L 1~~4~~ ①

IL PROBLEMA CIRCOLARE DEI 3 CORPI RISTRETTO

Due corpi (detti primari) si muovono nello spazio su un' orbita Kepleriana (ellittica o circolare).
Un terzo punto (detto secondario) di massa trascurabile rispetto ai primi due si muove sotto l'azione della forza gravitazionale esercitata dai primi due, senza influenzarne il movimento.
Studiare la dinamica del pto secondario.

Normalizzazione delle costanti

Denotiamo con m_1 e m_2 le masse dei primari, con P il secondario.
Assumiamo che $m_1 > m_2$ e denotiamo

$$\mu := \frac{m_2}{m_1 + m_2}$$

e supponiamo di avere normalizzato le unità di misura in modo che $m_1 + m_2 = 1$. In queste unità di misura la massa di m_1 è $1-\mu$, mentre quella di m_2 è μ.

Inoltre l'unità di lunghezza è scelta come la distanza tra i centri di massa dei pianeti, l'unità di tempo in modo che il periodo di rotazione di m_1 e m_2 intorno al centro di massa sia 2π. La costante gravitazionale $g = 1$

quindi
distanza originale $= L$ dist normal.
tempo orig. $= \frac{T}{2\pi}$ tempo norm.

dove L = distanza tra i centri di m_1 e m_2
T = periodo orbitale di m_1 e m_2

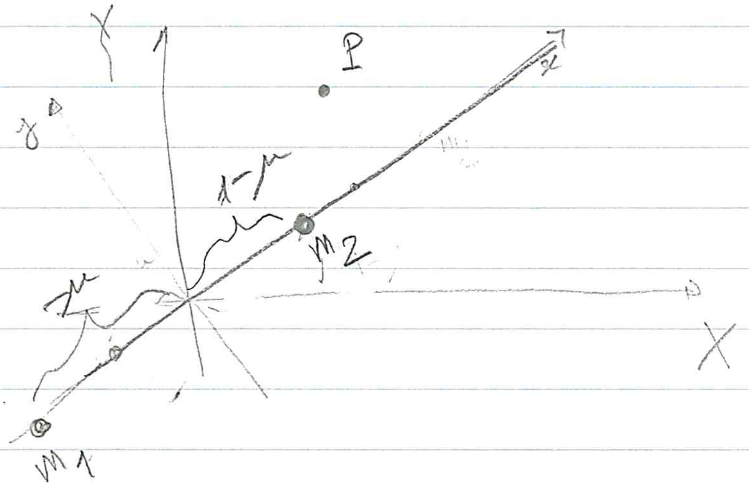
ES

	μ	L (m)	T (s)
Sole - Giove:	9.56×10^{-4}	7.78×10^{11}	3.73×10^{8}
Sole - Terra	3.07×10^{-6}	1.4×10^{11}	3.15×10^{7}
Terra - Luna	$1,21 \times 10^{-2}$	$3,85 \times 10^{8}$	$2,36 \times 10^{6}$

Caso CIRCOLARE

<u>Equazioni del moto</u> Per scrivere le eq del moto, useremo la formulazione covariante delle eq di Lagrange in un sistema di coordinate rotanti. Useremo poi la trasformazione di Legendre per ricavare l'Hamiltoniana del sistema.

Sia $X-Y-Z$ un sistema di coordinate inerziale in modo che il piano $X-Y$ coincida con il piano orbitale dei primari.



Adesso consideriamo un sistema di coordinate rotanti $x-y-z$ fatto in modo che,

(1) il piano $x-y$ coincide con $X-Y$

(2) l'asse delle x coincide con la retta che congiunge m_1 ed m_2

(3) y è $\perp$ al segmento $\overrightarrow{m_1 m_2}$ e orientato secondo la regola della mano dx

(4) m_2 è messo a $(1-\mu, 0, 0)$
m_1 " " " $(-\mu, 0, 0)$

Il sistema $x-y$ ruota rispetto a $X-Y$ con velocità angolare 1 (grazie alla nostra scelta delle unità!)

