6 Problema di Cauchy con regolarità maggiore e con regolarità minore

6.1 Problema di Cauchy analitico

Consideriamo il problema di Cauchy per un sistema di n PDE (anche nonlineari) per le n funzioni $u_1(x,t),\ldots,u_n(x,t)$, $x \in (x_0,x_1)$, con $x_0 < 0 < x_1$, e $t \in (0,t_1)$:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = f_i\left(t,x,\mathbf{u},\mathbf{u}_x\right), \quad i = 1,\ldots,n, \tag{6.1.1}$$

dove $\mathbf{u}(x,t) = (u_1(x,t),\ldots,u_n(x,t))$, con dati iniziali

$$u_1(x,0) = \phi_1(x),\ \ldots, u_n(x,0) = \phi_n(x). \tag{6.1.2}$$

Theorem 6.1.1 (Cauchy - Kowalewska)**.** *Siano le funzioni f_i sulla r.h.s. del sistema* (6.1.1) *analitiche in qualche intorno del punto*

$$t = 0, \quad x = 0, \quad \mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{u}_x = 0. \tag{6.1.3}$$

Inoltre siano i dati iniziali (6.1.2) *analitici in $x = 0$. Segue che il problema di Cauchy* (6.1.1), (6.1.2) *ammette un'unica soluzione analitica in qualche intorno del punto $x = t = 0$.*

Osservazioni:
1) Per la dimostrazione vedere gli appunti di Dubrovin.
2) La richiesta che le funzioni f_i non dipendono da derivate più alte $\mathbf{u}_{xx}(x,t),\ldots$ di $\mathbf{u}(x,t)$ è essenziale, altrimenti esiste il controesempio (Kowalewska) che consiste nell'equazione del calore con dato iniziale $\phi(x) = \frac{1}{1+x^2}$.
3) La versione più generale del teorema di Cauchy-Kowalewska riguarda la derivata più alta $\partial_t^k u_i$, $k \in \mathbb{N}$ di u_i, e le funzioni f_i che possono dipendere dalle derivate miste $\partial_t^j \partial_x^\ell u_i$, con le condizioni che $j + \ell \leq k$ e $j < k$. Ovviamente come dati iniziali nel $t = 0$ bisogna specificare non solo u_i, ma anche $\partial_t^j u_i$ per $1 \leq j \leq k-1$.
4) È da sottolineare che l'esistenza della soluzione analitica è solo locale
5) però è universale (non dipende dal tipo di equazione).
6) Uno potrebbe provare a risolvere anche il caso non analitico approssimando i dati iniziali analitici con quelli meno regolari, ma purtroppo l'approssimazione non necessariamente si estende alle soluzioni.

6.2 Problema di Cauchy 'astratto'

Discutiamo ora il caso di regolarità meno stringente. Il problema di Cauchy (e anche il problema misto iniziale/bordo) per $u(x,t)$, $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^d$, $t \in I = [0,t_0)$, di forma

$$u_t = Au, \quad u|_{t=0} = u_0, \tag{6.2.4}$$

dove A è un operatore a derivate parziali nelle variabili $x_1,\ldots,x_d$, è stato a metà del secolo scorso convenientemente trasformato in un problema a valori di Cauchy 'astratto'. Quest'ultimo consiste nel problema iniziale

$$U' = AU, \quad U(0) = U_0, \tag{6.2.5}$$

per la derivata ordinaria di una funzione $U : I \to E$, $I \subset \mathbb{R}$, che però prende valori in un opportuno spazio E di funzioni definite su $\Omega \subset \mathbb{R}^d$. Più precisamente,

$$(U(t))(x) = u(x,t). \tag{6.2.6}$$

Le eventuali condizioni al contorno sono incluse nella definizione dell'operatore A e in particolare del suo dominio $D(A) \subset E$. Ovviamente $D(A)$ deve contenere $Ran(U) := U(I)$, $Ran(U) := U(I) \subset D(A)$.

Uno si aspetta che questo ci permetterà di scrivere la soluzione di (6.2.4) (e percio di (6.1.1)) nella forma

$$"U(t) = \exp(tA)\, U_0".$$

Questo funziona quando A è una matrice, o un operatore lineare limitato, e vedremo più in generale in avanti.

Un altro vantaggio è che con l'equazione (6.2.5) si possono trattare diversi tipi di PDE e anche operatori lineari più generali (non necessariamente a derivate parziali), come dimostrato da intensi studi nella seconda parte del secolo scorso. Da qualche decennio vengono studiate anche equazioni nonlineari. La risultante teoria di equazioni differenziali 'astratte' e la sua formulazione equivalente, teoria di semigruppi, hanno trovato un sviluppo eccezionale e svariate applicazioni.

Cerchiamo ora di spiegare meglio questo approccio usando come esempio l'equazione del calore

$$\boxed{u_t = \kappa \Delta u, \quad \forall\, t > 0,} \tag{6.2.7}$$

su $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, con dati iniziali

$$u(x, 0) = u_0(x) \tag{6.2.8}$$

ed eventualmente la condizione di Dirichlet al contorno

$$u(x, t) = 0, \quad \forall\, x \in \partial\Omega. \tag{6.2.9}$$

Nel capitolo precedente abbiamo descritto la soluzione 'classica' per $\Omega = \mathbb{R}$ e $\Omega = I$, e spiegato come estenderla ad $\Omega = \mathbb{R}^d$ e $\Omega = I_1 \times \cdots \times I_d$. La regolarità richiesta era 'naturale' per dare senso a tute le derivate, ovvero $u \in \mathcal{C}(\bar{\Omega} \times [0, \infty])$, tale che $\exists\, u_t \in \mathcal{C}(\bar{\Omega} \times [0, \infty])$ (solo da destra per $t = 0$), $\exists\, u_{x_i}, u_{x_i x_j} \in \mathcal{C}(\bar{\Omega} \times [0, \infty])$, e (6.2.5) è soddisfatta assieme con le condizioni al contorno. Il problema misto (6.2.5)-(6.2.9) lo reinterpreteremo nel seguente modo.
Introduciamo lo spazio di Banach

