1976 г. январь — февраль *т. XXXI, вып. 1 (187)*
УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

УДК 517.9+517.4

НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТИПА КОРТЕВЕГА — ДЕ ФРИЗА, КОНЕЧНОЗОННЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ И АБЕЛЕВЫ МНОГООБРАЗИЯ

Б. А. Дубровин, В. Б. Матвеев, С. П. Новиков

Основным содержанием обзора является изложение разработанного в самое последнее время метода построения широкого класса периодических и почти-периодических решений нелинейных уравнений математической физики, к которым применим (в быстроубывающем случае) метод обратной задачи рассеяния. Эти решения таковы, что спектр ассоциированных с ними линейных дифференциальных операторов имеет конечнозонную структуру. Множество линейных операторов с данным конечнозонным спектром есть многообразие Якоби римановой поверхности, определяемой структурой спектра. Явное решение соответствующих нелинейных уравнений дается на языке теории абелевых функций.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

В 1967 г. был открыт замечательный механизм, связывающий некоторые важные нелинейные волновые уравнения со спектральной теорией вспомогательных линейных операторов. Такая связь позволяет, в некотором смысле, «проинтегрировать» эти нелинейные уравнения (см. [18]). Первое из таких уравнений — известное уравнение Кортевега — де Фриза (КдФ), сведенное в [18] к обратным задачам теории рассеяния для оператора Шрёдингера $L = -d^2/dx^2 + u(x)$ при решении задачи Коши для КдФ на классе быстроубывающих функций $u(x)$. Этот механизм в дальнейшем был усовершенствован и осмыслен с различных точек зрения П. Д. Лаксом [19], В. Е. Захаровым и Л. Д. Фаддеевым [21], Гарднером [22]; затем были найдены другие важные нелинейные уравнения, к которым аналогичный механизм также может применяться. Первым после КдФ было нелинейное уравнение Шрёдингера (В. Е. Захаров и А. Б. Шабат [25], [26]), затем известное уравнение sin-гордон, цепочка Тода, нелинейное уравнение струны и ряд других см. [23] — [35]; для всех этих уравнений аналог метода Крускала — Гарднера — Грина — Миуры позволяет «проинтегрировать» задачу Коши на быстроубывающих функциях по x с помощью теории рассеяния для вспомогательного линейного оператора. В частности, этот метод позволяет исследовать асимптотику решений по времени и получить некоторые важные частные решения, именуемые «многосолитонными», которые описывают взаимодействие конечного числа «солитонов» (уединенных волн вида $u(x - ct)$).

До конца 1973 г. не было никаких работ, где этот механизм удалось бы использовать для исследования задачи Коши на периодических по x функциях даже для первоначального уравнения КдФ. Это и неудивительно: одна из причин состоит в том, что обратная задача для уравнения Шрёдингера с периодическим потенциалом, по сути дела, не была решена. Отсутствовали какие бы то ни было эффективные методы нахождения потенциала по спектральным данным. (Для почти периодических потенциалов этот вопрос никогда и не ставился.) В последнее время С. П. Новиковым, Б. А. Дубровиным, В. Б. Матвеевым и А. Р. Итсом был опубликован цикл работ (см. [38] — [43], [46], [47]), в которых развивается метод, позволяющий найти широкую совокупность точных решений уравнения КдФ, периодических и почти-периодических по x, естественно обобщающих многосолитонные решения. Довольно ясно, что это множество решений плотно среди периодических функций. Это отмечалось в [42], [43], хотя пока строго не доказано. Метод авторов, изложению которого, в основном, и посвящен этот обзор, потребовал существенного усовершенствования алгебраического механизма, упоминавшегося выше, а также привлечения идей алгебраической геометрии. Этот метод применим не только к уравнению КдФ, но и к другим нелинейным уравнениям этого типа при исследовании периодической задачи, как уже указывалось в работах [42], [43]. Соответствующие видоизменения метода будут указаны в обзоре.

Как выяснилось на Международном конгрессе математиков в Ванкувере, одновременно с первой работой С. П. Новикова [38] появилась работа Лакса [50], которая содержит в качестве главного результата некоторую часть основной теоремы работы С. П. Новикова [38]; доказательство Лакса неэффективно и отличается от метода Новикова (см. § 2 из главы 2, стр. 79). Кроме того, В. А. Марченко выполнил работы [44], [45], в которых он развил метод последовательных приближений к решениям уравнения КдФ, базирующийся на спектральной теории оператора Шрёдингера L. Некоторые из его соображений пересекаются с отдельными техническими соображениями работы [38].

При исследовании периодической и почти-периодической задачи по методу авторов узловую роль играет класс потенциалов $u(x)$, для которых оператор Шрёдингера $L = -d^2/dx^2 + u(x)$ имеет лишь конечное число запрещенных зон (лакун или зон неустойчивости) в спектре на всей прямой по x.

Следует иметь в виду, что физический вывод уравнения КдФ в теории нелинейных волн (см. [16]) таков, что естественная задача Коши для него должна быть поставлена без определенных краевых условий (например, периодических функций с заданным периодом по x недостаточно). Мы должны найти возможно более широкую совокупность решений $u(x, t)$, принадлежащих различным классам ограниченных по x функций. Наиболее естественными такими классами являются, кроме уже упоминавшегося класса быстроубывающих функций, классы периодических функций с произвольными периодами по x, а также классы почти-периодических функций от x с произвольной группой периодов (динамика по t окажется в любом случае почти-периодической апостериори).

Постановка, в которой мы будем решать обратную задачу для оператора Шрёдингера L, автоматически будет давать не только периодические, но и почти-периодические вещественные и комплексные потенциалы и соответствующие решения уравнения КдФ. Наш подход, основанный на рассмотрении конечнозонных потенциалов, тесно связан как с теорией уравнения КдФ, так и с алгебраической геометрией римановых поверхностей и абелевых многообразий (см. главу 2). Этот подход оказывается эффективным и позволяет получить ответ точными аналитическими формулами. Любопытно отметить, что связь с уравнением КдФ дает новые нетривиальные факты в самой теории абелевых многообразий — в частности, позволяет явными формулами вычислить универсальное расслоение якобиевых многообразий гиперэллиптических римановых поверхностей (например, ранее не был известен даже факт, что пространство этого расслоения унирационально).

Интересно отметить, что сами по себе примеры конечнозонных потенциалов (без связи с алгебраической геометрией и теорией КдФ) вызывали и ранее интерес отдельных математиков: впервые в 1940 г. Айнс заметил, что потенциал задачи Ламе, совпадающий с удвоенной эллиптической функцией Вейерштрасса, имеет лишь одну лакуну, а $n(n+1)/2$ — кратные потенциалы Ламе имеют n лакун (см. [7]). В 1961 г. Н. И. Ахиезер [10] начал строить примеры конечнозонных потенциалов на полупрямой $x \geqslant 0$, не зная результата работы Айнса [7]. Он предложил интересный (по сути дела, алгебро-геометрический) метод построения собственных функций, не строя самих этих потенциалов. Сами потенциалы, извлекаемые из построения Н. И. Ахиезера, при аналитическом продолжении по x окажутся четными почти-периодическими функциями x, хотя он и не обращал на это внимания, рассматривая всю задачу лишь на полупрямой и доводя до конца лишь изучение однозонного случая. Развитие идей Н. И. Ахиезера, предпринятое Б. А. Дубровиным [40] и В. Б. Матвеевым и А. Р. Итсом [41], играет большую роль в методе авторов (см. главу 2).

В 1965 г. Хохштадт [9], не зная работы Н. И. Ахиезера [10], поставил и начал решать обратную задачу для конечнозонных периодических потенциалов. Он доказал, что кроме эллиптических функций нет никаких потенциалов с одной лакуной (теорема, при $n = 1$ обратная к теореме Айнса). Для числа лакун $n > 1$ Хохштадт смог доказать лишь, что непрерывный n-лакунный потенциал является бесконечно гладкой функцией. Такова история этого вопроса до работ последнего времени, которые будут освещены в этом обзоре.

Следует особо остановиться на свойствах одномерного уравнения Шрёдингера (Штурма — Лиувилля) с почти-периодическим потенциалом $u(x)$. До появления работы [38] в литературе отсутствовали как серьезные общие результаты по этому вопросу, так и интегрируемые случаи. Дело в том, что матрица трансляции $\hat{T}$, закон дисперсии $p(E)$ и блоховская собственная функция $\psi_\pm$, формально говоря, теряют смысл. Хотя блоховскую собственную функцию $\psi_\pm\,(x,\ x_0, E)$ и можно определить здесь, требуя, чтобы функция

$$\chi(x,\ E) = \frac{d \ln \psi_\pm}{dx}\quad .$$

имела ту же группу периодов, что и потенциал (вместо условия

$$\psi_\pm(x+T) = e^{\pm ip(E)}\,\psi_\pm(x)),$$

но уже не ясно, будет ли она существовать при всех вещественных и комплексных значениях спектрального параметра E, $L\psi_\pm = E\psi_\pm$ (наиболее сильные результаты по этому вопросу получены совсем недавно в [59]); обычный спектр оператора L в $\mathscr{L}_2(-\infty,\ \infty)$ получается, когда $\psi_\pm$ ограничена, но нам она нужна при всех комплексных значениях E. Мы будем изучать класс вещественных и комплексных почти-периодических потенциалов $u(x)$, обладающих, как мы говорим, *правильными аналитическими свойствами*, для которых аналог блоховской собственной функции $\psi_\pm\ (x,\ x_0,\ E)$ существует при всех комплексных E и обладает свойствами (см. главу 2 § 2):

1) $L\psi_\pm = E\psi_\pm$;

2) $\psi_\pm\,(x,\,x_0,\,E)\,|_{x=x_0} \equiv 1$;

3) $\psi_\pm \sim e^{\pm ik\,(x-x_0)}$ при $E \to \infty$, $k^2 = E$;

4) $\psi_\pm = \dfrac{d\ln\psi_\pm}{dx}$ почти-периодична с той же группой периодов, что и потенциал $u(x)$;

5) $\psi_\pm\,(x,\,x_0,\,E)$ мероморфна на римановой поверхности $\mathbf{\Gamma}$, двулистно накрывающей E-плоскость, причем ψ_+ и ψ_- получаются друг из друга перестановкой листов.

При этом разрешается рассматривать и потенциалы с полюсами в некоторых точках; в этом случае, если потенциал неограниченный, мы считаем, что функция $u(x)$ комплексно аналитична (мероморфна) в некоторой полосе $x + iy$ около оси x.

Мы называем потенциал $u(x)$ (или оператор L) *конечнозонным* (конечнолакунным), если риманова поверхность $\mathbf{\Gamma}$ имеет конечный род. Саму риманову поверхность $\mathbf{\Gamma}$ мы будем называть «спектром» оператора L, ее род — числом запрещенных зон (или лакун), а точки ветвления — «краями зон» (лакун), хотя прямая спектральная интерпретация этих понятий имеет место лишь в случае ограниченных вещественных потенциалов $u(x)$.

Естественность рассмотрения условно периодических потенциалов при решении обратных задач теории рассеяния была обнаружена С. П. Новиковым [38], где было доказано, что каждое стационарное периодическое решение $u(x)$ так называемых «высших уравнений КдФ» является конечнозонным потенциалом, и сами эти стационарные уравнения КдФ являются вполне интегрируемыми гамильтоновыми системами с n степенями свободы (n — число зон). Поэтому их общее решение является почти-периодической функцией — возможно, мероморфной. Эти уравнения зависят от $(n+1)$-й константы $c_0,\,\ldots,\,c_n$ и имеют n коммутирующих интегралов $J_1,\,\ldots,\,J_n$, причем симметрические функции от краев запрещенных зон (лакун) выражаются через эти константы и уровни интегралов $(c_0,\,\ldots,\,c_n,\,J_1,\,\ldots,\,J_n)$. Из этого следует важный вывод: *при любом задании краев зон (лакун) мы можем, решая стационарные высшие уравнения КдФ, найти потенциал, но он будет, вообще говоря, почти-периодическим с группой периодов $T_1,\,\ldots,\,T_n$ и, возможно, будет иметь полюсы. Все правые части уравнения КдФ и интегралы J_α полиномиальны, и поэтому естественно также возникают комплексные мероморфные почти-периодические потенциалы $u(x)$.*

Вскоре после выполнения работ Б. А. Дубровина [40] и А. Р. Итса и В. Б. Матвеева [41] С. П. Новиков и Б. А. Дубровин показали [43], что комплексная поверхность уровня интегралов $J_1,\,\ldots,\,J_n$ является абелевым многообразием, явно вложенным в проективное пространство; все потенциалы $u(x)$ обладают правильными аналитическими свойствами и являются почти-периодическими (если x комплексно) с группой из $2n$ «вещественных и мнимых» периодов $T_1,\,\ldots,\,T_n,\,T_1',\,\ldots,\,T_n'$, причем их развитие во времени в силу КдФ и всех его высших аналогов для этих потенциалов дается прямолинейной (комплексной) обмоткой этого абелева многообразия ($2n$-мерного комплексного тора). Само это абелево многообразие носит название «многообразия Якоби» римановой поверхности **Г**.

Эти результаты можно применить также и к самой теории абелевых многообразий (см. главу 2). Существенно отметить, что при решении обратной задачи спектральной теории для оператора Шрёдингера L по методу авторов все использования результатов из теории оператора Шрёдингера с периодическим потенциалом легко элиминируются, и все результаты верны для почти-периодического случая, когда края зон (точки ветвления спектра **Г**) задаются произвольно. Группа периодов потенциала $u(x)$ определяется спектром (римановой поверхностью **Г**); для указания потенциала $u(x)$ нужно задать еще произвольную точку на комплексном торе — многообразии Якоби $\mathbf{J}(\mathbf{\Gamma})$. Для потенциала $u(x)$ даются явные формулы. Имеются формулы разных типов (см. главу 2), по-видимому, наилучшая из них, выражающая потенциал явной простой формулой через θ-функцию Римана, указана В. Б. Матвеевым и А. Р. Итсом (см. [41] и главу 2, § 3). Ряд удобных формул для временной динамики в силу КдФ найден в [46]. Напомним, что в обычной постановке обратной задачи для периодического потенциала в качестве «данных рассеяния» задаются все собственные числа (E_n), где собственные функции периодичны с тем же периодом T, что и потенциал, а также дополнительный спектр задачи Штурма — Лиувилля на полупрямой (см., например, [6]; теоремы единственности здесь доказаны еще Боргом [1]). В такой постановке даже конечнозонные потенциалы не удается выделить каким-либо эффективным образом.

В нашей постановке (например, для конечнозонного случая) задаются произвольно края зон, затем явным образом отыскиваются все потенциалы с этим спектром, которые имеют общую группу периодов и образуют многообразие Якоби $\mathbf{J}(\mathbf{\Gamma})$. Если точки ветвления (края зон) все вещественны и полюсы функции $\psi_\pm(x, x_0, E)$ лежат в точках «спектра» **Г** над конечными лакунами, то получится семейство ограниченных почти-периодических вещественных потенциалов, образующее вещественный тор T^n, на котором высшие уравнения типа КдФ образуют прямолинейные обмотки в соответствующих «угловых» переменных (см. [46]).

Если даже потенциал $u(x)$ получится вещественным и периодическим по x, то при продолжении в комплексную область по x он станет условно периодическим по мнимой оси, вообще говоря, с группой из n мнимых периодов $T'_1, \ldots, T'_n$. Исключением являются лишь случаи, когда потенциал сводится к эллиптическим функциям. Такие потенциалы указаны, например, в главе 2 и в [42]. Простейшим из них является потенциал Ламе.

Не представляет труда указать «замыкание» наших формулировок, когда число зон стремится к бесконечности. Однако здесь уже соответствующие теоремы превратятся скорее в «теоремы существования и единственности» и потеряют аналитическую эффективность. Пока строго не доказано также, что любой (периодический) потенциал аппроксимируется конечнозонными.

В главе 3 приведены обобщения наших теорем на некоторые другие нелинейные уравнения. С точки зрения алгебраической геометрии, как указал авторам А. Н. Тюрин, может представить особый интерес перенесение теории на случай матричных ($n \times n$) операторов первого порядка при $n > 2$, где появляются негиперэллиптические римановы поверхности. Если в периодической теории операторов Захарова — Шабата (см. § 2 главы 3) могу действительно появиться в качестве «спектра» конечнозонного линейного оператора любые римановы поверхности, то отсюда будет следовать доказательство известной гипотезы, что пространство модулей римановых поверхностей любого рода унирационально. Действительно, по схеме работы [43] (см. § 3 главы 2) мы можем показать, что пространство универсального расслоения якобиевых многообразий унирационально. Но тогда и база (т. е. многообразие модулей самих кривых) тоже унирациональна. Однако пока не выяснен вопрос, все ли римановы поверхности $\mathbf{\Gamma}$ могут таким образом появиться.

Таким образом, в естественно возникающих вполне интегрируемых по Лиувиллю гамильтоновых системах, связанных с теорией рассеяния для вспомогательного локального оператора L, поверхности уровня коммутирующих интегралов оказываются не просто вещественными торами T^n, но, при продолжении в комплексную область, абелевыми многообразиями T^{2n}, являющимися многообразиями Якоби $\mathbf{J}(\mathbf{\Gamma})$ римановых поверхностей, возникающих как спектр оператора L. Интересно, могут ли возникать естественные классы вполне интегрируемых систем, где аналогичным образом возникнут абелевы многообразия, не являющиеся многообразиями Якоби никаких римановых поверхностей?

Кстати, в виде заключительного замечания укажем, что в классических нетривиальных интегрируемых случаях Якоби (геодезические на 3-осном эллипсоиде) и Ковалевской (специальный случай тяжелого волчка) в виде поверхностей уровня коммутирующих интегралов также возникали абелевы многообразия: прямое произведение одномерных для случая Якоби и нетривиальные двумерные абелевы многообразия для случая Ковалевской (это можно угадать из формул, указанных, например, в [57], хотя явно такое утверждение нигде не сформулировано). Приведем здесь выдержку из письма, написанного С. В. Ковалевской в декабре 1886 г.

«Он (Пикар) отнесся с большим недоверием, когда я ему сказала, что функции вида

$$y = \frac{\theta(cx + a,\ c_1x + a_1)}{\theta_1(cx + a,\ c_1x + a_1)}$$

могут быть полезны при интегрировании некоторых дифференциальных уравнений» (цитировано по книге [57]). Анализ, проделанный авторами, показал, что 90 лет, прошедших после работ С. В. Ковалевской и до работ 1974 г. по теории уравнения КдФ, недоверие Пикара оправдывалось.

Настоящий обзор состоит из трех глав и приложений. Первая глава представляет собой краткий обзор нелинейных уравнений, интегрируемых методом обратной задачи рассеяния, известных до конца 1974 г. Вторая и третья главы, а также приложения содержат изложение результатов авторов, А. Р. Итса и И. М. Кричевера.

ГЛАВА 1

ПРИМЕРЫ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ, ДОПУСКАЮЩИХ КОММУТАЦИОННОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ. МЕТОДЫ ИХ ОТЫСКАНИЯ

§ 1. Уравнение КдФ и его высшие аналоги

Как указал Лакс в 1968 г. (см. [19]), метод Крускала — Гарднера — Грина — Миуры [18] интегрирования задачи Коши на быстроубывающих по x функциях для уравнения КдФ $u_t = 6uu_x - u_{xxx}$ сведением к обратной задаче рассеяния для оператора Шрёдингера может быть извлечен из операторного представления этого уравнения

$$(1.1.1) \qquad \frac{dL}{dt}=[A,\ L],$$

где $L = -\frac{d^2}{dx^2} + u(x,\ t)$, $A = -4\frac{d^3}{dx^3} + 3\left(u\frac{d}{dx}+\frac{d}{dx}u\right)$. Операторы L и A действуют на функции от x, причем оператор dL/dt есть оператор умножения на функцию u_t, а оператор $[A,\ L]$ есть оператор умножения на функцию $6uu_x - u_{xxx}$. Из уравнения (1.1.1) следует, что дискретный спектр $\lambda_i(L)$ не меняется во времени. Это верно как для быстроубывающих по x функций $u(x,\ t)$, так и для периодических, хотя в последнем случае это дает набор интегралов, эквивалентных интегралам Крускала — Забусского [17]. Лаксом и Гарднером (см. [19], [22]) была указана серия эволюционных уравнений вида

$$(1.1.2) \qquad u_t=Q_n\left(u,\ \frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ \ldots,\ \frac{\partial^{2n+1}u}{\partial x^{2n+1}}\right),$$

допускающих аналогичное представление

$$(1.1.1') \qquad \frac{dL}{dt}=[A_n,\ L],$$

где $A_n=\frac{d^{2n+1}}{dx^{2n+1}}+\sum\limits_{i=0}^{2n}P_i\frac{d^i}{dx^i}$, P_i и Q_n — полиномы от $u,\ u_x,\ u_{xx},\ \ldots$ с постоянными коэффициентами, L — оператор Шрёдингера $L=-\frac{d^2}{dx^2}+u(x,\ t)$,

$A_0=\frac{d}{dx}$, $A_1=A$,

$$A_2=16\frac{d^5}{dx^5}-20\left(u\frac{d^3}{dx^3}+\frac{d^3}{dx^3}u\right)+30u\frac{d}{dx}u+5\left(u''\frac{d}{dx}+\frac{d}{dx}u''\right).$$

Все эти уравнения называются «высшими КдФ» и имеют вид $Q_n=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\delta I_n}{\delta u(x)}$, где $I_{n-1}=\int\chi_{2n+1}(u,\ u_x,\ \ldots,\ u^{(n-1)})\,dx$, χ_{2n+1} — полиномы, которые будут указаны ниже; например,

$$(1.1.3) \qquad \begin{cases} I_{-1}=\int u\,dx, \quad I_0=\int u^2\,dx, \quad I_1=\int\left(\frac{u_x^2}{2}+u^3\right)dx, \\ I_2=\int\left(\frac{1}{2}u_{xx}^2-\frac{5}{2}u^2u_{xx}+\frac{5}{2}u^4\right)dx. \end{cases}$$

Как показано впервые в работе [17], величины I_n сохраняются во времени в силу уравнения КдФ. Из представления $Q_n=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\delta I_n}{\delta u(x)}$ вытекает, как отметил Гарднер, что все «высшие КдФ» — гамильтоновы системы с бесконечным числом степеней свободы, так как $\frac{\partial}{\partial x}$ — это кососимметрический оператор. Л. Д. Фаддеев и В. Е. Захаров [21] показали, что все уравнения КдФ — вполне интегрируемые гамильтоновы системы, где данные рассеяния оператора L (см. § 1 главы 2) являются каноническими переменными «действие — угол», а собственные числа дискретного спектра $\lambda_i(L)$ — коммутативны (имеют нулевую скобку Пуассона). Из этого следует, что интегралы I_n также коммутативны. Последний факт независимо доказан Гарднером [22] иным методом. Алгоритм отыскания интегралов I_n таков (впервые эти интегралы найдены в 1965 г.). Пусть $L\psi = E\psi$ и $i\chi(x, k) = \frac{d \ln \psi}{dx}$, $k^2 = E$. Тогда величина χ удовлетворяет уравнению Риккати

$$-i\chi' + \chi^2 + u - E = 0 \tag{1.1.4}$$

и допускает в силу (1.1.4) формальное разложение при $E \to \infty$:

$$\chi(x, k) \sim k + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_n(x)}{(2k)^n}, \qquad k^2 = E. \tag{1.1.5}$$

Все полиномы $\chi_{2n}(x)$ являются чисто мнимыми и при этом полными производными, а полиномы $\chi_{2n+1}(x)$ — вещественными, зависящими от u, u_x, u_{xx}, ..., $u^{(n-1)}$. Интеграл $I_k = \int_{-\infty}^{\infty} \chi(x, k)dx$ при всех k не меняется во времени в силу всех «высших КдФ», поэтому все величины I_n также сохраняются. Данные рассеяния, а также метод интегрирования периодической задачи мы изложим позднее (см. главу 2). Известно, что модифицированное уравнение КдФ $u_t = 6 \mid u \mid^2 u_x - u_{xxx}$ сводится к КдФ и поэтому также является вполне интегрируемым.

§ 2. Нелинейное уравнение струны и двумерное уравнение КдФ

Наиболее близкими к КдФ с современной точки зрения являются уравнения нелинейной струны (см. [23])

$$\frac{3}{4}\beta\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial w}{\partial x}, \qquad \beta\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{1}{4}(6uu_x + u_{xxx}) + \lambda u_x \tag{1.2.1}$$

и «двумерное уравнение КдФ» (см. [24], [37])

$$\begin{cases} \frac{3}{4}\beta\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial w}{\partial x}, \\ \beta\frac{\partial w}{\partial y} = \alpha\frac{\partial u}{\partial t} + \lambda u_x + \frac{1}{4}(6uu_x + u_{xxx}), \end{cases} \tag{1.2.2}$$

исследовавшееся ранее при изучении поперечных возмущений длинных волн в нелинейных средах с дисперсией. Здесь операторы L и A имеют вид

$$L = \frac{d^2}{dx^2} + u, \qquad A = 4\frac{d^3}{dx^3} + 3\left(u\frac{d}{dx} + \frac{d}{dx}u\right) + \lambda\frac{d}{dx} + w.$$

Уравнение (1.2.1) эквивалентно следующему:

$$\beta\frac{\partial A}{\partial y}=[L,\ A]. \tag{1.2.3}$$

а уравнение (1.2.2) эквивалентно соотношению

$$\beta\frac{\partial A}{\partial y}+\alpha\frac{\partial L}{\partial t}=[L,\ A]. \tag{1.2.4}$$

По сути дела, в уравнениях (1.2.1) и (1.2.3) операторы L и A поменялись ролями по сравнению с КдФ, а двумерное уравнение КдФ ((1.2.2) и (1.2.4)) объединяет их вместе.

§ 3. Нелинейное уравнение Шрёдингера

Это уравнение имеет вид

$$\alpha\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\pm|u|^2u \tag{1.3.1}$$

и является первым после КдФ, для которого В. Е. Захаровым и А. Б. Шабатом в 1970 г. был открыт механизм сведения к задаче рассеяния для вспомогательного линейного оператора, уже не являющегося оператором Шрёдингера (см. [25], [26]). Здесь операторы L и A имеют вид

$$L=I\frac{d}{dx}+\begin{pmatrix}0 & u\\ v & 0\end{pmatrix}(l_1-l_2),\qquad I=\begin{pmatrix}l_1 & 0\\ 0 & l_2\end{pmatrix},$$

$$A=\frac{d^2}{dx^2}+2\begin{pmatrix}0 & u_x\\ v_x & 0\end{pmatrix}.$$

Если $u=\overline{v}$, то уравнение

$$\alpha\frac{dL}{dt}=[A,\ L] \tag{1.3.2}$$

эквивалентно уравнению (1.3.1):

$$-\alpha\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{l_1+l_2}{l_2-l_1}u_{xx}-2\frac{l_1+l_2}{l_1l_2}|u|^2u$$

при соответствующем подборе констант l_1, l_2. Интегрирование уравнения (1.3.1) на быстроубывающих функциях можно найти в ([25], [26]).

§ 4. Матричные операторы первого порядка

Пусть операторы L и A — матричные, первого порядка по x. Будем искать их в виде

$$L=l_1\frac{d}{dx}+[l_1,\ \xi],\qquad A=l_2\frac{d}{dx}+[l_2,\ \xi], \tag{1.4.1}$$

где $[l_1,\ l_2]=0$, l_1, l_2 — постоянные матрицы порядка $N\times N$, $\xi=(\xi_{ij})$. Матрицы l_1, l_2 можно считать диагональными, $l_1=a_i\delta_{ij}$, $l_2=b_i\delta_{ij}$. Уравнение

$$\alpha\frac{\partial L}{\partial t}+\beta\frac{\partial A}{\partial y}=[L,\ A]$$

легко приводится к виду

$$(a_i-a_j)\frac{\partial\xi_{ij}}{\partial t}=(b_i-b_j)\frac{\partial\xi_{ij}}{\partial y}+\ldots \tag{1.4.2}$$

В ряде случаев, накладывая на матрицу ξ_{ij} ограничения типа $\xi^+ = I\xi I$, где $I^2 = 1$, систему (1.4.2) можно свести к системе с меньшим числом неизвестных. Такие важные случаи при $N = 3$ впервые указаны в [27], $I = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$ или $I = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & -1 & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$. Общий метод получения этих систем развит в [37].

Весьма интересен вырожденный случай, когда некоторые из компонент матриц l_1, l_2 обращаются в нуль: $a_i = b_i = 0$. Для матриц четвертого порядка здесь имеется система, когда соответствующее нелинейное уравнение сводится к известному уравнению «sin-гордон» (см. [30]):

$$u_{tt} - u_{xx} = \sin u. \tag{1.4.3}$$

Вследствие указанного выше вырождения $a_i = b_i$ спектральная задача для соответствующего оператора L оказывается нетривиальной; соответствующие трудности преодолены в работе [30]. Более простым является вариант уравнения «sin-гордон»:

$$u_{\xi\eta} = -\sin u, \tag{1.4.4}$$

где начальные данные ставятся на одной характеристике. Этот случай проще. Он был ранее исследован в работах [29], [28]. Спектральная задача здесь не имеет вырождений, и операторы L, A для уравнения (1.4.4) имеют вид

$$L = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{d}{dx} + \frac{i}{2} u_\xi \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.4.5}$$

$$A\psi(x) = -\frac{1}{4} \int_{-\infty}^{x} \begin{pmatrix} \exp\left(-\frac{i}{2}(u(x,\ t) + u(x',\ t))\right) & 0 \\ 0 & \exp\left(\frac{i}{2}(u(x,\ t) + u(x',\ t))\right) \end{pmatrix} \psi(x')\, dx'.$$

§ 5. Дискретные системы. Цепочка Тода «и разностное уравнение КдФ».