Chiameremo $x-y$ coordinate rotanti
Supponiamo che i 2 sist di coordinate coincidano a $t=0$.
La posizione (X,Y,Z) di P nel sistema inerziale è data da

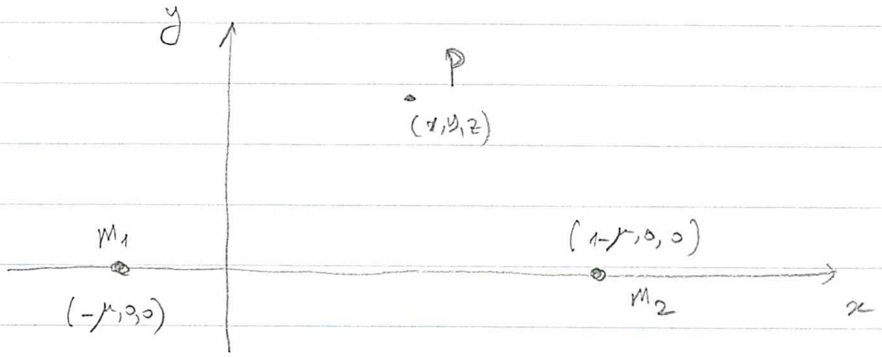
$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A_t} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

dove (x,y,z) è la pos nel sistema rotante.

Ovviamente si ha che

$$\begin{pmatrix} \dot X \\ \dot Y \\ \dot Z \end{pmatrix} = \dot A_t \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + A_t \begin{pmatrix} \dot x \\ \dot y \\ \dot z \end{pmatrix} = A_t \begin{pmatrix} \dot x - y \\ \dot y + x \\ \dot z \end{pmatrix} \tag{1}$$

sistema rotante



Equazioni del moto

Per scrivere le eq del moto, usiamo la formulazione covariante della Lagrangiana. Sappiamo che se $(q^1, \ldots, q^n)$ sono le coordinate di un pto (in un qualsiasi sistema di coordinate!) allora le eq del moto sono date da

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q^i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i} = 0$$

dove $\mathcal{L} = T - V$ é energia cinetica − energia potenziale.

Dobbiamo quindi scrivere T e V nel sistema rotante. Usando (1), abbiamo che

$$T = \frac{\dot X^2 + \dot Y^2 + \dot Z^2}{2} = \frac{1}{2}\left(\cos^2 t\,(\dot x - y)^2 + \sin^2 t\,(\dot y + x)^2\right) + \frac{1}{2}\left(\sin^2 t\,(\dot x - y)^2 + \cos^2 t\,(\dot y + x)^2\right) + \frac{1}{2}\dot z^2$$

$$= \frac{(\dot x - y)^2 + (\dot y + x)^2 + \dot z^2}{2}$$

L' energia potenziale è la somma delle energie gravitazionali sentite da P

$$\begin{cases} V(x,y,z) = -\dfrac{1-\mu}{r_1} - \dfrac{\mu}{r_2} \\ r_1^2 = (x+\mu)^2 + y^2 + z^2 \\ r_2^2 = (x-1+\mu)^2 + y^2 + z^2 \end{cases}$$

La Lagrangiana è

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{(\dot{x}-y)^2 + (\dot{y}+x)^2 + \dot{z}^2}{2} + \frac{1-\mu}{\sqrt{(x+\mu)^2+y^2+z^2}} + \frac{\mu}{\sqrt{(x-1+\mu)^2+y^2+z^2}}$$

e le eq. di Lagrange

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}(\dot{x}-y) = (\dot{y}+x) - U_x \\ \dfrac{d}{dt}(\dot{y}+x) = -(\dot{x}-y) - U_y \\ \dfrac{d}{dt}\dot{z} = -U_z \end{cases}$$

Scriviamo subito l' Hamiltoniana del sistema. Questa si ottiene usando la trasformazione di Legendre

$$p_i := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}, \qquad H(q^i, p_i) = \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}^i - \mathcal{L}(q^i, p_i)$$

Nel nostro caso

$$p_x = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = \dot{x} - y$$

$$p_y = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} = \dot{y} + x$$

$$p_z = \dot{z}$$

e quindi l'Hamiltoniana è

$$H(x,y,z,p_x,p_y,p_z) = p_x \dot{x} + p_y \dot{y} + p_z \dot{z} - \mathcal{L}$$

$$= p_x(p_x+y) + p_y(p_y-x) + p_z^2 - \frac{p_x^2}{2} - \frac{p_y^2}{2} - \frac{p_z^2}{2} - U$$

$$\longrightarrow \quad = \frac{p_x^2+p_y^2+p_z^2}{2} + p_x y - p_y x - U$$

$$= \frac{(p_x+y)^2}{2} + \frac{(p_y-x)^2}{2} + \frac{p_z^2}{2} - \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} - U$$

$$= \frac{(p_x+y)^2}{2} + \frac{(p_y-x)^2}{2} + \frac{p_z^2}{2} + \bar{U}$$

$$\bar{U} = -\frac{x^2+y^2}{2} - \frac{1-\mu}{r_1} - \frac{\mu}{r_2}$$ potenziale efficace.