$$E = \{u \in \mathcal{C}(\bar{\Omega} \mid u|_{\partial\Omega} = 0\} \tag{6.2.10}$$

con norma $\|\ \| = \sup$ (la topologia su E serve per controllare la regolarità in t).
Denotiamo poi

$$A = \kappa\, \Delta$$

sul dominio

$$\boxed{D(A) := \{v \in E \mid \exists\, v_{x_i}, v_{x_i x_j} \,\mathrm{su}\, \Omega \,\mathrm{e\, stanno\, in}\, \mathcal{C}(\bar{\Omega}),\ \mathrm{e}\, \Delta v \in E\}} \tag{6.2.11}$$

(soddisfatte le altre condizioni $\Delta v \in E$ dice in più solo che $\Delta v|_{\partial\Omega} = 0$).
Come accennato sopra, definiamo ora

$$U : \mathbb{R}_+ \ni t \mapsto U(t) \in E, \quad (U(t))(x) = u(x, t).$$

Chiaramente se U corrisponde alla soluzione 'classica' u abbiamo che $U(t) \in D(A)$, $\forall\, t > 0$.
Definiamo anche

$$V : t \mapsto V(t), \quad V(t)\,(x) = u_t(x, t).$$

Abbiamo che $V(t) \in E, \forall\, t > 0$, perche $u_t = \kappa \Delta u$ e grazie alle condizioni imposte sugli elementi di $D(A)$.
Inoltre

$$\|V(t + h) - V(t)\|_E = \sup_{x \in \Omega} |u_t(x, t + h) - u_t(x, t)| \leq$$

$$\sup_{x\in\Omega,\tau',\tau\in[t,t+h]} |u_t(x,\tau') - u_t(x,\tau)| \le \varepsilon$$

se $|\tau' - \tau| \le \delta$ (per continuità uniforme di u_t su compatti). Ma se $h \to 0$ sicuramente $|\tau' - \tau| \le \delta$ e perciò $V : \mathbb{R}_+ \to E$, $t \mapsto v(t)$ è continua.
Infine, per $t > 0$ e $|h| < t$, e per $t = 0$ e $0 < h$,

$$\|h^{-1}(U(t+h) - U(t)) - V(t)\|_E = \sup_{x\in\bar\Omega} |h^{-1}(u(x,t+h) - u(x,t)) - u_t(x,t)|.$$

Ora u è $\mathcal{C}$ in $t \in [0,h]$ e $\mathcal{C}^1$ in $t \in (0,h)$ e dunque per il teorema [Lagrange] del valore medio esiste τ, $0 < \tau < h$, tale che l'ultima espressione è uguale a

$$\sup_{x\in\bar\Omega} |h^{-1}h\, u_t(x,t+\tau) - u_t(x,t)|,$$

che converge a 0 quando $h \to 0$ per continuità uniforme di u_t su compatti. Ciò significa che $U \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_{\ge 0}, E)$, ($E$ con $\|\ \| = \sup$) ovvero che esiste U', continuo. Chiaramente $U' = V$. Inoltre, da (6.2.7) segue

$$U'(t) = AU(t), \tag{6.2.12}$$

e da (6.2.8) segue

$$U(0) = U_0. \tag{6.2.13}$$

Viceversa abbiamo

Theorem 6.2.2. *Sia* $\mathbb{R}_{\ge 0} \ni t \mapsto U(t) \in E$ *di classe* $\mathcal{C}^1$*, dove* E *è dato da* (6.2.10) *con norma* sup*. Assumiamo che* $U(t) \in D(A)$*, dove* $D(A)$ *è dato da* (6.2.11)*. inoltre assumiamo che* $U'(t) = AU(t)$, $\forall\, t \ge 0$ *e che* $U(0) = U_0$*. Allora*

$$u(x,t) := (U(t))(x) \tag{6.2.14}$$

è una soluzione classica di (6.2.7)*, di (dati iniziali)* (6.2.8) *con* $u_0(x) := (U(0))(x)$*, e di (condizione al contorno)* (6.2.9)*.*

Proof: Verifichiamo direttamente che $u \in \mathcal{C}(\bar\Omega \times \mathbb{R}_{\ge 0})$

$$|u(x+h,t+h') - u(x,t)| \le |u(x+h,t+h') - u(x,t+h')| + |u(x,t+h') - u(x,t)| \le$$

$$|U(t+h')(x+h) - U(t+h')(x)| + |U(t+h')(x) - U(t)(x)|.$$

Ora per continuità di $U(t) \in E$, $\forall\, \delta$ esiste ε tale che $\forall\, h < \varepsilon$ il primo addendo è minore di $\delta/2$. Inoltre $\forall\, \delta$ esiste ε' tale che $\forall\, h < \varepsilon$ il secondo addendo è minore di

$$\sup_x |(u(t+h') - u(t))(x)| = \|u(t+h') - u(t)\| \le \delta/2,$$

per continuità di U. Percio per $h < \min\{\varepsilon, \varepsilon'\}$ l'incremento di u è minore di δ.
In modo simile si dimostra che esistono $u_t, u_{x_i}, u_{x_ix_j} \in \mathcal{C}(\bar\Omega \times \mathbb{R}_{\ge 0})$.
Inoltre,