Рассмотрим цепочку из частиц на прямой с координатами x_n и гамильтонианом взаимодействия $H = \sum\limits_n \left(e^{x_n - x_{n-1}} + \frac{\dot{x}_n^2}{2} \right)$, впервые рассмотренную в [31]. Найденные Хеноном в [32] интегралы для цепочки Тода явно указывали на ее интегрируемость. В работах [33]—[35] была найдена $L - A$ пара для этой цепочки и доказана коммутативность ранее найденных Хеноном интегралов. Для «быстроубывающего» случая, где $c_n \to 1$, $v_n \to 0$ ($c_n = e^{x_n - x_{n-1}}$, $v_n = \dot{x}_n$), цепочка Тода была проинтегрирована методом теории рассеяния. Уравнения здесь имеют вид

$$\dot{v}_n = c_{n+1} - c_n, \qquad \dot{c}_n = c_n(v_n - v_{n-1}), \tag{1.5.1}$$

а операторы L и A таковы:

$$
(1.5.2)\qquad \begin{cases} L_{mn} = i\sqrt{c_n}\,\delta_{n,\,m+1} - i\sqrt{c_m}\,\delta_{n+1,\,m} + v_n\delta_{mn}, \\ A_{mn} = \frac{i}{2}\left(\sqrt{c_n}\,\delta_{n,\,m+1} + \sqrt{c_m}\,\delta_{n+1,\,m}\right). \end{cases}
$$

Уравнение (1.5.1) эквивалентно уравнению $dL/dt = [A,\ L]$.

Кроме цепочки Тода (1.5.1) в работе [35] рассмотрено еще «разностное уравнение КдФ»

$$
(1.5.3)\qquad \dot{c}_n = c_n(c_{n+1} - c_{n-1}),
$$

которое может быть получено из $L - A$ пары (1.5.2) с тем же оператором L при условии $v_n \equiv 0$ и новым оператором $A \to \bar{A}$, где

$$
(1.5.4)\qquad \bar{A} = -\frac{1}{2}\left(\sqrt{c_n c_{n-1}}\,\delta_{n,\,m+2} - \sqrt{c_m c_{m-1}}\,\delta_{n+2,\,m}\right);
$$

тогда (1.5.3) эквивалентно уравнению $dL/dt = [\bar{A},\ L]$, $v_n \equiv 0$. Сам оператор L, заданный формулой (1.5.2), есть разностный аналог оператора Штурма — Лиувилля и рассматривался ранее с другими целями [12], где для него была решена обратная задача на полупрямой $n \geqslant 0$.

§ 6. Метод Захарова и Шабата построения нелинейных уравнений, обладающих L—A-парой

Пусть $\hat{F}$ — линейный интегральный оператор, действующий на вектор-функции $(\psi_1, \ldots, \psi_N) = \psi$ от переменной x $(-\infty < x < \infty)$:

$$
(1.6.1)\qquad \hat{F}\psi = \int_{-\infty}^{\infty} F(x,\ z)\,\psi(z)\,dz,
$$

где ψ и $\hat{F}$ зависят еще от двух параметров t, y. Предположим, что оператор $\hat{F}$ допускает такое представление:

$$
(1.6.2)\qquad 1 + \hat{F} = (1 + K_+)^{-1}(1 + K_-),
$$

где K_+, K_- — вольтерровы интегральные операторы, где

$$
(1.6.3)\qquad \begin{cases} K_+(x,\ z) = 0, & z < x, \\ K_-(x,\ z) = 0, & z > x. \end{cases}
$$

Из соотношений (1.6.1) и (1.6.2) вытекает уравнение (Гельфанда — Левитана) для ядра K_+:

$$
(1.6.4)\qquad F(x,\ z) + K_+(x,\ z) + \int_x^{\infty} K_+(x,\ s)\,F(s,\ z)\,ds = 0,
$$

а ядро K_- находится по формуле

$$
K_-(x,\ z) = F(x,\ z) + \int_x^{\infty} K_+(x,\ s)\,F(s,\ z)\,ds.
$$

Рассмотрим оператор $M_0 = \alpha\frac{\partial}{\partial t} + \beta\frac{\partial}{\partial y} + L_0$, действующий на $\psi(t,\ y,\ x)$, где $L_0 = \sum\limits_n l_n\,\partial^n/\partial x^n$, l_n — постоянные матрицы $N \times N$. По аналогии с теорией обратных задач рассеяния можно установить такой факт: если операторы M_0 и $\hat{F}$ коммутируют $[M_0, \hat{F}] = 0$, то преобразованный оператор $M = (1 + K_+)M_0(1 + K_+)^{-1}$ снова является дифференциальным оператором уже с переменными коэффициентами

$$M = (1 + K_+) M_0 (1 + K_+)^{-1} = \alpha \frac{\partial}{\partial t} + \beta \frac{\partial}{\partial y} + L, \tag{1.6.5}$$

где L — оператор, содержащий дифференцирования лишь по x. В самой теории рассеяния для оператора Шрёдингера этот факт был известен и использовался для оператора $L_0 = \frac{d^2}{dx^2}$.

Предположим теперь, что заданы два оператора $M_0^{(1)}$, $M_0^{(2)}$ такие, что

$$\begin{cases} M_0^{(1)} = \alpha \frac{\partial}{\partial t} + L_0^{(1)}, & L_0^{(1)} = \sum l_n^{(1)} \frac{\partial^n}{\partial x^n}, \\ M_0^{(2)} = \beta \frac{\partial}{\partial y} + L_0^{(2)}, & L_0^{(2)} = \sum l_n^{(2)} \frac{\partial^n}{\partial x^n} \end{cases} \tag{1.6.6}$$

и $[M_0^{(1)}, M_0^{(2)}] = 0$.

Если оператор $\hat{F}$ коммутирует с обоими $[\hat{F}, M_0^{(1)}] = [\hat{F}, M_0^{(2)}] = 0$, то мы получим дифференциальные операторы

$$\begin{cases} M^{(1)} = (1 + K_+) M_0^{(1)} (1 + K_+)^{-1} = \alpha \frac{\partial}{\partial t} + L^{(1)}, \\ M^{(2)} = (1 + K_+) M_0^{(2)} (1 + K_+)^{-1} = \beta \frac{\partial}{\partial y} + L^{(2)}, \\ [M^{(1)}, M^{(2)}] = 0. \end{cases} \tag{1.6.7}$$

Из соотношений (1.6.7) вытекает уравнение на операторы $L^{(1)}$, $L^{(2)}$:

$$\alpha \frac{\partial L^{(2)}}{\partial t} - \beta \frac{\partial L^{(1)}}{\partial y} = [L^{(2)}, L^{(1)}], \tag{1.6.8}$$

равносильное системе нелинейных уравнений на коэффициенты операторов $L^{(1)}$, $L^{(2)}$. При этом ядро $F(x, z, t, y)$ оператора $\hat{F}$ удовлетворяет системе линейных уравнений с постоянными коэффициентами, вытекающих из тождеств

$$[\hat{F}, M_0^{(1)}] = [\hat{F}, M_0^{(2)}] = 0. \tag{1.6.9}$$

Мы можем легко решить задачу Коши по времени t для уравнений (1.6.9) обычным образом и затем, решая уравнение Гельфанда — Левитана (1.6.4), определить коэффициенты операторов $L^{(1)}$, $L^{(2)}$ в любой момент времени t. Эта процедура может, в принципе, дать интегрирование задачи Коши для уравнения (1.6.8) лишь для быстроубывающих по x функций — коэффициентов операторов $L^{(1)}$, $L^{(2)}$. Отметим, что метод Захарова — Шабата дает возможность построить ряд новых систем с L — A-парой, среди которых бывают физически интересные (см. [37]); этот метод строит системы вместе с предъявлением метода решения обратной задачи — уравнения Гельфанда — Левитана. Некоторые из приведенных выше примеров L — A-пар были найдены впервые таким способом.

ГЛАВА 2
ОПЕРАТОР ШРЁДИНГЕРА И УРАВНЕНИЕ КдФ. КОНЕЧНОЗОННЫЕ ПОТЕНЦИАЛЫ

§ 1. Общие свойства оператора Шрёдингера с периодическим и быстроубывающим потенциалом

Мы рассмотрим первоначально с нужной нам точки зрения обычный оператор Шрёдингера $L=-\frac{d^2}{dx^2}+u$. Удобно фиксировать какой-либо базис в пространстве решений уравнения $L\varphi=E\varphi$. Пусть задана точка x_0. Определим решение $\varphi(x, x_0, \pm k)$, полагая

$$\text{(2.1.1)}\qquad \begin{cases} \text{a)}\quad L\varphi(x, x_0, k)=k^2\varphi(x, x_0, k), \\ \text{b)}\quad \varphi(x_0, x_0, k)=1, \\ \text{c)}\quad \varphi'(x, x_0, k)=ik \text{ при } x=x_0\ (k^2=E). \end{cases}$$

Тогда мы получим базис $\varphi(k)$, $\varphi(-k)$ при всех $k\neq 0$; при вещественных k (или $E>0$) мы имеем $\varphi(-k)=\overline{\varphi(k)}$.

Другой базис $c(x, x_0, E)$, $s(x, x_0, E)$ мы получим следующим образом:

$$\text{(2.1.2)}\qquad \begin{cases} c=1, & c'=0, \\ s=0, & s'=1 \end{cases} \quad \text{при } x=x_0.$$

Если потенциал $u(x)$ периодичен с периодом T, то определен оператор трансляции («монодромии»)

$$\text{(2.1.3)}\qquad (\hat{T}\psi)(x)=\psi(x+T).$$

Оператор трансляции в базисах (2.1.1) и (2.1.2) станет матрицей второго порядка

$$\text{(2.1.4)}\qquad \begin{cases} \hat{T}\varphi=a\varphi+b\bar{\varphi}, & \hat{T}\bar{\varphi}=\bar{b}\varphi+\bar{a}\bar{\varphi}, \\ \hat{T}c=\alpha_{11}c+\alpha_{12}s, & \hat{T}s=\alpha_{21}c+\alpha_{22}s. \end{cases}$$

Из сохранения вронскиана следует $\det\hat{T}=1$, или $|a|^2-|b|^2=1$ при вещественных k, $\alpha_{11}\alpha_{22}-\alpha_{21}\alpha_{12}=1$ при всех E. Матрица $\hat{T}$ зависит от x_0 и E (или k). В базисе (2.1.2) матрица $\hat{T}$ является целой функцией от E. При изменении параметра x_0 матрица $\hat{T}(x_0, k)$ меняется, оставаясь подобной. Поэтому для зависимости от x_0 имеется весьма полезное для наших целей уравнение вида

$$\text{(2.1.5)}\qquad \frac{d\hat{T}}{dx_0}=[Q, \hat{T}],$$

где матрица Q легко вычисляется и в базисах (2.1.1), (2.1.2) имеет вид

$$Q=ik\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}-\frac{iu}{2k}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix} \qquad (\text{базис } (2.1.1)),$$

$$Q=\begin{pmatrix}0 & E-u\\ -1 & 0\end{pmatrix} \qquad (\text{базис } (2.1.2)).$$

Собственные функции («блоховские») выделяются требованиями

$$\text{(2.1.6)}\qquad \hat{T}\psi_\pm=e^{\pm ip(E)}\psi_\pm,$$

где $p(E)$ называется *квазиимпульсом*. Для оператора Шрёдингера удобно нормировать их при $x = x_0$, полагая

(2.1.7) $$\psi_\pm(x,\ x_0,\ E) = 1 \quad \text{при} \quad x = x_0.$$

Если потенциал $u(x)$ действительный, то определяются разрешенные зоны (точки спектра), где $p(E)$ — действительна и функция $\psi_\pm$ почти-периодична. Дополнения к разрешенным зонам называются запрещенными зонами, лакунами или зонами неустойчивости. Как правило, у типичного потенциала имеется бесконечное число лакун, длины которых быстро убывают при $E \to \infty$. Скорость убывания зависит от гладкости потенциала. Если потенциал аналитический, то скорость убывания длин лакун экспоненциальна.

Собственные числа матрицы трансляции $\hat{T}$ не зависят от базиса и от точки x_0; они определяют квазиимпульс $p(E)$ и границы разрешенных и и запрещенных зон. След матрицы $\hat{T}$ имеет вид

$$\operatorname{Sp}\hat{T} = a + \bar{a} = 2a_{\mathrm{Re}} \qquad (\text{базис } (2.1.1)),$$

$$\operatorname{Sp}\hat{T} = \alpha_{11} + \alpha_{22} = 2a_{\mathrm{Re}} \qquad (\text{базис } (2.1.2)),$$

и собственные числа $\mu_\pm = e^{\pm ip(E)}$ таковы:

(2.1.8) $$\begin{cases} \mu_\pm(E) = a_{\mathrm{Re}} \pm i\sqrt{1 - a_{\mathrm{Re}}^2}, \\ a_{\mathrm{Re}} = \cos p(E) = \frac{1}{2}\operatorname{Sp}\hat{T}. \end{cases}$$

Из (2.1.8), очевидно, следует, что периодические уровни $\psi_n(x+T) = \psi_n(x)$, $E = E_n$ задаются уравнением

(2.1.9) $$\frac{1}{2}\operatorname{Sp}\hat{T} = a_{\mathrm{Re}} = 1.$$

Антипериодические уровни $\psi_m(x + T) = -\psi_m(x)$ задаются уравнением

(2.1.9′) $$\frac{1}{2}\operatorname{Sp}\hat{T} = a_{\mathrm{Re}} = -1.$$

Периодические и антипериодические уровни могут быть простыми (однократными) или двукратно вырожденными. В обоих случаях мы имеем $\mu_\pm(E) = \pm 1$, но в вырожденном случае матрица $\hat{T}$ диагональна

(2.1.10) $$\hat{T} = \pm\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{или} \quad b(E_n,\ x_0) \equiv 0, \qquad \alpha_{21}(E_n,\ x_0) \equiv 0.$$

В невырожденном случае матрица $\hat{T}$ жорданова и $|\, b(E_n,\ x_0)\,| \neq 0$, $\alpha_{21} \neq 0$. Из условия $|\,a\,|^2 - |\,b\,|^2 = 1$ мы имеем при $E = E_n$

(2.1.10′) $$|a_{\mathrm{Re}}| = 1, \quad |a_{\mathrm{Im}}| = |b|, \quad E = E_n,$$

где $|\,b\,| \neq 0$. Как известно, границами запрещенных и разрешенных зон являются в точности невырожденные периодические и антипериодические уровни, где $|\,b\,| \neq 0$, $\alpha_{21} \neq 0$. Вырожденные уровни представляют собой стянувшуюся к точке запрещенную зону. Например, если увеличить период в целое число раз $T \to mT$, то мы получим

(2.1.11) $$\hat{T} \to \hat{T}^m, \qquad e^{ip(E)} \to e^{imp(E)}.$$

Преобразование (2.1.11) сохраняет разрешенные и запрещенные зоны, но внутри разрешенных зон появятся новые вырожденные уровни, где $mp(E)$ является целым кратным 2π.

Как известно, функция $1-\frac{1}{2}\operatorname{Sp}\hat{T}$ является целой функцией порядка 1/2 от переменной E, нули которой в силу (2.1.9) точно определяют все периодические уровни E_n. Поэтому функция $1-\frac{1}{2}\operatorname{Sp}\hat{T}$ может быть представлена как бесконечное произведение, полностью определяемое нулями. Поэтому в силу (2.1.9′) антипериодические уровни определяются полной совокупностью периодических (включая вырожденные). Однако мы будем пользоваться в качестве основных параметров лишь границами зон — или невырожденной частью периодических и антипериодических уровней (т. е. спектром оператора L на всей оси).

Чрезвычайно важным для нас обстоятельством является следующее несложное утверждение.

Лемма. *Блоховская собственная функция* $\psi_{\pm}(x,\ x_0,\ E)$, *определенная условиями* (2.1.6) *и* (2.1.7) *при любом* (*комплексном и вещественном*) *гладком периодическом потенциале* $u(x)$, *мероморфна на римановой поверхности* $\mathbf{\Gamma}$, *двулистно накрывающей* E-*плоскость и имеющей точки ветвления* (*для вещественного потенциала*) *в концах зон. Вообще говоря, эта риманова поверхность имеет бесконечный род*; *однако, если число лакун конечно* (*этот случай особенно важен для теории уравнения КдФ*), *то риманова поверхность* $\mathbf{\Gamma}$ *гиперэллиптична и имеет конечный род, равный числу лакун.*

Из этого утверждения естественно вытекает

Определение 1. Периодический потенциал $u(x)$ называется *конечнозонным*, если собственная функция $\psi_{\pm}(x,\ x_0,\ E)$, определенная условиями (2.1.6) и (2.1.7), мероморфна на гиперэллиптической римановой поверхности $\mathbf{\Gamma}$ конечного рода; точки ветвления римановой поверхности называются «концами зон».

Для дальнейших целей нам будет также необходимо следующее

Определение 1′. Почти-периодический (вещественный или комплексный) потенциал $u(x)$ называется *конечнозонным*, если он обладает при всех E собственной функцией $\psi(x,\ E)$, мероморфной на гиперэллиптической римановой поверхности $\mathbf{\Gamma}$ конечного рода, двулистно накрывающей E-плоскость, где требование (2.1.6) заменено на такое: логарифмическая производная $\frac{d\ln\psi}{dx}$ является почти-периодической функцией с той же группой периодов, что и потенциал $u(x)$.

Требуется также, чтобы при $E\to\infty$ функция $\psi(x,\ E)$ имела асимптотику $\psi\sim\exp\{\pm ik(x-x_0)\}$, $k^2=E$. Тогда мы обозначим ψ через $\psi(x,\ x_0,\ E)$, где $\psi\,|_{x=x_0}=1$, как и в периодическом случае. Логарифмическая производная $i\chi(x,\ E)=\frac{d\ln\psi}{dx}$ не зависит от x_0 и является величиной, очень важной в теории оператора $L=-\frac{d^2}{dx^2}+u$ и в теории уравнения КдФ, как уже указывалось в § 1 главы 1. Она удовлетворяет уравнению Риккати (1.1.4). Если потенциал действительный и в разрешенных зонах по E мы положим $\chi=\chi_{\mathrm{Re}}+i\chi_{\mathrm{Im}}$, то из уравнения Риккати вытекает соотношение

$$\chi_{\mathrm{Im}}=\frac{1}{2}(\ln\chi_{\mathrm{Re}})'. \tag{2.1.12}$$

В разрешенных зонах для вронскиана W блоховских функций имеет место равенство

$$W(\psi, \bar{\psi}) = W(\psi_+, \psi_-) = 2i\chi_{\mathrm{Re}}(x_0, E). \tag{2.1.13}$$

В силу (2.1.13) определяется функция при всех E, равная $\chi_R = \frac{1}{2i} W(\psi_+, \psi_-) = \frac{1}{2i}(\psi'_+\psi_- - \psi_+\psi'_-)$, которая служит аналогом χ_{Re} для комплексных потенциалов. Эту функцию мы и будем обозначать χ_R всегда. По определению, мы имеем из (2.1.12)

$$\psi_\pm(x, x_0, E) = \sqrt{\frac{\chi_R(x_0, E)}{\chi_R(x, E)}} \exp\left\{\pm i \int_{x_0}^{x} \chi_R(x, E)\, dx\right\}, \tag{2.1.14}$$

откуда следует, по определению квазиимпульса, что

$$p(E) = \int_{x_0}^{x_0+T} \chi_R(x, E)\, dx. \tag{2.1.15}$$

Так как $\cos p(E) = \frac{1}{2}\operatorname{Sp}\hat{T}$ в силу (2.1.8), а функция $1 - \frac{1}{2}\operatorname{Sp}\hat{T}$ полностью определяется, например, периодическим спектром как бесконечное произведение, то интеграл $\int_{x_0}^{x_0+T} \chi_R(x, k)dx = \int_{x_0}^{x_0+T} \chi(x, k)dx$ и все его коэффициенты разложения по $\frac{1}{\sqrt{E}} = \frac{1}{k}$ при $E \to \infty$ (см. (2.1.18) и далее) выражаются через спектр периодической задачи (включая вырожденные уровни). Эти выражения называются «тождествами следов». В дальнейшем будет видно, что все эти величины можно выразить лишь через границы зон.

Функцию $\psi(x, x_0, E)$ удобно выразить в базисе (2.1.2)

$$\psi(x, x_0, E) = c(x, x_0, E) + i\alpha(x_0, E)s(x, x_0, E). \tag{2.1.16}$$

Вычисляя вронскиан $W(\psi, c)$, мы получаем

$$\alpha(x_0, E) = \chi(x_0, E). \tag{2.1.16$'$}$$

Для $p(E)$ можно получить важные общие соотношения при изменении потенциала

$$\frac{dp(E)}{dE} = \int_{x_0}^{x_0+T} \frac{dx}{2\chi_R(x, E)}, \quad \frac{\delta p(E)}{\delta u(x)} = -\frac{1}{2\chi_R(x, E)}, \tag{2.1.17}$$

где $\delta p/\delta u$ — вариационная производная. Доказательство этих соотношений можно найти в [40], [46].

При $|E| \to \infty$ $\chi(x, E)$ допускает асимптотическое разложение

$$\chi(x, E) \sim k + \sum_{n \geq 1} \frac{\chi_n(x)}{(2k)^n}, \tag{2.1.18}$$

где коэффициенты разложения $\chi_n(x)$ находятся рекуррентными формулами в силу уравнения Риккати (1.1.4) и являются полиномами от $u, u', u'', \ldots$ Все полиномы $\chi_{2n}(x)$ чисто мнимы и в силу (2.1.12) являются полными производными. Поэтому их интегралы по периоду равны нулю. Список первых полиномов $\chi_{2n+1}(x)$ приведен в § 1 главы 1 (см. формулы (1.1.3)).

Используя представление $\psi_\pm(x,\ x_0,\ E)$ в виде (2.1.16), (2.1.16′), нетрудно получить выражение $\chi(x,\ E)$ через коэффициенты матрицы трансляции $\hat{T}$, так как ψ — собственный вектор этой матрицы. В базисах (2.1.1) и (2.1.2) мы получим

$$(2.1.19)\quad \begin{cases} \chi_R(x,\ E)=\dfrac{k\sqrt{1-a_{\mathrm{Re}}^2}}{a_{\mathrm{Im}}+b_{\mathrm{Im}}} & \text{(базис (2.1.1))},\ k^2=E,\\ \chi_R(x,\ E)=\dfrac{\sqrt{1-\frac{1}{4}(\alpha_{11}+\alpha_{22})^2}}{\alpha_{21}} & \text{(базис (2.1.2))},\end{cases}$$

где вид формулы в базисе (2.1.1) написан лишь в разрешенной зоне. Функция $\psi_\pm(x,\ x_0,\ E)$ на римановой поверхности Γ может иметь полюсы в каких-то точках $P_1,\ P_2,\ \ldots$ на Γ, зависящих, вообще говоря, от x_0 и x. Для действительного потенциала эти полюсы лежат в точках поверхности Γ над точками лакун (или их границ) $\gamma_1(x_0),\ \ldots,\ \gamma_m(x_0),\ \ldots$, не зависящих от x, по одному для каждой лакуны (причем полюс на Γ находится только на одном листе над точкой $\gamma_j(x_0)$). Как видно из формулы (2.1.14), нули $\psi_\pm$ лежат над точками $\gamma_j(x)$, не зависящими от x_0. Если потенциал конечнозонный, имеющий n лакун, то имеется всего n нулей $P_1(x),\ \ldots,\ P_n(x)$ функции $\psi_\pm(x,\ x_0,\ E)$, лежащих над точками $\gamma_1(x),\ \ldots,\ \gamma_n(x)$ E-плоскости, и n полюсов $P_1(x_0),\ \ldots$ $\ldots,\ P_n(x_0)$ над точками $\gamma_1(x_0),\ \ldots,\ \gamma_n(x_0)$. Для комплексных потенциалов нули и полюсы могут лежать в любых местах римановой поверхности Γ.

Рассмотрим в конце этого параграфа быстроубывающие потенциалы, где аналитические свойства собственных функций и матрицы рассеяния можно найти в [5]. С нашей точки зрения, быстроубывающие потенциалы есть предельный вырожденный случай периодических, где период $T\to\infty$, $u(x)\to 0$ при $|x|\to\infty$, $u',\ u'',\ \ldots\to 0$ при $|x|\to\infty$ (более точно: $\int\limits_{-\infty}^{\infty}(1+|x|)\,|u(x)|\,dx<\infty$). Пусть первоначально потенциал имеет конечный носитель (т. е. u — финитная). Рассмотрим базисы решений, аналогичные (2.1.1), где положено $x_0=\pm\infty$. Мы имеем 2 базиса (правый и левый)

$$(2.1.20)\quad \begin{cases} f_+(x,\ k)\to e^{ikx}, \quad f_-(x,\ k)\to e^{-ikx},\\ \qquad (x\to+\infty),\\ g_+(x,\ k)\to e^{ikx}, \quad g_-(x,\ k)\to e^{-ikx},\\ \qquad (x\to-\infty).\end{cases}$$

Матрицей трансляции на период $T=\infty$ здесь будет матрица перехода от базиса $(g_+,\ g_-)$ к базису $(f_+,\ f_-)$. Эта матрица имеет вид при вещественных k

$$(2.1.21)\qquad \hat{T}=\begin{pmatrix} a & b\\ \bar{b} & \bar{a}\end{pmatrix},\qquad |a|^2-|b|^2=1$$

и $f_+=ag_++bg_-$, $\hat{T}=\hat{T}(k)$.

Матрицей рассеяния $\hat{S}$ называется матрица, дающая выражение базиса (f_-, g_+) через базис (g_-, f_+); эта матрица унитарна и имеет вид

$$\hat{S}=\begin{pmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{b}{a} \\ \frac{\bar{b}}{a} & \frac{1}{a} \end{pmatrix}. \tag{2.1.22}$$

Коэффициенты $s_{11} = 1/a$ и $-s_{12} = b/a$ называются коэффициентами прохождения и отражения (амплитуды рассеяния на угол 0 и π).

Заметим, что для финитных потенциалов матрица $\hat{T}(k)$ аналитически продолжается до целой функции от k; если $\operatorname{Im} k > 0$, то f_+ убывает при $x \to +\infty$, а g_- убывает при $x \to -\infty$. Из равенства $f_+ = a(k)g_+ + b(k)g_-$ следует, что убывающее в обе стороны $(|x| \to \infty)$ решение мы получим тогда, когда $a(k_n) = 0$ (или амплитуда $s_{11}(k) = 1/a$ имеет полюс). Имеется конечное число дискретных уровней $E_n = k_n^2$; функции $f_+(x, k)$, $a(k)$ аналитичны при $\operatorname{Im} k > 0$,

$$a(k) \to 1 + O(1/k), \qquad |k| \to \infty, \qquad \operatorname{Im} k > 0. \tag{2.1.23}$$

Собственные функции дискретного спектра с уровнями $E_n = k_n^2$, где $a(k_n) = 0$, имеют вид

$$\psi_n(x) = g_-(x, k_n); \tag{2.1.24}$$

нормировочные множители легко вычисляются:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi_n|^2 dx = \frac{1}{c_n} = \frac{i\left.\frac{da}{dk}\right|_{k=i\varkappa_n}}{b(i\varkappa_n)}. \tag{2.1.25}$$

В общем случае быстроубывающего потенциала мы имеем согласно [5] функции $a(k)$, $b(k)$, где $a(k)$ аналитична в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} k > 0$, имеет асимптотику (2.1.23) и выполнено соотношение $|a|^2 - |b|^2 = 1$ на действительной оси $\operatorname{Im} k = 0$. Кроме того, есть набор из конечного числа нулей k_n, $a(k_n) = 0$ (все k_n чисто мнимы) и чисел c_n (2.1.25). Из теоремы единственности Марченко [4] вытекает, что набор $(a(k), b(k), k_n, c_n)$ есть набор «данных рассеяния», полностью определяющий потенциал $u(x)$. Далее, определяется ядро

$$F(z+t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ik(z+t)} \frac{b(k)}{a(x)} dk + \sum_n c_n e^{-ik_n(z+t)} \tag{2.1.26}$$

и пишется уравнение Гельфанда — Левитана

$$K(k, z) + F(x+z) + \int_{-\infty}^{x} F(s+x) K(z, s)\, ds = 0. \tag{2.1.27}$$

Сам потенциал находится по формуле $u(x) = 2\frac{d}{dx}K(x, x)$. При выполнении указанных аналитических свойств функции $a(k)$ уравнение Гельфанда — Левитана (2.1.27) имеет и притом единственное решение [5]. Имеется важный случай, когда $b \equiv 0$ на вещественной оси по k. Такие потенциалы называются «безотражательными». В этом случае уравнение (2.1.27) превращается в алгебраическое и потенциал $u(x)$ будет рациональной функцией от экспонент $e^{\varkappa_1 x}$, $e^{\varkappa_2 x}$, ..., $e^{\varkappa_n x}$, где $k_n = i\varkappa_n = \sqrt{E_n}$. Функция $a(k)$ в этом случае имеет вид

$$(2.1.28) \qquad a(k) = \prod_n \frac{k - i\varkappa_n}{k + i\varkappa_n}.$$

Такие потенциалы впервые были найдены Боргом [1] и Баргманом [2]. Они играют важную роль в теории уравнения КдФ. Для наших целей, связанных с периодической задачей, эти потенциалы важны еще потому, что при периоде $T \to \infty$ конечнозонные потенциалы вырождаются в безотражательные: разрешенные зоны стягиваются к изолированным точкам дискретного спектра внутри разрешенных зон $b \equiv 0$ при $T = \infty$ в силу (2.1.10) и (2.1.11), а риманова поверхность Γ вырождается в рациональную, так как пары точек ветвления сближаются.

