. Состояния будем, для наглядности, представлять точками трёхмерного пространства, а совокупность допустимых направлений движения из данного состояния — плоскостью, приделанной к этой точке. В действительности, и то и другое может быть многомерным.

Если плавно двигать точку, то плоскость допустимых направлений плавно поворачивается. Очень важно, что она действительно поворачивается: именно это даёт возможность, в конечном счёте, достичь любого состояния, то есть делает ограничения на допустимые движения неголономными!

Мы сейчас объясним, как можно продвинуться в направлении, перпендикулярном допустимой плоскости, даже если напрямую это невозможно, и, более того, контролировать такое движение, используя только информацию, поступающую с допустимых направлений.

Представим себе близорукого (или недальновидного) жителя вот такого неголономного мира. В каждый момент времени для него доступна только плоскость допустимых направлений, отвечающая точке, где он находится; больше он ничего не видит.

Вот, это существо описывает небольшую замкнутую кривую в своей плоскости. В действительности, он не возвращается в исходную точку, а немного сдвигается в перпендикулярном направлении, так как реальная плоскость всё время меняется в процессе движения. Путь, проделанный в перпендикулярном направлении, примерно пропорционален площади плоской области, ограниченной описанной замкнутой кривой. Кроме площади, важно направление движения. Если мы обходим кривую по часовой стрелке, то сдвигаемся в одну сторону (скажем, вверх), а если против, то — в другую (вниз).

Попробую пояснить это на примере нашего пространства стрелочек на плоскости. Напомню, что это пространство трёхмерно, а допустимые движения должны быть согласованы с направлением стрелочки. Иными словами, стрелочку разрешается поворачивать и двигать в указанном ей направлении (вперёд или назад), но не разрешается сдвигать вбок. Таким образом, две координаты в плоскости допустимых направлений — это угол поворота и путь по направлению стрелки.

Давайте опишем небольшой прямоугольник в плоскости допустимых направлений, то есть сначала повернём стрелку на определённый угол, потом продвинемся вперёд, затем повернём на точно такой же угол, но в обратную сторону и, наконец, попятимся назад на то же расстояние, на которое продвигались вперёд. В результате мы вовсе не вернёмся в исходное положение, а немного сдвинемся вбок. Ничего удивительного в этом, конечно, нет; собственно, такого рода эффекты мы наблюдаем помтоянно, например, при парковке в узком месте. Воможно только не задумываемся об их универсальном значении, обнаруженном с помощью математики.

**6.** Давайте рассмотрим другую модель, большей размерности. Пусть это будет шар, катающийся по плоскости. Пространство состояний такого шара 5-мерно. Действительно, его положение определяется точкой касания шара и плоскости (это две координаты) и ориентацией шара (ещё три угла). Мы предполагаем, что шар разрешено катать только без проскальзования и прокручивания. В этом случае изменение ориентации полностью определяется путём, который проделывает точка касания на плоскости. Иными словами, в каждой точке нашего 5-мерного пространства задана двумерная плоскость допустимых направлений движения.

Не очень трудно показать (хотя это и требует некоторого пространственного воображения), что наши ограничения на движение неголономны, то есть, что из любого положения можно перебраться в любое другое без проскальзования и прокручивания.

Конечно, есть бесчисленное множество более или менее хитроумных способов прокатить шар так, чтобы он прибыл в заданную точку с желанной ориентацией. Задача чем-то напоминает кубик Рубика, не так ли? Но, пожалуй, более изящная и естественная. Хотелось бы понять, как выглядят кратчайшие из возможных путей.

Зададим начальную и конечную точки на плоскости и начальную ориентацию. Разумеется, кратчайший путь между двумя точками — прямая, но, прокатившись по прямой, мы получим только одну специальную ориентацию, а нам бы хотелось научиться получать их все. Таким образом, для для каждой ориентации найдётся свой кратчайший путь, соединяющий две данные точки. Как выглядят эти пути?

Одна из функций математики — выявлять внутренюю структурную связь совершенно различных объектов, внешне никак между собой не связанных. Чего стоит совпадение между коническими сечениями и орбитами небесных тел!