$$u_t(x,t) = U'(t)(x) = A(U(t))(x) = Au(x,t)$$

che dimostra (6.2.7). Ovviamente

$$u(x,0) = (U(0))(x) =: u_0(x),$$

perciò vale (6.2.8). Finalmente, (6.2.9) è soddisfatta,

$$u|_{\partial\Omega}(x,t) = U(t)|_{\partial\Omega}(x) = 0,$$

perchè $U(t) \in E$. $\square$

Vediamo ora il caso particolare $\Omega = \Pi_{j=1}^d I_j$, dove $I_j = \{0 \leq x_j \leq \pi\}$. L'unica soluzione classica u che abiamo trovato nel Theorem 5.5.10 si estende facilmente a d-dimensioni. L'unica soluzione 'astratta' U che corrisponde a u è

$$U(t) = \sum_{\underline{m}} a_{\underline{m}} \exp(-\kappa \underline{m}^2 t)\, \Pi_{j=1}^d \sin_{j,m_j}, \tag{6.2.15}$$

dove $\underline{m} = (m_1, \ldots, m_d) \in \mathbb{Z}^d$ e

$$\sin_{j,m_j}(x) = \sin(m_j x_j).$$

Questo vale almeno per il dato iniziale del tipo

$$U_0 = \sum_{\underline{m}} a_{\underline{m}} \Pi_{j=1}^d \sin_{j,m_j},$$

con coefficienti $a_{\underline{m}}$ che soddisfano la condizione

$$\sum_{\underline{m}} \underline{m}^2 |a_{\underline{m}}|^2 < \infty. \tag{6.2.16}$$

Inoltre, la proprietà del valore massimo significa che $\forall\, t \geq 0$

$$\|U(t)\|_E = \sup_{x\in\Omega} |u(x,t)| \leq \sup_{x\in\partial\Omega} |u_0(x)| = \|U_0\|_E,$$

perciò il problema di Cauchy astratto (per ODE) è ben posto.
È da notare che il luogo dei dati iniziali che soddisfa la condizione (6.2.16) è denso in E.

Ritorniamo adesso all'equazione (6.2.5) assumendo che A è un operatore su $D(A) \subset E$ denso nello spazio di Banach su $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

Definition 6.2.3. *Per* soluzione *di* (6.2.5) *su* $\mathbb{R}_{\geq 0}$ *intendiamo una funzione* $U \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_{\geq 0}, E)$ *(nel senso spiegato sopra), tale che* $U(t) \in D(A)$, $\forall t \geq 0$. *In modo analogo si possono considerare anche soluzioni su* $[0,T]$ *e su* $\mathbb{R}$.

Definition 6.2.4. *Diciamo che il problema di Cauchy astratto per* (6.2.5) *è ben posto sse*
a) esiste D *denso in* E*, tale che* $\forall U_0 \in D$*, esiste soluzione di* (6.2.5) $\forall t \geq 0$ *con* $U(0) = U_0$ *(ovvero esistono soluzioni per sufficientemente tanti dati iniziali),*
b) esiste una funzione nondecrescente, nonnegativa $C(t), t \geq 0$*, tale che* $\|U(t)\| \leq C(t)\|U_0\|$*, per ogni soluzione* $U(t)$ *di* (6.2.5) *(ovvero dipendenza continua da dati iniziali e non solo per* $U_0 \in D$*).*

Osservazioni:
i) Chiaramente $D \subseteq D(a)$.
ii) b)$\Rightarrow$ b'): se U_n è una sequenza di soluzioni di (6.2.5) con $U_n(0) \to 0$ allora $U_n(t) \to 0$ uniformemente su compatti in $\mathbb{R}_{\geq 0}$. Ci sono alcune conseguenze immediate di a) e b). Definiamo per $t \geq 0$ e $U_0 \in D$ l'operatore $S(t)$ dato da

$$S(t)\, U_0 := U(t), \tag{6.2.17}$$

dove U è l'unica soluzione di (6.2.5) con $U(0) = U_0$. Grazie a b) $S(t)$ è un operatore continuo (limitato) da D a E (con $\|D(t)\| \leq C(t)$) e può essere esteso ad un operatore definito su tutto E, con la stessa norma e indicato con lo stesso simbolo.

Definition 6.2.5. *La funzione $t \to S(t)$ a valori operatoriali viene chiamata* propagatore *o* operatore d'evoluzione *per* (6.2.5).

Per la proprietà b') e la densità di D, la funzione $t \to S(t)u$ è continua da $\mathbb{R}_{\geq 0}$ a E.

Definition 6.2.6. *La funzione $t \to u(t) := S(t)u_0$, $u_0 \in E$, viene chiamata* soluzione generalizzata *di* (6.2.5) *su* $\mathbb{R}_{\geq 0}$.

Osservazioni:
i) Se $u_0 \notin D$, $u(t)$ non è necessariamente soluzione genuina.
ii) Ma si può dimostrare che $u(t)$ è una *soluzione debole* (nel senso di distribuzioni), i.e. soddisfa $\forall v \in D(A^*)$ e $\forall \phi \in \mathcal{S}$ (funzioni prova a supporto compatto in $\mathbb{R}_{\geq 0}$)

$$\int_0^\infty < A^* v, U(t) > \phi(t) dt = -\int_0^\infty < v, U(t) > \phi'(t) dt - < v, U(0) > \phi(0). \tag{6.2.18}$$

Tale equazione è in qualche senso $< v, AU(t) >=< v, U'(t) >$, ma $U(t)$ non sta necessariamente in $D(A)$ e U in $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_{\geq 0}, D(A))$.