Le eq Hamiltoniane sono

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{\partial H}{\partial p_x} = p_x + y \\ \dot{y} = \dfrac{\partial H}{\partial p_y} = p_y - x \\ \dot{z} = \dfrac{\partial H}{\partial p_z} = p_z \\ \dot{p}_x = -\dfrac{\partial H}{\partial x} = p_y - x - \bar{U}_x = p_y - \dfrac{(1-\mu)(x+\mu)}{r_1^3} - \dfrac{\mu(x-1+\mu)}{r_2^3} \\ \dot{p}_y = -\dfrac{\partial H}{\partial y} = -p_x - y - \bar{U}_y = -p_x - \dfrac{(1-\mu)y}{r_1^3} - \dfrac{\mu y}{r_2^3} \\ \dot{p}_z = -\dfrac{\partial H}{\partial z} = -\bar{U}_z \end{cases}$$

OSS Ovviamente H è costante del moto per il sistema
Viene detto di solito INTEGRALE DI JACOBI

Riduzione al problema piano

Si vede subito che ponendo come dati iniziali
$z(0) = p_z(0) = 0$, allora la 3ª e 4ª eq hanno
come soluz banale $z(t) = p_z(t) = 0$
In tal caso ci si restringe al problema piano,
descritto dalle sole eq

$$\begin{cases} \dot{x} = p_x + y \\ \dot{y} = p_y - x \\ \dot{p}_x = p_y - \bar{U}_x = p_y - \\ \dot{p}_y = -p_x - \bar{U}_y \end{cases}$$

Punti di equilibrio del sistema

Dobbiamo annullare il campo vettoriale.
Ovviamente abbiamo $z = p_z = 0$, quindi i pti di
equilibrio, se ci sono, sono nel piano dei primari.
Cerchiamoli: sicuramente dobbiamo avere

$$p_x = -y \qquad p_y = x$$

Le altre eq diventano

$$\begin{cases} x - \dfrac{(1-\mu)(x+\mu)}{r_1^3} - \dfrac{\mu(x-1+\mu)}{r_2^3} = 0 & (2) \\ y - \dfrac{(1-\mu)\,y}{r_1^3} - \dfrac{\mu y}{r_2^3} = 0 & (3) \end{cases}$$

La 2ª è

$$y\left(1 - \frac{(1-\mu)}{r_1^3} - \frac{\mu}{r_2^3}\right) = 0$$

E quindi possiamo distinguere 2 casi

Equilibri triangolari   Mettiamo $y \neq 0$. Allora si deve avere

$$1 = \frac{1-\mu}{r_1^3} + \frac{\mu}{r_2^3} \qquad (4)$$

Scrivo (3) come

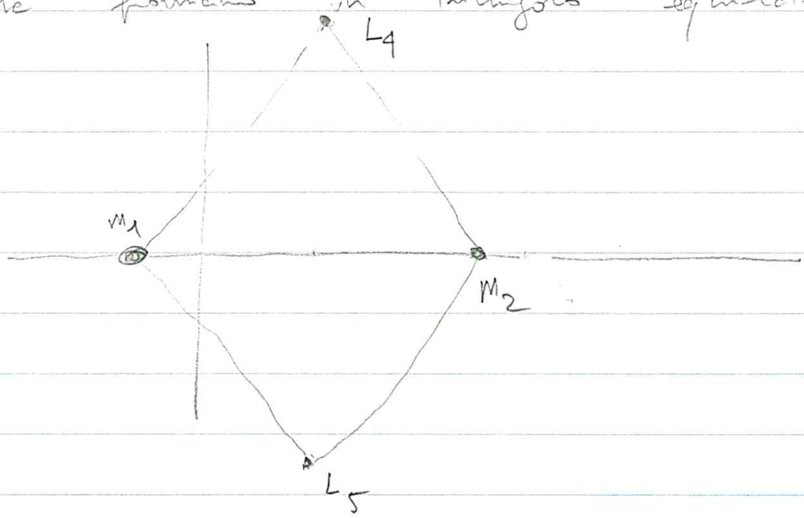
$$x\left(1 - \frac{1-\mu}{r_1^3} - \frac{\mu}{r_2^3}\right) - (1-\mu)\mu\left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_2^3}\right) = 0$$

quindi dobbiamo avere $\frac{1}{r_1^3} = \frac{1}{r_2^3} \Rightarrow r_1 = r_2$

e sostituendo in (4)

$$1 = \frac{1}{r_1^3} \Rightarrow r_1 = r_2 = 1$$

Quindi il pto sta alla stessa distanza tra m_1 ed m_2, distanza pari a 1, ovvero alla distanza tra i 2 primari. Ci sono quindi 2 posizioni di equilibrio che formano un triangolo equilatero coi 2 primari



Se mettiamo il secondario in L_4 o L_5, allora resta lì per sempre.
Nelle coordinate originali, il secondario ruota con velocità angolare uniforme uguale ai primi due corpi.