Вот и в нашей задаче, кратчайшими путями оказались замечательные кривые, открытые и изученные ещё в 18 веке великим Леонардом Эйлером (Рис. 1) по совершенно другому поводу. Это так называемые "эластики", возможные положения упругого стержня с зажатыми концами (см. Рис. 2, воспроизводящий страницу из статьи Эйлера). Стоит сказать, что эластики описываются с помощью эллиптических функций, важного далеко идушего обобщения обычных тригонометрических функций. Эллиптические функции играли в математике 19 века примерно ту же роль, что конические сечения — в античной, а их изучение, насколько мне известно, началось как раз с работы Эйлера.

Связь эластик с эллиптическими функциями такова: если двигаться вдоль эластики, то направление движения (то есть направление касательной к кривой) есть эллиптический синус от длины пройденного пути.

Интересно посмотреть, как наиболее эффективно двигаться в запрещённых направлениях: например, ползти вдоль заданной кривой, почти не меняя ориентацию. Можно вообразить занятный конкурс для официантов: кто быстрее прокатит из конца в конец подноса полный сосуд со сферическим дном, не дотрагиваясь до сосуда и не расплескав содержимое, а лишь управляя наклоном подноса.

LEONHARD EULER

Рис. 1:

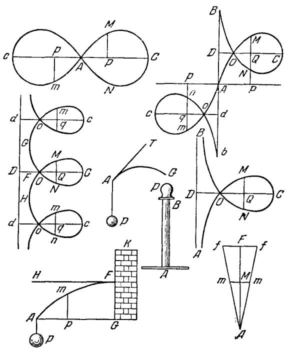


Рис. 2:

Так вот, если мы хотим сохранять ориентацию, то наилучшим способом оказывается двигаться по эластикам в форме, близкой к восьмёрке. Чем меньше размер восьмёрки, тем точнее сохраняется ориентация, но тем медленнее мы продвигаемся, ползя потихоньку вдоль кривой, проходящей между петлями нашей восьмёрки.

Почему восьмёрка, а не, скажем, круг; ведь и круг — эластика. Дело в том, что движение по маленькой петле приводит к повороту шара на угол, пропорциональный площади области, ограниченной петлёй. При этом направление поворота зависит от того, обходим ли мы петлю по часовой или против часовой стрелки.

Две петли восьмёрки как раз и компенсируют угол поворота. Иначе бы сосуд на воображаемом конкурсе официантов раскрутился, и всё содержимое выплеснулось.

**7.** Теперь, поупражнявшись с примерами, давайте вернёмся к общим концепциям. Собственно, плодотворные концепции обычно вырастают из возни с примерами: математика, в этом смысле, не отличается от экспериментальных наук. В данном случае, наши упражнения ясно подсказывают единственно разумный способ измерения расстояний в неголономном пространстве: расстоянием между двумя точками следует считать длину кратчайшего допустимого пути, ведущего из одной точки в другую.

Этот очевидный способ измерения расстояний имеет звучное название: "Метрика Карно—Каратеодори", в честь основателя термодинамики Сади Карно и немецкого математика греческого происхождения Константина Каратеодори, который увидел в работе Карно пример неголономного пространства и, на этой модели, впервые рассмотрел такую метрику.

Для нас важно то, что эта метрика не зависит от способа кодирования состояний (то есть точек неголономного пространства) и при этом содержит всю необходимую внутреннюю информацию о пространстве, включая его размерность.

**8.** Как же найти размерность, умея измерять только расстояния? Вообще-то, это можно сделать разными способами. Рассмотрим сначала способ, который даже не требует определения расстояний и доступен малому ребёнку, едва научившемуся считать и складывать кубики.

Начнём с одномерных объектов, то есть кривых. Всякую кривую можно можно разбить на сколь угодно мелкие сегменты, при этом к любой точке примыкают не более двух сегментов. Всякую двумерную фигуру можно таким образом разбить на сколь угодно мелкие области, чтобы к любой точке примыкало не более трёх областей; при этом всегда найдутся точки, к которым примыкают три области. Всякий объём можно так замостить сколь угодно мелкими предметами (например, кирпичами), чтобы к каждой точке примыкало не более четырёх предметов; при этом, если мостить по-настоящему, без просветов, то всегда найдутся точки, к которым примыкают четыре предмета.

Ну, и так далее... . Мы говорим, что топологическая размерность пространства не больше, чем $n$, если пространство можно так разбить на сколь угодно мелкие части, что к каждой точке примыкает не более $n + 1$ частей. Надо сказать, что метрика в таком определении используется весьма слабо: только для того, чтобы знать, что такое "сколь угодно мелкий".