Consideriamo ancora l'equazione del calore, che come abbiamo detto descrive la temperatura ma anche il processo di diffusione di altre sostanze. La condizioni di Dirichlet su $\partial\Omega$ corrispondono all'assorbimento delle particelle di questa sostanza. È chiaro che la norma sup non è adeguata per tali processi, ed invece la norma $\|U(t)\|_{L^1}$ descrive la quantità totale della sostanza nel tempo t. Tratteremo (senza tanto lavoro in più) anche il caso di L^p, $1 \leq p < \infty$. Usando la norma $\| \ \|_{L^p}$ è naturale di considerare le funzioni modulo la misura zero, che formano lo spazio $\mathcal{L}^p$. In tal caso imporre le condizioni al contorno potrebbe non avere senso. Possiamo però imporle nella definizione del dominio $D(A)$.
Per esempio prendendo lo stesso $D(A) := \{v \in E \,|\, \exists\, v_{x_i}, v_{x_i x_j} \in \mathcal{C}(\bar{\Omega})|_{\partial\Omega}, \text{ e } \Delta v \in E\}$ (come precedentemente per $E = \mathcal{C}_{\partial\Omega}(\bar{\Omega}) := \{u \in \mathcal{C}(\bar{\Omega}) \,|\, u|_{\partial\Omega} = 0\}$). La condizione a) ha senso ed è soddisfatta per il fatto che $\mathcal{C}_{\partial\Omega}(\bar{\Omega}) \subseteq \mathcal{L}^p(\Omega)$ e che la convergenza in $\mathcal{C}_{\partial\Omega}(\bar{\Omega})$ implica la convergenza in $\mathcal{L}^p(\Omega)$. Dunque le soluzioni in $\mathcal{C}_{\partial\Omega}(\bar{\Omega})$ sono anche le soluzioni in $\mathcal{L}^p(\Omega)$.

Inoltre prendendo come prima

$$D = \{\sum_{\underline{m}} a_{\underline{m}} \Pi_{j=1}^d \sin_{j,m_j} \mid \sum_{\underline{m}} \underline{m}^2 |a_{\underline{m}}|^2 < \infty\}$$

ci solno le soluzioni (6.2.15) anche se U_0 non sta in $\mathcal{C}_{\partial\Omega}(\bar{\Omega})$. Si può dimostrare [Fattorini] che

$$\|U(t)\|_{\mathcal{L}^p} \leq \|U_0\|_{\mathcal{L}^p},$$

perciò la b) è ok.
Notiamo però che non si può soddisfare b) anche per $t < 0$, per esempio per

$$U_0(y) = \sin y_1$$

che produce la soluzione

$$U(t)(x) = \exp(-2\kappa t) \sin x_1 \to \infty$$

per $t \to -\infty$ (crescente).

6.3 Equazione di Schroedinger.

In meccanica quantistica l'evoluzione dello stato di una particella di massa m in $\mathbb{R}^3$ sotto l'influenza di un potenziale esterno V è descritta dall'equazione di Schroedinger

$$\boxed{i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta\psi + V\psi,} \tag{6.3.19}$$

dove $\hbar$ è costante di Planck e Δ è Laplaciano. Per $x \in \mathbb{R}^3$, $|\psi(x,t)|^2$ è la densità di probabilità (di trovare la particella nel momento t nel punto x), che significa che probabilità di trovare la particella nella regione Ω nel tempo t è

$$\int_\Omega |\psi(x,t)|^2 \, dx. \tag{6.3.20}$$

Ovviamente $\int_{\mathbb{R}^3} |\psi(x,t)|^2 \, dx = 1$.

Inoltre, per tale probabilità (e anche per altre possibili misurazioni) non ha importanza se usiamo ψ o un'altra funzione ψ' che differisce da ψ solo su insieme di misura 0. Perciò, se per sistemi classici potevamo di lavorare con $E = \mathcal{C}$ o $\mathcal{L}^p$, per sistemi quantistici la scelta giusta è $E = \mathcal{L}^2$

L'equazione di Schroedinger si può scrivere in ogni dimensione d, il caso $d \geq 3$ occorre per esempio quando si considerano più particelle. Inoltre ci sono diversi possibili potenziali V, alcuni dei quali di grande rilevanza fisica, per esempio $V = -k|x|^2$ (potenziale armonico), $V = -\frac{k}{|x|}$ (potenziale di Coulomb o atomico), $V = k_1 - k_2 \chi_{[a,b]}$ (pozzo di potenziale) e tanti altri.

Noi studieremo il caso $V = 0$ (particella libera) in dimensione d. Scriviamo l'equazione di Schroedinger per U nella forma

$$U'(t) = AU(t), \tag{6.3.21}$$

dove $A = i\kappa\Delta$ (e κ dipende da m e $\hbar$).

Come operatore nello spazio di Hilbert $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d)$, A non è limitato (come del resto non lo sono le derivate ∂_x). Per il suo dominio $D(A)$ prendiamo tutti gli $U \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d)$ tali che ΔU (nel senso di distribuzioni) sta in $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d)$.

Il modo più semplice pr "diagonalizzare" (e risolvere) (6.3.21) è usare la trasformata di Fourier, estesa da $\mathcal{L}^1 \cup \mathcal{L}^2$ (denso in $\mathcal{L}^2$) a tutto $\mathcal{L}^2$. Tale estensione diventa un isomorfismo (e omotetia) $\mathcal{F}$ da $\mathcal{H} = \mathcal{L}^2$ a $\tilde{\mathcal{H}} = \mathcal{L}^2$. Sappiamo che $\mathcal{F}$ scambia "$i\partial$" con "p" e che

$$\mathcal{F}(AU)(p) = -i\kappa|p|^2\mathcal{F}(U)(p).$$

Perciò la soluzione con dato iniziale $U_0 \in D(A)$ è

$$\mathcal{F}(U)(p,t) = \exp(-i\kappa|p|^2 t)\, \mathcal{F}(U_0)(p),$$

ovvero

$$U(x,t) = (4\pi i\kappa t)^{-\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} \exp\left(\frac{i|x-y|^2}{4\kappa t}\right) U_0(y)\, dy. \tag{6.3.22}$$

La parte a) della definizione del problema ben posto è ok. perchè $D(A)$ è denso in $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d)$. Per la parte b) notiamo che

$$< U, AU >_{\mathcal{H}} \sim < \mathcal{F}U, \mathcal{F}AU >_{\tilde{\mathcal{H}}} = \int_{\mathbb{R}^d} |p|^2 |\mathcal{F}U|^2 \, dy \in i\, \mathbb{R}_+$$

è immaginario. Ora se è una soluzione di (6.3.21)

$$\frac{d}{dt}\|U(t)\|^2 = \frac{d}{dt} < U(t), U(t) > = < U'(t), U(t) > + < U(t), U'(t) >$$

$$= 2\Re < U(t), U'(t) > = 2\Re < U(t), AU(t) > = 0.$$

Perciò $\|U(t)\| = \|U(0)\|$ è costante.