§ 2. Новое коммутационное представление уравнения КдФ и «высших КдФ». Алгоритм отыскания конечнозонных потенциалов и их спектра

В § 1 главы 1 было уже указано представление Лакса (1.1.1) и (1.1.1′) уравнения КдФ и его высших аналогов в виде $\frac{dL}{dt} = [A_n, L]$, где $\dot{u} = Q_n(u, u', u'', \ldots, u^{(2n+1)})$. Приведем сначала алгоритм интегрирования [18] задачи Коши для КдФ на быстроубывающих функциях. Этот алгоритм основан на следующем уравнении для матрицы трансляции (или монодромии) $\hat{T}(k)$, открытом в [18]:

$$(2.2.1) \qquad \dot{a}(k) = 0, \qquad \dot{b}(k) = -8ik^3 b(k).$$

Для финитных потенциалов мы получаем из (2.2.1) в силу формул (2.1.24), (2.1.25) следующие уравнения для дискретных уровней:

$$(2.2.1') \qquad \dot{\varkappa}_n = (\sqrt{-E_n})^{\bullet} = 0, \qquad \dot{c}_n = -8\varkappa_n^3 c_n,$$

так как $k_n = i\varkappa_n$ — это нули функции $a(k)$, а $c_n = i\left(\frac{da}{dk}\right)_{k=k_n} \frac{1}{b(k_n)}$. Поэтому формулы (2.2.1) и (2.2.1′) верны для любого быстроубывающего потенциала и полностью дают развитие во времени данных рассеяния (а следовательно, и самого потенциала). Выведем формулы (2.2.1). Рассмотрим собственную функцию $f_+(x, k)$, определенную формулой (2.1.20). Очевидно, $\frac{\partial}{\partial t} f_+(x, k) \to 0$, $x \to +\infty$. Так как $Lf_+ = k^2 f_+$, то для производной $((L - k^2)f_+)^{\bullet}$ мы имеем

$$\dot{L}f_+ + (L - k^2)\dot{f}_+ = (AL - LA)f_+ + (L - k^2)\dot{f}_+ = (L - k^2)(\dot{f}_+ - Af_+).$$

Отсюда мы получаем

$$(2.2.2) \qquad \dot{f}_+ = Af_+ + \lambda(k)f_+ + \mu(k)f_-.$$

Устремляя $x \to +\infty$, мы получаем

$$0 \sim (Af_+)_{x\to+\infty} + (\lambda f_+)_{x\to+\infty} + (\mu f_-)_{x\to+\infty},$$

и, следовательно, так как оператор A имеет вид $A = -4\frac{d^3}{dx^3} + 3\left(u\frac{d}{dx} + \frac{d}{dx}u\right)$ и $u,\ u' \to 0$, мы имеем окончательно

$$(2.2.3)\qquad (Af_+)_{x\to+\infty} \to 4ik^3e^{ikx},\quad \mu(k) \equiv 0,\quad \lambda(k) = -4ik^3.$$

Теперь вспомним равенство $f_+ = ag_+ + bg_-$ (2.1.21) и устремим $x \to -\infty$. Тогда $g_+ \to e^{ikx}$, $g_- \to e^{-ikx}$. Отсюда следует, что $\dot{f}_+ \to \dot{a}e^{ikx} + \dot{b}e^{-ikx}$ при $x \to -\infty$. Сопоставляя эти формулы с (2.2.2) и учитывая (2.2.3), мы имеем окончательно формулы (2.2.1) $\dot{a} = 0$, $\dot{b} = -8ik^3b$. Отсюда следуют, как указано выше, формулы (2.2.1′), и интегрирование уравнения КдФ на быстроубывающих функциях тем самым завершено.

Для высших уравнений КдФ мы имеем

$$A_n = \frac{d^{2n+1}}{dx^{2n+1}} + \sum_{i=0}^{2n} P_i(u, u', \ldots)\frac{d^i}{dx^i},\quad \text{где } P_i \equiv 0 \text{ при } u \equiv 0.$$

Отсюда по аналогии с предыдущим выводом для матрицы $\hat{T}(k)$ следуют уравнения

$$(2.2.4)\qquad \dot{a} = 0,\qquad \dot{b} = \mathrm{const}(ik)^{2n+1}.$$

Мы видим из формул (2.2.4), что все высшие уравнения КдФ коммутируют как динамические системы на функциональном пространстве быстроубывающих функций.

Гарднер указал [22], что все высшие КдФ имеют гамильтонову форму

$$(2.2.5)\qquad \dot{u} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\delta I_n}{\delta u(x)},$$

как уже указывалось в § 1 главы 1, где I_n — это гамильтонианы. Из коммутативности этих динамических систем следует, что скобки Пуассона функционалов I_n равны нулю:

$$(2.2.6)\qquad [I_n, I_m] = 0.$$

Так как кососимметрическая форма определяется оператором $\frac{\partial}{\partial x}$, то равенство (2.2.6) равносильно условию

$$(2.2.6')\qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta I_n}{\delta u(x)}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\delta I_m}{\delta u(x)}\,dx = 0$$

для любой быстроубывающей функции $u(x)$. Так как I_n и I_m — интегралы от выражений, полиномиальных по $u,\ u',\ u''$ с постоянными коэффициентами, то отсюда становится абсолютно ясно, что тождество (2.2.6) будет верно и для любой периодической функции $u(x)$. Гарднер доказал утверждение о коммутативности (2.2.6) прямыми вычислениями в работе [22]. Одновременно Л. Д. Фаддеев и В. Е. Захаров в работе [21] вычислили все скобки

Пуассона всех «данных рассеяния» $a(k)$, $b(k)$, $\varkappa_n$, c_n и доказали, что переменные

$$\left\{\begin{aligned} &P_k=\frac{2k}{\pi}\ln|a(k)|, \quad P_n=\varkappa_n^2,\\ &Q_k=\arg b(k), \qquad Q_n=\ln b_n,\\ &\quad\text{где}\quad b_n=ic_n\,(da/dk)|_{k=i\varkappa_n}, \end{aligned}\right. \tag{2.2.7}$$

являются каноническими переменными (переменными «действие — угол») для всех гамильтоновых систем (2.2.5) или всех уравнений КдФ.

При попытках обобщения этого способа интегрирования уравнения КдФ на периодический случай возникнут большие трудности, которые станут понятны после того, как мы выведем естественный аналог уравнения (2.2.1) для матрицы $\hat{T}$. Рассмотрим базисы (2.1.1) или (2.1.2) и вычислим производные по времени по аналогии с (2.2.2) в точке $x = x_0$ вместо точки $x = \infty$:

$$\left\{\begin{aligned} \dot{\varphi}_+ &= A\varphi_+ + \lambda_{11}\varphi_+ + \lambda_{12}\varphi_-,\\ \dot{\varphi}_- &= A\varphi_- + \lambda_{21}\varphi_+ + \lambda_{22}\varphi_- \end{aligned}\right. \tag{2.2.8}$$

в базисе (2.1.1), или

$$\left\{\begin{aligned} \dot{c} &= Ac + a_{11}c + a_{12}s,\\ \dot{s} &= As + a_{21}c + a_{22}s \end{aligned}\right. \tag{2.2.8$'$}$$

в базисе (2.1.2), где $\lambda_{11} = \lambda$, $\lambda_{12} = \mu$, $\lambda_{21} = \bar{\mu}$, $\lambda_{22} = \bar{\lambda}$ при вещественных k, и все a_{ij} вещественны при вещественных E. Мы имеем матрицу $\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_{11} & \lambda_{12}\\ \lambda_{21} & \lambda_{22}\end{pmatrix}$ или $\Lambda=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$ в базисах (2.1.1) и (2.1.2) соответственно, коэффициенты которой выражаются через $u(x_0)$, $u'(x_0)$, ... и k по следующим формулам:

$$\left\{\begin{aligned} &(\dot{\varphi}_+)_{x=x_0}=0=(A\varphi_+)_{x=x_0}+\lambda_{11}+\lambda_{12}\\ &\qquad(\varphi_+=1\quad\text{при}\quad x=x_0),\\ &\left(\frac{d}{dx}\,\dot{\varphi}_+\right)_{x=x_0}=0=\left(\frac{d}{dx}\,A\varphi_+\right)_{x=x_0}+ik(\lambda_{11}-\lambda_{12}). \end{aligned}\right. \tag{2.2.9}$$

При вещественных k мы имеем

$$\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda & \mu\\ \bar{\mu} & \bar{\lambda}\end{pmatrix}, \qquad \lambda=\lambda_{11}, \qquad \mu=\lambda_{12}, \tag{2.2.10}$$

где след $\operatorname{Sp}\Lambda = 0$ или $\lambda + \bar{\lambda} = 0$, причем коэффициенты λ, μ находятся по формулам (2.2.9). Полностью аналогично вычисляется матрица $\Lambda = (a_{ij})$ в базисе (2.1.2). Заметим, что в базисе (2.1.2) коэффициенты a_{ij} матрицы Λ являются полиномами от $k^2 = E$, $u(x_0)$, $u'(x_0)$, ... Детерминант $\det\Lambda$ не зависит от выбора базиса и является полиномом

$$\det\Lambda = P_{2n+1}(E), \tag{2.2.11}$$

где оператор $A = A_n$ имеет порядок $2n + 1$. Для вычисления динамики матрицы $\hat{T}(x_0, E)$ в любом из базисов следует вычислить формулы (2.2.8) при $x = x_0 + T$, где T — период. Например, в базисе (2.1.1) при вещественных k мы получим

$$(2.2.12)\quad \begin{cases} [\dot{\varphi}_+]_{x=x_0+T}=\dot{a}+\dot{b}=[A(a\varphi_++b\varphi_-)]_{x=x_0+T}+ \\ \qquad\qquad +\lambda(a+b)+\mu(\bar{b}+\bar{a}), \\ \left[\frac{d}{dx}\dot{\varphi}_+\right]_{x=x_0+T}=ik(\dot{a}-\dot{b})=\left[\frac{d}{dx}A(a\varphi_++b\varphi_-)\right]_{x=x_0+T}+ \\ \qquad\qquad +\lambda ik(a-b)+\mu ik(\bar{b}-\bar{a}). \end{cases}$$

Учитывая вещественность оператора A, мы легко получим окончательные уравнения

$$(2.2.13)\qquad \dot{a}=\mu\bar{b}-b\bar{\mu},\qquad \dot{b}=(\lambda-\bar{\lambda})b+(a-\bar{a})\mu,$$

где

$$\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda & \mu\\ \bar{\mu} & \bar{\lambda}\end{pmatrix}.$$

Очевидно, уравнения (2.2.13) совпадают с матричным уравнением

$$(2.2.14)\qquad \frac{\partial}{\partial t}\hat{T}=[\Lambda,\hat{T}],$$

где матрица Λ определяется формулами (2.2.8) и в базисе (2.1.2) полиномиально зависит от E, $u(x_0)$, $u'(x_0)$, $\ldots$, $u^{(2n)}(x_0)$. Уравнение в форме (2.2.14) верно, разумеется, в любом базисе. Если в какой-то точке x_0 мы имеем $u=$ $=u'=\ldots=0$, то в базисе (2.1.1) мы легко получим

$$(2.2.15)\qquad \Lambda=\mathrm{const}\begin{pmatrix}ik^{2n+1} & 0\\ 0 & -ik^{2n+1}\end{pmatrix}.$$

Подставляя (2.2.15) в уравнение (2.2.14), мы, очевидно, получим формулы Крускала — Грина — Гарднера — Миуры для быстроубывающих потенциалов, полагая $x_0=\pm\infty$. Уравнение (2.2.14) в периодическом случае уже не интегрируется. Отметим, что для исходного КдФ уравнение (2.2.14) в базисе (2.1.2) другим способом вывел В. А. Марченко [44], который пошел далее по пути построения метода последовательных приближений для решения именно этого уравнения.

Мы будем действовать иначе. Матрица $\hat{T}$ зависит от параметров x_0, t, E. Рассмотрим для $\hat{T}$ пару уравнений (2.2.14) и (2.1.5):

$$\frac{\partial}{\partial t}\hat{T}=[\Lambda,\hat{T}],\qquad \frac{\partial}{\partial x_0}\hat{T}=[Q,\hat{T}].$$

Из требования совместности этой пары уравнений $\frac{\partial}{\partial x_0}\frac{\partial}{\partial t}\hat{T}=\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x_0}\hat{T}$ мы получим

$$(2.2.16)\qquad \left[\frac{\partial\Lambda}{\partial x_0}-\frac{\partial Q}{\partial t}-[\Lambda,Q],\hat{T}\right]=0,$$

откуда следует, поскольку след выражения слева нулевой,

$$(2.2.17)\qquad \frac{\partial\Lambda}{\partial x_0}-\frac{\partial Q}{\partial t}=[\Lambda,Q].$$

Уравнение (2.2.17) дает новое весьма удобное коммутационное представление уравнения КдФ и всех «высших КдФ» на матрицах второго порядка, полиномиально зависящих от E (в базисе (2.1.2)). Аналог этого коммутационного представления, как и аналог уравнений (2.2.14) и (2.1.5), можно, естественно, получить и для всех других нелинейных систем, указанных в главе 1 (см. главу 3).

Рассмотрим теперь «общее уравнение КдФ»

$$\dot{u} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\sum_{i=0}^{n} c_i \frac{\delta I_{n-i}}{\delta u(x)}\right) \quad (c_0 = 1) \tag{2.2.18}$$

и эквивалентное уравнение Лакса

$$\dot{L} = [A, L], \quad \text{где} \quad A = \sum_{i=0}^{n} c_i A_{n-i}. \tag{2.2.19}$$

Матрица Λ, построенная по формулам (2.2.8), аддитивно зависит от A, и мы имеем новое представление (2.2.17)

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial x_0} - \frac{\partial Q}{\partial t} = [\Lambda, Q], \qquad \Lambda = \sum_{i=0}^{n} c_i \Lambda_{n-i}. \tag{2.2.20}$$

Предположим, что мы хотим найти стационарные решения $\dot{u} = 0$ высших уравнений КдФ (2.2.18). Если $\dot{u} = 0$, то мы имеем $\frac{\partial Q}{\partial t} = 0$ и получаем уравнение

$$\frac{d\Lambda}{dx_0} = [\Lambda, Q]. \tag{2.2.21}$$

Таким образом, мы доказали следующее утверждение.

Следствие 1 (см. [38]). *Система обыкновенных уравнений*

$$\sum c_i \frac{\delta I_{n-i}}{\delta u(x)} = \text{const} \tag{2.2.22}$$

эквивалентна уравнению типа Лакса (2.2.21) *на матрицах второго порядка, полиномиально зависящих от лишнего параметра E и полиномиальных по $u(x)$, $u'(x)$, ... В частности, все коэффициенты характеристического полинома $P(E)$, где*

$$W^2 + P(E) = \det(W - \Lambda) = W^2 + \det \Lambda \,(\operatorname{Sp} \Lambda = 0),$$

являются полиномами от u, u', u'', ..., не зависящими от x (т. е. интегралами системы (2.2.22)). *Сам полином $P(E)$ имеет степень $2n+1$.*

Докажем теперь следующее красивое, хотя и не самоочевидное, следствие уравнения (2.2.14).

Следствие 2. *Корни полинома $P(E) = 0$ являются полным набором границ запрещенных и разрешенных зон оператора Шрёдингера L с потенциалом $u(x)$, удовлетворяющим уравнению* (2.2.22) *на стационарные решения для любого из высших КдФ. В частности, все стационарные решения уравнений КдФ являются потенциалами, число зон которых не превосходит n.*

Вывод следствия 2: из уравнения (2.2.14) $\dot{\hat{T}} = [\Lambda, \hat{T}]$ мы получаем $\dot{\hat{T}} = 0$ или $[\Lambda, \hat{T}] = 0$. Рассмотрим (в базисе (2.1.1)) матричный элемент $[\Lambda, \hat{T}]_{12} = (a - \bar{a})\mu + (\lambda - \bar{\lambda})b$ при вещественных k. Так как $\bar{\lambda} = -\lambda$, мы имеем $2\mu a_{\mathrm{Im}} = 2\lambda b$. Отсюда следует, что во всех невырожденных уровнях — границах зон, где $|b| \neq 0$, мы имеем

$$\left|\frac{a_{\mathrm{Im}}}{b}\right| = \left|\frac{\lambda}{\mu}\right|, \tag{2.2.23}$$

или $\det \Lambda = P(E) = |\lambda|^2 - |\mu|^2 = 0$ при $E = E_n$. Добавляя константу $u = u + \mathrm{const}$, можно всегда добиться того, что все $E_n > 0$ и $k_n = \sqrt{E_n}$ вещественны. Следствие 2 тем самым доказано. Этот вывод заимствован из [38]. Другой вывод следствия 2 указан Б. А. Дубровиным в связи с обобщением этих результатов на матричные системы (см. главу 3): так как блоховская собственная функция $\psi_\pm(x, x_0, E)$, по определению (2.1.6), является собственной и для $\hat{T}$, $\hat{T}\psi_\pm = e^{\pm ip(E)}\psi_\pm$, то из условия $[\Lambda, \hat{T}] = 0$ следует, что она является собственным вектором и для матрицы Λ. Так как матрица Λ полиномиальна по E, то собственный вектор $\psi_\pm$ мероморфен на римановой поверхности $\mathbf{\Gamma}$:

$$R(W, E) = \det(W - \Lambda) = 0. \tag{2.2.24}$$

В нашем случае $\mathrm{Sp}\,\Lambda = 0$, и мы имеем

$$R(W, E) = W^2 + P_{2n+1}(E) = 0, \tag{2.2.24$'$}$$

где $P_{2n+1}(E) = \det \Lambda$. Точки ветвления поверхности $\mathbf{\Gamma}$ и есть границы зон, как указывалось в § 1 главы 2. Существенно, что этот вывод легко обобщается не только на комплексные потенциалы, но и на почти-периодические, и на другие линейные операторы.

Третий вывод, дающий часть результата следствия 2, был одновременно и независимо с работой [38] получен П. Д. Лаксом [50], как указывалось во Введении. А именно, докажем, следуя [50], что всякое периодическое стационарное решение любого из «высших КдФ» имеет лишь конечное число запрещенных зон в спектре оператора $L = -\frac{d^2}{dx^2} + u(x)$. Проведем для простоты вывод Лакса для исходного КдФ. Пусть f_n — невырожденная периодическая собственная функция. Рассмотрим такую нормировку собственной функции $f_n(x)$ вместо базисов (2.1.1) и (2.1.2), где $Lf_n = E$, что развитие во времени имеет вид

$$\dot{f}_n = Af_n. \tag{2.2.25}$$

Так как $Lf_n = E_n f_n$, то из уравнения (2.2.25) вытекает уравнение первого порядка по x, которое для $A = -4\frac{d^3}{dx^3} + 3\left(u\frac{d}{dx} + \frac{d}{dx}u\right)$ будет таково:

$$\dot{f}_n = (4E + 2u)f_{n_x} - u_x f_{n_x}. \tag{2.2.25$'$}$$

Характеристики этого уравнения имеют вид

$$\frac{dx}{dt} = -(4E + 2u), \tag{2.2.26}$$

и вдоль характеристик мы имеем

$$\frac{df_n}{dt} = u_x f_n. \tag{2.2.27}$$

Поэтому нули f_n распространяются вдоль характеристик. Для стационарных решений вида $u(x-ct)$ (т. е. $A=A_1+cA_0$) мы будем иметь

$$f_n=f_n(x-ct),\qquad \frac{dx}{dt}=c,\qquad x=x_0+ct. \tag{2.2.28}$$

Сопоставляя (2.2.28) и (2.2.26), мы получим для нулей f_n:

$$\frac{dx}{dt}=c=-(4E_n+2u(x-ct))=-4E_n-2u(x_0). \tag{2.2.29}$$

При больших номерах n число E_n велико и равенство (2.2.29) не может иметь места. Это означает, что либо собственная функция f_n не имеет нулей, либо она не может быть невырожденной. Мы знаем, что собственные функции с высокими уровнями $E_n\to\infty$ имеют все больше и больше нулей. Следовательно, все уровни, кроме конечного числа, выроясдены. Аналогичный вывод для антипериодических уровней (период $2T$) показывает, что зон конечное число. Легко видеть, что этот вывод обобщается и на высшие КдФ. Из этого вывода не вытекает, что число лакун $\leqslant n$, если речь идет об n-м аналоге КдФ (исключая случай $n=1$ — см. [50]). Кроме того, этот вывод не дает, в отличие от следствий 1 и 2 выше, алгоритма интегрирования стационарной задачи для высших КдФ и алгоритма нахождения краев зон.

Перейдем теперь к дальнейшему исследованию стационарных решений высших КдФ. Все уравнения (2.2.22) являются уравнениями экстремалей функционала

$$\delta\Big(dI_{-1}+\sum_{i=0}^{n}c_iI_{n-1}\Big)=0\qquad(c_0=1), \tag{2.2.30}$$

где $I_{-1}=-\int u\,dx$. Поэтому все уравнения (2.2.30) — это гамильтоновы системы с n степенями свободы, зависящие от $(n+1)$ константы $d, c_1, \ldots, c_n$. Коэффициенты полинома $P_{2n+1}(E)=\det\Lambda$ устроены так, что старший есть константа, затем первые $n+1$ из них составлены из параметров $(c_1, c_2, \ldots, c_n, d)$ и последние n, обозначаемые через $J_1, \ldots, J_n$, дают набор полиномов алгебраически независимых интегралов системы (2.2.22). Оказывается, интегралы $J_1, \ldots, J_n$ инволютивны, и система (2.2.22) тем самым, является вполне интегрируемой системой, нахождение решений которой в принципе, может быть завершено алгоритмом Лиувилля (далее будет видно, что гамильтонианы J_α дают набор независимых коммутирующих систем, поэтому мы здесь этого не доказываем). Следуя уже примененному выше приему при выводе уравнения (2.2.17) из (2.2.14) и (2.1.5), мы используем коммутативность всех высших КдФ как динамических систем на функциональном пространстве. Если имеется два уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t_m}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\delta I_m}{\delta u(x)},$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\sum_{i=0}^{n}c_i\frac{\delta I_{n-i}}{\delta u(x)},$$

то решение будет функцией $u(x, t, t_m)$ в силу коммутативности этих систем. Для матрицы $\hat T(x_0, E)$ мы получим

$$\frac{\partial\hat T}{\partial t_m}=[\Lambda_m,\hat T],\qquad \frac{\partial\hat T}{\partial t}=[\Lambda,\hat T], \tag{2.2.31}$$

где $\Lambda = \sum_{i=0}^{n} c_i \Lambda_{n-i}$. Если $u(x)$ — стационарное решение, т. е. $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ (т. е. u — решение системы (2.2.22)), то мы имеем

$$\frac{\partial \hat{T}}{\partial t} = \frac{\partial \Lambda_m}{\partial t} = 0.$$

Во всех случаях, из совместности двух уравнений (2.2.31), по аналогии с (2.2.17) мы получим

$$\frac{\partial \Lambda_m}{\partial t} - \frac{\partial \Lambda}{\partial t_m} = [\Lambda, \Lambda_m]. \tag{2.2.32}$$

Если $\frac{\partial \hat{T}}{\partial t} = \frac{\partial \Lambda_m}{\partial t} = 0$, то мы имеем

$$\frac{d\Lambda}{dt_m} = [\Lambda_m, \Lambda]. \tag{2.2.33}$$

При $m = 0$ уравнение (2.2.33) совпадает с уравнением (2.2.21), где $\Lambda_0 = Q$. Очевидно, уравнение (2.2.33) определено на том же фазовом пространстве, что и (2.2.21), и дает набор коммутирующих гамильтоновых динамических систем на фазовом пространстве задачи (2.2.21) (или на множестве стационарных решений высших КдФ, задаваемых уравнением (2.2.22)).

Уравнение (2.2.33) при $m = 1$ определяет динамику конечнозонных потенциалов при движении во времени в силу уравнения КдФ, явно записанную в виде конечномерной динамической системы, представленной в виде матричного уравнения на матрицах второго порядка, полиномиально зависящих от параметра E (в базисе (2.1.2)). Матрица Λ здесь заменяет оператор Шрёдингера L, а характеристический многочлен матрицы Λ имеет вид $R(W, E) = \det(W - \Lambda)$, причем риманова поверхность $R(W, E) = 0$ и есть «спектр» (в смысле § 1 главы 2) изучаемого потенциала.

Приведем матрицы $\Lambda_0 = Q$, Λ_1, Λ_2 в базисе (2.1.1) при вещественных k, соответствующие полиномы $P_3(E)$, $P_5(E)$ и интегралы J (для $n = 1$), J_1 и J_2 для $n = 2$. Матрица $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ \bar{\mu} & \bar{\lambda} \end{pmatrix}$ имеет вид

$$1)\ n = 0; \quad \lambda = ik - \frac{iu}{2k}, \quad \mu = \frac{iu}{2k}, \quad R_1 = E - c, \tag{2.2.34}$$

потенциал имеет вид $u = c$.

$$2)\ n = 1; \quad \Lambda = \Lambda_1 + c\Lambda_0, \tag{2.2.35}$$

$$\lambda = \frac{i}{k}\left(-\frac{u''}{2} + u^2 - 4k^4 + ck^2 - c\frac{u}{2}\right),$$

$$\mu = u' + \frac{i}{k}\left(\frac{u''}{2} - u^2 - 2k^2 u + c\frac{u}{2}\right),$$

$$R_3(E) = |\lambda|^2 - |\mu|^2 = E^3 + \frac{1}{2}cE^2 + \frac{1}{16}(c^2 - 4d) + \frac{1}{16}(cd - J),$$

$$J = (u')^2 - (2u^3 + cu^2 + 2du);$$

потенциал имеет вид

$$x - x_0 = \int \frac{du}{\sqrt{2u^3 + cu^2 + 2du + J}}.$$

(2.2.36) 3) $n=2;\ \Lambda=\Lambda_2+c_2\Lambda, \qquad (c_1=0),$

$$\lambda=\frac{i}{k}\left[\frac{1}{2}u^{\mathrm{IV}}-(4uu''+3(u')^2-3u^3)-2u^2k^2+\right.$$
$$\left.+16k^6+c_2k^2-c_2\frac{u}{2}\right],$$
$$\mu=-u'''+6uu'-4u'k^2+\frac{i}{k}\left[\frac{1}{2}u^{\mathrm{IV}}+4uu''+3(u')^2-\right.$$
$$\left.-3u^3+k^2(2uu''-4u^2)-8uk^4+c_2\frac{n}{2}\right],$$
$$P_5(E)=|\lambda|^2-|\mu|^2=E^5+\frac{1}{4}c_2E^3-\frac{1}{16}dE^2+\frac{1}{32}J_1+\frac{1}{4}c_2^2\Big)E+\frac{J_2}{2^8}+\frac{c_2d}{2^7},$$
$$J_1=p_1p_2-\left(\frac{1}{2}q_2^2+\frac{5}{2}q_1^2q_2+\frac{5}{8}q_1^4\right)+c_2q_1^2-dq_1,$$
$$J_2=p_1^2-2q_1p_1p_2+2(q_2-c_2)p_2^2+q_1^5+2c_2q_1^3+dq_1^2-4q_1q_2^2+4c_2q_1q_2-2dq_2.$$

Гамильтонова система (2.2.22) при $c_1=0$ задается гамильтонианом $H=J_1$, а канонические координаты таковы:

(2.2.37) $$p_1=q_2',\qquad p_2=u',\qquad q_1=u,\qquad q_2=-\frac{5}{2}u^2+u''.$$

В частности, для потенциала Ламе $3u(x)$, где $u(x)=2\wp(x)$, $\wp(x)$ — эллиптическая функция Вейерштрасса, мы имеем границы зон: если $(\wp')^2=4\wp^3-g_2\wp-g_3$ и e_1, e_2, e_3 — корни многочлена $4x^3-g_2x-g_3=0$ (все e_i вещественны, $e_1<e_2<e_3$), то мы имеем границы зон

(2.2.38) $$E_1=3e_1,\quad E_2=-\sqrt{3g_2},\quad E_3=3e_2,\quad E_4=\sqrt{3g_2},\quad E_5=3e_3.$$

Удобные координаты γ_1, γ_2 на поверхностях уровня $J_1=\mathrm{const}$, $J_2=\mathrm{const}$ задаются так (пусть $\sum_{i=1}^{5}E_i=0$):

(2.2.39) $$\begin{cases} 2(\gamma_1+\gamma_2)=u=q_1,\\ \gamma_{1,2}=-\dfrac{1}{4}\left[q_1\pm\sqrt{2q_2-8\sum E_iE_j}\right],\end{cases}$$

и все p_1, p_2, q_1, q_2 выражены через γ_1, γ_2. Смысл этих координат γ_1, γ_2, формирование из них «угловых переменных» и завершение интегрирования уравнения (2.2.22) для $n=2$ будут указаны в § 3 (см. формулы (2.3.14). Вообще говоря, вещественные решения уравнений (2.2.22) являются почти-периодическими функциями с группой периодов $T_1, \ldots, T_n$. Ограниченные решения отвечают торам в фазовом пространстве, а группа периодов выражается через границы зон — или, что то же самое, через константы $(c_1, \ldots, c_n, d)$ и интегралы $J_1, \ldots, J_n$. Позднее, в § 3, будут даны удобные формулы для периодов $T_1, \ldots, T_n$ и для самих потенциалов. Фактически методы, которые будут развиты в § 3, связаны с очень важным обстоятельством, которое пока не было видно: n — мерная поверхность уровня $J_1=a_1, \ldots, J_n=a_n$ оказывается при продолжении в комплексную область абелевым многообразием (комплексным тором T^{2n}), являющимся многообразием Якоби римановой поверхности Γ, задаваемой уравнением $R(W, E)=0$, где $R(W, E)=\det(W-\Lambda)=W^2+P_{2n+1}(E)$. Это важное свойство обобщает естественно случай $n=1$, где абелевы многообразия задаются как комплексные решения уравнения $u'' = \frac{\partial P_3(u)}{\partial u}$, причем P_3 — полином третьей степени. Соответствующий результат для числа лакун $n > 1$ нетривиален и будет получен в результате сопоставления методов § 3 с методами настоящего параграфа.