1772 Essai sur le problème des trois corps

Lagrange pensava che qsti 2 pti di eq sono inutili

" Cette recherche n'est à la vérité que de pure curiosité "

Questa ricerca è, in verità, soltanto pura curiosità

⊙ 1906: M. Wolf trova il 1° asteroide vicino al pto L_4 del sistema Sole - Giove, lo chiama 588 Achilles.
Al Maggio 2017, si conoscono 6515 asteroidi posizionati tra L_4 ed L_5 troiani (edelle guerre di Troia). Asteroidi vicino a L_4 / L_5 hanno nomi eroi greci / troiani

tranne 617 Patroclus e 624 Ettore

⊙ 2010: TK_7 : troiano in L_4 del sistema Terra - Sole.

Equilibri collineari

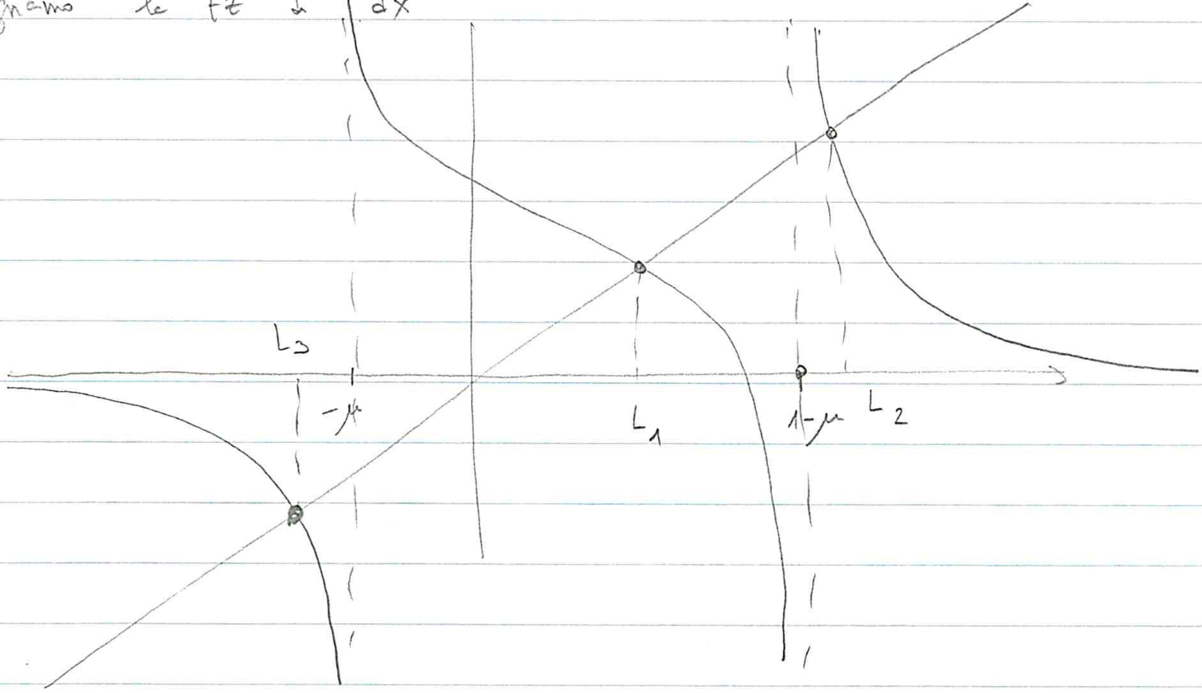
Mettiamo $y = 0$. Allora (2) si riduce a

$$x = \frac{1-\mu}{|x+\mu|\,(x+\mu)} + \frac{\mu}{|x-1+\mu|\,(x-1+\mu)} \qquad (5)$$