Osservazioni:
• tutto quello che abbiamo detto vale anche per $t < 0$; perciò il problema di Cauchy è ben posto per $t \in \mathbb{R}$ (diversamente dall'equazione del calore).
• si può dar senso a (6.3.21) anche per $\mathcal{L}^p$ con $D(A)$ dato da funzioni di Schwarz ma la b) risulta soddisfatta solo per $p = 2$.
• L'altra differenza sta nel fatto che le soluzioni dell'equazione di Schroedinger non hanno tendenza ad essere più lisce dei loro dati iniziali.

6.4 Semigruppi d'evoluzione ad un parametro.

In questa sezione per semplificare la notazione scriveremo $U_t := U(t)$ (abbandonando tale notazione per $\partial_t U$), e 1 per l'operatore identità sullo spazio di Banach E. Consideriamo prima il caso degli operatori limitati.

Definition 6.4.7. *Una funzione* $U : \mathbb{R}_{>0} \to B(E)$, $t \mapsto U_t$ *si chiamia* semigruppo (di operatori, ad un parametero) *sse*
i) $U_{t+t'} = U_t U_{t'}$, $\forall t, t' \geq 0$,
ii) $U_0 = 1$.
Il semigruppo è di contrazioni (o contrattivo) se $\forall t \in \mathbb{R}_{>0}$, $\|U_t\| \leq 1$ *e di isometrie (o unitario) se* $\|U_t x\| = \|x\|, \forall x \in E$. *Se* U *è definita su tutto* $\mathbb{R}$ *si chiama il gruppo ad un parametero.*

Osservazioni:
- da i) segue che U è commutativo; $U_{t+t'} = U_t U_{t'} = U_{t'} U_t$,
- se U è un gruppo contrattivo allora $\|U_t\| = 1, \forall t \in \mathbb{R}$.

Per i nostri scopi ci vuole qualche proprietà di continuità in t del semigruppo U_t. Usando solo la topologia debole su $B(E)$, si può vedere che U è uniformemente continua in t su segmenti. Indicando

$$M := \sup_{t \in [0,\delta]} \|U_t\|,$$

si vede facilmente che

$$\|U_t\| \leq M^{\frac{t}{\delta}}, \forall t \geq 0.$$

Perciò basta studiare solo semigruppi contrattivi $M^{-\frac{t}{\delta}} U_t$.

La continuità più forte è in norma di $B(E)$.

Theorem 6.4.8. *T.F.A.E. (i seguenti sono equivalenti):*
i) U_t *è continua in* t *in norma operatoriale* $\| \, \|$,
ii) $\lim_{t \to 0} \|U_t - 1\| = 0$,
iii) $\exists A \in B(E)$ *tale che* $\lim_{t \to 0} \|\frac{U_t - 1}{t} - A\| = 0$,
iv) $U_t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n$.

Osservazioni:
- l'operatore A definito in iii) si chiama *generatore*,
- il teorema descrive come passare da semigruppo al generatore e viceversa,
- il punto iv) si scrive anche come $U_t = \exp(At)$, che si estende a tutti i $t \in \mathbb{R}$ ovvero ad un gruppo, che in fatti è analitico in t,
- inoltre si vede che U_t è (l'unica) soluzione del problema di Cauchy $\frac{d}{dt} U_t = A U_t$, $U_0 = 1$.

Proof:
iv)$\Rightarrow$ i): grazie a i) nella def 6.4.7 basta dimostrare la continuità in $t = 0$ che avviene

$$\|U_t - 1\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \|A\|^n = \exp(t\|A\|) - 1 \to 0, \text{ se } t \to 0,$$

i)$\Rightarrow$ ii): è ovvio,
iii)$\Rightarrow$ ii): è anche ovvio,
iv)$\Rightarrow$ iii):

$$\|\frac{U_t-1}{t}-A\| = \frac{1}{t}\|U_t-1-tA\| = \frac{1}{t}\|\sum_{n=2}^{\infty}\frac{t^n}{n!}A^n\| \leq t\|A\|^2\|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}A^n\| \leq t\|A\|^2\exp(t\|A\|) \to 0,\ \mathrm{se}\, t\to 0.$$

Per completare la dimostrazione è sufficiente dimostare ii)$\Rightarrow$ iv):

$$\|\frac{1}{\tau}\int_0^\tau U_t\,dt - 1\| = \frac{1}{\tau}\|\int_0^\tau (U_t-1)\,dt\| \leq \varepsilon$$

per $0<\tau\leq\delta$ (usando il fatto che U_t è continua in norma uniformemente su compatti). Perciò per tali τ,

$$b_\tau := \frac{1}{\tau}\int_0^\tau U_t\,dt$$

è invertibile e possiamo definire

$$A_\tau := \frac{U_\tau - 1}{\tau}\,\frac{1}{b_\tau}.$$

Notiamo che, per $n\in\mathbb{N}$ e $0<\tau\leq\frac{\delta}{n}$

$$A_{n\tau} := \frac{(U_\tau-1)(1+U_\tau+\cdots+U_\tau^{n-1})}{(\int_0^\tau+\int_\tau^{2\tau}+\cdots+\int_{(n-1)\tau}^{n\tau})U_t\,dt} = \frac{U_\tau-1}{\int_0^\tau U_t\,dt} = A_\tau.$$