Укажем еще одно полезное приложение уравнения (2.1.5) и (2.2.17) для матриц $\hat{T}$ и Λ. Напомним, что мы вывели формулу (2.1.19) для $\chi_R(x, E)$, имеющую вид (в базисе (2.1.1)) $\chi_R(x, E) = \frac{k\sqrt{1-a_R^2}}{a_{\mathrm{Im}}+b_{\mathrm{Im}}}$. Из уравнений (2.1.5) и (2.2.17) вытекают общие тождества

$$\text{(2.2.40)} \qquad \begin{cases} 2\mu_R = -\dfrac{d}{dx_0}\left(\dfrac{\lambda_{\mathrm{Im}}+\mu_{\mathrm{Im}}}{k}\right), \\ 2b_R = -\dfrac{d}{dx_0}\left(\dfrac{a_{\mathrm{Im}}+b_{\mathrm{Im}}}{k}\right). \end{cases}$$

Сопоставляя с видом χ_R и условием $\dot{a}_R \equiv 0$, мы получаем

$$\text{(2.2.41)} \qquad \dot{\chi}_R = (\alpha\chi_R)', \quad \text{где} \quad \alpha = \frac{\lambda_{\mathrm{Im}}+\mu_{\mathrm{Im}}}{k}.$$

Для уравнения КдФ $\Lambda = \Lambda_1$ и $\alpha = -2(2E + u)$. Из (2.2.41) следует, что величина $I(k) = p(E) = \int\limits_{x_0}^{x_0+T} \chi_R dx = \int\limits_{x_0}^{x_0+T} \chi\, dx$ сохраняется. Мы используем формулу (2.2.41) в § 3 при вычислении динамики конечнозонных потенциалов через удобные параметры $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$.

При $E \to \infty$ мы имеем разложение

$$I(k) \sim kT + \sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{(2k)^{2n+1}} \int\limits_{x_0}^{x_0+T} \chi_{2n+1}(x)\, dx,$$

где интегралы $I_{n-1} = \int\limits_{x_0}^{x_0+T} \chi_{2n+1} dx$ являются гамильтонианами высших КдФ: $\dot{u} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\delta I_n}{\delta u(x)}$, $\dot{L} = [A_n, L]$. Естественно ввести производящую функцию для этого набора уравнений. Рассмотрим оператор A_z, зависящий от параметра z и обладающий свойством (в силу формул (2.1.17) и (2.1.15))

$$\text{(2.2.42)} \qquad [A_z, L] = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\delta p(z)}{\delta u(x)} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{1}{2\chi_R(x, z)}\right),$$

где $\chi(x, z) = \chi_R + i\chi_I$, $\chi_I = \frac{1}{2}(\ln \chi_R)'$, $-i\chi' + \chi^2 + u - E = 0$. Тогда все операторы A_n получаются как коэффициенты разложения A_z при $z \to \infty$ по $z^{-1/2}$. Можно проверить, что оператор A_z имеет вид

$$\text{(2.2.43)} \qquad A_z = -\frac{1}{4}\left[\frac{1}{\chi_R(x, z)}\frac{d}{dx} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\chi_R(x, z)}\right)'\right]\frac{1}{L-z}.$$

Укажем здесь удобный алгоритм получения всех матриц Λ_m (в базисе (2.1.2)), который будет весьма полезен также при обобщении на матричные операторы первого порядка в главе 3. Рассмотрим дифференциальное уравнение $\lambda' = [Q, \lambda]$, где матрица Q в базисе (2.1.2) имеет вид $Q = \begin{pmatrix} 0 & E-u \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Это уравнение имеет единственное решение в виде формального ряда $\lambda = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{\lambda_1}{E} + \frac{\lambda_2}{E^2} + \ldots$; коэффициенты λ_n определяются из рекуррентного соотношения $\left[\lambda_n, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right] = \lambda'_{n-1} + \left[\lambda_{n-1}, \begin{pmatrix} 0 & u \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right]$. Тогда матрицы Λ_m имеют вид

$$\Lambda_m = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} E^m + \lambda_1 E^{m-1} + \ldots + \lambda_m. \tag{2.2.44}$$

§ 3. Обратная задача для периодических и почти-периодических (вещественных и комплексных) конечнозонных потенциалов. Связь с теорией абелевых многообразий

Исходя из определений 1 и 1′ § 1 главы 2, мы будем здесь понимать под «конечнозонным» такой потенциал $u(x)$, что блоховская собственная функция $\psi_\pm(x, x_0, E)$, нормированная требованиями (2.1.6) и (2.1.7), мероморфна на римановой поверхности Γ:

$$\Gamma\colon\ W^2 = P_{2n+1}(E) = \prod_{i=1}^{2n+1} (E - E_i), \tag{2.3.1}$$

и имеет асимптотику

$$\psi_\pm \sim e^{\pm ik(x-x_0)}, \qquad k^2 = E, \qquad E \to \infty. \tag{2.3.2}$$

Согласно (2.1.13) мы будем изучать функцию χ_R на римановой поверхности Γ, где

$$\chi_R = \frac{1}{2i} W(\psi_+, \psi_-) = \frac{1}{2i}(\psi'_+\psi_- - \psi'_-\psi_+),$$

используя представление (2.1.14) и (2.1.16), (2.1.16′):

$$\psi_\pm(x, x_0, E) = \sqrt{\frac{\chi_R(x_0, E)}{\chi_R(x, E)}} \exp\left\{i \int_{x_0}^{x} \chi_R(x, E)\, dx\right\},$$

где согласно формулам (2.1.19) мы имеем $\chi_R = \dfrac{k\sqrt{1-a_R^2}}{a_I + b_I}$ (базис (2.1.1), вещественные k), $\chi_R = \dfrac{\sqrt{1 - \frac{1}{4}(\alpha_{11} + \alpha_{22})^2}}{\alpha_{21}}$ (базис (2.1.2), любые E). Заметим, что в вырожденных точках спектра E_n мы имеем согласно (2.1.10) $\hat{T} = \pm\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ и $\alpha_{21} = 0$, причем функция $\alpha_{21}(x_0, E)$ имеет простой нуль по E. Напротив, в невырожденных точках спектра E_n мы имеем $\alpha_{21}(x_0, E_n) \neq 0$. Пусть $\widetilde{E}_\alpha$ ($\alpha = 1, 2, 3, \ldots$) — все вырожденные точки спектра (периодического и антипериодического). Так как величина $(1 - a_R^2) = 1 - \frac{1}{4}(\alpha_{11} + \alpha_{22})^2$ имеет двукратный нуль во всех точках $\widetilde{E}_\alpha$ и простой нуль в невырожденных точках $E_1, \ldots, E_{2n+1}$, мы видим, что

$$\sqrt{1 - a_R^2} = \sqrt{\prod_{i=1}^{2n+1} (E - E_i)} \cdot f(E), \tag{2.3.3}$$

где $f(E)$ — целая функция, имеющая простые нули лишь в точках $\widetilde{E}_\alpha$. Поэтому отношение

$$\widetilde{\alpha}_{21} = \frac{\alpha_{21}}{f(E)} \tag{2.3.4}$$

является целой функцией от E. Мы имеем выражение

$$\chi_R = \frac{\sqrt{\prod_{i=1}^{2n+1} (E-E_i)}}{\widetilde{\alpha}_{21}}. \tag{2.3.5}$$

При $E \to \infty$ величина $\chi_R(x_0, E)$ имеет асимптотику $\chi_R \sim k = \sqrt{E}$. Поэтому в силу (2.3.5) величина $\widetilde{\alpha}_{21}$ имеет асимптотику

$$\widetilde{\alpha}_{21} \sim E^n \quad \text{при} \quad E \to \infty. \tag{2.3.6}$$

Так как $\alpha_{21}(x_0, E)$ — целая функция, то из (2.3.6) мы получаем, что это полином:

$$\widetilde{\alpha}_{21}(x_0, E) = \prod_{j=1}^{n} (E - \gamma_j(x)). \tag{2.3.7}$$

Отсюда мы имеем окончательный результат.

Следствие. 3. *Величина* $\chi_R(x_0, E) = \frac{1}{2i} W(\psi_+, \psi_-)$ *имеет следующий вид*:

$$\chi_R(x, E) = \frac{\sqrt{\prod_{i=1}^{2n+1} (E-E_i)}}{\prod_{j=1}^{n} (E-\gamma_j(x))} = \frac{\sqrt{P(E)}}{P_n(x, E)}. \tag{2.3.8}$$

Замечание. Величина $\widetilde{\alpha}_{21} = \prod_{j=1}^{n} (E - \gamma_j(x))$ может быть определена иначе: она является полиномиальным по E решением уравнения

$$-y''' + 4(u - E)y' + 2u'y = 0. \tag{2.3.9}$$

Из этого соображения можно получить другой вывод формулы (2.3.8), так как уравнению (2.3.9) удовлетворяют произведения $\varphi_1 \cdot \varphi_2$ двух решений уравнения $L\varphi_\alpha = E\varphi_\alpha$, полагая $\varphi_1 = \psi_+$, $\varphi_2 = \psi_-$ (вывод работы [41], [47]).

Следуя приведенному выше выводу работы [40], [46], мы вычисляем произведение ψ_+, ψ_-, исходя из формул (2.1.14),

$$\psi_+\psi_- = \frac{\chi_R(x_0, E)}{\chi_R(x, E)} = \prod_{j=1}^{n} \frac{E-\gamma_j(x)}{E-\gamma_j(x_0)}. \tag{2.3.10}$$

Формально говоря, приведенный вывод относится лишь к периодическим потенциалам ввиду использования в нем матрицы трансляции $\hat{T}$. Однако сами формулы (2.3.8) и (2.3.10) верны и в почти-периодическом случае. Можно для доказательства этого факта поступить так: позднее, когда мы получим функции $\gamma_j(x)$, нужно будет проверить, что функция $\psi_\pm(x, x_0, E)$, определенная формулой (2.1.14), действительно удовлетворяет уравнению $L\psi = E\psi$.

Извлечем теперь некоторые выводы из полученных результатов.

1. *Полюсы блоховской функции лежат лишь на одном листе над точкой $\gamma_j(x_0)$, если все $\gamma_j(x_0)$ попарно различны.*

Доказательство. Из формул (2.1.16), (2.3.8) мы видим, что полюсы $\psi_\pm$ могут лежать лишь над точками $\gamma_j(x_0)$, где χ_R имеет полюсы, так как $\psi_\pm = c + i\chi(x_0, E)s$ и c, s — целые функции от E. Если бы полюс лежал бы на обоих листах $(\gamma_j(x_0), \pm)$, то в произведении $\psi_+\psi_- = \prod_j \frac{E-\gamma_j(x)}{E-\gamma_j(x_0)}$ мы бы имели двукратный полюс. Полученное противоречие завершает доказательство. Заметим, что для вещественных периодических потенциалов полюсы $\gamma_j(x_0)$ лежат по одному в запрещенных зонах.

2. *Симметрические функции от $\gamma_1(x), \ldots, \gamma_n(x)$ выражаются через потенциал $u(x)$ и его производные, причем имеют место формулы*

$$u(x) = -2\sum_{j=1}^{n} \gamma_j(x) + \sum_{i=1}^{2n+1} E_i, \tag{2.3.11}$$

$$\sum \gamma_i\gamma_j = \frac{1}{8}(3u^2 - u'') + \frac{1}{2}\sum E_iE_j - \frac{3}{8}\left(\sum E_i\right)^2. \tag{2.3.11$'$}$$

Доказательство. Исходя из асимптотики $\chi_R(x, k)$ при $k \to \infty$, мы имеем (см. формулы (2.1.18))

$$\chi_R(x, k) \sim k + \sum_{n \geqslant 1} \frac{\chi_{2n+1}(x)}{(2k)^{2n+1}},$$

где $\chi_1(x) = -u(x), \ldots$ Сопоставляя этот факт с видом функции χ_R (см. (2.3.8)), получаем доказательство.

3. *Каждый конечнозонный потенциал $u(x)$ является стационарным решением одного из высших КдФ* (2.2.22).

Доказательство. Мы будем исходить из формул (2.1.17)

$$\frac{\delta p(E)}{\delta u(x)} = \frac{\delta}{\delta u(x)} \int_{x_0}^{x_0+T} \chi_R(x, E)\,dx = -\frac{1}{2\chi_R(x, E)}$$

в случае периодических потенциалов. Из вида функции χ_R следует, что среди коэффициентов разложения величины $-\frac{1}{2\chi_R} = \frac{\delta p}{\delta u}$ по $\frac{1}{\sqrt{E}}$ будет всего конечное число линейно независимых функций от x, откуда следует соотношение

$$\sum_{m=-1}^{n} c_m \frac{\delta I_m}{\delta u(x)} = 0,$$

где $I_{m-1} = \int_{x_0}^{x_0+T} \chi_{2m+1}dx$ $(m \geqslant 0)$ — коэффициенты разложения величины $p(E)$ при $E \to \infty$, как следует из формул (2.1.18), (2.1.15). Отсюда следует доказательство в периодическом случае. В почти-периодическом случае все обстоит аналогично: интегралы по периоду надо заменить на среднее значение; все формулы сохраняются. Среди вещественных периодических функций сам результат напрашивается из известных теорем единственности (см. [1]), из которых следует, что потенциалы образуют не более чем n-мерное семейство при заданном спектре (n запрещенных зон), в то время как мы имеем из результатов § 2 главы 2 ровно n-мерное семейство. Нам, однако, этот результат необходим также и для почти-периодических, и для комплексных потенциалов.

4. *Набор величин* $\gamma_1(x), \ldots, \gamma_n(x)$ *удовлетворяет системе уравнений*

$$\gamma_j' = \pm \frac{2i\sqrt{P_{2n+1}(\gamma_j)}}{\prod\limits_{k\neq j}(\gamma_k-\gamma_j)}. \tag{2.3.12}$$

Строго говоря, эти уравнения надо считать уравнениями по переменной x_0 для набора точек $P_1(x_0), \ldots, P_n(x_0)$ на поверхности Γ, где $P_j(x_0) = (\gamma_j(x_0), \pm)$, и полюсы функции $\psi_\pm(x, x_0, E)$ лежат в точках $P_j(x_0)$. Над каждой лакуной $[E_{2i}, E_{2i+1}] = l_i$ в вещественном случае лежит цикл a_i, на поверхности Γ, склеенный из двух отрезков $a_i = (l_i, +) \cup (l_i, -)$ по концам $(E_{2i}, +) = (E_{2i}, -)$ и $(E_{2i+1}, +) = (E_{2i+1}, -)$. Точки $P_j(x_0)$ лежат на циклах a_j по одному на каждом цикле (в силу следствия 1 выше) и движутся по этим циклам при изменении x_0. Вся «фазовая точка» $(P_1, \ldots, P_n)$ лежит на торе $T^n = S_1^1 \times \ldots \times S_n^1$ (прямом произведении циклов a_j), и уравнение (2.3.12) фактически написано для движения точки $(P_1, \ldots, P_n) \in T^n$.

Доказательство формулы (2.3.12). Согласно утверждению 1 полюсы $\psi_\pm$ лежат лишь на одном листе $(\gamma_j, \pm)$ над $\gamma_j(x_0)$. На другом листе, в точке $(\gamma_j, \mp)$, полюса нет. Это означает, что в формуле (2.1.16) для $\psi_\pm$, или, что то же самое, в величине $\chi = \chi_R + i\chi_I = \chi_R + \frac{i}{2}\frac{d}{dx_0}\ln\chi_R$ (в силу (2.1.12)) полюс сократится при $E = \gamma_j$ и одном знаке при радикале. Из вида функции χ_R (2.3.8) получаем уравнение

$$\left(\frac{d}{dx}\frac{i}{2}\prod_{k=1}^{n}(E-\gamma_k)\right)_{E=\gamma_j} = \left(\sqrt{\prod_{k=1}^{2n+1}(E-E_k)}\right)_{E=\gamma_j}. \tag{2.3.13}$$

Разрешив уравнения (2.3.13) относительно γ_j', мы и получим (2.3.12). Утверждение доказано.

Разберем теперь в виде следствий случай одной из двух зон, причем двухзонные потенциалы до работ авторов известны не были.

Пример 1 ($n = 1$). Уравнения (2.3.12) имеют вид

$$\gamma=\gamma_1, \qquad \gamma' = \pm 2i\sqrt{\prod_{j=1}^{3}(\gamma-E_j)}, \qquad u = -2\gamma + \sum_{i=1}^{3} E_i;$$

эти формулы очевидным образом переходят в формулы (2.2.35).

Пример 2 ($n = 2$). Уравнения (2.3.12) на параметры имеют вид

$$\gamma_1' = \pm\frac{2i\sqrt{P_5(\gamma_1)}}{\gamma_1-\gamma_2}, \qquad \gamma_2' = \pm\frac{2i\sqrt{P_5(\gamma_2)}}{\gamma_2-\gamma_1}, \tag{2.3.14}$$

где $-2(\gamma_1 + \gamma_2) = u$, $\gamma_1\gamma_2 = \frac{1}{8}(3u^2 - u'') + \frac{1}{2}\sum E_iE_j$. Как указывалось в § 2 (см. 2.2.39)), γ_1 и γ_2 — эти координаты на поверхности уровня двух интегралов J_1, J_2 для стационарных решений высшего КдФ с номером 2.

Уравнения (2.3.14) интегрируются заменой аргумента

$$d\tau = \frac{1}{\gamma_2 - \gamma_1}\,dx. \tag{2.3.15}$$

Введем (для вещественных потенциалов, где $E_2 \leqslant \gamma_1 \leqslant E_3$, $E_4 \leqslant \gamma_2 \leqslant E_5$) две функции $F_1(\tau)$ и $F_2(\tau)$, полагая

$$\tau = \int\limits_{F_2}^{F_1} \frac{dq}{2\sqrt{P_5(q)}}, \qquad \tau = \int\limits_{E_4}^{F_2} \frac{dq}{2\sqrt{P_5(q)}}. \tag{2.3.16}$$

Выберем начальную точку τ_0 так, что

$$\gamma_1(\tau) = F_1(\tau), \qquad \gamma_2(\tau) = F_2(\tau + \tau_0). \tag{2.3.17}$$

Из (2.3.15) имеем

$$x - x_0 = \int\limits_0^\tau (F_2(q+\tau_0) - F_1(q))\,dq. \tag{2.3.18}$$

Потенциал $u(x)$ имеет вид $u(x) = -2(\gamma_1 + \gamma_2) + \sum\limits_{i=1}^{5} E_i$, и вместе с формулами (2.3.16), (2.3.17) и (2.3.18) мы получаем окончательный ответ для двухзонных почти-периодических потенциалов

$$u(x) = -2\,[F_1(\tau) + F_2(\tau + \tau_0)] + \sum_{i=1}^{5} E_i,$$

где

$$x - x_0 = \int\limits_0^\tau (F_2(q+\tau_0) - F_1(q))\,dq.$$

В формулах (2.2.38) были приведены края зон E_i, при которых получится при специальном выборе x_0, τ_0 потенциал Ламе $3u(x)$, где $u(x)$ — это однозонный потенциал (удвоенная функция Вейерштрасса $\wp$). Другие потенциалы этого семейства (с тем же спектром, что и $3u(x)$) будут иметь вид [42]

$$\begin{cases} v(x) = 2\wp(x-\beta_1) + 2\wp(x-\beta_2) + 2\wp(x-\beta_3), \\ \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 0, \\ \beta_2 - \beta_3 = \frac{1}{2}\wp^{-1}\left[-\wp(\beta_1 - \beta_3) + \sqrt{g_2 - 3\wp^2(\beta_1 - \beta_3)}\right]. \end{cases} \tag{2.3.19}$$

Перейдем теперь к связи с абелевыми многообразиями. Была доказана формула (см. (2.3.11)) $u(x) = -2\sum\gamma_j + 2\sum E_i$ для потенциала $u(x)$. Блоховская собственная функция $\psi_\pm(x, x_0, E)$ имеет набор полюсов $P_1(x_0), \ldots, P_n(x_0)$ — точек на римановой поверхности Γ, лежащих по одной над точками E-плоскости $\gamma_1(x_0), \ldots, \gamma_n(x_0)$. Строго говоря, формулу (2.3.11) следует понимать так: имеется каноническая проекция π поверхности Γ на E-плоскость π: $\Gamma \to \mathbf{C}$ и потенциал $u(x)$ имеет вид

$$u(x) = -2\sum_{j=1}^{n} \pi(P_j(x)) + \text{const}. \tag{2.3.20}$$

По сути дела, проекция π — это числовая функция на поверхности Γ, не меняющаяся при перестановке листов (канонической инволюции, всегда имеющейся на гиперэллиптической кривой Γ). Естественно определить числовую функцию σ от симметризованного набора из n точек $(P_1, \ldots, P_n)$, полагая

$$\sigma(P_1, \ldots, P_n) = \sum_{j=1}^{n} \pi(P_j).$$

Симметризованные наборы точек из Γ $(P_1, \ldots, P_n)$ образуют алгебраическое многообразие — симметрическую степень $S^n(\Gamma)$, и мы имеем алгебраическую функцию σ на этом многообразии. Набор точек $(P_1, \ldots, P_n)$ меняется при изменении параметра x, и значение функции

$$-2\sigma(P_1(x), \ldots, P_n(x)) + \text{const}$$

есть потенциал $u(x)$ в силу формул (2.3.11). В классической алгебраической геометрии давно известно, что симметрическая степень $S^n(\Gamma)$ бирационально изоморфна $2n$-мерному тору $J(\Gamma)$ — многообразию Якоби для Γ. Поэтому, в частности, функция σ выражается через многомерные θ-функции (через θ-функцию Римана и ее производные). Бирациональная эквивалентность $S^n(\Gamma) \to J(\Gamma)$ осуществляется известным отображением Абеля, которое мы приведем ниже. Выберем базис циклов на Γ:

$$(2.3.21) \qquad a_1, \ldots, a_n, \ldots, b_1, \ldots, b_n,$$

где матрица пересечений имеет вид

$$(2.3.21') \qquad a_i \circ a_j = b_i \circ b_j = 0, \qquad a_i \circ b_j = \delta_{ij}$$

(циклы a_i для вещественной гиперэллиптической поверхности Γ были указаны выше — это полные прообразы запрещенных зон на Γ). Рассмотрим базис голоморфных дифференциалов на Γ:

$$(2.3.22) \qquad \Omega_k = \sum_{l=1}^{n} c_{kl} \frac{E^{l-1}\,dE}{\sqrt{P_{2n+1}(E)}} \qquad (k=1, \ldots, n),$$

нормированных условиями

$$(2.3.22') \qquad \oint_{a_j} \Omega_k = 2\pi i \delta_{jk}.$$

Мы получим матрицу

$$(2.3.23) \qquad B_{kl} = \oint_{b_l} \Omega_k.$$

Известно, что эта матрица симметрична и имеет знакоопределенную вещественную часть (матрица B_{kl} не может распадаться на блоки — для $n = 2$ это полный набор ограничений). Полная матрица $n \times 2n$

$$(2.3.24) \qquad \left(\oint_{a_j} \Omega_k, \oint_{b_j} \Omega_k\right) = (2\pi i \delta_{jk}, B_{jk})$$

дает $2n$ векторов в n-мерном комплексном пространстве C^n, целочисленные комбинации которых образуют решетку, определяющую тор $J(\Gamma)$ — многообразие Якоби («якобиан кривой Γ»). Отображение Абеля A: $S^n(\Gamma) \to J(\Gamma)$ определяется так. Фиксируем точки $P_1^0, \ldots, P_n^0$. Положим

$$(2.3.25) \qquad A(P_1, \ldots, P_n) = (\eta_1, \ldots, \eta_n,$$

где

$$\eta_k = \sum_{j=1}^{n} \int_{P_j^0}^{P_j} \Omega_k,$$

Ω_k — базис голоморфных дифференциалов (2.3.22). Очевидно, параметры η_n определены с точностью до вектора решетки (2.3.24). Тем самым отображение Абеля построено.

Важное наблюдение, в главном принадлежащее Н. И. Ахиезеру [10], состоит (переводя язык работы [10] на современный) в том, что при отображении Абеля совокупность нулей $\{P_1(x), \ldots, P_n(x)\}$ собственной функции $\psi_\pm$ переходит в прямую линию на многообразии Якоби (мы покажем позднее, что та собственная функция $\mathscr{E}$, которую строил в своих примерах Н. И. Ахиезер на полупрямой, совпадет с блоховской $\psi_\pm(x, x_0, E)$ в том случае, если потенциал является четным $u(-x) = u(x)$ и $x_0 = 0$). Мы используем информацию о нулях $P_j(x)$ функции $\psi_\pm$ (x, x_0, E), лежащих над точками $\gamma_j(x_0)$, полюсах $P_j(x_0)$, лежащих над $\gamma_j(x_0)$, и асимптотику $\psi_\pm \sim e^{\pm ik(x-x_0)}$ при $E \to \infty$. Рассмотрим логарифмический дифференциал

$$\omega = \left(\frac{d \ln \psi}{dE}\right) dE,$$

который обладает свойствами

a) он имеет полюсы с вычетом -1 в точках $P_j(x_0)$;

b) он имеет полюсы с вычетом $+1$ в точках $P_j(x)$;

c) он имеет полюс второго порядка в точке $E = \infty$, имеющий вид в локальном параметре z: $\omega \sim -i(x - x_0)\frac{dz}{z^2}$, где $z = \frac{1}{k} = \frac{1}{\sqrt{E}}$, так как $\psi_\pm \sim e^{\pm ik(x-x)}$ при $E \to \infty$;

d) все интегралы по циклам $\oint\limits_{a_i} \omega$ и $\oint\limits_{b_i} \omega$ являются целыми кратными $2\pi i$, так как $\psi_\pm$ — однозначная функция на Γ.

Покажем, что *свойства* a), b), c), d) *полностью определяют функцию* $\psi_\pm(x, x_0, E)$ и что *набор нулей* $(P_1(x), \ldots, P_n(x))$ *движется прямолинейно при изменении* x *по многообразию якоби* $\mathbf{J}(\Gamma)$ *после отображения Абеля* A.

Доказательство. Введем дифференциал Ω, имеющий в качестве единственной особенности полюс второго порядка при $E = \infty$ и асимптотику вида $\Omega \sim -i\frac{dz}{z^2}$ при $E \to \infty$, где $z = \frac{1}{\sqrt{E}}$. Нормируем Ω условиями

$$\oint\limits_{a_j} \Omega = 0 \quad (j = 1, \ldots, n). \tag{2.3.26}$$

Дифференциал Ω имеет вид

$$\Omega = i\,\frac{E^n + \alpha_1 E^{n-1} + \ldots + \alpha_n}{2\sqrt{P_{2n+1}(E)}}\, dE,$$

где коэффициенты α_j определяются требованиями (2.3.26).

Пусть Ω^{PQ} — дифференциал на Γ, имеющий в качестве единственных особенностей полюс с вычетом -1 в точке Q и полюс с вычетом $+1$ в точке P, нормированный условиям

$$\oint_{a_j} \Omega^{PQ} = 0 \qquad (j = 1, \ldots, n). \tag{2.3.27}$$

В алгебраической геометрии известен такой факт: если дифференциалы первого рода Ω_j нормированы условиям (2.3.22), а дифференциал Ω^{PQ} условиям (2.3.27), то имеет место равенство (по некоторому пути из P в Q)

$$\oint_{b_j} \Omega^{PQ} = \int_Q^P \Omega_j, \tag{2.3.28}$$

где базис циклов (a_i, b_j) указан в (2.3.21′). Рассмотрим теперь дифференциал $\omega = d_E \ln \psi$ и представим его в виде

$$\omega = (x - x_0)\Omega + \sum_{j=1}^{n} \Omega^{P_j(x)P_j(x_0)} + D, \tag{2.3.29}$$

где D — голоморфный дифференциал $D = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \Omega_i$. Из условий $\oint_{a_j} \omega = 2\pi i m_j$, где m_j — целые, получим, используя нормировку (2.3.22), (2.3.26), (2.3.27),

$$2\pi i m_j = \Big(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \delta_{kj}\Big) 2\pi i \qquad (j = 1, \ldots, n),$$

откуда следует, что все α_j — целые числа, $\alpha_j = m_j$. Из условий $\oint_{b_j} \omega = 2\pi i n_j$, где n_j — целые, получим, используя (2.3.28),

$$2\pi i n_j = (x - x_0)\, U_j + \sum_{k=1}^{n} \int_{P_k(x_0)}^{P_k(x)} \Omega_j + \sum_{k=1}^{n} m_k B_{kj}, \tag{2.3.30}$$

где $U_j = -\oint_{b_j} \Omega$. Из соотношений (2.3.30) и следует с точностью до вектора решетки, что набор точек $(Q_1(x), \ldots, Q_n(x))$ при изменении параметра движется по прямой линии на торе $\mathbf{J}(\mathbf{\Gamma})$, наклон прямой определяется вектором $(U_1, \ldots, U_n)$, зависящим лишь от поверхности $\mathbf{\Gamma}$.

Формулу (2.3.30) можно переписать в виде

$$\eta_j = \eta_j^0 + (x - x_0) U_j, \tag{2.3.30′}$$

где η_j — это координаты в $\mathbf{C}^n$, определенные с точностью до решетки (2.3.24). Ограничение алгебраической функции σ на прямолинейную обмотку (2.3.30′) и дает (в действительном случае) потенциал $u(x)$ — почти-периодический, с группой периодов $(T_1, \ldots, T_n)$, где

$$T_j^{-1} = \sum_{k=1}^{n} B^{jk} U_k \tag{2.3.31}$$

здесь матрица B^{jk} обратна к матрице периодов (2.3.23)); при продолжении в комплексную область по x потенциал станет мероморфной почти-периодической функцией с $2n$ периодами $T_1, \ldots, T_n, T_1', \ldots, T_n'$, где периоды T_j'

по мнимой оси имеют вид

(2.3.31′) $$T'_j = \frac{2\pi i}{U_j}.$$

Для комплексных Γ потенциал будет иметь в комплексной области $2n$ периодов. Для того чтобы потенциал $u(x)$ был периодичен по x, необходимо и достаточно, чтобы среди действительных периодов $T_1, \ldots, T_n$ было выполнено $n-1$ соотношение вида

$$\sum_{j=1}^{n} n_{ij} T_j = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n-1),$$

n_{ij} — целые числа.