$x - (1-\mu)$

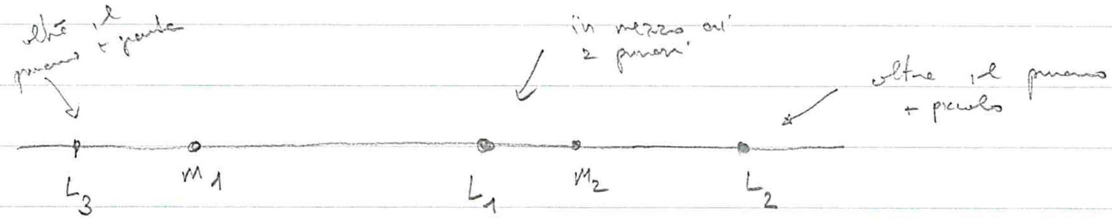
$x+\mu>0 \quad x>-\mu$

Disegnamo le fz di dx



Abbiamo 3 intersezioni

Sono 3 punti distinti che si trovano in 3 posizioni diverse (5)



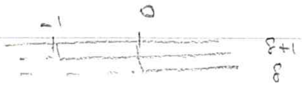
È possibile calcolare le posizioni con più precisione.
In particolare mettendo δ la dist. del corpo pto di eq da m_2

$$\delta := x - 1 + \mu$$

abbiamo che $r_1 = |1-\delta|$, $r_2 = |\delta|$
quindi (5) diventa

$$\delta + 1 - \mu = \frac{1-\mu}{|\delta+1|(\delta+1)} + \frac{\mu}{|\delta|\,\delta}$$

e consideriamo separatamente i casi $\delta < -1$, $-1 < \delta < 0$ e $\delta > 0$



⊙ $-1 < \delta < 0 \rightsquigarrow -1 < x - 1 + \mu < 0 \rightsquigarrow -\mu < x < 1 - \mu$
è il caso del pto L_1

$$\delta + 1 - \mu = \frac{1-\mu}{(\delta+1)^2} - \frac{\mu}{\delta^2}$$

e posso scrivere μ in fzn di δ:

$$\mu = \frac{\left((\delta+1)^3 - 1\right)\delta^2}{(\delta+1)^2\delta^2 - \delta^2 - (\delta+1)^2} = \frac{\delta^3(\delta^2 + 3\delta + 3)}{\delta^4 + 2\delta^3 - \delta^2 - 2\delta - 1}$$

Abbiamo $\mu = \mu(\delta)$, ma vorremmo il contrario.
Osserviamo però che se $\mu \ll 1$, allora $\delta \simeq 0$ ovvero il pto di equilibrio è vicino al corpo primario con massa più piccola.

Si può procedere allora per serie di potenze, ottenendo in un intorno di $\delta = 0$ che

$$\mu = -3\delta^3 + O(\delta^4)$$

questa eq si può invertire in serie di potenze di $\mu^{1/3}$ e si ottiene

$$\delta = -\left(\frac{\mu}{3}\right)^{1/3} + O(\mu^{2/3})$$

$$\rightsquigarrow \quad x_{eq} = \delta + 1 - \mu \simeq 1 - \mu - \left(\frac{\mu}{3}\right)^{1/3} + O(\mu^{2/3}) \qquad (6)$$

che ci dà la 1ª approssimazione del pto di equilibrio.
Storicamente è stato fatto molto lavoro per capire queste espansioni.

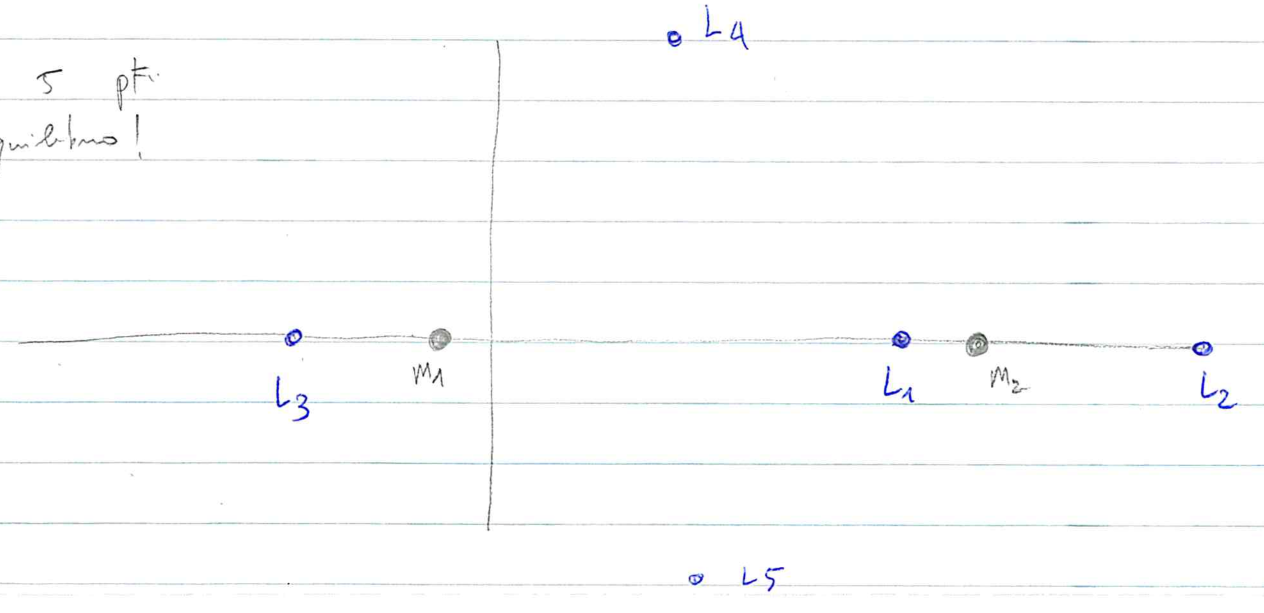
Oggi è più facile procedere con il calcolatore e semmai programmi che trovano gli zeri di queste funzioni