Segue che

$$A_{\frac{p}{q}\tau} = A_{\frac{\tau}{q}} = A_{q\frac{\tau}{q}} = A_\tau, \quad \forall p\leq q\in\mathbb{N},\ 0<\tau\leq\delta$$

e dunque

$$A_\tau = A,$$

grazie alla continuità. Perciò

$$\left(\int_0^t U_\tau\,d\tau\right)A = U_t - 1,$$

che per iterazione dà

$$U_t = 1 + tA + \frac{t^2}{2}A^2+\cdots = \exp(tA),$$

convergente in norma $\forall\tau\in\mathbb{R}$. □

In generale, data la formula esplicita per l'operatore A, tale formula per $\exp(tA)$ non è nota. A tale scopo un modo molto usato sta nella 'perturbazione' di alcuni casi 'noti'. Più precisamente assumendo di conoscere esplicitamente gli operatori $A_0, U_t=\exp(tA)$ e un certo $A_1\in B(E)$ e $\exp(tA_1)$, si può cercare di esprimere $V_t=\exp t(A_0+A_1)$ tramite tali operatori (notare che in generale A_0 non commuta con A_1, e $\exp(tA)$ non commuta con $\exp(tA_1)$). Due espressioni frequentamente usate sono le formule di Dyson e di Trotter.

Theorem 6.4.9. *i) Sia $A_1(t):=e^{-tA_0}A_1e^{-tA_0}$. Allora*

$$V_t = e^{t(A_0+A_1)} = e^{tA_0}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t dt_1\ldots\int_0^{t_{n-1}} dt_n\,A_1(t_1)\ldots A_1(t_n)\right),$$

ii) $V_t=\lim_{n\to\infty}\left(e^{\frac{t}{n}A_0}\,e^{\frac{t}{n}A_1}\right)$.
La serie e il limite sopra convergono in norma.

Di solito le espressioni perturbative sono poco accurate per $t \to \infty$, che è un range importante per il calcolo della diffusione (scattering). Per di più in fisica abbiamo spesso a che fare con operatori non limitati (come operatori differenziali) con associati problemi della definizione di domini, somme di operatori etc., e con semigruppi continui solo nel senso forte (e non in norma).

Definition 6.4.10. *Chiameremo* generatore *di un semigruppo U_t fortemente continuo ad un parametero, l'operatore A definito su*

$$D(A) := \left\{ \psi \in E \mid \exists \lim_{h \to 0} \left(\frac{U_t - 1}{h} \psi \right) \right\}$$

da formula

$$A\psi := \lim_{h \to 0} \left(\frac{U_t - 1}{h} \psi \right).$$

Osservazioni:
i) In altre parole $A\psi$ è la derivata di $U_t\psi$ in $t = 0$.
ii) Si può dimsotrare che $D(A)$ è denso in E e che A è chiuso.

Lemma 6.4.11. *Se $E = \mathcal{H}$ (spazio di Hilbert) e U_t è unitario (isometrico), iA è hermitiano.*

Proof:

$$< A\psi, \phi >= \lim_{h \to 0} < \frac{U_h - 1}{h} \psi, \phi >= \lim_{h \to 0} < \psi, \frac{U_{-h} - 1}{h} \phi >= - < \psi, A\phi > .$$

$\square$

Per operatori nonlimitati le somme e prodotti, e perciò anche l'esponenziale, richiedono particolare attenzione. Enunciamo però nel caso di un semigruppo contrattivo, una condizione necessaria e sufficente per un operatore chiuso per essere il suo generatore (il caso generale richiede il controllo su tutte le potenze della risovente di A):

Theorem 6.4.12 (Hille-Yoshida)**.** *Sia A operatore lineare su $D(A) \subset E$. Allora A è un generatore di un semigruppo contrattivo fortemente continuo sse $D(A)$ è denso in E, per ogni $\lambda > 0$ esiste $(\lambda - A)^{-1} \in B(E)$, e $\|(\lambda - A)^{-1}\| \leq \lambda^{-1}$.*

Un corollario importante nel caso E è lo spazio di Hilbert $\mathcal{H}$:

Theorem 6.4.13 (Stone)**.** *L'operatore A su $D(A) \subset \mathcal{H}$ è il generatore di un gruppo unitario fortemente continuo sse iA è autoaggiunto.*

(Ricordiamo che l'operatore autoaggiunto A oltre ad essere hermitiano soddisfa $D(A) = D(A^*)$, oppure equivalentemente $(A \pm i)D(A) = \mathcal{H}$).

Grazie a questo teorema, il problema di esistenza ed unicità di e^{itA} viene trasformato nel problema di essere autoaggiunto di A. Questo in generale è da stabilire; di nuovo molti casi studiati sono del tipo "perturbativo".

Theorem 6.4.14 (Kato-Rellich)**.** *Se A è autoaggiunto e B è hermitiano con $D(B) \supset D(A)$ ed esistono $0 \leq \alpha \leq 1$, $0 \leq \beta$ tali che $\|B\psi\| < \alpha\|A\psi\| + \beta\|\psi\|$, $\forall \psi \in D(A)$, allora $A + B$ è autoaggiunto su $D(A)$.*

(B con le proprietà come sopra si chiama 'relativamente A-limitato').