Если вся группа из $2n$ комплексных периодов $(T_1, \ldots, T_n, T'_1, \ldots, T'_n)$ сведется к двум образующим, то потенциал $u(x)$ выразится через эллиптические функции (для этого надо $2n-2$ целочисленных соотношения).

Таким образом, отображение Абеля интегрирует уравнения (2.3.12) для величин $(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$. Из полученных результатов уже вытекает, учитывая, что потенциал $u(x)$ однозначно определяется набором начальных точек $[P_1(x_0), \ldots, P_n(x_0)]$ на поверхности Γ, следующая

Теорема. 1) *Множество (вещественных и комплексных) почти-периодических конечнозонных потенциалов с заданным спектром* Γ *канонически изоморфно многообразию Якоби* $\mathbf{J}(\Gamma)$ *римановой поверхности* Γ, *являющимся* $2n$*-мерным абелевым многообразием, и этот изоморфизм осуществляется аналитическими операциями, описанными выше. Группа периодов определяется спектром* Γ. 2) *Совокупность всех комплексных решений стационарной задачи для высших уравнений КдФ есть, с точностью до бирациональной эквивалентности, при заданных константах* $(d, c_1, \ldots, c_n)$ *и уровнях коммутирующих интегралов* $J_1, \ldots, J_n$ *(или при заданном спектре) абелево многообразие* $\mathbf{J}(\Gamma)$, *где риманова поверхность* Γ *определяется уравнением* $W^2 - P_{2n+1}(E) = 0$ (см. (2.2.24)). *Аффинная часть многообразия* $\mathbf{J}(\Gamma)$ *каноническим образом погружена в пространство* $\mathbf{C}^{2n}$.

Как было указано выше (см. (2.3.20)), потенциал $u(x)$ имеет вид

(2.3.32) $$u(x) = -2\sigma(\eta_1^0 + (x-x_0)U_1, \ldots, \eta_n^0 + (x-x_0)U_n) + \mathrm{const},$$

где σ является алгебраической функцией на торе $\mathbf{J}(\Gamma)$ и алгебраическим образом выражается через θ-функцию Римана и ее производные, где классическая θ-функция Римана строится по решетке (2.3.24) стандартным образом:

(2.3.33) $$\theta(\eta_1, \ldots, \eta_n) = \sum_{m_1, \ldots, m_n} \exp\left\{\frac{1}{2}\sum_{j,k} B_{jk} m_j m_k + \sum_k m_k \eta_k\right\}$$

$(m_1, \ldots, m_n$ — целые числа).

В работе [41] найдена удобная явная формула, выражающая σ через θ-функцию (2.3.33). Для потенциала $u(x)$ мы имеем

(2.3.34) $$u(x) = -2\frac{d^2}{dx^2}\ln\theta(\eta_1^0 + U_1(x-x_0) - K_1, \ldots, \eta_n^0 + U_n(x-x_0) - K_n) + C,$$

$$K_j = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} B_{kj} - \pi i j, \qquad \eta_j^0 = \sum_k \int_{\infty}^{P_k(x_0)} \Omega_j;$$

C — константа, зависящая только от поверхности Γ. Дадим доказательство последней формулы. Рассмотрим функцию

$$F(P) = \theta(\eta(P) - \eta^0), \tag{2.3.35}$$

где $P \in \Gamma$, $\eta_j(P) = \int\limits_{\infty}^{P} \Omega_j$. Функция $F(P)$ однозначна на поверхности $\tilde{\Gamma}$, рассеченной по циклам (a_j, b_j) (2.3.21). Известно (Риман, см. [56]), что функция $F(P)$ имеет n нулей $P_1, \ldots, P_n$ на поверхности Γ (для почти всех $\eta^0 \in \mathbf{J}(\Gamma)$), причем на многообразии Якоби $\mathbf{J}(\Gamma)$ выполнено соотношение

$$A(P_1, \ldots, P_n) = \eta^0 - \vec{K}, \tag{2.3.36}$$

где $K_j = \frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n} B_{kj} - \pi_{ij}$ — «римановы константы». Поэтому

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\partial\tilde{\Gamma}} \pi(P)\, d\ln F(P) = \sum_{j=1}^{n} \pi(P_j) + \underset{P=\infty}{\operatorname{res}}\, \pi(P)\, d\ln F(P) = \sigma(\eta^0 - \vec{K}) + \underset{P=\infty}{\operatorname{res}}\, \pi(P)\, d\ln F(P). \tag{2.3.37}$$

Поскольку θ-функция (2.3.33) обладает свойствами

$$\theta(\eta_1, \ldots, \eta_k + 2\pi i, \ldots, \eta_n) = \theta(\eta_1, \ldots, \eta_n),$$

$$\theta(\eta_1 + B_{1k}, \ldots, \eta_n + B_{nk}) = \exp\left(-\frac{B_{kk}}{2} - \eta_k\right)\theta(\eta_1, \ldots, \eta_n),$$

то интеграл (2.3.37) есть

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\partial\tilde{\Gamma}} \pi(P)\, d\ln F(P) = \sum_{k=1}^{n} \oint\limits_{a_k} \pi(P)\, \omega_k. \tag{2.3.37'}$$

Из (2.3.37) и (2.3.37′) имеем

$$\sigma(\eta^0 - \vec{K}) = -\operatorname{res} \pi(P)\, d\ln F + \sum_{k=1}^{n} \oint\limits_{a_k} \pi(P)\, \omega_k. \tag{2.3.38}$$

Для вывода формулы (2.3.34) из (2.3.38) нужно вычислить вычет $\operatorname{res} \pi(P) d\ln F$ в точке $P = \infty$, где точка η^0 выбрана так, что

$$\eta^0 - \vec{K} = A(P_1(x), \ldots, P_n(x)) = A(P_1(x_0), \ldots, P_n(x_0)) + \vec{U}(x - x_0).$$

Для вычисления такого вычета осталось еще заметить, что величины U_j из (2.3.30) и c_{kl} из (2.3.22) связаны соотношением $U_j = c_{jn}$ (следствие из соотношения между периодами дифференциалов на Γ; см. [55]).

Из предшествующих результатов мы видели, что блоховская функция $\psi_\pm$ и сам потенциал u полностью определяются спектром — римановой поверхностью Γ — и «дивизором»— набором полюсов, т. е. чисел $\gamma_1(x_0), \ldots, \gamma_n(x_0)$ вместе с указанием листов, на которых лежит полюс. Нули функции $\psi_\pm$ также образуют дивизор $(\gamma_1(x), \sigma_1)$, $(\gamma_2(x), \sigma_2)$, $\ldots$, $(\gamma_n(x), \sigma_n)$, где $\sigma_j = \pm$ — номера листов, где лежит нуль. Если потенциал вещественный, то все γ_j лежат в лакунах $E_{2j} \leqslant \gamma_j \leqslant E_{2j+1}$, риманова поверхность вещественна, и имеет смысл говорить о «верхнем листе (+) и нижнем листе (—)» при вещественных значениях E над лакунами (положительное и отрицательное значения корня $\sqrt{-P_{2n+1}}$). Если знак листа +, то $\psi_+(x, x_0, E) \to 0$ $(x \to +\infty)$ при E внутри лакуны; если же знак листа — при E в лакуне, то $\psi_-(x, x_0, E) \to 0 (x \to -\infty)$. Поэтому функция $\psi_\pm(\tau, x_0, E) = f_j(\tau)$, $E = \gamma_j(x)$ принадлежит дискретному (невырожденному) спектру задачи Штурма — Лиувилля на полуоси:

$$\tau \geqslant x, \qquad f(x) = 0, \qquad f(+\infty) = 0,$$
$$\tau \leqslant x, \qquad f(x) = 0, \qquad f(-\infty) = 0,$$

в зависимости от знака $(\pm)$ листа, на котором лежит нуль $P_j(x)$ блоховской функции $\psi(x, x_0, E)$, причем набор $\{\gamma_j\}$ — это все невырожденные уровни этих спектров. Аналогичная ситуация, хотя и более простая, возникала в работах А. Б. Шабата [11]: он предлагал метод изучения безотражательных потенциалов с помощью «условных» собственных чисел γ_j на двух полуосях, для которых в [11] выводилось уравнение, аналогичное (2.3.5) (но, конечно, риманова поверхность вырождалась, и никаких абелевых многообразий вообще не было; вывод уравнений типа (2.3.5) в этом вырожденном случае производился из совсем других соображений). В нашем случае набор точек $(\gamma_j, \pm)$ при изменении x бежит по циклам a_j, и при проходе точек ветвления знаки листов сменяются.

Рассмотрим теперь случай четных потенциалов $u(x) = u(-x)$ и $x_0 = 0$. Легко проверить такое тождество, что при $x \mapsto -x$ листы римановой поверхности $\mathbf{\Gamma}$ меняются местами. Поэтому для выполнения равенства $u(x) = u(-x)$ необходимо и достаточно, чтобы полюсы $\gamma_j(0)$ были инвариантны при этой перестановке, т. е. лежали в точках ветвления. Кроме того, функция $\chi(x_0, E)$ имеет вид при $x_0 = 0$

$$\chi(0, E) = \chi_R(0, E),$$

так как

$$\chi_I(0, E) = -\frac{1}{2}\left[\frac{d}{dx}\ln\prod_{j=1}^{n}(E-\gamma_j)\right]_{x=0} = 0,$$

поскольку $\gamma_j'(0) = 0$; это следует из (2.3.5) и того, что $\gamma_j(0)$ лежат в точках ветвления. Поэтому $\psi_\pm(x, 0, E)$ в этом случае имеет вид

$$\psi_\pm(x, 0, E) = c + i\,\frac{\sqrt{P_{2n+1}(E)}}{\prod_{j=1}^{n}(E-\gamma_j(0))}\,s,$$

где $\gamma_j(0)$ лежат в точках ветвления (концах лакун). Это дает формулу Ахиезера для функции $\mathscr{E}$ из работы [10] в случае, если берутся $\gamma_j(0)$ как нижние края лакун. Существенный вывод состоит в том, что при заданной зонной структуре имеется лишь конечное число четных потенциалов $u(x) = u(-x)$.

В заключение этого параграфа мы укажем, что параметры $(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ на торе $\mathbf{J}(\mathbf{\Gamma})$ дают «угловые» переменные, канонически сопряженные к переменным «действия», за которые для гамильтоновых систем (2.2.22) можно взять интегралы $J_1, \ldots, J_n$, полученные как последние n коэффициентов полинома $P_{2n+1} = \det \Lambda$ (см. § 2). Скобки Пуассона здесь образуют постоянную невырожденную матрицу

$$\begin{cases} [J_k, \eta_j] = a_{kj}, \\ [J_k, J_s] = [\eta_k, \eta_s] = 0. \end{cases} \tag{2.3.39}$$

Оказывается (см. § 4), что параметры η_k на торе $\mathbf{J}(\Gamma)$ дают набор «углов» и для временного движения в силу КдФ и высших КдФ. А именно, все производные $\dot{\eta}_k$ в силу высших КдФ постоянны, и скобки Пуассона в силу оператора $\frac{\partial}{\partial x}$, связанного с временно́й динамикой, все равны нулю: $[\eta_k, \eta_s] = 0$.

§ 4. Приложения. Временна́я динамика конечнозонных потенциалов в силу КдФ. Универсальное расслоение якобиевых многообразий (гиперэллиптический случай)

Изучим развитие во времени в силу любого из высших КдФ. В § 2 главы второй было уже указано уравнение (2.2.33) для развития во времени, которое при $m = 1$ совпадает с обычным КдФ:

$$\frac{d\Lambda}{dt_m} = [\Lambda, \Lambda_m], \tag{2.4.1}$$

где $\Lambda = \sum_{i=0}^{n} c_i \Lambda_{n-i}$ и уравнение (2.4.1) имеет место на совокупности решений уравнения (2.2.22)

$$\sum c_i \frac{\delta I_{n-i}}{\delta u(x)} = d,$$

а алгоритм отыскания матриц в базисе (2.1.2) указан в формулах (2.2.44).

Найдем теперь, исходя из результатов § 3, формулы для временной динамики в параметрах γ_j. Используем уравнение (2.2.41), которое в базисе (2.1.1) имеет вид $\frac{\partial \chi_R}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}(\alpha \chi_R)$, где $\alpha = \frac{\lambda_I + \mu_I}{k}$, причем $\alpha = -2(u + 2E)$ для исходного уравнения КдФ ($m = 1$). Используя вид

$$\chi_R = \frac{\sqrt{P_{2n+1}(E)}}{P_n(E, x)},$$

получим

$$\frac{\partial P_n}{\partial t} = \frac{\partial \alpha}{\partial x} P_n - \alpha \frac{\partial P_n}{\partial x}, \tag{2.4.2}$$

или, подставляя в (2.4.2) $E = \gamma_j$, после разрешения относительно $\dot{\gamma}_j$ и использования уравнений (2.3.5) для γ_j'

$$\dot{\gamma}_j = \pm \frac{2i\alpha_j \sqrt{P_{2n+1}(\gamma_j)}}{\prod_{k \neq j} (\gamma_k - \gamma_j)}, \tag{2.4.3}$$

где $\alpha_j = -2(u + 2E) \mid_{E=\gamma_j(x)}$ для исходного уравнения КдФ, причем в силу (2.3.11) $u = -2\left(\sum_{j=1}^{n} \gamma_j\right) + \sum_{i=1}^{2n+1} E_i$; это дает окончательные формулы для $\dot{\gamma}_j$.

Пример. Рассмотрим $n = 2$ и исходное уравнение КдФ, где $\alpha = -2(u + 2E)$. Мы получаем уравнения

$$\left\{\begin{aligned} \dot\gamma_1 &= \pm\frac{8i\left(\gamma_2-\frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{5}E_i\right)\sqrt{P_5(\gamma_1)}}{\gamma_1-\gamma_2}, \\ \dot\gamma_2 &= \pm\frac{8i\left(\gamma_1-\frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{5}E_i\right)\sqrt{P_5(\gamma_2)}}{\gamma_2-\gamma_1}. \end{aligned}\right. \tag{2.4.3'}$$

Вводя, как и в (2.3.15), параметр τ, где $d\tau = \frac{dx}{\gamma_2-\gamma_1}$, мы получим

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d\gamma_1}{\sqrt{-P_5(\gamma_1)}} &= \pm 8\left(\gamma_2-\frac{1}{2}\sum E_i\right)d\tau, \\ \frac{d\gamma_2}{\sqrt{-P_5(\gamma_2)}} &= \pm 8\left(\gamma_1-\frac{1}{2}\sum E_i\right)d\tau. \end{aligned}\right. \tag{2.4.3''}$$

Пусть для простоты $\sum\limits_{i=1}^{5} E_i = 0$. Тогда мы имеем, введя параметр w, где $8(\gamma_2\gamma_1)d\tau = dw$,

$$\frac{\gamma_1\, d\gamma_1}{\sqrt{-P_5(\gamma_1)}} = dw, \qquad \frac{\gamma_2\, d\gamma_2}{\sqrt{-P_5(\gamma_2)}} = dw, \tag{2.4.4}$$

где dw — дифференциал первого рода на $\mathbf{\Gamma}$. Уравнения (2.4.4) и тем самым уравнения (2.4.3) очевидным образом интегрируются. Сопоставляя результат с формулами для потенциала (2.3.11), мы для параметров τ_0, x_0 получим $\frac{\partial}{\partial t}\tau_0 = 4$, $\frac{\partial}{\partial t}x_0 = 4(F_1(\tau_0) - \frac{1}{2}\sum E_i)$, и потенциал $u(x, t)$ имеет вид

$$u(x, t) = -2[F_1(\tau(x - x_0(t))) + F_2(\tau(x - x_0(t)) + \tau_0(t))] + \sum E_i, \tag{2.4.5}$$

где гиперэллиптические функции F_1, F_2 определены в § 3 главы 2 (см. формулы (2.3.16)).

Если же $u(x, 0)$ есть потенциал Айнса (Ламе), где $u(x, 0) = 6\wp(x)$ с краями зон (2.2.38), то мы имеем ($\wp(x)$ — эллиптическая функция Вейерштрасса)

$$u(x, t) = 2\wp(x - \beta_1(t)) + 2\wp(x - \beta_2(t)) + 2\wp(x - \beta_3(t)), \tag{2.4.6}$$

где

$$\beta_1+\beta_2+\beta_3 = 0, \qquad t = \int\limits_0^{\beta_1-\beta_2}\frac{dz}{\sqrt{12\,(g_2-3\wp^2(z))}},$$

$$\beta_2-\beta_3 = \frac{1}{2}\wp^{-1}\left[-\wp(\beta_1-\beta_3)+\sqrt{g_2-3\wp^2(\beta_1-\beta_3)}\right].$$

Оказывается, что отображение Абеля (2.3.25) интегрирует уравнение (2.4.3) для КдФ и всех его высших аналогов и параметры η_k имеют постоянные производные в силу всех этих уравнений. Можно вычислить производные

$$\dot\eta_k = W_k^{(m)} \tag{2.4.7}$$

в силу уравнения КдФ с номером m:

$$\frac{\partial}{\partial t}u = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\delta I_m}{\delta u(x)}. \tag{2.4.8}$$

Идея этого вычисления, по аналогии с § 3, состоит в том, что для собственной функции $\psi_\pm(x, x_0, E)$ при развитии во времени асимптотика при $E \to \infty$ будет иметь вид (при подходящей нормировке)

$$\psi \sim \exp\,[ik(x - x_0) + ik^{2n+1}(t - t_0)]. \tag{2.4.9}$$

Если доказать (2.4.9) (это встречает некоторые затруднения), то отсюда, по аналогии с § 3, вытекает такой результат: пусть ω_m — такой дифференциал на поверхности Γ, что он имеет при $E = \infty$ полюс порядка $2m + 2$ (для m-го уравнения КдФ (2.4.8), при $E \to \infty$)

$$\omega_m = \frac{dz}{z^{2m+2}} + \text{правильная часть}, \tag{2.4.10}$$

где $z = \frac{1}{\sqrt{E}} = \frac{1}{k}$, и нормированный условиями

$$\oint\limits_{a_j} \omega_m = 0 \qquad (j = 1, \ldots, n). \tag{2.4.10$'$}$$

Рассуждая, как и в § 3 с дифференциалом $d_E \ln \psi$, мы и получим искомый результат, что

$$\dot{\eta}_k = W_k^{(m)}, \qquad W_k^{(m)} = \oint\limits_{b_k} \omega_m. \tag{2.4.11}$$

Подставляя в формулу (2.3.34), выражающую потенциал $u(x, t)$ через θ-функцию Римана, мы получим динамику КдФ в виде

$$u(x, t) = -2\frac{d^2}{dx^2} \ln \theta\,((x - x_0)\,U_1 + (t - t_0)\,W_1^{(1)} + \eta_1^0 - K_1, \ldots, (x - x_0)\,U_n + (t - t_0)\,W_n^{(1)} + \eta_n^0 - K_n) + C. \tag{2.4.12}$$

Таким образом, мы получили такой результат.

Теорема. *Развитие конечнозонных потенциалов во времени в силу уравнения КдФ и любого из высших его аналогов описывается формулами* (2.4.3), (2.4.5), (2.4.11), (2.4.12) *и представляет собой движение на торе вдоль прямолинейной обмотки на многообразии всех потенциалов с данным спектром* Γ, *которое изоморфно многообразию Якоби* $\mathbf{J}(\Gamma)$ — *комплексному тору* $\mathbf{T}^{2n}$. *В частности, прямолинейная структура на торе* $\mathbf{J}(\Gamma)$ *определяется «высшими КдФ», записанными в виде набора коммутирующих полиномиальных гамильтоновых систем с n степенями свободы и гамильтонианами* $J_1, \ldots, J_n$ *в реализации* § 2.

В случае вещественной римановой поверхности Γ (потенциал вещественный и ограниченный) движение происходит по тору $\mathbf{T}^n$, наглядно реализованному в виде прямого произведения циклов a_j, являющихся прообразами лакун на поверхности Γ. Это движение является условно периодическим по времени с набором n действительных и n мнимых периодов, где периоды выражаются через интегралы $W_k^{(m)}$ от дифференциалов ω_m (для m-го аналога КдФ) по циклам b_k и матрицу решетки B_{jl}.

Так как все высшие КдФ прямолинейны на торе $\mathbf{J}(\Gamma)$, то мы видим, что на этом абелевом многообразии закон сложения точек реализуется с помощью сдвигов вдоль этих систем. В реализации § 2 многообразий $\mathbf{J}(\Gamma)$ конечнозонных потенциалов уравнениями $J_1 = J_1^0, \ldots, J_n = J_n^0$ все высшие КдФ реализовывались как гамильтоновы динамические системы в фазовом пространстве с n степенями свободы, зависящими от $n+1$ константы $(d, c_1, \ldots, c_n)$ (если $\sum E_i = 0$, то $c_1 = 0$), причем гамильтонианы J_α $(\alpha = 1, \ldots, n)$ этих систем являются полиномами от фазовых переменных, имеющими нулевые скобки Пуассона $[J_\alpha, J_\beta] = 0$. Якобиан $\mathbf{J}(\Gamma)$ задается в $\mathbf{C}^{2n}$ уравнениями $J_1 = J_1^0, \ldots, J_n = J_n^0$, а риманова поверхность Γ имеет вид

$$R(W, E) = W^2 - P_{2n+1} = 0,$$

где

$$P_{2n+1}(E) = -\det\Lambda, \quad \Lambda = \Lambda_n + \sum_{i=1}^{n} c_i \Lambda_{n-i};$$

при $n = 2$ согласно формулам (2.2.36) мы имеем абелевы многообразия $\mathbf{J}(\Gamma)$:

$$J_1 = p_1 p_2 - \left(\frac{1}{2} q_2^2 + \frac{5}{2} q_1^2 q_2 + \frac{5}{8} q_1^4\right) + c_2 q_1^2 - d q_1,$$

$$J_2 = p_1^2 - 2 q_1 p_1 p_2 + 2(q_2 - c_2) p_2^2 + q_1^5 + 2 c_2 q_1^3 + d q_1^2 - 4 q_1 q_2^2 + 4 c_2 q_1 q_2 - 2 d q_2;$$

$$-\det\Lambda = P_5(E) = E^5 + \frac{1}{4} c_2 E^3 - \frac{1}{16} d E^2 + \left(\frac{1}{32} J_1 + \frac{1}{4} c_2^2\right) E + J_2/2^8 + c_2 d/2^7,$$

где $c_1 = \sum E_i = 0$, $q_1 = u$, $q_2 = -\frac{5}{2} u^2 + u''$, $p_1 = q_2'$, $p_2 = u'$.

Изоморфные абелевы многообразия получаются в том случае, когда римановы поверхности изоморфны, т. е. когда корни (E_i) полинома $P_{2n+1}(E)$ отличаются умножением все на одно число λ, если $\sum E_i = c_1 = 0$. После учета этой эквивалентности остается всего $2n+2$ (n — род) изоморфных поверхностей Γ, поскольку одна из $2n+2$ точек ветвления выделена и лежит в точке $E = \infty$. Напомним, что гиперэллиптические римановы поверхности взаимно однозначно определяются корнями полинома $Q_{2n+2}(E)$ с точностью до общего дробно-линейного преобразования и любой перестановки корней. Мы располагаем одну точку ветвления в бесконечности $E_{2n+2} = \infty$ и дополнительно считаем $\sum E_i = 0$, оставшиеся же $2n$ чисел разрешаем одновременно умножать на одно и тоже число λ. Кроме того, все коэффициенты полинома $\det\Lambda = P_{2n+1}(E)$ симметрично выражаются через $E_1, \ldots, E_{2n+1}$. Оставшаяся в наших конструкциях несимметрия — это выделение одной точки ветвления $E_{2n+2} = \infty$.

Пусть $v \in \mathbf{V}$ — точка базы многообразия модулей гиперэллиптических кривых Γ определяется набором $v = (E_1, \ldots, E_{2n+2})$ с точностью до общего дробно-линейного преобразования и перестановки; пусть $\widetilde{\mathbf{V}} \xrightarrow{2n+2} \mathbf{V}$ — описанное нами накрытие, связанное с выделением одной точки ветвления $E_{2n+2} = \infty$. Над каждой точкой $\mathbf{V}$ имеется многообразие Якоби $\mathbf{J}(\Gamma)$ соответствующей кривой Γ, и мы имеем универсальное расслоение якобиевых многообразий $\mathbf{M} \xrightarrow{\mathbf{J}(\Gamma)} \mathbf{V}$ и его $2n+2$-листное накрытие $\widetilde{\mathbf{M}} \xrightarrow{\mathbf{J}(\Gamma)} \widetilde{\mathbf{V}}$, где точка $\widetilde{v} \in \widetilde{\mathbf{V}}$ определяется набором $\widetilde{v} = (E_1, \ldots, E_{2n+1})$ с точностью до перестановки и умножения $(E_1, \ldots, E_{2n+1}) \sim \lambda(E_1, \ldots, E_{2n+1})$, $\sum E_i = 0$. Это многообразие $\widetilde{\mathbf{M}}$ вычисляется в наших конструкциях следующим образом:

в пространстве $\mathbf{C}^{3n}$ имеются координаты $z_1, \ldots, z_{3n}$, где $z_i = q_i$, $z_{n+i} = p_i$, $i \leqslant n$; $z_{2n+1} = d$, $z_{2n+i} = c_i$, $2 \leqslant i \leqslant n$, и симплектическая форма $\Omega = \sum_i dp_i \wedge dq_i$. Все абелевы многообразия задаются уравнениями

$$\begin{cases} z_j = \mathrm{const}, & j \geqslant 2n+1, \\ J_\alpha = \mathrm{const}, & (\alpha = 1, \ldots, n), \end{cases}$$

и тем самым лежат в пространствах $\mathbf{C}^{2n}$. Универсальное расслоение распадается в семейство расслоений каждого из $\mathbf{C}^{2n}$ $\{z_j = \mathrm{const}, j > 2n\}$ уровнями всех полиномов J_α, зависящих от оставшихся n координат $z_{2n+1}, \ldots, z_{3n}$ как от параметров. Алгоритм вычисления полиномов J_α указывался в § 2. Закон сложения на абелевых многообразиях и все однопараметрические подгруппы даются гамильтоновыми системами с гамильтонианами J_α. Группа умножений всех корней E_i на λ действует, умножая коэффициенты полинома $P_{2n+1}(E) = \det \Lambda$ на соответствующие степени λ. Можно выбрать λ, потребовав $c_2 = 1$.

Таким образом, мы получаем вывод:

многообразие $\tilde{\mathbf{M}}$ — пространство универсального расслоения якобиевых многообразий $\mathbf{J}(\Gamma)$ с выделенной точкой ветвления $E_{2n+2} = \infty$ — является рациональным многообразием; это универсальное расслоение со слоем $\mathbf{J}(\Gamma)$ распадается на семейство расслоений с рациональными пространствами расслоений размерности $2n$, расслаиваемых с помощью полиномов J_α, алгоритм вычисления которых дан в § 2. На аффинных частях пространства расслоения $\mathbf{C}^{2n}$ имеется симплектическая форма и скобки Пуассона всех полиномов J_α попарно равны нулю. Абелевы многообразия есть комплексные решения этой коммутирующей совокупности гамильтоновых систем.

Отметим, что само многообразие $\mathbf{M}$, вероятно, тоже рационально, но мы доказали здесь только его унирациональность. Далее отметим, что в общем (негиперэллиптическом) случае также можно развить аналогичный метод, пользуясь вместо оператора Шрёдингера операторами более высокого порядка. Подход к этим задачам см. в главе 3, § 2.