<u>ESEMPIO</u> Sole - Giove si ha $\mu = 9{,}537 \times 10^{-4}$
quindi si trova

$$\delta \simeq -0{,}068 \quad \Rightarrow \quad x = \delta + 1 - \mu \simeq 0{,}93$$

si può partire da questo valore di 0,93 e usare programmi numerici per calcolare con precisione i valori del pto di eq

Abbiamo 5 pti di equilibrio!



Stabilità lineare

Sia $\vec{e} = (x_{eq}, y_{eq}, z_{eq}, p_{x eq}, p_{y eq}, p_{z eq})$ pto di equilibrio

Supponiamo che $\quad p_{x eq} = -y_{eq} \quad , \quad p_{y eq} = x_{eq} \quad , \quad p_{z eq} = 0$

Per studiare la stabilità del linearizzato, dobbiamo espandere l'Hamiltoniana in un intorno del pto di equilibrio e vedere gli autovalori di JL, dove $L = \text{Hess } H(\vec{e})$

Cominciamo con traslare in un intorno del pto di eq

$$x' = x - x_{eq} \qquad\qquad p_x' = p_x + y_{eq}$$
$$y' = y - y_{eq} \qquad\qquad p_y' = p_y - x_{eq}$$
$$z' = z \qquad\qquad p_z' = p_z$$

La trasformazione è canonica e la nuova Hamiltoniana è

$$H = \frac{p_x'^2 + p_y'^2 + p_z'^2}{2} - x' p_y' + y' p_x' - x' x_{eq} - y' y_{eq} - \frac{1-\mu}{r_1} - \frac{\mu}{r_2}$$

dove

$$r_1^2 = (x' + x_{eq} + \mu)^2 + (y' + y_{eq})^2 + z'^2$$
$$r_2^2 = (x' + x_{eq} - 1 + \mu)^2 + (y' + y_{eq})^2 + z'^2$$

che riscriviamo come (sopprimo gli apici ')

$$r_1^2 = x^2 + y^2 + z^2 + (x_{eq} + \mu)^2 + y_{eq}^2 + 2x(x_{eq} + \mu) + 2y\,y_{eq}$$
$$r_2^2 = x^2 + y^2 + z^2 + (x_{eq} - 1 + \mu)^2 + 2x(x_{eq} - 1 + \mu) + 2y\,y_{eq} + y_{eq}^2$$

Ricordiamo che devo espandere in un intorno di 0

Quindi se scrivo

$$\rho_1^2 = (x_{eq} + \mu)^2 + y_{eq}^2 \quad , \quad \rho_2^2 = (x_{eq} - 1 + \mu)^2 + y_{eq}^2$$

abbiamo che

$$r_1^2 = \rho_1^2 \left(1 + \frac{x^2+y^2+z^2}{\rho_1^2} + \frac{2x(x_{eq}+\mu) + 2y\, y_{eq}}{\rho_1^2} \right)$$

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{\rho_1 \sqrt{1 + g(x,y,z)}} = \frac{1}{\rho_1} \sum_{n \geq 0} \binom{-\frac{1}{2}}{n} \left(g(x,y,z)\right)^n$$

$$= \frac{1}{\rho_1} \left(1 - \frac{1}{2} g(x,y,z) + \frac{3}{8} g(x,y,z)^2 + O(g^3) \right)$$