Per $H = \Delta + V$, dove V è l'operatore di multiplcazione per $V(x)$, $x \in \mathbb{R}^d$, a priori non è neanche chiaro quali ψ stanno nel dominio di H. L'autoaggiuntezza di H è adempiuta per $V = V_1 + V_2 \in L^2_{loc}$ con $V_1 \in L^2$ e $V_2 \in L^\infty$, per esempio per il potenziale di Coulomb $V(r) = \frac{1}{|r|}$, dove possiamo prendere

$$V_1 = \begin{cases} \frac{1}{|r|} & \text{per} \quad |r| < 1 \\ 0 & \text{per} \quad |r| \geq 1 \end{cases}, \quad V_2 = \begin{cases} 0 & \text{per} \quad |r| < 1 \\ \frac{1}{|r|} & \text{per} \quad |r| \geq 1 \end{cases}. \tag{6.4.23}$$

Fisici matematici hanno risolto diversi tipi di potenziali V e spesso sono riusciti a 'diagonalizzare' $H = \Delta + V$.

7 Note su equazione di Schroedinger, equazione di Maxwell ed equazione di Dirac.

7.1 Equazione di Schroedinger idipendente da tempo.

Per risolvere l'equazione di Schroedinger

$$\boxed{i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi,} \tag{7.1.24}$$

si puo tentare di trovare le soluzioni dell'equazione di Schroedinger 'indipendente da tempo'

$$\boxed{H\phi = E\phi,} \tag{7.1.25}$$

dove $\phi \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d)$ ed E è un numero reale. In tal caso

$$\psi(x,t) = e^{-i\frac{Et}{\hbar}}\phi(x)$$

risolverà l'equazione di Schroedinger (6.3.20) con $\psi(x,0) = \phi(x)$.

Alcuni esempi:

• Particella libera; $H = -\frac{1}{2m}\Delta$ e le soluzioni (generalizzate) per $E = |p|^2 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, dove $p \in \mathbb{R}^d$, sono

$$\phi_p(x) = Ce^{\pm ip\cdot x}.$$

• Caduta libera (particella di massa $m = 1$ nel campo gravitazionale costante);

$$H = -\frac{1}{2}\Delta + gx$$

e le soluzioni (generalizzate) per $E \in \mathbb{R}$ sono (dopo la trasformata di Fourier)

$$\phi(p) = Ce^{\frac{i}{6g}(p^3 - 6Ep)}.$$

• Oscillatore armonico (in $d = 1$ di massa $m = 1$);

$$H = \frac{1}{2}(-\partial_x^2 + \omega x^2)$$

e le soluzioni per $E = \omega(n + \frac{1}{2}) \in \omega(\mathbb{N} + \frac{1}{2})$ (positivo e QUANTIZZATO !) sono

$$\phi_0(x) = e^{-\frac{\omega}{2}x^2}, \ \phi_n(x) = (\omega x - \partial_x)^n (2\omega)^{-\frac{n}{2}}\phi_0(x) \in L^2$$

(collegati con polinomi di Hermitè).
• Campo magnetico costante (lungo l'asse x_3 in $\mathbb{R}^3$);

$$H = |\Delta - eA|^2, \tag{7.1.26}$$

dove $A = \frac{b}{2}(-x_2, x_1, 0)$ è il 'potenziale' di $B := \nabla \cdot A = (0, 0, b)$. Si può scrivere (7.1.26) nella forma

$$H = -\frac{1}{2}\partial_3^2 + H^{osc},$$

dove H^{osc} è l'operatore di Hamilton dell'oscillatore armonico come sopra, con x sostituito da $-i\partial_1 + \frac{1}{2}ebx_2$ e $-i\partial_x$ da $-i\partial_2 - \frac{1}{2}ebx_1$ (che soddisfano le stesse regole dicommutazione), e con $\omega = eb$. Grazie al fatto che ∂_3^2 commuta con H^{osc}, lo spettro degli autovalori è la somma (numerica) dello spettro della particella libera e dell'oscilatore, ovvero $E \in [\frac{1}{2}\omega, \infty)$. Si può scrivere anche le autofunzioni nella forma separata.
• Rotatore libero (particella libera in $\mathbb{R}^3$ con vincolo $r = \mathit{costante}$ in coordinate sferiche);

$$H = \frac{1}{2mr^2 \sin\theta}\partial_\theta(\sin\theta\, \partial_\theta) + \frac{1}{2mr^2 \sin^2\theta}\, \partial_\varphi^2$$

(ottenuto omettendo tutti i termini in $-\Delta$ che contengono ∂_r) ammette autovalori $E = \frac{1}{2mr^2} l(l+1)$, $l \in \mathbb{N}$ (con molteplicità $2l+1$) e le armoniche sferiche $Y_l^k(\theta, \varphi)$, $k \in \mathbb{Z}, |k| \leq l$, come autofunzioni.
• Particella in potenziale di Coulomb in $\mathbb{R}^3$ (atomo di idrogeno);

$$H = -\Delta - \frac{e^2}{r},$$

che, separandole variabili $\phi(r, \theta, \varphi) = \chi(r) Y_l^k(\theta, \varphi)$ e usando l'esempio precedente, porta al prolema uno-dimensionale

$$\left(\partial_r^2 + \frac{2}{r}\partial_r + \frac{e^2}{r} + \frac{1}{r^2} l(l+1)\right)\chi(r) = -E\chi(r).$$

Con opportuno cambio di variabili si trova che lo spettro è $\mathbb{R}_{>0} \cup \{E_n\}$ con gli autovalori $E_n = -\frac{2\pi R}{n^2}$, dove $R = \frac{me^4}{4\pi}$ (usiamo $\hbar = 1$). Ora, l'energia dell'onda elettromagnetica di frequenza ν è $E = 2\pi\nu$, la frequenza della radiazione emmessa dall'atomo per il passaggio da energia E_n a $E_{n'}$ è

$$\nu_{nn'} = R\left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2}\right).$$

In particolare,

$$\nu_{n1} = R\left(1 - \frac{1}{n^2}\right),\ n = 2, 3, \ldots,$$

'serie' scoperta da Lyman 100 anni fa,

$$\nu_{n2} = R\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right),\ n = 3, 4, \ldots, \quad \text{(Balmer)}$$

(quattro primi visibili ad occhio nudo)

$$\nu_{n3} = R\left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{n^2}\right),\ n = 4, 5, \ldots, \quad \text{(Paschen)},$$

e.t.c. Si può anche calcolare le autofunzioni corrispondenti.
Con misure spettroscopiche si può individuare idrogeno (o vapore acqueo) nel cosmo, oppure riconoscere anche elementi chimici (con lo spettro più complicato).