ГЛАВА 3

ОБОБЩЕНИЯ. ДИСКРЕТНЫЕ СИСТЕМЫ И МАТРИЧНЫЕ ОПЕРАТОРЫ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

§ 1. Периодическая задача для цепочки Тода и «разностного уравнения КдФ»

Как уже говорилось в § 5 главы 1, С. В. Манаков и Фляшка [33], [34], [35] нашли L — A-пару для цепочки Тода, доказали инволютивность интегралов Хенона [32] и проинтегрировали полностью методом теории рассеяния задачу Коши для цепочки Тода с быстроубывающими начальными условиями $c_n \to \mathrm{const}$, $v_n \to 0$, $|n| \to \infty$. Кроме того, с оператором L при условии $v_n \equiv 0$ связана еще одна физически интересная система —«разностное КдФ», открытая в [35], где интегралы впервые нашел Манаков и затем проинтегрировал ее тем же методом в быстроубывающем случае. Мы, следуя неопубликованной работе С. П. Новикова, рассмотрим здесь периодическую задачу для обоих этих систем методом, аналогичным главе 2. Оператор L имеет вид, указанный в § 5 из главы 1, и уравнение $L\psi_n = E\psi_n$ таково:

$$(E - v_n)\,\psi_n = i\sqrt{c_n}\,\psi_{n-1} - i\sqrt{c_{n+1}}\,\psi_{n+1}. \tag{3.1.1}$$

После замены $\psi_n \mapsto i^n\psi_n$ получаем

$$(E - v_n)\,\psi_n = \sqrt{c_n}\,\psi_{n-1} + \sqrt{c_{n+1}}\,\psi_{n+1}. \tag{3.1.1$'$}$$

Вронскиан для оператора (3.1.1′) имеет вид

$$W_n(\varphi,\ \psi) = (-1)^n\sqrt{c_{n+1}}\,(\psi_{n+1}\varphi_n - \psi_n\varphi_{n+1}) \tag{3.1.2}$$

и не зависит от n. Мы будем пользоваться здесь аналогом базиса (2.1.2) из главы 2 $c(n,\ n_0,\ E)$, $s(n,\ n_0,\ E)$, где

$$\begin{cases} c_{n_0} = 1, & c_{n_0+1} = 0, \\ s_{n_0} = 0, & s_{n_0+1} = 1, \end{cases} \tag{3.1.3}$$

причем $W(c,\ s) = \sqrt{c_{n_0+1}}(-1)^{n_0+1}$. В периодическом случае обычным образом определяется матрица трансляции на период (в базисе (3.1.3))

$$\hat{T} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix},$$

где α_{ij} вещественны при вещественных E и $\det \hat{T} = 1$ (пусть период N четен). Точно так же определяются блоховские собственные функции $\psi_\pm(n,\ n_0,\ E)$, где $\psi_{n_0} = 1$, $\hat{T}\psi_\pm = e^{\pm ip(E)}\psi_\pm$, мероморфные на римановой поверхности Γ, ветвящейся в границах зон. Существенно отметить, что для оператора L (см. (3.1.1) и (3.1.1′) имеется всего конечное число запрещенных и разрешенных зон, причем окрестность точки $E = \infty$ всегда является запрещенной зоной. Тем самым риманова поверхность Γ всегда имеет конечный род и определяется уравнением

$$y^2 = P_{2n+2}(E) = \sum_{i=1}^{2n+2} (E - E_i), \tag{3.1.4}$$

где E_i — края зон. Введем следующие обозначения:

$$\begin{cases} \psi_\pm(n,\ n_0,\ E) = \exp\Big(\sum\limits_{n_0}^{n-1} \Delta_n\Big), \\ \chi^\pm(n,\ E) = e^{\Delta_n}. \end{cases} \tag{3.1.5}$$

Из (3.1.1) мы получим следующее уравнение (аналог уравнения Риккати):

$$E - v_n = \sqrt{c_n}\,e^{-\Delta_{n-1}} + \sqrt{c_{n+1}}\,e^{\Delta_n}. \tag{3.1.6}$$

В разрешенных зонах, где $p(E)$ действительно, мы получим из (3.1.6)

$$\begin{cases} \chi = \chi_{Re} + i\chi_{\mathrm{Im}}, & \psi_+ = \overline{\psi}_-, \\ \chi = \chi^+ = \overline{\chi^-}, & \Delta_n = \Delta_{n_R} + i\Delta_{n_I}, \\ \Delta_{n_R} = -\frac{1}{2}\ln\big\{[\sqrt{c_{n+1}}\,\chi_{\mathrm{Im}}(n+1,\ E)] - [\sqrt{c_n}\,\chi_{\mathrm{Im}}(n,\ E)]\big\}. \end{cases} \tag{3.1.7}$$

Из соотношений (3.1.7) следует (в разрешенных зонах)

$$\psi_\pm(n,\ n_0,\ E) = \sqrt{\frac{\sqrt{c_{n+1}}\,\chi_{\mathrm{Im}}(n,\ E)}{\sqrt{c_n}\,\chi_{\mathrm{Im}}(n_0,\ E)}}\,\exp\Big\{i\sum_{n_0}^{n-1} \Delta_{n_I}\Big\}. \tag{3.1.8}$$

Далее, из определения W следует

$$(3.1.8') \qquad \begin{cases} W(\psi_+, \psi_-) = 2i\chi_{\mathrm{Im}}(n_0, E)\sqrt{c_{n_0+1}}, \\ \psi_\pm = c + \chi(n_0, E)\, s, \quad \chi = \chi^+ \quad \text{или} \quad \chi = \chi^-. \end{cases}$$

Как и в главе 2, функция $\chi(n_0, E)$ выражается через коэффициенты матрицы $\hat{T}$, причем $\chi_{\mathrm{Im}}(n, E)$ имеет такой же вид, как и в формуле (2.1.19):

$$(3.1.9) \qquad \chi_{\mathrm{Im}}(n_0, E) = \frac{\sqrt{1 - \frac{1}{4}(\mathrm{Sp}\,\hat{T})^2}}{\alpha_{21}}.$$

Как и в § 3 главы 2, функция $2i\chi_{\mathrm{Im}}(n_0, E)\sqrt{c_{n_0+1}}$ продолжается из разрешенных зон на все комплексные значения E по формуле (3.1.9) и совпадает с вронскианом $W(\psi_+, \psi_-)$. При $E \to \infty$ она имеет одну из двух асимптотик (напомним при этом, что риманова поверхность Γ, задаваемая формулой (3.1.4), имеет два листа $\pm$ над точкой $E = \infty$, где локальным параметром на каждом из листов является $z = 1/E$)

$$(3.1.10) \qquad \begin{cases} \chi^+(n, E) \to \dfrac{E}{\sqrt{c_{n+1}}}\left(1 + O\left(\dfrac{1}{E}\right)\right), \\ \chi^-(n, E) \to \dfrac{\sqrt{c_{n+1}}}{E}\left(1 + O\left(\dfrac{1}{E}\right)\right) \end{cases}$$

на двух листах поверхности Γ при $E \to \infty$. Поэтому для $W(\psi_+, \psi_-) = \chi^+ - \chi^-$ мы будем иметь асимптотику при $E \to \infty$:

$$(3.1.10') \qquad W \to 2E + O(1).$$

По точной аналогии с § 3 главы 2, мы из асимптотики (3.1.10') получим

$$(3.1.11) \qquad \frac{1}{2} W(\psi_+, \psi_-) = \frac{\sqrt{\prod_{i=1}^{2m+2}(E - E_i)}}{\prod_{j=1}^{m}(E - \gamma_j(n_0))}.$$

Из (3.1.11) в разрешенных зонах следует

$$(3.1.11') \qquad \chi_{\mathrm{Im}}(n_0, E) = \frac{1}{2\sqrt{c_{n_0+1}}} W(\psi_+, \psi_-).$$

Сопоставляя с формулами (3.1.7), применяемыми внутри разрешенных зон, мы получим формулу

$$(3.1.12) \qquad \chi^\pm(n, E) = \frac{\sqrt{R} + \sqrt{R + 4\Pi_n\Pi_{n+1}c_{n+1}}}{2\sqrt{c_{n+1}}\,\Pi_n},$$

где $R(E) = \prod_{j=1}^{2m+2}(E - E_i)$, $\Pi_n = \prod_{j=1}^{m}(E - \gamma_j(n))$. Это выражение, однако, не может еще рассматриваться как окончательный результат для величины $\chi^\pm(n_0, E)$. Дело в том, что формула (3.1.12), формально говоря, алгебраична на римановой поверхности Γ', двулистно накрывающей поверхность Γ. Мы знаем, что величина $\chi^\pm(n_0, E)$ алгебраична на поверхности Γ и имеет полюсы первого порядка лишь над точками $\gamma_j(n_0)$ на каком-то из прообразов этой точки. Отсюда следует важное следствие: стоящее под корнем выражение $R + 4c_{n+1}\Pi_n\Pi_{n+1}$ должно быть полным квадратом некоторого многочлена степени $m+1$:

$$R+4c_{n+1}\Pi_n\Pi_{n+1}=\prod_{k=1}^{m+1}(E-\alpha_k(n))^2. \tag{3.1.13}$$

При этом из условий (3.1.13) вытекает полный набор соотношений вида

$$\begin{cases}\gamma_j(n+1)=f_j(\gamma_1(n),\ \ldots,\ \gamma_m(n)),\\ \quad c_{n+1}=c_{n+1}(\gamma_1(n),\ \ldots,\ \gamma_m(n)),\end{cases} \tag{3.1.13$'$}$$

дающий разностный аналог уравнений Дубровина для величин $\gamma_j(n)$ и необходимый аналог «тождеств следов» для выражения c_{n+1} через $\gamma_1(n),\ \ldots$ $\ldots,\ \gamma_m(n)$.

Конечно, из асимптотики $\chi^+(n,\ E)$ при $E\to\infty$ можно получить обычные тождества следов, как и в главе 2; действительно, из уравнения (3.1.6) имеем

$$\chi^+(n,\ E)\sim\frac{E}{\sqrt{c_{n+1}}}\left(1-\frac{v_n}{E}-\frac{c_n}{E^2}+O\left(\frac{1}{E^3}\right)\right). \tag{3.1.14}$$

Разлагая формулу (3.1.12) при $E\to\infty$, получим

$$\begin{cases}v_n=-\sum\limits_{j=1}^{m}\gamma_j(n)+\dfrac{\sigma_1}{2},\\ c_n+c_{n+1}+v_n^2-\dfrac{\sigma_1 v_n}{2}=\sum\limits_{j\neq k}\gamma_j(n)\gamma_k(n)+\dfrac{\sigma_1^2}{8}-\dfrac{\sigma_2}{2}.\end{cases} \tag{3.1.15}$$

Таким образом, для вычисления c_{n+1} нехватает обычных формул следов, и недостающие выражения мы получаем из требования (3.1.13).

Рассмотрим простейшие примеры.

$m=1$. Пусть для удобства $\sigma_1=\sum\limits_{i=1}^{4}E_i=0$. Тогда мы имеем из (3.1.13)

$$\begin{cases}\sigma_2+4c_{n+1}=-2\alpha_n^2,\\ \sigma_3-4c_{n+1}(\gamma_{1n}+\gamma_{1n+1})=0,\\ \quad\sigma_4+4c_{n+1}(\gamma_{1n}\gamma_{1n+1})=\alpha_n^4.\end{cases} \tag{3.1.16}$$

$m=2$. Пусть $v_n\equiv 0$ (симметричный спектр). Тогда

$$R(E)=\prod_{i=1}^{3}(E+E_i)(E-E_i),$$

$$\gamma_{1,n}+\gamma_{2,n}\equiv 0,\quad \sigma_1=\sigma_3=\sigma_5=0.$$

Из (3.1.13) мы получим

$$\begin{cases}\sigma_4-4c_{n+1}(\gamma_{1n}^2+\gamma_{1n+1}^2)=\dfrac{1}{4}(\sigma_2+4c_{n+1})^2,\\ \quad 4c_{n+1}\gamma_{1n}^2\gamma_{1n+1}^2=-\sigma_6.\end{cases} \tag{3.1.17}$$

Из (3.1.16) и (3.1.17) в рассмотренных примерах мы можем легко получить уравнение Дубровина и выражение для c_n.

Действуя далее по схеме § 3 главы 2, мы рассмотрим аналитические свойства функции $\psi_\pm(n,\ n_0,\ E)$ на поверхности Γ:

1) $\psi_\pm$ имеет нули $P_j(n) = [\gamma_j(n), \pm]$ и полюсы $P_j(n_0) = [\gamma_j(n_0), \pm]$, которые при вещественных v_n и $c_n > 0$ лежат по одному в лакунах на одном из листов Γ.

2) При $E \to \infty$ на обоих листах Γ мы имеем

$$\psi_\pm \sim E^{\pm(n-n_0)}\cdot\text{const}.$$

Поэтому дифференциал $d_E \ln\psi$ имеет полюсы первого порядка с вычетом $+1$ в точках $P_j(n)$ и полюсы первого порядка с вычетом -1 в точках $P_j(n_0)$; при $E = \infty$ на листах $(\pm)$ этот дифференциал имеет полюсы с вычетами $\pm(n - n_0)$; интегралы от $d_E\ln\psi$ по всем циклам являются целыми кратными $2\pi i$. Если

$$\Omega_l = \sum_{k=0}^{n-1} c_{kl} \frac{E^k\, dE}{\sqrt{R(E)}}$$

— голоморфные дифференциалы, нормированные условиями

$$\oint_{a_j} \Omega_l = 2\pi i \delta_{jl},$$

где a_j — циклы над лакунами, то, по аналогии с рассуждением из § 3, мы будем иметь

$$\sum_{j=1}^{n} \int_{P_j(n_0)}^{P_j(n)} \Omega_l = \left(2\pi i \oint_{b_l} \Omega\right)(n - n_0), \tag{3.1.18}$$

где $\Omega = \Omega^{\infty_+, \infty_-}$ — дифференциал, имеющий полюсы в точках (∞_+, ∞_-) и вычеты в них $(+1, -1)$, нормированный условиями $\oint \Omega = 0$. Далее, мы имеем $\oint_{b_j} \Omega = \int_{\infty_+}^{\infty_-} \Omega_j$, как и в § 3, для дифференциалов Ω^{PQ}, поскольку циклы b_j сопряжены к a_j. В вещественном случае получаем

$$\oint_{b_j} \Omega = 2\int_{E_{2n+2}}^{\infty} \Omega_j = U_j. \tag{3.1.19}$$

Из (3.1.18) и (3.1.19) мы получим, как и в § 3, используя тождество следов (3.1.15), аналог формулы Матвеева — Итса для v_n через ограничение θ-функций на прямолинейную обмотку с направлениями U_j на многообразии Якоби $J(\Gamma)$:

$$v_n = -\frac{d}{dn} \ln \frac{\theta\left((n-n_0)\vec{U} + \eta^0_+ - \vec{K}\right)}{\theta\left((n-n_0)\vec{U} + \eta^0_- - \vec{K}\right)} + \text{const}; \quad (\eta^0_\pm)_j = \sum_k \int_{\infty_\pm}^{P_k(n_0)} \Omega_j. \tag{3.1.20}$$

Используя технику приложения 3, легко выразить сумму $c_n + c_{n+1}$ через θ-функцию Римана, на основании тождеств следов (3.1.15). Однако удобного выражения для c_n отсюда мы не получаем. В принципе, можно завершить все вычисления, исходя из требования (3.1.13). Отдельно заметим, что при условии $v_n \equiv 0$ спектр оператора L симметричен:

$$(3.1.21) \qquad R(E)=\prod_{i=1}^{m+1}(E-E_i)(E+E_i).$$

Расположение нулей $\gamma_j(n)$ и полюсов $\gamma_j(n_0)$ в лакунах также симметрично.

Перейдем теперь к нелинейным системам, связанным с оператором L. Их гамильтонианы I_k могут быть получены, как указано в [35], из разложения величины $\Delta_n(E) = \ln \chi(n, E)$ по E^{-1} при $E \to \infty$, вытекающего из (3.1.6) и (3.1.10):

$$(3.1.22) \qquad \Delta_n^+(E) \sim \ln E - \ln \sqrt{c_{n+1}} + \ln(1+O(1/E)) =$$
$$= \ln \frac{E}{\sqrt{c_{n+1}}} + \sum_{q\geq 1} b_{qn}/E^q =$$
$$= \ln\left(E/\sqrt{c_{n+1}}\right) - \frac{v_n}{E} - \frac{c_n+\frac{v_n^2}{2}}{E^2} - \frac{\frac{v_n^3}{3}+v_nc_n+c_nv_{n-1}}{E^3} + \ldots$$

Все интегралы $I_q = \sum_{n=n_0}^{n_0+N} b_{qn}$ сохраняются во времени в силу каждой из систем, и все эти системы коммутируют; по определению, $c_n = e^{x_n - x_{n-1}}$.

Каноническими координатами являются (x_n, v_n). Первые из этих систем имеют вид

$$(3.1.23) \quad \begin{cases} \text{a)} \quad \dot{x}_n = 1, \quad \dot{v}_n = 0, \quad I_1 = \sum v_n; \\ \text{b)} \quad \dot{x}_n = v_n, \quad \dot{v}_n = c_{n+1} - c_n, \quad I_2 = \sum \left(\frac{v_n^2}{2} + c_n\right); \\ \text{c)} \quad \dot{x}_n = v_n^2 + c_{n+1} + c_n, \quad \dot{v} = (v_{n+1}+v_n)\,c_{n+1} - (v_n+v_{n-1})\,c_n, \\ \qquad I_3 = \sum \left(\frac{v_n^3}{3} + v_nc_n + c_nv_{n-1}\right). \end{cases}$$

Для системы (3.1.23), c) многообразие $v_n \equiv 0$ является инвариантным, и на нем эта система имеет вид «разностного КдФ»

$$(3.1.23') \qquad \dot{c}_n = c_n(c_{n+1} - c_{n-1}).$$

Следует, отыскивая важные семейства решений этих уравнений, решать стационарную задачу для линейных комбинаций этих систем (искать особые точки гамильтонианов $H = \sum \lambda_j I_j$), определяющую «потенциалы» (v_n, c_n) с одной, двумя и т. д. конечными лакунами. В частности, стационарные решения цепочки Тода (3.1.23), *в*) имеют вид «0-зонных» операторов

$$(3.1.24) \qquad \begin{cases} v_n = \dot{x}_n = \text{const}, & H = I_2 + \lambda I_1, \\ \dot{v}_n = 0 = c_{n+1} - c_n & (c_n \equiv \text{const}). \end{cases}$$

«1-зонные» операторы L мы получим из стационарных точек гамильтониана H, где

$$(3.1.25) \qquad H = I_3 + \lambda I_2 + \mu I_1,$$

или

$$v_n^2 + c_{n+1} + c_n + \lambda v_n + \mu = 0,$$
$$(v_{n+1} + v_n)c_{n+1} + (v_n + v_{n-1})c_n + \lambda(c_{n+1} - c_n) = 0.$$

Легко видеть, что замена $v_n \to v_n + \mathrm{const}$, $c_n \to c_n$ позволяет сделать $\lambda \equiv 0$. Однако уравнения (3.1.25) являются разностными, и их трудно решать (уже в однолакунном случае). Для нахождения аналитической формы 1-зонных операторов L можно поступить одним из двух способов.

Способ 1. Воспользоваться алгебро-геометрической формулой для v_n (см. (3.1.20)) и затем вычислить c_n, исходя из соотношений (3.1.16).

Способ 2. Воспользоваться тем, что временная динамика цепочки Тода на однозонных потенциалах (v_n, c_n) будет «простой волной» $\{v(n - ct), c(n - \alpha t)\}$ при всех t, и вычислить динамику по t вместо разностного уравнения по n.

После замены Абеля, по аналогии с § 4 главы 3, временна́я динамика всех этих систем станет линейной.

Пример 1. Пусть $m = 1$; используя формулы (3.1.16), мы получим для $m = 1$ $(\sum E_i = \sigma_1 = 0)$

$$(3.1.26)\qquad \begin{cases} \gamma_n + \gamma_{n+1} = \dfrac{\sigma_3}{L(\gamma_n)}\,[2\gamma_n^2 + \sigma_2 \pm \sqrt{P_4(\gamma_n)}], \\ \gamma_n + \gamma_{n-1} = \dfrac{\sigma_3}{L(\gamma_n)}\,[2\gamma_n^2 + \sigma_2 \mp \sqrt{P_4(\gamma_n)}], \\ P_4(E) = \prod\limits_{i=1}^{4}(E - E_i), \qquad L(\gamma_n) = 4\sigma_4 - \sigma_2^2 + 4\sigma_3\gamma_n, \\ \dot v_n = \dot\gamma_n = c_{n+1} - c_n = \dfrac{\sigma_3}{4}\left(\dfrac{1}{\gamma_{n+1} + \gamma_n} - \dfrac{1}{\gamma_n + \gamma_{n-1}}\right) = \\ \qquad = \sqrt{P_4(\gamma_n)}, \qquad \sigma_3 \neq 0. \end{cases}$$

Если $\sigma_3 = 0$, то мы имеем

$$(3.1.26')\qquad \begin{cases} \gamma_{n+1} + \gamma_n = 0, \\ \dot\gamma_n = c_{n+1} - c_n = \sqrt{P_4(\gamma_n)}. \end{cases}$$

Таким образом, при $m = 1$ функции $\gamma_n(t) = \gamma(n - \alpha t)$ имеют вид эллиптической функции

$$t - t_0 = \int^{\gamma_n} \frac{d\tau}{\sqrt{P_4(\tau)}}.$$

Согласно формулам (3.1.16) для коэффициентов c_n и v_n мы получаем

$$(3.1.27)\qquad \begin{cases} v_n = \gamma_n & (\sigma_1 = 0), \\ 4c_{n+1} = \dfrac{\sigma_3}{\gamma_n + \gamma_{n+1}} & (\sigma_3 \neq 0), \\ (\sigma_2 + 4c_{n+1})^2 + 4c_{n+1} - 4\sigma_4\gamma_n^2 = 0 & (\sigma_3 = 0), \end{cases}$$

где $\gamma_n + \gamma_{n+1}$ находится из формул (3.1.26).

Пример 2. Пусть $m = 2$ и $v_n \equiv 0$.

Рассмотрим теперь симметричный спектр при $m = 2$, где $v_n \equiv 0$, $\sigma_1 = \sigma_3 = \sigma_5 = 0$. Мы имеем соотношение $\gamma_{1n} + \gamma_{2n} \equiv 0$ в силу равенства $v_n = \sum \gamma_{jn} \equiv 0$; из тождеств следов (3.1.15) получаем

$$(3.1.28)\qquad -(c_{n+1} + c_n) = \gamma_{1n}^2 + \frac{1}{2}\left(\sum E_i^2\right).$$

Обозначим γ_{1n}^2 через γ_n. Используя формулы (3.1.17), получим

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\gamma_n = \frac{t_n}{2} \pm \sqrt{\frac{P_4(c_n)}{16^2 c_n^2}},\\
&\gamma_{n-1} = \frac{t_n}{2} \mp \sqrt{\frac{P_4(c_n)}{16^2 c_n^2}},\\
&\gamma_n - \gamma_{n-1} = \frac{2}{16c_n}\sqrt{P_4(c_n)},\\
&P_4(x) = [4\sigma_4 - (\sigma_2 + 4x)^2]^2 + 16\cdot 4\sigma_6 x,\\
&t_n = -\frac{(\sigma_2 + 4c_n)^2}{16c_n} + \frac{4\sigma_4}{16c_n}.
\end{aligned}
\right.
\tag{3.1.29}
$$

Используем теперь разностное уравнение КдФ

$$\dot{c}_n = c_n(c_{n+1} - c_{n-1}).$$

Вместе с формулами (3.1.29) имеем

$$(\ln c_n{}^*)^{\boldsymbol{\cdot}} = \gamma_n - \gamma_{n-1}. \tag{3.1.30}$$

Используя выражение γ_n, γ_{n-1}, через c_n получим

$$\dot{c}_n = \frac{1}{8}\sqrt{P_4(c_n)}, \tag{3.1.31}$$

где $P_4(c_n) = [4\sigma_4 - (\sigma_2 + 4c_n)^2]^2 + 16\cdot 4\sigma_6 c_n$.

Наконец, отметим разностные аналоги некоторых других результатов главы 2.

По аналогии с § 2 главы 2 определяется матрица $Q(n_0, E)$ и матрица $\Lambda(n_0, E)$ для данной нелинейной системы в базисе (3.1.3). Имеют место уравнения

$$
\begin{gathered}
\hat{T}(n_0+1) = Q(n_0)\hat{T}Q^{-1}(n_0),\\
\frac{d}{dt}c(n, n_0, E) = \lambda_{11}c + \lambda_{12}s + Ac,\\
\frac{d}{dt}s(n, n_0, E) = \lambda_{21}c + \lambda_{22}s + As,\\
\dot{L} = [A, L], \qquad \dot{T} = [\Lambda, T],\\
\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} \end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix}.
\end{gathered}
$$

Спектр оператора L такого, что $L = [A, L] = 0$, определяется на римановой поверхности Γ:

$$\det(y - \Lambda(E)) = 0,$$

или, если $\operatorname{Sp}\Lambda = 0$, то $y^2 = \det\Lambda = P_{2n+2}(E)$. Коэффициенты полинома $\det\Lambda = P_{2n+2}(E)$, как и ранее, дают «интегралы» разностного уравнения в случае стационарной задачи. Их можно использовать, в частности, для вложения многообразия Якоби $J(\Gamma)$ в проективное пространство, по аналогии с главой 2. Из требования совместимости уравнений

$$\dot{T} = [\Lambda, T] \text{ и } T_{n+1} = QT_nQ^{-1}$$

мы получим уравнение

$$\frac{dQ(n)}{dt} = \Lambda(n+1)Q(n) - Q(n)\Lambda(n).$$

Эти уравнения эквивалентны исходной нелинейной системе. Если мы имеем стационарную задачу, то

$$\Lambda(n+1) = Q(n)\Lambda(n)Q^{-1}(n),$$
$$\frac{d}{dt}Q(n) \equiv 0.$$

В заключение отметим, что проведенные рассмотрения требуют «локальности» оператора L (кроме сохранения величины типа вронскиана). Для нас важно, что независимо от величины периода базис собственных функций может быть определен (при данном E) значениями в наборе соседних точек, в которых можно однозначно определить также нормировку блоховской функции $\psi_\pm$.

§ 2. Матричные операторы первого порядка и связанные с ними нелинейные системы

Изложим здесь (вместе с набросками доказательств) результаты, полученные в самое последнее время Дубровиным и Итсом применительно к нелинейным системам, связанным с матричными линейными дифференциальными операторами первого порядка А. Р. Итс [52] детально исследовал случай двумерного матричного оператора и связанных с ним нелинейного уравнения Шрёдингера и модифицированного КдФ при помощи сравнений формул следов (см. Приложение 3 настоящего обзора) и получил для этого случая удобные явные формулы на языке теории θ-функций. Случай общих матричных операторов разобран Б. А. Дубровиным [51] (при изложении мы в основном следуем работе [51]). При этом преследовались следующие цели.

1. Обобщение методов авторов для матричных операторов более чем двумерных встречает определенные трудности. В то же время с такими операторами связан ряд физически интересных нелинейных уравнений — например, для трехмерных операторов это указанное В. Е. Захаровым и С. В. Манаковым [27] уравнение взаимодействия волновых пакетов в нелинейных средах (см. главу 1, § 4 настоящего обзора).

2. Приложение к теории абелевых многообразий по схеме работы [43] (см. § 4 главы 2 настоящего обзора). При этом удается эффективно описать универсальное расслоение не только гиперэллиптических многообразий Якоби.

3. Как указал А. Н. Тюрин, интересен вопрос о возможности применения нашей техники к классической проблеме об унирациональности не только пространства универсального расслоения якобиевых многообразий, но и самой базы этого расслоения, т. е. об унирациональности пространства модулей алгебраических кривых. Укажем, что алгебраические кривые Γ (см. ниже), получающиеся в рамках нашей конструкции, образуют заведомо унирациональное семейство, но коразмерность этого семейства в пространстве модулей всегда ненулевая.

Мы рассматриваем (n-мерный) матричный линейный дифференциальный оператор первого порядка $L = \frac{d}{dx} + U(x)$, $U(x) = (u_i^j(x))$ — матрица n-го порядка, периодически зависящая от x с периодом T, с нулевыми диагональными элементами: $u_i^i \equiv 0$ $(i = 1, \ldots, n)$. Для оператора L ставится задача на собственные значения:

$$L\psi = EA\psi, \qquad \psi(x + T, E) = e^{p(E)}\psi(x, E). \tag{3.2.1}$$

Здесь E — комплексный параметр, A — постоянная диагональная матрица $A = (a_i\delta_i^j)$, $\sum a_i = 0$. Удобно рассматривать сразу семейство таких задач, параметризованных матрицами A.

Пусть $\mathbf{A}$ — $(n-1)$-мерное пространство диагональных комплексных матриц n-го порядка со следом нуль. Мы будем в дальнейшем рассматривать функции от $n-1$ переменных, считая эти переменные параметризованными матрицами A: каждой матрице $A \in \mathbf{A}$ соответствует переменная x_A, где $x_{A+B} = x_A + x_B$, $x_{\lambda A} = \lambda x_A$; совокупность этих $(n-1)$ переменных обозначим X. Пусть $V = V(X)$ — матрица $(n \times n)$, зависящая от X. Для каждой матрицы $A \in \mathbf{A}$ построим оператор L_A, зависящий от параметра E:

$$L_A = \frac{\partial}{\partial x_A} + [A, V(X)] - EA. \tag{3.2.2}$$

Матрица V называется *потенциалом оператора* L_A. Оператор L_A действует на функции от x_A и зависит от остальных переменных x_B $(B \in \mathbf{A})$, как от параметров. Потребуем, чтобы все операторы L_A при разных $A \in \mathbf{A}$ коммутировали между собой:

$$\left\{\begin{array}{l} [L_A, L_B] = 0 \Longleftrightarrow \dfrac{\partial Q_B}{\partial x_A} - \dfrac{\partial Q_A}{\partial x_B} = [Q_A, Q_B], \\ Q_A = [A, V] - EA, \qquad Q_B = [B, V] - EB. \end{array}\right. \tag{3.2.3}$$

Условие коммутации (3.2.3) эквивалентно следующему нелинейному уравнению на матрицу $V(X)$:

$$\left[A, \frac{\partial V}{\partial x_B}\right] - \left[B, \frac{\partial V}{\partial x_A}\right] = [[A, V], [B, V]]. \tag{3.2.4}$$

Формулы (3.2.3) показывают, что уравнение (3.2.4) допускает коммутационное представление на матрицах n-го порядка, полиномиально (линейно) зависящих от параметра E в смысле § 2 главы 2 (см. формулу (2.2.20)). Меняя матрицы A и B, мы получим систему $(n-2)$ уравнений на матрицу $V(X)$, зависящую от $(n-1)$ аргумента: так что, зная зависимость V от одного переменного x_A, мы можем определить зависимость от любого другого x_B $(B \in \mathbf{A})$, решая задачу Коши для уравнения (3.2.4). В дальнейшем всегда будем считать, что $V(X)$ есть решение системы уравнений (3.2.4), где A и B пробегают все диагональные матрицы $\mathbf{A}$.

Построим теперь набор коммутирующих динамических систем на многообразии матриц $V(X)$, являющихся решениями системы (3.2.4). Легко видеть, что уравнение $\frac{\partial}{\partial x_A}\lambda_A = [\lambda_A, Q_A]$ имеет единственное решение в виде формального ряда по $1/E$, начинающегося с A:

$$\lambda_A = \lambda_{0,A} + \frac{\lambda_{1,A}}{E} + \frac{\lambda_{2,A}}{E^2} + \ldots; \qquad \lambda_{0,A} = A. \tag{3.2.5}$$

Если $V(X)$ есть решение системы (3.2.4), то λ_A удовлетворяет и такому уравнению:

$$\frac{\partial}{\partial x_B}\lambda_A=[\lambda_A,\ Q_B].$$

Матричные элементы матриц $\lambda_{k,\ A}$ полиномиально выражаются через матричные элементы V, $\partial V/\partial x_A$, $\partial^2 V/\partial x_A^2$, ... с постоянными коэффициентами, зависящими от A. Пусть есть $N+1$ матриц $A_1, \ldots, A_{N+1}\in \mathbf{A}$.