Dobbiamo tenere i termini quadratici (al +):

$$= \frac{1}{\rho_1} \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{x^2+y^2+z^2}{\rho_1^2} + \frac{2x(x_{eq}+\mu)+2y\,y_{eq}}{\rho_1^2} \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{3}{8} \left(\frac{2x(x_{eq}+\mu) + 2y\,y_{eq}}{\rho_1^2} \right)^2 + O(\|x,y,z\|^3) \right)$$

Si fa un conto analogo per $\frac{1}{r_2}$, si sostituisce nell'Hamiltoniana e si trova

$$H = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2} - x p_y + y p_x + \frac{A}{2} x^2 + \frac{B}{2} y^2 + C xy + \frac{D}{2} z^2$$

$$A = \frac{1-\mu}{\rho_1^3} + \frac{\mu}{\rho_2^3} - 3(1-\mu) \frac{(x_{eq}+\mu)^2}{\rho_1^5} - 3\mu \frac{(x_{eq}-1+\mu)^2}{\rho_2^5}$$

$$B = \frac{1-\mu}{\rho_1^3} + \frac{\mu}{\rho_2^3} - \frac{3(1-\mu)\, y_{eq}^2}{\rho_1^5} - \frac{3\mu\, y_{eq}^2}{\rho_2^5}$$

$$C = -\frac{3(1-\mu)(x_{eq}+\mu)\, y_{eq}}{\rho_1^5} - \frac{3\mu(x_{eq}-1+\mu)\, y_{eq}}{\rho_2^5}$$

$$D = (1-\mu)/\rho_1^3 + \mu/\rho_2^3$$

Osserviamo subito che la parte in (z, p_z) è convessa

$$\frac{p_z^2}{2} + \frac{D}{2} z^2 > 0$$

È oscillatore armonico! In (z, p_z) abbiamo un centro.

Resta da studiare la parte quadratica in (p_x, p_y, x, y)

$$H_0 = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2} - x\, p_y + y\, p_x + \frac{A}{2} x^2 + \frac{B}{2} y^2 + Cxy$$

Questa è l'Hessiana: per studiare la stabilità dobbiamo
(1) calcolare gli autovalori del campo vettoriale Hamiltoniano
(2) studiare se H_0 è definita positiva.

$$z = (x, y, p_x, p_y)$$

$$H_0 = \frac{1}{2} \langle z, L z \rangle \quad , \quad L = \begin{pmatrix} A & C & 0 & -1 \\ C & B & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

quindi il campo vettoriale hamiltoniano del linearizzato è

$$\dot{z} = J L z \quad \text{dove} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_2 \\ -\mathbb{1}_2 & 0 \end{pmatrix}$$

troviamo

$$JL = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -A & -C & 0 & 1 \\ -C & -B & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Dobbiamo calcolare gli autovalori di questa matrice (notate che è la matrice del campo vettoriale hamiltoniano, <u>non</u> dell'Hamiltoniana)

$$\det(JL - \lambda \mathbb{I}_4) = \lambda^4 + (2+A+B)\lambda^2 + (1-A)(1-B) - c^2$$

A questo punto basta sostituire ai coeff. le coordinate dei pt. di equilibrio e risolvere le eq.

<u>stabilità dei punti collineari</u> studiamo L_1 (per gli altri punti l'analisi è simile).

Per questi punti $y_{eq} = 0$ e abbiamo

$$B = \frac{1-\mu}{\rho_1^3} + \frac{\mu}{\rho_2^3} = \frac{1-\mu}{\underbrace{|x_{eq}+\mu|^3}_{\text{dist dal primario } m_1}} + \frac{\mu}{\underbrace{|x_{eq}-1+\mu|^3}_{\text{dist dal primario } \mu_2}}$$

$$C = 0$$

$$A = \frac{1-\mu}{\rho_1^3} + \frac{\mu}{\rho_2^3} - \frac{3(1-\mu)}{\rho_1^3} - \frac{3\mu}{\rho_2^3} = -2B$$

In questo caso il polinomio caratteristico diventa

$$\lambda^4 + (2-B)\lambda^2 + (1+2B)(1-B) = 0$$

È equazione biquadratica! Il discriminante è

$$\Delta = (2-B)^2 - 4(1+2B)(1-B) = B(9B-8)$$

che è ≥ 0 se $B > 8/9$ (ovviamente $B>0$)

Stimiamo B: almeno per $\mu \ll 1$ (che è il caso interessante nelle applicazioni).
Ricordiamo che in questo caso (6) ci da

$$x_{eq} \approx 1 - \mu - \left(\frac{\mu}{3}\right)^{1/3}$$

quindi

$$B = \frac{1-\mu}{|x_{eq}+\mu|^3} + \frac{\mu}{|x_{eq}-1+\mu|^3} \approx 1-\mu + \frac{\mu}{\left|\frac{\mu^{1/3}}{3^{1/3}}\right|^3}$$

$$\approx 1-\mu + 3 \approx 4$$

Adesso sappiamo che l'eq $t^2 + (2-B)\lambda + (1+2B)(1-B) = 0$ ha sempre 2 radici distinte. Ma il coeff $2-B<0$ per B piccolo, mentre $(1+2B)(1-B) < 0$. Quindi abbiamo 1 variazione di segno e 1 permanenza, quindi per Cartesio abbiamo 1 radice positiva e 1 negativa.