А вот другое, гораздо более метрическое понятие размерности, называемое размерностью Хаусдорфа, в честь предложившего его немецкого математика. Прежде всего, если мы умеем измерять расстояние, то должно быть понятно, что такое шар данного радиуса в нашем метрическом пространстве: это совокупность всех точек, находящихся на расстоянии, не большем, чем данный радиус, от какой-то одной точки — центра шара. Таким образом, шар на прямой — это отрезок, а двумерный шар (на плоскости) — это круг.

Давайте теперь выгородим какую-нибудь ограниченную область в нашем абстрактном пространстве и посмотрим, сколько в неё помещается мелких шариков одинакового радиуса. Конечно, чем больше радиус, тем больше поместится шариков, нас же интересует, как быстро растёт число шариков с уменьшением радиуса. В одномерном случае, уменьшив радиус в два раза, мы поместим примерно в два раза больше шариков, в двумерном — в $4 = 3^2$, в трёхмерном — в $8 = 2^3$ и так далее; показатель степени и есть размерность Хаусдорфа или просто метрическая размерность.

Имея два понятия размерности (оба, напомню, не используют ничего, кроме измерения расстояний), мы уже можем отличить обычное "голономное" пространство, где все направления более или менее равноценны, от неголономного. В обычном пространстве обе размерности совпадают, а в неголономном размерность Хаусдорфа (метрическая) оказывается всегда строго больше топологической.

Скажем, в нашем примере со стрелками на плоскости топологическая

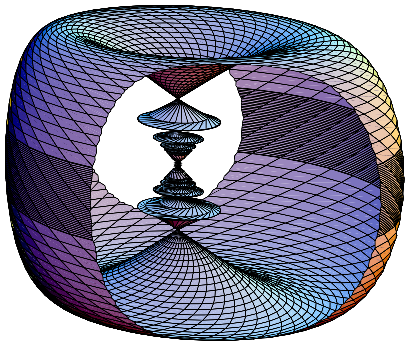


Рис. 3:

размерность равна трём, а хаусдорфова — четырём. А в топологически 5-мерном примере шаров на плоскости хаусдорфова размерность равна 10. Получается, что с точки зрения метрической (хаусдорфовой) размерности одно недопустимое направление стоит нескольких (в наших примерах двух — трёх) допустимых.

Грубо говоря, на то, чтобы замостить дорогу длиной 100 метров в недопустимом направлении, уйдёт примерно столько же материала, как на площадку $100 \times 100$ метров или даже на здание $100 \times 100 \times 100$ — в допустимых.

**9.** В заключение, я хочу показать картинку (Рис. 3), которая может служить символом неголономной геометрии. Это, так называемый, волновой фронт в простейшем неголономном пространстве, — мгновенное положение частиц, вылетевших одновременно из одной точки с одинаковой скоростью. Частицы стремятся лететь по кратчайшим путям, и в обычном пространстве они бы заполняли сферу. В неголономном случае только часть из них попадает на неголономную сфере, многие же оказываются внутри неголономного шара, причём их можно встретить сколь угодно близко к центру.

Почему так выходит? Частицы выбирают кратчайшие пути, ведущие во *все* точки пространства. Те из них, что ведут в сторону от плоскости допустимых направлений, суть спирали. Чем уже спираль, тем ближе она к направлению, перпендикулярному допустимой плоскости. Однако несколько витков узкой спирали дают путь длиннее, чем ведущий в ту же точку один виток более широкой.

Вершины и ребра волнового фронта — это места, где встречаются несколько частиц. Вот эти вершины на сфере — точки, куда ведёт не один, а много кратчайших путей. Частицы, оказавшиеся на ближайшем к сфере ребре, переживают уже вторую встречу, а на следующей вершине внутри шара — третью, и так далее...; их путь уже давно не кратчайший.

Грустная метафора: все частицы прожили одинаковое время и все рвались вдаль по кратчайшим путям с одинаковой скоростью, однако судьба их далеко не одинакова. Одни продолжают мчаться вдаль, оставаясь непревзойдёнными; другие, и именно те, кто выбрал наиболее трудные направления, плетутся в хвосте, уже многократно столкнувшись с такими же неудачниками.