Определение 1. *N-м уравнением типа КдФ* называется уравнение вида

$$[A,\ \dot V-(\lambda_{A_1,\ N+1}+\lambda_{A_2,\ N}+\ldots+\lambda_{A_{N+1},\ 1})]=0, \tag{3.2.6}$$

где матрицы $\lambda_{A_k N-k+2}$ определяются алгоритмом (3.2.5), а $V=V(X,\ t)$ есть решение системы уравнений (3.2.4).

Уравнение (3.2.6) допускает коммутационное представление на матрицах n-го порядка, полиномиально зависящих от E в смысле § 2 главы 2:

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial x_A}-\frac{\partial Q_A}{\partial t}=[\Lambda,\ Q_A]. \tag{3.2.7}$$

Здесь

$$\Lambda=\Lambda_{A_1,\ N}(E)+\ldots+\Lambda_{A_{N+1},\ 0}(E), \tag{3.2.7'}$$

где

$$\Lambda_{A,\ K}=AE^k+\lambda_{1,\ A}E^{k-1}+\ldots+\lambda_{k,\ A}\qquad (A\in\mathbf{A}). \tag{3.2.7''}$$

Легко видеть, что $\Lambda_{1,A}=-Q_A$, поэтому уравнения (3.2.4) есть первое уравнение типа КдФ в смысле определения 1.

Пусть $V=V(X)$ есть периодическая функция по переменному x_A с периодом T (для простоты дальнейших формул будем считать, что все диагональные матричные элементы матрицы A попарно различны). Поставим тогда для оператора L_A задачу на собственные значения:

$$L_A\psi(x_A,\ E)=0,\qquad \psi(x_A+T,\ E)=e^{p(E)}\psi(x,\ E). \tag{3.2.8}$$

По аналогии с данным в § 1 главы 2 определением 1 дадим

Определение 2. Потенциал V называется *конечнозонным* для оператора L_A, если собственные функции задачи (3.2.8) мероморфны на римановой поверхности $\mathbf{\Gamma}$ конечного рода, n-листно накрывающей E-плоскость. Поверхность $\mathbf{\Gamma}$ называется тогда *спектром* оператора L_A.

Если V как функция x_A почти-периодична, то определение 2 модифицируется таким образом.

Определение 2'. Потенциал V называется *конечнозонным* для оператора L_A, если L_A обладает при всех E собственной функцией $\chi(x_A,\ E)$, мероморфной на римановой поверхности $\mathbf{\Gamma}$ конечного рода, n-листно накрывающей E-плоскость, где «граничное условие» задачи (3.2.8) заменено на такое: группа периодов логарифмических производных координат $\psi(x_A,\ E)$ совпадает с группой периодов V. Поверхность $\mathbf{\Gamma}$ называется *спектром* оператора L_A.

Рассмотрим стационарные (т. е. не зависящие от времени t) решения уравнения (3.2.6) (напомним, что матрица $V(X)$ есть решение системы уравнений (3.2.4)). Для их отыскания, как и в § 2 главы 2, имеем коммутационное представление типа Лакса на матрицах, полиномиально зависящих от E:

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial x_A} = [\Lambda, Q_A], \tag{3.2.9}$$

где матрица Λ определена формулой (3.2.7). Рассмотрим тогда риманову поверхность $\mathbf{\Gamma}$ алгебраической функции $W = W(E)$, где функция $W(E)$ задается уравнением (3.2.10)

$$R(W, E) = \det | W \cdot 1 - \Lambda | = 0. \tag{3.2.10}$$

Фактически риманова поверхность $\mathbf{\Gamma}$ есть комплексная алгебраическая кривая в двумерном комплексном пространстве с координатами W, E, определяемая уравнением (3.2.10). Поскольку для произвольного E имеется n значений $W(E)$, то поверхность $\mathbf{\Gamma}$ n-листно накрывает E-плоскость. Бесконечно удаленная часть поверхности $\mathbf{\Gamma}$ состоит из n упорядоченных точек $\{1\}, \ldots, \{n\}$; порядок определяется условием $W(E) \sim a_{1i} E^N$ $(E \to \infty)$ в окрестности точки $\{i\}$ (здесь a_{1i} — i-й диагональный элемент матрицы A_1).

Пусть π — фактор-группа группы всех диагональных невырожденных матриц n-го порядка по подгруппе скалярных. Группа π действует на потенциалах V по правилу:

$$V \to \pi^{-1} V \pi.$$

Теорема 1. *Стационарное уравнение* (3.2.9) *является вполне интегрируемой гамильтоновой системой с* $N\frac{n(n-1)}{2}$ *степенями свободы, причем коэффициенты полинома* $R(W, E)$ *дают полный набор коммутирующих полиномиальных интегралов системы* (3.2.9).

2. *Потенциал V является конечнозонным для всех операторов L_A; их спектр есть риманова поверхность* $\mathbf{\Gamma}$, *определенная формулой* (3.2.10).

3. *Множество конечнозонных потенциалов V с данным спектром* $\mathbf{\Gamma}$ *есть пространство главного π-расслоения над многообразием Якоби* $\mathbf{J}(\mathbf{\Gamma})$ *римановой поверхности* $\mathbf{\Gamma}$.

Доказательство. Так же, как и в § 2 главы 2 получаем, что риманова поверхность $\mathbf{\Gamma}$, определенная условием (3.2.10), не зависит от переменного X и инвариантна относительно всех динамических систем вида (3.2.6), т. е. коэффициенты полинома $R(W, E)$ являются интегралами системы (3.2.9). Позже мы покажем гамильтоновость систем (3.2.9), откуда по аналогии с § 2 главы 2 следует п. 1 теоремы.

В пространстве решений уравнения $L_A f(x, E) = 0$ введем базис решений $c_1(x, y, E), \ldots, c_n(x, y, E)$ (обозначая переменную x_A просто x и считая матрицу A фиксированной) такой, что $c_i^j(y, y, E) = \delta_i^j$ (y — параметр). Пусть $\hat{T}(y, E)$ — матрица трансляции оператора L_A в базисе $c_1(x, y, E), \ldots, c_n(x, y, E)$, если V периодична по x. Тогда если V меняется со временем t в силу уравнения типа КдФ (3.2.6), то производная по времени для матрицы трансляции $\hat{T}$ имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{T} = [\hat{T}, \Lambda], \tag{3.2.11}$$

где матрица Λ определена формулой (3.2.7′). Поскольку мы ищем стационарные решения уравнения (3.2.6), то матрицы $\hat{T}$ и Λ коммутируют

$$\hat{T}\Lambda = \Lambda\hat{T}. \tag{3.2.11′}$$

Пусть $\psi(x, E)$ — собственная функция задачи (3.2.8) ($x = x_A$), нормированная значением какой-то одной координаты при $x = y$, например, $\psi^1(y, E) = 1$.

Заметим, что

$$\psi(x, E) = \sum_j \psi^j(y, E)\, c_j(x, y, E). \tag{3.2.12}$$

Вектор $(\psi^1(y, E), \ldots, \psi^n(y, E))$ — собственный для матрицы $\hat{T}(y, E)$; поэтому он будет собственным и для матрицы $\Lambda(y, E)$ в силу (3.2.11). Следовательно, координаты $\psi^j(y, E)$ рационально выражаются (при учете нормировки) через матричные элементы матрицы $W(E)\cdot 1 - \Lambda(y, E)$, т. е. являются алгебраическими функциями на римановой поверхности $\mathbf{\Gamma}$, определенной формулой (3.2.10). Поэтому $\psi(x, E)$ в силу (3.2.12) продолжается до мероморфной функции на римановой поверхности $\mathbf{\Gamma}\setminus\infty$ (т. е. кроме «бесконечно удаленной части» поверхности $\mathbf{\Gamma}$). Тем самым мы доказали, что оператор L_A конечнозонный со спектром $\mathbf{\Gamma}$. Если V — почти-периодическое решение системы (3.2.9), то определим собственную функцию ψ так:

$$\psi(x, E) = \sum_j \xi^j(y, E)\, c_j(x, y, E), \tag{3.2.12′}$$

где вектор $(\xi^1(y, E), \ldots, \xi^n(y, E))$ — собственный вектор матрицы $\Lambda(y, E)$ с собственным значением $W(E)$. Определение (3.2.12) не противоречиво, так как оператор L_A и оператор умножения на матрицу Λ коммутируют в силу (3.2.9). Дальше конечнозонность доказывается, как и в периодическом случае (ср. второй способ доказательства следствия 2 в § 2 главы 2).

Построим матричнозначную функцию $\Psi(x, y, P)$, где P — точка римановой поверхности $\mathbf{\Gamma}$. Пусть E отлично от точки ветвления, т. е. для данного E у задачи (3.2.8) есть ровно n линейно независимых собственных функций $\psi_1(x, E), \ldots, \psi_n(x, E)$, произвольно упорядоченных. Выстроим их координаты в матрицу $\psi_i^j(x, E)$. Пусть $\varphi_i^j(x, E)$ — обратная матрица — она существует, так как функции $\psi_1, \ldots, \psi_n$ линейно независимы. Тогда если $P \in \mathbf{\Gamma}$, $P = (E, k)$, k — номер листа, то положим

$$\Psi_i^j(x, y, P) = \psi_k^j(x, E)\cdot\varphi_i^k(y, E). \tag{3.2.13}$$

Это определение не зависит от первоначального упорядочения собственных функций $\psi_1, \ldots, \psi_n$, а также от их нормировки. Функция $\Psi(x, y, P)$ становится мероморфной на римановой поверхности $\Gamma\setminus\infty$.

Определим важную для дальнейшего операцию Tr_P взятия следа функции, определенной на римановой поверхности $\mathbf{\Gamma}$. Пусть $\varphi = \varphi(P)$ — такая функция, $P \in \mathbf{\Gamma}$, т. е. P есть пара $P = (E, k)$, где k — номер листа. Если E не есть точка ветвления, то на поверхности $\mathbf{\Gamma}$ над E лежит ровно n точек: $(E, 1), \ldots, (E, n)$. Положим тогда

$$(Tr_P\varphi)(E) = \varphi((E, 1)) + \ldots + \varphi((E, n)). \tag{3.2.14}$$

Функция $Tr_P\varphi$ — однозначная функция на E-плоскости. В частности, если

$$G(x,\ y,\ E)=\begin{cases} Tr_P\Psi(x,\ y,\ P) & (x\leqslant y),\\ 0 & (x>y),\end{cases}$$

то функция $G(x, y, E)$ есть матрица Грина оператора L_A. Пусть $g(x, P) = \Psi(x, x, P)$. Функция $g(x, P)$ обладает следующими важными свойствами.

a) Группа периодов $g(x, P)$ совпадает с группой периодов потенциала V.

b) Алгебраична на поверхности Γ.

c) Дает «спектральное разложение» для матрицы $\Lambda(x, E)$, т. е. $g^2 = g$, $g(x, (E, k))\cdot g(x, (E, l)) = 0$ при $k \neq l$ (k, l — номера листов), $\mathrm{Tr}_P g(x, P) = 1$, $\mathrm{Tr}_P W\cdot g(x, P) = \Lambda(E, x)$.

d) $\dfrac{\partial g}{\partial x_B} = [g, Q_B]$ для любой $B \in \mathbf{A}$.

e) Вариационная производная функционала $p(E)\{V\}$, определенного в (3.2.8) (в периодическом случае) имеет вид

$$\frac{\delta p\,(E)}{\delta v_i^j\,(x)} = -(a_i-a_j)\,g_i^j \text{ (ср. формулу (2.1.17)).}$$

f) $g(x,\ P)$ при $P \to \{k\}$ имеет разложение вида

$$g\,(x,\ P)=g_0+\frac{g_1}{E}+\frac{g_2}{E^2}+\ \dots\ ,$$

причем

$$g_{0_i}^j=\delta_i^k\cdot\delta_k^j;\qquad g_{1_i}^j=-\delta_i^k v_i^j+v_i^j\delta_k^j;$$

$$g_{2_i}^j=\delta_i^k\left[\frac{v_i^{j\prime}}{a_i-a_j}+\frac{1}{a_i-a_j}\sum_s v_i^s\,(a_s-a_j)\,v_s^i\right]+$$

$$+\left[-\frac{v_i^{j\prime}}{a_i-a_j}+\frac{1}{a_i-a_j}\sum_s v_i^s\,(a_i-a_s)v_s^j\right]\delta_k^j-v_i^k v_k^j+\delta_i^k\left(\sum_s v_i^s v_s^j\right)\delta_k^j.$$

Здесь штрих означает производную по $x = x_A$.

Из пп. c) и e) немедленно вытекает гамильтоновость систем (3.2.9). Найдем нули и полюсы матричных элементов $g_i^j(x, P)$, алгебраичных на римановой поверхности Γ. Из п. c) следует, что полюсы $g(x, P)$ это в точности точки ветвления поверхности Γ, т. е. те точки, где разные ветви алгебраической функции $W(E)$ сливаются между собой. Обозначим совокупность точек ветвления символом $\mathscr{D}_w$. Их количество равно $Nn(n - 1)$. Из разложений f) следует, что в бесконечно удаленной части поверхности Γ все g_i^j имеют только нули, причем их расположение такое: при $i \neq j$ $g_i^j(x, P)$ имеет двойные нули во всех точках $P = \{k\}$ ($k \neq i, j$) и простые нули в точках $P = \{i\}$, $P = \{j\}$; $g_i^i(x, P)$ имеет двойные нули во всех точках $P = \{k\}$ ($k \neq i$), а при $P = \{i\}$ $g_i^i(x, P) = 1$. Для описания расположения нулей и полюсов функции, определенной на поверхности Γ, есть удобное обозначение. Пусть $\varphi(P)$ — функция на Γ, имеющая нули: кратности n_1 в точке P_1, кратности n_2 в точке P_2, ..., и полюсы: кратности m_1 в точке Q_1, кратности m_2 в точке Q_2, ... Тогда будем говорить так: функция $\varphi(P)$ имеет на поверхности Γ дивизор $D = n_1P_1 + n_2P_2 + \dots - m_1Q_1 - m_2Q_2 - \dots$ Видно, что весь дивизор D функции $\varphi(P)$, т. е. совокупность нулей и полюсов функции $\varphi(P)$ с учетом их кратностей, разбивается в разность $D = D_+ - D_-$, где $D_+ = n_1P_1 + n_2P_2 + \ldots$ — совокупность нулей функции $\varphi(P)$ — (дивизор нулей), а $D_- = m_1Q_1 + m_2Q_2 + \ldots$ — совокупность полюсов функции $\varphi(P)$ (дивизор полюсов). Степенью дивизора D называется число

$$\deg D = \sum_i n_i - \sum_j m_j = \deg D_+ - \deg D_-.$$

Если функция $\varphi(P)$ алгебраична на римановой поверхности $\mathbf{\Gamma}$, т. е. мероморфна всюду на $\mathbf{\Gamma}$, то для ее дивизора D нулей и полюсов выполняется соотношение $\deg D = 0$ (число нулей с кратностями равно числу полюсов с кратностями). В частности, полученный факт о нулях и полюсах функции $g_i^j(x, P)$ на римановой поверхности $\mathbf{\Gamma}$ можно коротко записать так:

$$(3.2.15)\quad \textit{дивизор}\, (g_i^j(x, P)) = \sum_{k\neq i,\, j} 2\{k\} + \{i\} + \{j\} - \mathscr{D}_w + \ldots =$$
$$= 2\Sigma - \{i\} - \{j\} - \mathscr{D}_w + \ldots,$$

где $\Sigma = \sum_k \{k\}$, а многоточием обозначен неизвестный дивизор нулей функции $g_i^j(x, P)$ в конечной части римановой поверхности $\mathbf{\Gamma}$. Для его нахождения обратимся к изучению аналитических свойств матрицы $\Psi(x, y, P)$, определенной формулой (3.2.13). Заметим, что $\Psi(x, y, P) = c(x, y, E(P))\, g(y, P)$, — — формула, аналогичная формуле (3.2.12). Поэтому полюсы всех матричных элементов $\Psi(x, y, P)$ лежат только в точках ветвления (т. е. дивизор полюсов $\Psi_i^j(x, y, P)$ равен $\mathscr{D}_w$ при всех i, j). Матрица $\Psi(x, y, P)$ имеет ранг 1; ее столбцы суть собственные функции оператора L_A, действущего по переменной x, отличающиеся лишь нормировкой, а строки — собственные функции сопряженного оператора L_A^*, действующего по y, где сопряженный оператор L_A^* определяется так:

$$L_A^* = \frac{\partial}{\partial y} - Q_A^T \quad (T \text{ означает транспонирование}).$$

Поэтому отношение

$$(3.2.16)\qquad \frac{\Psi_i^k(x, y, P)}{\Psi_j^k(x, y, P)} = \frac{g_i^k(y, P)}{g_j^k(y, P)} \text{ не зависит от } k,$$

и отношение

$$(3.2.16')\qquad \frac{\Psi_k^i(x, y, P)}{\Psi_k^j(x, y, P)} = \frac{g_k^j(x, P)}{g_k^j(x, P)} \text{ не зависит от } k.$$

Из (3.2.16) и (3.2.16′) следует, что нули $\Psi_i^j(x, y, P)$ распадаются на две части: нули, зависящие от j и от x, и нули, зависящие от i и от y. Запишем этот факт так:

$$(3.2.17)\qquad \textit{дивизор нулей}\ (\Psi_i^j(x, y, P)) = d_i(y) + d^j(x),$$

где дивизоры $d_i(y)$ и $d^j(x)$ имеют вид

$$(3.2.17')\qquad d_i(y) = P_{1i}(y) + \ldots, \qquad d^j(x) = Q_1^j(x) + \ldots$$

Отсюда мы определим дивизор функции $g_i^j(x, P)$:

$$(3.2.18)\qquad \textit{дивизор}\ (g_i^j(x, P)) = 2\Sigma - \{i\} - \{j\} - \mathscr{D}_w + d_i(x) + d^j(x).$$

Функция $g_i^j(x, P)$ алгебраична на римановой поверхности $\mathbf{\Gamma}$, поэтому степень ее дивизора равна нулю (количество нулей равно количеству полюсов). Поэтому $\deg[d_i(x) + d^j(x)] = 2\left[N\frac{n(n-1)}{2} - (n-1)\right]$. Поскольку операторы L_A и L_A^* совершенно равноправны, то отсюда следует важное соотношение

$$(3.2.19)\qquad \deg d_i(x) = \deg d^j(x) = N\frac{n(n-1)}{2} - (n-1) = \text{род } (\mathbf{\Gamma}) \equiv p.$$

Поэтому $d_i(x) = P_{1i}(x) + \ldots + P_{pi}(x)$, $d^j(x) = Q_1^j(x) + \ldots + Q_p^j(x)$. Дивизоры $d_i(x)$ и $d^j(x)$ можно поэтому рассматривать как точки p-й симметрической степени римановой поверхности $\mathbf{\Gamma}$ — $S^p\Gamma$ (см. определение в § 3 главы 2). Напомним, что определено отображение Абеля $\mathfrak{A}$ k-й симметрической степени поверхности $\mathbf{\Gamma}$ в ее многообразие Якоби

$$(3.2.20)\qquad \mathfrak{A}\colon\ S^k\mathbf{\Gamma} \to \mathbf{J}(\mathbf{\Gamma}),$$

являющееся почти всюду взаимно однозначным, если $k = p =$ род$(\mathbf{\Gamma})$. (Точнее, бирациональной эквивалентностью — см. формулы (2.3.25).) Отображение $\mathfrak{A}$ обладает таким свойством: если $D = D_+ - D_-$ — дивизор нулей и полюсов функции $\varphi(P)$, алгебраической на римановой поверхности $\mathbf{\Gamma}$, то (классическая теорема Абеля)

$$(3.2.21)\qquad \mathfrak{A}(D_+) = \mathfrak{A}(D_-).$$

Мы знаем, что функция $g_i^j(x, P)$, алгебраическая на $\mathbf{\Gamma}$, имеет дивизор вида (3.2.18). Теперь, учитывая (3.2.21), получаем систему линейных уравнений на многообразии Якоби $\mathbf{J}(\mathbf{\Gamma})$ относительно величин $\mathfrak{A}(d_i(x))$, $\mathfrak{A}(d^j(x))$:

$$(3.2.22)\qquad \mathfrak{A}(d_i(x)) + \mathfrak{A}(d^j(x)) = \mathfrak{A}(\mathscr{D}_w) - \mathfrak{A}(2\Sigma - \{i\} - \{j\}).$$

Легко видеть, что заданием какого-то одного из неизвестных, например, заданием $\mathfrak{A}(d^1(x))$, определяются все остальные $\mathfrak{A}(d_i(x))$, $\mathfrak{A}(d^j(x))$. Таким образом, мы построили соответствие

$$(3.2.23)\qquad V \to \eta, \qquad \eta \in \mathbf{J}(\mathbf{\Gamma}),$$

где V — решение уравнения (3.2.9), причем задание точки $\eta \in \mathbf{J}(\mathbf{\Gamma})$ однозначно определяет расположение нулей функции $g(x, P)$ (при фиксированном x) на римановой поверхности $\mathbf{\Gamma}$.

Покажем теперь, что точка η на многообразии Якоби $\mathbf{J}(\mathbf{\Gamma})$ при изменении x движется по прямой, т. е.

$$(3.2.24)\qquad \eta(x) = \eta(y) + (x - y)\vec{U};$$

$\vec{U}$ — постоянный вектор. Рассмотрим функцию $\tilde{\Psi}^j(x, y, P)$, где

$$(3.2.25)\qquad \tilde{\Psi}^j(x, y, P) = \Psi_i^j(x, y, P)/g_i^j(y, P)$$

(от i не зависит). Тогда $\tilde{\Psi}^j(x, y, P)$ имеет на $\mathbf{\Gamma}\setminus\infty$ нули в точках дивизора $d^j(x)$ и полюсы в точках дивизора $d^j(y)$, а при $P \to \{k\}$ асимптотику вида $\exp\{a_k E(x - y)\}$. Последнее утверждение следует из формулы

$$(3.2.26)\qquad \tilde{\Psi}^j(x, y, P) = \exp\left\{\int_y^x \chi^j(\xi, P)\,d\xi\right\},$$

где

$$\chi^j(\xi, P) = a_j E - \sum_s u_s^j(\xi) \frac{g_i^s(\xi, P)}{g_i^j(\xi, P)},$$

и из разложений для $g_i^j(\xi, P)$, указанных в п. f). Поэтому мы находимся в ситуации, аналогичной той, которая была в § 3 главы 2 при доказательстве формул (2.3.30) и (2.3.30′). Рассуждая здесь точно так же, получим соотношение на многообразии Якоби $\mathbf{J}(\Gamma)$

$$\mathfrak{A}(d^j(x)) - \mathfrak{A}(d^j(y)) = (x-y)\vec{U}, \tag{3.2.27}$$

которое эквивалентно соотношению (3.2.24). Вектор $\vec{U}$ мы укажем ниже.

Мы получили, что задание точки η на многообразии Якоби $\mathbf{J}(\Gamma)$ определяет положение нулей всех функций $\Psi_i^j(x, y, P)$ при любых x и y. Легко видеть, что «фазы» $\chi^j(\xi, P)$ тем самым определены при всех ξ. Осталось определить «амплитуды» функций $\Psi_i^j(x, y, P)$, т. е. функции $g_i^j(y, P)$. Заметим, что функция $g_i^i(y, P)$ определяется однозначно заданием своих нулей и функции $g_i^j(y, P)$ $(i \neq j)$ определяются однозначно с точностью умножения на константу: т. е. по заданной точке $\eta \in \mathbf{J}(\Gamma)$ мы можем построить некоторую матрицу $\tilde{g}(y, P)$, вообще говоря, отличающуюся от нашей,

$$\tilde{g}_i^j(y, P) = \varepsilon_i^j g_i^j(y, P),$$

$\varepsilon_i^j = \mathrm{const}$. Если мы потребуем, чтобы $\tilde{g}^2 = \tilde{g}$, то получим, что $\varepsilon_i^j = \varepsilon_i/\varepsilon_j$, $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \neq 0$, т. е. неоднозначность определения «амплитуд» $g_i^j(y, P)$ функций $\Psi_i(x, y, P)$ лежит в действии группы π. Такая же неоднозначность и в определении потенциала V. Нелишне отметить, что действие группы π на многообразии потенциалов V коммутирует со всеми динамическими системами вида (3.2.6).

Дадим явную конструкцию потенциала V. Определим на многообразии Якоби $\mathbf{J}(\Gamma)$ следующие функции: пусть $\eta \in \mathbf{J}(\Gamma)$. По точке η построим набор дивизоров d_i, d^j степени p на римановой поверхности Γ такой, что $\mathfrak{A}(d^1) = \eta$, а остальные $\mathfrak{A}(d_i)$, $\mathfrak{A}(d^j)$ определяются из системы линейных уравнений (3.2.22). Пусть $h_i^j(P)$ — алгебраическая функция на Γ, дивизор нулей и полюсов которой имеет вид

$$2\Sigma - \{i\} - \{j\} + d_i + d^j - \mathcal{D}_w$$

(ср. формулы (3.2.18)). Нормируем h_i^j так: при $i \neq j$ — чтобы при $P \to \{i\}$ $h_i^j(P) \sim -\frac{1}{E}$; при $i = j$ $h_i^j(\{i\}) = 1$. Пусть $\sigma_i^{jk}(\eta)$ — коэффициент при $\frac{1}{E^2}$ разложения функции $h_i^j(P)$ при $P \to \{k\}$. Пусть, далее, $\rho_i^k(\eta)$ — коэффициент при $1 \diagdown E^2$ разложения функции $h_i^i(P)$ при $P \to \{k\}$. Тогда

$$v_i^j(x) = v_i^j(x_0) \exp\left\{\int_{x_0}^{x} \sum a_k \sigma_i^{jk}\, dx\right\} \tag{3.2.28}$$

— интегрирование по направлению вектора $\vec{U}$, причем константы $v_i^j(x_0)$ удовлетворяют соотношениям

$$(3.2.28') \qquad \begin{cases} \dfrac{v_i^k(x_0)\, v_k^j(x_0)}{v_i^j(x_0)} = -\sigma_i^{jk}(\eta) \quad \text{при} \quad i \neq j, \\ v_i^k(x_0)\, v_k^j(x_0) = -\rho_i^k(\eta). \end{cases}$$

В качестве независимых можно взять, например, параметры $v_i^1(x_0)$ $(i = 2, \ldots, n)$.

Заметим теперь, что все приведенные выше рассуждения тривиально переносятся для вычисления зависимости от времени на многообразии потенциалов V, являющихся решениями гамильтоновой системы (3.2.9). Нужно заменить везде оператор L_A на оператор $\frac{\partial}{\partial\tau} + \widetilde{\Lambda}$, где $\widetilde{\Lambda}$ — другая матрица вида (3.2.7), причем определение матрицы g не зависело от того, какой оператор мы рассматриваем (g дает «спектральное разложение» для матрицы Λ). Выпишем закон эволюции во времени точки η на $\mathbf{J}(\mathbf{\Gamma})$ для стандартных уравнений типа КдФ вида

$$(3.2.29) \qquad [A, \dot{V} - \lambda_{N+1, B}] = 0$$

(все остальные — их линейные комбинации). Тогда

$$(3.2.30) \qquad \eta(\tau) - \eta(\tau_0) = \vec{W}\cdot(\tau - \tau_0).$$

Вектор $\vec{W}$ вычисляется так. Пусть $\omega_{N, i}$ — абелев дифференциал второго рода с $N + 1$-кратным полюсом в точке $P = \{i\}$, нормированный условиями

$$(3.2.31) \qquad \oint_{\alpha_j} \omega_{N, i} = 0, \qquad (j = 1, \ldots, p).$$

Здесь α_i, β_i $(i = 1, \ldots, p)$ — набор циклов на поверхности $\mathbf{\Gamma}$ с матрицей пересечений вида (2.3.21').

Пусть

$$(3.2.31') \qquad \oint_{\beta_j} \omega_{N, i} = U_{ji}.$$

Тогда вектор $\vec{W}$ из формулы (3.2.30) имеет вид

$$(3.2.32) \qquad W_j = \sum_i b_i U_{ji}.$$

В частности, мы показали, что потенциал V конечнозонный для всех операторов вида $\frac{\partial}{\partial\tau} + \widetilde{\Lambda}$, где $\widetilde{\Lambda}$ имеет вид (3.2.7). Теорема доказана.