7.2 Equazione di Maxwell.

Le equazioni di Maxwell descrivono il campo elettromagnetico $E = (E_i), B = (B_i)$, $i = 1, 2, 3$, dipendente da $x = (x_i) \in \mathbb{R}^3$ e dal tempo $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \partial_t E &= c\,\nabla \times B \\ \partial_t B &= -c\,\nabla \times E, \end{aligned} \tag{7.2.27}$$

dove $\nabla \times V := (\partial_2 V_3, \partial_3 V_1, \partial_1 V_2)$. Inoltre, in assenza di cariche e correnti elettrici,

$$\nabla \cdot E = 0 = \nabla \cdot B. \tag{7.2.28}$$

Definendo

$$u \equiv (u_1, \ldots, u_6) := (E, B),\ u(x,t) \in \mathbb{R}^6,$$

il sistema (7.2.27) si può scrivere in forma 'astratta' come,

$$U'(t) = A\,U(t),$$

dove $(U(t))(x) = u(x,t)$ e A è una matrice antisimmetrica 6×6, fatta a blocchi 3×3,

$$A = \begin{pmatrix} 0_{3\times 3}, & \alpha \\ -\alpha, & 0_{3\times 3} \end{pmatrix}$$

con

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & -\partial_3 & \partial_2 \\ 0 & -\partial_3 & -\partial_1 \\ -\partial_2 & \partial_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si può considerare U a valori in $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)^6$, il che è motivato dal fatto che la norma L^2 di $U(t)$ coincide con l'energia del campo elettromagnetico

$$\|U(t)\| = \int_{\mathbb{R}^3} \left(|E(x,t)|^2 + |B(x,t)|^2\right) dx.$$

In tal caso possiamo pensare la matrice A come operatore in $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)^6$, che è autoaggiunto sul dominio denso

$$D(A) = \{v \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)^6 \mid Av \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)^6\}.$$

Ragionando come prima con la trasformata di Fourier, oppure sempilcemente invocando il teorema di Stokes, si dimostra che $\|U(t)\|$ non dipende dal tempo, ovvero U è un gruppo unitario ad un parametro. Come prima questo significa che il problema di Cauchy per (7.2.27) con dati iniziali in $t = 0$ essenzialmente è ben posto, rimane solo da tener conto delle condizioni (7.2.28). Ma notando che

$$\partial_t(\nabla \cdot E) = \nabla \cdot (\partial_t E) = c\,\nabla \cdot (\nabla \times B) = 0,$$

e che lo stesso vale per B, risulta che (7.2.28) sono soddisfatte per ogni t se sono soddisfatte per $t = 0$. (Si può vedere però che il problema di Cauchy per (7.2.27) non è ben posto in $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^3)^6$ o in $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^3)^6, p \neq 2$).

7.3 Equazione di Dirac.

L'operatore a della sezione precedente si può scrivere nella forma

$$\sum_{j=1}^{3} A_j \partial_j,$$

dove A_j sono matrici 6×6 antisimmetriche a valori reali. Più in generale si può considerare

$$A = \sum_{j=1}^{d} i A_j \partial_j + T, \tag{7.3.29}$$

dove A_j, T sono matrici $N \times N$ hermitiane a valori complessi, che è un operatore autoaggiunto su dominio naturale in $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d)^N$. L'equazione di Dirac usata in mecanica quantistica relativistica è un sistema con A di questo tipo ($d = 4$ e $N = 4$)

$$\boxed{i\partial_t \psi = \sum_{j=1}^{3} i A_j \partial_j - T\psi,} \tag{7.3.30}$$

dove

$$A_j = \begin{pmatrix} 0_{2\times 2}, & \alpha_j \\ \alpha_j, & 0_{2\times 2} \end{pmatrix} \quad T = \begin{pmatrix} 1_{2\times 2}, & 0_{2\times 2} \\ 0_{2\times 2}, & -1_{2\times 2} \end{pmatrix}$$

con

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0, & 1 \\ 1, & 0 \end{pmatrix} \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0, & -i \\ i, & 0 \end{pmatrix} \quad \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & -1 \end{pmatrix}$$

e $\psi(t) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^4)$ (abbiamo usato $m = 1$, $c = 1$ e $\hbar = 1$). Introducendo $\gamma_j = \beta A_j$ e $\gamma_0 = \beta$ e $\partial_0 = i\partial_t$ (7.3.30) si puo scrivere nella forma manifestamente relativistica

$$\boxed{D\psi := \sum_{\mu=0}^{3} \gamma_\mu \partial_\mu = \psi,} \tag{7.3.31}$$

dove le matrici γ_μ soddisfano

$$\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = \begin{cases} 2 & \text{per} & \mu = \nu = 0 \\ -2 & \text{per} & \mu = \nu = 1, 2, 3 \\ 0 & \text{altrimenti} & \end{cases} .$$

L'equazione di Dirac è un sistema iperbolico ben posto, e si può dimostrare l'invarianza per il gruppo $Spin(3, 1)$ che è un ricoprimento del gruppo di Lorentz $SL(3, 1)$, inoltre $D^2 = \partial_0^2 - \Delta_3$. Esistono anche generalizzazioni ad altre dimensioni e segnature (p.es. euiclidea).