Esplicitamente:

$$\begin{cases} \omega^2 = \dfrac{B-2-\sqrt{B(9B-8)}}{2} < 0 & \rightsquigarrow \text{ 2 autovalori immaginari puri} \\ \lambda^2 = \dfrac{B-2+\sqrt{B(9B-8)}}{2} > 0 & \rightsquigarrow \text{ 2 autovalori reali} \end{cases}$$

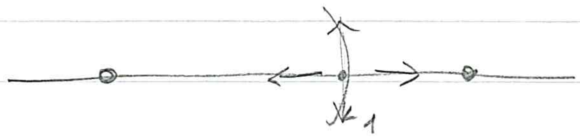
Concludiamo che L_1 ha autovalori

$i\omega, -i\omega$ immaginari puri
$\lambda, -\lambda$ reali puri

quindi (tenendo conto anche di (z, p_z)), la struttura è

sella $\times$ centro $\times$ centro

Il pto è linearmente instabile (e quindi anche non linearmente!)



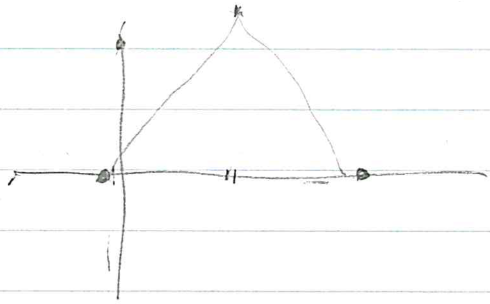
Se mi sposto in direz. trasversale ho movimento oscillatorio per via della forza di richiamo

Se mi sposto sulla retta cado su uno dei 2 pianeti: instabilità!

Stabilità lineare per i punti triangolari L_4 ed L_5

Come prima consideriamo $\mu \approx 0$.

Ricordiamo che in questo caso L_4 ed L_5 formano un triangolo equilatero con i primari, quindi



$$y_{eq} = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x_{eq} = \frac{1}{2} - \mu \quad \text{(è il pto di mezzo)}$$

Sostituendo questi valori in A, B, C si trova che

$$H_0 = \frac{1}{2}\frac{p_x^2 + p_y^2}{2} - x p_x + y p_x + \frac{1}{8} x^2 - \frac{5}{8} y^2 + Cxy$$

e il determinante di prima

$$\lambda^4 + \lambda^2 + \frac{27}{4}\mu(1-\mu) = 0$$

Risolvendo rispetto a λ^2

$$\lambda^2 = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1 - 27\mu(1-\mu)}$$

Se $27\mu(1-\mu) < 1$, ovvero $0 < \mu < \mu^* \approx 0,0385$ allora λ^2 ha 2 radici reali ed entrambe negative. Di conseguenza il sistema linearizzato ha 2 coppie di autovalori $\pm i\omega_1$, $\pm i\omega_2$ immaginari puri

Ne segue che il sistema linearizzato in L_4 (incluso anche (z, p_z)) ha la struttura

centro × centro × centro

ed è quindi linearmente stabile.
La stabilità non lineare è + difficile perché si può mostrare che H_0 <u>non</u> è definita positiva.
In particolare $\exists$ cambio di coordinate in cui H_0 ha la forma

$$H_0 = \omega_1 \frac{p_1^2+x_1^2}{2} - \omega_2 \frac{p_2^2+x_2^2}{2} + \omega_3 \frac{p_3^2+x_3^2}{2}$$

La stabilità non lineare è un problema estremamente interessante, e con tecniche di forma normale si può mostrare che c'è una zona di raggio 10^4 Km che è stabile per tempi finiti, ma + lunghi dell'età dell'universo!

Ad esempio $(0,0,1,1)$ soddisfa

$$H_0(0,0,1,1) = \frac{1}{2}$$

mentre $\left(0,0,4,\frac{\alpha}{c}\right)$

$$H_0(\,-\,) = \frac{1}{8} - \frac{5}{8}\frac{\alpha^2}{c^2} + \alpha < 0$$