Пример. Пусть $n = 2$. $V = \begin{pmatrix} 0 & v_+ \\ v_- & 0 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; рассмотрим $N + 1$-е уравнение типа КдФ. Матрица $\Lambda_{N+1}(E)$ имеет вид

$$\Lambda_{N+1} = \begin{pmatrix} Q & P_+ \\ P_- & -Q \end{pmatrix}, \qquad \deg Q = N + 1, \qquad \deg P_\pm = N,$$

$$P_\pm = \mp 2v_\pm \prod_{j=1}^{N} (E - \gamma_j^\pm), \qquad Q = E^{N+1} + \ldots$$

Риманова поверхность Γ имеет вид $W^2 - R(E) = 0$, где $R(E) = Q^2 + P_+P_-$, $\deg R = 2N + 2$. Проектор g имеет вид

$$g = \begin{pmatrix} \frac{Q+\sqrt{R}}{2\sqrt{R}} & \frac{P_+}{2\sqrt{R}} \\ \frac{P_-}{2\sqrt{R}} & \frac{-Q+\sqrt{R}}{2\sqrt{R}} \end{pmatrix}.$$

Дивизор $d_2 + d^1$ есть полный прообраз точек $E = \gamma_1^+, \ldots, E = \gamma_N^+$ на поверхности Γ. Значит, дивизор d^1 — это какие-то N точек $P_1, \ldots, P_N$, лежащих над точками $E = \gamma_1^+, \ldots, E = \gamma_N^+$. Пусть $\sum E_i = 0$, где $R(E) = \prod_{i=1}^{2N+2} (E - E_i)$. Тогда

$$(3.2.33) \qquad \begin{cases} v_+(x) = c \exp\left\{-2 \int_{x_0}^{x} \sum \gamma_i^+ \, dx\right\}, \\ v_-(x) = \dfrac{\rho(x)}{v_+(x)}. \end{cases}$$

Алгебраическая функция $\rho = v_+v_-$ имеет вид

$$(3.2.33') \quad \rho = \frac{1}{2} \det \begin{vmatrix} \gamma_1^{N+1} + \sqrt{R(\gamma_1)} & \gamma_1^{N-2} & \ldots & 1 \\ \vdots & & & \vdots \\ \gamma_N^{N+1} + \sqrt{R(\gamma_N)} & \gamma_N^{N-2} & \ldots & 1 \end{vmatrix} \Big(\prod_{i<j} (\gamma_i - \gamma_j)\Big)^{-1} - \frac{1}{4} \sum_{i<j} E_i E_j \qquad (\gamma_i = \gamma_i^+).$$

Опишем явно указанное в теореме π-расслоение над многообразием Якоби $\mathbf{J}(\Gamma)$. Для этого представим формулы (3.2.33) в виде

$$(3.2.34) \qquad \begin{cases} v_+ = v_+(\eta, \eta_0, c) = c \exp\left\{\int_{\eta_0}^{\eta} \omega\right\}, \\ v_- = v_-(\eta, \eta_0, c) = \dfrac{\rho(\eta)}{v_+(\eta, \eta_0, c)}. \end{cases}$$

Здесь c — координата в слое π (группа π при $n = 2$ одномерна), $\eta, \eta_0 \in \mathbf{J}(\Gamma)$, причем c и начальная точка η_0 задают потенциал V в соответствии с теоремой, а зависимость V от η включает зависимость потенциала от сдвига вдоль траекторий любой из динамических систем вида (3.2.6), причем

$$\omega = d \ln v_+ = \frac{v_+'}{v_+} dx + \sum_i \frac{\partial v_+/\partial t_i}{v_+} dt_i$$

— мероморфный замкнутый дифференциал на многообразии Якоби $\mathbf{J}(\Gamma)$. Периоды ω на торе задают функции перехода искомого π-расслоения: $c \mapsto c \exp \oint \omega$ при обходе точки η_0 по какому-то циклу тора $\mathbf{J}(\Gamma)$. Форма ω имеет вид

$$(3.2.34') \qquad \omega = -2\left(\sum \gamma_i\right) dx + \left(4 \sum_{i<j} \gamma_i \gamma_j - 2 \sum E_i E_j\right) dt_1 + \ldots$$

В заключение этого параграфа отметим, что по аналогии с § 3 главы 2 можно доказать обратную теорему: любой конечнозонный (в смысле определений 2 или 2′) потенциал оператора L_A есть решение некоторого стационарного уравнения типа КдФ (т. е. уравнения в виде (3.2.9)). Доказательство основывается на свойствах функции $g(x, P)$, описанных выше.

Одновременно с работами [51], [52] были выполнены работы [60], [61], в которых матричные операторы исследуются методами работ В. А. Марченко [44], [45].

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

БЕЗОТРАЖАТЕЛЬНЫЕ ПОТЕНЦИАЛЫ НА ФОНЕ КОНЕЧНОЗОННЫХ. ИХ АЛГЕБРО-ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ АКСИОМАТИКА

Как было показано в § 2 главы 2, всякое периодическое и почти-периодическое стационарное решение любого из высших КдФ является конечнозонным потенциалом. Однако эти уравнения имеют также вырожденные «сепаратрисные» решения. В работе [38] указывалось, что быстроубывающие сепаратрисные решения являются безотражательными потенциалами $u(x)$, с которыми связаны так называемые «многосолитонные» решения уравнения КдФ, детально изучавшиеся, например, в [20]. Общие сепаратрисные решения любого из высших уравнений КдФ представляют собой, как указывалось в [38], вырожденные пределы условно периодических потенциалов, где из группы периодов $T_1, \ldots, T_n$ часть периодов стремится к ∞.

Динамику таких потенциалов в силу КдФ естественно называть «многосолитонными решениями на фоне конечнозонных». Исследование обратной задачи рассеяния для потенциалов такого типа было осуществлено И. М. Кричевером [49]; на несколько месяцев ранее для многосолитонных потенциалов на фоне однозонного задача была другим способом решена в [48]. Мы изложим здесь основные соображения работы И. М. Кричевера [49], включающие в себя алгебро-геометрическую аксиоматику класса безотражательных потенциалов на фоне конечнозонных. Изложим первоначально эту аксиоматику. Напомним для удобства некоторые элементарные понятия алгебраической геометрии. Под дивизором мы будем понимать набор точек P_i на римановой поверхности $\mathbf{\Gamma}$ конечного рода с кратностями k_i, формально записываемый в виде суммы:

$$\text{дивизор } D = \sum_i k_i P_i.$$

Под дивизором функции (f) понимается дивизор ее нулей и полюсов, где кратности нулей положительны, а полюсов — отрицательны. Дивизор $(-D)$ имеет вид $\sum -k_i P_i$.

Очевидным образом определяется формальная сумма дивизоров. *Эффективным* называется такой дивизор, у которого все кратности положительны, $k_i \geqslant 0$. Говорят, что эффективный дивизор D больше нуля: $D \geqslant 0$.

Определение. Говорят, что алгебраическая функция f на поверхности $\mathbf{\Gamma}$ принадлежит пространству $L(D)$, если $(f) + D \geqslant 0$. *Степенью дивизора* D, обозначаемой через $n(D)$, называется сумма кратностей его точек. Известна оценка (Римана)

$$\dim L(D) \geqslant n(D) - g + 1 \quad (g = \text{род}\,\mathbf{\Gamma}),$$

причем для дивизоров степени $n(D) > 2g - 2$ эта оценка превращается в равенство. Пусть теперь задана риманова поверхность Γ, которая двулистно накрывает поверхность Γ' с какими-то точками ветвления $P_1, \ldots, P_n$, образующими «дивизор ветвления» $\sum_{j=1}^{m} P_j$, $\Gamma \xrightarrow{\pi} \Gamma'$. На римановой поверхности Γ определена инволюция T, переставляющая листы накрытия, где $TP_j = P_j$. Для любого дивизора D определен «сопряженный дивизор» $D^+ = T(D)$.

Мы будем предполагать также, что на римановой поверхности Γ' задана алгебраическая функция $E(P)$ с простыми полюсами в точках $Q_1, \ldots, Q_s$, сумма которых образует «дивизор полюсов» $D_\infty = -\sum_{\alpha=1}^{s} Q_\alpha$, причем все полюсы функции E лежат в точках ветвления $Q_\alpha = P_{j_\alpha}$. Обозначим через $\widetilde{E} = \pi^* E$ ту же самую функцию E, поднятую на риманову поверхность Γ.

Определение. Мы будем говорить, что задан потенциал $u(x)$ на отрезке $[a, b]$ с правильными алгеброгеометрическими свойствами, если существует собственная функция $\psi(x, P)$, где $x \in [a, b]$ $(P \in \Gamma)$, которая

A) удовлетворяет уравнению Штурма — Лиувилля

$$-\psi''(x, P) + u(x)\psi(x, P) = \widetilde{E}(P)\psi(x, P);$$

B) мероморфна на римановой поверхности Γ всюду, кроме полюсов функции $\widetilde{E}$, лежащих в точках $\pi^{-1}(D_\infty)$, причем полюсы функции $\psi(x, P)$ не зависят от x;

C) в окрестности полюсов функции $\widetilde{E}$ имеет место асимптотика

$$\psi(x, P) \sim \mathrm{const}\, e^{i\sqrt{\widetilde{E}(P)}(x-x_0)}$$

(т. е. $\psi e^{-i\sqrt{\widetilde{E}(P)}(x-x_0)}$ регулярна в точках полюсов функции $\widetilde{E}$). Свойства A) и C) понятны в аксиоматике этого класса потенциалов. Что же касается свойства B), то оно является естественным обобщением свойств блоховской функции. Напомним, что блоховская функция ψ мероморфна на римановой поверхности Γ, двулистно накрывающей рациональную (тривиальную) поверхность — E-плоскость, на которой функция E имеет полюс в бесконечноудаленной точке (по определению). Двулистный характер накрытия естественно требовать потому, что уравнение Штурма — Лиувилля имеет порядок 2, и базис решений мы будем иметь при наличии двух листов (см. § 1 главы 2 и § 2 главы 3). Кроме функции ψ мы будем рассматривать также функцию $\psi^+ = T^*(\psi)$ (листы переставлены) и их вронскиан

$$W(\psi, \psi^+) = \psi\psi^{+\prime} - \psi^+\psi',$$

который при выполнении условия A) постоянен — не зависит от x.

Перейдем теперь к постановке вопроса о «данных рассеяния» на римановой поверхности Γ, определяющих потенциал $u(x)$.

Пример 1. В случае быстроубывающего безотражательного потенциала (см. § 1 главы 2) полным набором данных рассеяния на рациональной поверхности Γ с параметром $k = \sqrt{E}$ был набор точек $i\varkappa_1, \ldots, i\varkappa_s$ (в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} k > 0$ для вещественного $u(x)$ или на верхнем листе поверхности $k=\sqrt{E}$ при вещественных E), а также набор чисел $c_1, \ldots, c_s$. Набор чисел $i\varkappa_1, \ldots, i\varkappa_s$ определяет положение дискретных уровней $E_j = -\varkappa_j^2$.

Собственные функции $f(x, k)$ и $g(x, k)$, которые определялись требованиями

$$f_{\pm}(x, k) \to e^{\pm ikx} \qquad (x \to +\infty),$$
$$g_{\pm}(x, k) \to e^{\pm ikx} \qquad (x \to -\infty),$$

не удовлетворяют условиям A), B), C). Мы введем новую функцию $\psi(x, x_0, k)$, пропорциональную $f(x, k)$, с множителем, рационально зависящим от k, такую, что $\psi(x, x_0, k) \equiv 1$ при $x = x_0$ по аналогии с блоховской функцией (см. главу 2). Тогда функция $\psi(x, x_0, k)$ уже удовлетворяет требованиям A), B), C). Любая точка P на Γ определяется параметром $k = \sqrt{E}$, и функция $E(P)$ имеет вид $E = k^2$. Легко проверить, что нули $P_j(x)$ функции ψ лежат над точками $\gamma_j(x)$ и полюсы $P_j(x_0)$ — над точками $\gamma_j(x_0)$ $(j = 1, \ldots, N)$ на поверхности Γ. «Дивизор полюсов» имеет вид

$$D = \sum_{j=1}^{N} P_j(x_0).$$

Вронскиан $W(\psi, \psi^+)$ обращается в нуль в точке ветвления $k = 0$ и в точках дискретного спектра

$$Q^{\pm} = \pm i\varkappa_1, \ \ldots, \ Q_n^{\pm} = \pm i\varkappa_n, \qquad E_\alpha = -\varkappa_\alpha^2 \qquad (\alpha = 1, \ldots, n).$$

Очевидно, $n = N$. Набор точек

$$[P_1(x_0), \ \ldots, \ P_N(x_0), \ + i\varkappa_1, \ \ldots, \ + i\varkappa_N],$$

где P_j лежат над γ_j, однозначно определяет потенциал $u(x)$. Впервые уравнения по x на величину $\gamma_j(x)$ для быстроубывающих безотражательных потенциалов были найдены А. Б. Шабатом [11] на языке «условных собственных чисел». Отметим, что в точках ветвления $k = 0$ и во всех точках $k_j = i\varkappa_j$ выполнены равенства

$$\psi(x, x_0, i\varkappa_j) \equiv \psi^+(x, x_0, i\varkappa_j)$$

или

$$W(\psi, \psi^+) = 0, \qquad k = i\varkappa_j.$$

Мы будем называть пару дивизоров

$$D = \sum_j P_j(x_0) \qquad \text{и} \qquad d = \sum_j Q_j^+$$

«полным набором данных рассеяния».

Пример 2. Пусть задан невырожденный N-зонный периодический или почти-периодический потенциал (вещественный или комплексный) с блоховской собственной функцией $\psi^{\pm}(x, x_0, E)$, определенной в главе 2. Дивизор полюсов имеет вид

$$D = \sum_{j=1}^{N} P_j(x_0),$$

где точки $P_j(x_0)$ лежат на Γ над точками $\gamma_j(x_0)$ E-плоскости. Функция ψ удовлетворяет требованиям A), B), C), и ее вронскиан имеет вид

$$W(\psi,\ \psi^+) = 2i\frac{\sqrt{R(E)}}{\prod\limits_j (E-\gamma_j(x_0))},\qquad R(E) = \prod_{i=1}^{2N+1}(E-E_i).$$

Вронскиан обращается в нуль лишь в точках ветвления E_i, полностью определяемых поверхностью Γ и ее инволюцией T, переставляющей листы. В этом случае дивизор полюсов D полностью определяет потенциал $u(x)$ согласно результатам главы 2.

Перейдем теперь к общему случаю потенциалов с правильными алгебро-геометрическими свойствами.

Пусть задана функция $\psi(x, P)$ на поверхности Γ, удовлетворяющая требованиям B) и C), и D — ее дивизор полюсов. Пусть задан другой эффективный дивизор $d = \sum \lambda_i \varkappa_i$ (где λ_i — числа, $\varkappa_i$ — точки на Γ).

Определение. Мы скажем, что пара эффективных дивизоров (D, d) согласована, если выполнены требования

$$n(d) = \sum \lambda_i = \dim L_-(\Delta) - 1,$$
$$\dim[L(\Delta - d) \cap L_-(\Delta)] = 1,$$

где эффективный дивизор Δ имеет вид

$$\Delta = D + D^+ - D_\infty,$$

$D^+ = T(D)$, D_∞ — дивизор полюсов функции E на поверхности Γ, $L_-(\Delta)$ — подпространство рациональных функций f на поверхности Γ, нечетных при перестановке листов T и таких, что $(f) + \Delta \geqslant 0$.

Поясним это определение. Вронскиан $W(\psi, \psi^+)$ принадлежит пространству $L_-(\Delta)$; действительно, он имеет полюсы первого порядка в точках D_∞, он может иметь полюсы в точках дивизоров D, D^+ по определению и, наконец, нечетен при перестановке листов T. Дивизор d возникает как часть нулей вронскиана $W(\psi, \psi^+)$, не лежащих в точках ветвления поверхности Γ. Имеет место

Утверждение 1. *Если функция ψ удовлетворяет требованиям* B), C) *выше и для дивизора D ее полюсов найдется такой дивизор d нулей вронскиана $W(\psi, \psi^+)$, что пара (D, d) согласована, то ψ удовлетворяет уравнению Штурма — Лиувилля с некоторым потенциалом $u(x)$. Обратно, если ψ удовлетворяет требованиям* A), B), C), *то для дивизора ее полюсов D найдется такой d, что пара (D, d) согласована.*

Доказательство прямого утверждения легко следует из того, что вронскиан $W(\psi, \psi^+)$ принадлежит пространству функций $L(\Delta - d) \cap L_-(\Delta)$, которое одномерно согласно условию согласованности (D, d) выше.

Поэтому при изменении x вронскиан как функция точки P может лишь умножаться на константу $c(x)$. Однако из условия C) следует, очевидно, $c(x) \equiv 1$. Поэтому $dW/dx \equiv 0$, откуда легко следует прямое утверждение. Выражение $\frac{\psi''}{\psi} + E$ не зависит от E, как следует из его свойств. Доказательство обратного утверждения также легко получается из определения согласованной пары. Заметим, что если дивизор d имеет вид

$$d = \sum_i \lambda_i \varkappa_i,$$

то в точках $\varkappa_i$ имеют место равенства (тождественные по x)

$$(\psi \equiv \psi^+)_{\varkappa_i}, \ \ldots, \ \left(\frac{d^q}{dz^q}\psi \equiv \frac{d^q}{dz^q}\psi^+\right)_{\varkappa_i}, \ \ldots$$
$$(q = 0, \ldots, \lambda_i - 1),$$

где z — локальный параметр на Γ около точки $\varkappa_i$.

В работе [49] установлена следующая

Теорема. *Если для любой согласованной пары эффективных дивизоров* (D, d) *разрешима обратная задача рассеяния* (*т. е. существует* $u(x)$ *и* $\psi(x, P)$ *с правильными алгебро-геометрическими свойствами*), *то риманова поверхность* Γ' *рациональна, функция* E *на ней имеет ровно один полюс* $E = \infty$ *и риманова поверхность* Γ *является гиперэллиптической, двулистно накрывающей* E*-плоскость* (*при этом все потенциалы* $u(x)$ *с правильными алгебро-геометрическими свойствами в последнем случае удовлетворяют одному из высших уравнений КдФ*).

Мы не будем здесь давать доказательство этой теоремы (оно несложно следует из некоторых простых алгебро-геометрических фактов). Эта теорема завершает аксиоматику класса потенциалов, удовлетворяющих уравнениям типа КдФ. При этом фактически все потенциалы этого класса могут быть определены как мероморфные почти-периодические функции на всей комплексной плоскости (x) с группой из $2n$ периодов $T_1, \ldots, T_n, T_1', \ldots$ $\ldots, T_n'$, где какая-то часть периодов может выродиться и стать бесконечными. Число полюсов функции $\psi(x, P)$ (степень дивизора $n(D)$) должно быть не меньше рода g поверхности Γ:

$$N = n(D) \geqslant g,$$

а степень дивизора d для этого класса потенциалов равна $n(d) = N - g$. Укажем теперь явно конструкцию этого класса потенциалов.

Во-первых, можно воспользоваться уравнениями из § 2 главы 2 на полюсы $\gamma_j(x_0)$ по переменной x_0 (или на нули $\gamma_j(x)$) блоховской функции $\psi_\pm(x, x_0, E)$, которая естественно определяется и в данном случае — например, с помощью формулы

$$\psi_\pm(x, x_0, E) = c(x, x_0, E) + i\chi(x_0, E)s(x, x_0, E),$$

где

$$\chi(x_0, E) = \frac{\varphi(E)\sqrt{R(E)} - \frac{i}{2}\frac{d}{dx_0}\prod\limits_{j=1}^{N}(E - \gamma_j(x_0))}{\prod\limits_{j=1}^{N}(E - \gamma_j(x_0))},$$

и $R(E) = \prod\limits_{i=1}^{2n+1}(E - E_i)$ — полином, задающий риманову поверхность Γ,

$$\varphi(E) = \prod_{j=1}^{q}(E - i\varkappa_j)^{\lambda_j}$$

— полином, определенный дивизором d,

$$d=\sum_{j=1}^{q}\lambda_j Q_j,$$

где точки Q_j лежат над точками $i\varkappa_j$ на E-плоскости. Можно себе представить, что полином $R(E)\cdot[\varphi(E)]^2$ получился как результат вырождения более сложной римановой поверхности, где все корни $i\varkappa_j$ стали $2\lambda_j$-кратными (можно считать, что $\lambda_j=1$). Для полюсов $\gamma_j(x_0)$ получится уравнение, аналогичное (2.3.12),

$$\frac{d\gamma_j}{dx_0}=2i\,\frac{\varphi(\gamma_j)\sqrt{R(\gamma_j)}}{\prod\limits_{k\neq j}(\gamma_j-\gamma_k)}.$$

Аналогичное уравнение получается вместо уравнений (2.4.3) для временной динамики в силу КдФ и его высших аналогов формальной заменой

$$\sqrt{R(\gamma_j)}\mapsto\sqrt{R(\gamma_j)[\varphi(\gamma_j)]^2}.$$

Для римановой поверхности рода $g=0$ эти уравнения очевидным образом решаются и получатся быстроубывающие безотражательные потенциалы и многосолитонные решения уравнения КдФ (см. [11], [8], [20]).

Для римановой поверхности $\mathbf{\Gamma}$ рода $g=1$ эти уравнения могут быть без труда решены в эллиптических функциях. Мы не будем проводить это интегрирование, поскольку в [48], [49] уже выписан набор формул, которые здесь могут быть получены.

Конечно, для всех $g\geqslant 2$ все эти уравнения могут быть решены в гиперэллиптических функциях на этой римановой поверхности. Обратим внимание на такое обстоятельство: если Ω_k — нормированные, как и в § 3 главы 2 дифференциалы первого рода на $\mathbf{\Gamma}$, то определено отображение Абеля A:

$$\eta_k=\sum_{j=1}^{N}\int\limits_{P_j(x_0)}^{P_j(x)}\Omega_k\qquad(k=1,\ldots,n),$$

(n-роду поверхности Γ, N-числу полюсов $P_j(x_0)$ и нулей $P_j(x)$ функции $\psi_\pm(x,x_0,E)$). Параметры η_k на торе (многообразии Якоби) $\mathbf{J}(\mathbf{\Gamma})$ по-прежнему таковы, что

$$\frac{d\eta_k}{dx}=U_k=\mathrm{const},\qquad\frac{d\eta_k}{dt_m}=W_k^m=\mathrm{const}$$

(в силу всех высших КдФ с номером m). Кроме того, точки дивизора $d=\sum\lambda_jQ_j$ не зависят ни от x, ни от времени. Однако остается еще $N-n$ неизвестных параметров, динамика которых на торе $\mathbf{J}(\mathbf{\Gamma})$ не содержится. Отображение Абеля здесь имеет вид

$$\mathbf{S}^N(\mathbf{\Gamma})\xrightarrow{A}\mathbf{J}(\mathbf{\Gamma}),$$

где прообраз точки $A^{-1}(\eta_1,\ldots,\eta_n)$ есть комплексное проективное пространство $\mathbf{C}P^{N-n}$. В работе [49] получены следующие результаты.

Пусть $N=n+k$ и $P_1(x_0),\ldots,P_{N+k}(x_0)$ — полюсы функции $\psi(x,P)$, $D=P_1+\ldots+P_{n+k}$, и $d=\varkappa_1+\ldots+\varkappa_k$ — половина нулей вронскиана

$W(\psi, \psi^+)$, не лежащая в точках ветвления поверхности

$$y_2 = \prod_{i=1}^{2n+1} (E - E_i)$$

и выбранная на верхнем листе. Согласно приведенным выше утверждениям пара (D, d) однозначно определяет потенциал $u(x)$ с собственной функцией $\psi(x, P)$. Пусть потенциалы $u_i(x)$ — это n-зонные потенциалы на поверхности Γ, заданные дивизорами полюсов

$$[P_1(x_0), \ldots, P_{n-1}(x_0), P_{n+i}(x_0)] \leftrightarrow u_i(x),$$

и $\psi_i(x, P)$ — их блоховские собственные функции.

Имеет место

Утверждение 2. *Собственная функция ψ для $u(x)$ представляется в виде*

$$\psi(x, P) = \sum_{i=1}^{k} a_i(x) \psi_i(x, P), \tag{П.1.1}$$

где $a_i(x)$ не зависят от точки римановой поверхности (от E) и могут быть определены из систем уравнений

$$\left\{ \begin{aligned} &\sum_{i=1}^{k} a_i(x) [\psi_i(x, \varkappa_s) - \psi_i^\dagger(x, \varkappa_s)] = 0 \qquad (s = 1, \ldots, k), \\ &\sum_{i=1}^{k} a_i(x) = 1. \end{aligned} \right. \tag{П.1.2}$$

Пусть теперь $K(x) = \int_{x_0}^{x} u(x)dx$, $K_i(x) = \int_{x_0}^{x} u_i(x)dx$.

Имеет место

Утверждение 3.

$$K(x) = \sum_{i=1}^{k} a_i(x) K_i(x).$$

Введем также «односолитонные потенциалы на фоне n-зонных». Можно показать, что интеграл $K(x)$ от многосолитонного потенциала на фоне n-зонного рациональным образом выражается через аналогичные интегралы $K_{ij}(x)$ от «односолитонных потенциалов на фоне n-зонных» и от самих n-зонных потенциалов $K_i(x)$. Такое рациональное представление может мыслиться как нелинейный аналог суперпозиции односолитонных решений на фоне n-зонных с заданной римановой поверхностью Γ. Для вещественных ограниченных потенциалов $u(x)$, связанных с поверхностью Γ: $y^2 = \prod_{j=1}^{2n+1} (E - E_j)$, где $-\infty < E_1 < \ldots < E_{2n+1} < \infty$, точки $\varkappa_j$ лежат в интервалах $E_{2k} < \varkappa_s < E_{2k+1}$ $(-\infty < \varkappa_s < E_1)$, а полюсы $\gamma_j(x_0)$ лежат по одному в каждом из получившихся отрезков (дополнениях к разрешенным зонам и точкам $\varkappa_j$.) Тогда $\psi_i^\dagger(x, \varkappa_s) \to 0$ при $x \to \pm\infty$ и $\psi(x, \varkappa_s) \to 0$ $(x \to \pm\infty)$, как следует из утверждения 2.

Отсюда вытекает

Следствие. *При этих предположениях на расположение полюсов $\gamma_j(x_0)$ и точек $\varkappa_j$ потенциал $u(x)$ является гладким и ограниченным по x, причем при $x \to \pm\infty$ потенциал экспоненциально стремится к конечнозонным $u_\pm(x)$, где $u_+(x)$ задается на поверхности* Γ *дивизором полюсов блоховской функции, эквивалентным $D - d$, а $u_-(x)$ — дивизором, эквивалентным $D - d^+$ (напомним, что любой дивизор степени n эквивалентен эффективному — сумме n различных точек; эквивалентность двух дивизоров D_1, D_2 означает, что разность $D_1 - D_2$ есть полный дивизор нулей и полюсов (f) некоторой алгебраической функции f на поверхности* Γ).

Для поверхностей рода $n = 1$ различие двух потенциалов $u_\pm(x)$ сводится к сдвигу фазы и было указано в [48].

В общем случае этот «сдвиг» потенциала на торе $\mathbf{J}(\Gamma)$ задается дивизором $(d - d^+)$, как вытекает из следствия, которому соответствует вектор сдвига в параметрах η_k на многообразии Якоби:

$$\eta_q^{-\infty,\,+\infty} = \sum_{j=1}^{k} \int_{\varkappa_j^+}^{\varkappa_j^-} \Omega_q \qquad (q = 1, \ldots, n),$$

$$d = \varkappa_1^+ + \ldots + \varkappa_k^+, \qquad d^+ = \varkappa_1^- + \ldots + \varkappa_k^-,$$

причем точки $\varkappa_j^\pm$ лежат над точкой $\varkappa_j$ E-плоскости на верхнем и нижнем листах соответственно, а интеграл берется по «половине» того цикла a_s, соединяющей точки $\varkappa_j^\pm$, в какой лакуне лежит точка $\varkappa_j$. Здесь Ω_q — нормированный, как в § 3 главы 2, базис дифференциалов первого рода.

Для односолитонных потенциалов на фоне n-зонных с одной точкой $\varkappa_1 = \varkappa$ мы из утверждения 3 получим

$$K = \frac{\varphi_2}{\varphi_2 - \varphi_1} K_1(x) + \frac{\varphi_1}{\varphi_1 - \varphi_2} K_2(x),$$

где

$$\varphi_i = \psi_i(x, \varkappa) - \psi_i^+(x, \varkappa),$$

$$K = \int u\,dx, \qquad K_i = \int u_i\,dx.$$

Для собственных функций ψ_i можно воспользоваться формулой, являющейся модификацией формулы Итса [54]:

$$\text{(П.1.3)} \qquad \psi_i(x, P) = e^{(x-x_0)\int \Omega} \frac{\theta(\eta(P) + (x - x_0)\vec{U} + \eta^{0i} - \vec{K})}{\theta(\eta(P) + \eta^{0i} - \vec{K})}$$

(определение входящих в формулу дифференциалов см. в § 3 главы 2), где

$$\eta_j(P) = \int_\infty^P \Omega_j,$$

$$\eta_j^{0i} = \sum_{k=1}^{n-1} \int_\infty^{P_k(x_0)} \Omega_j + \int_\infty^{P_{n+i}(x_0)} \Omega_j.$$

Включение временной динамики производится автоматически. Формулы (П.1.3) остаются верными в любой момент времени t, а для собственных функций $\psi_i(x, t, P)$, зависящих от времени в силу КдФ, верна формула

(П.1.4)
$$\psi_i(x, t, P) = e^{(x-x_0)\int\Omega + i(t-t_0)\int\omega_2} \frac{\theta(\eta(P) + (x-x_0)\vec{U} + (t-t_0)\vec{W}^{(1)} + \eta^{0i} - \vec{K})}{\theta(\eta(P) + \eta^{0i} - \vec{K})},$$

где дифференциал ω_2 имеет нулевые a-периоды и особенность dz/z^4 при $E \to \infty$, где $z = 1/\sqrt{E}$.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

ДРУГОЙ МЕТОД ПОЛУЧЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ТЕОРЕМ ИЗ § 2 ГЛАВЫ 2

В самое последнее время (в начале 1975 г.) поступил новый препринт Лакса, в котором он существенно развил результаты более ранней своей работы [50], упоминавшейся во Введении и, в основном, изложенной в § 2 главы 2. Хотя сами эти результаты содержатся в ранее опубликованной работе [38], их вывод существенно отличается от методов [38]. Мы приведем основные соображения из препринта Лакса [1]), главные результаты которого таковы.

1) Усилен результат работы [50] о спектре оператора Шрёдингера с периодическим потенциалом $u(x)$, удовлетворяющим любому из стационарных высших КдФ (2.2.22). Формулируя на нашем языке, кроме неэффективной теоремы работы [50] о конечнозонности этих потенциалов, теперь доказано также, что число запрещенных зон не превосходит n (правда, это доказательство также неэффективно, и в работе Лакса нет аналога, указанного в [38] и в § 2 главы 2 этого обзора алгоритма нахождения краев зон — это будет видно из вывода ниже).

2) Найдены полиномиальные интегралы стационарных уравнений КдФ (2.2.22), причем другим способом, чем в [38]. Как уже говорилось, края зон через эти интегралы пока не выражены [2]).

3) Доказана коммутативность (или инволютивность) простых собственных чисел оператора L, а также инволютивность всех интегралов $p(E_j)$, где $p(E)$ — блоховский закон дисперсии. Заметим, что инволютивность дискретных собственных чисел быстроубывающего потенциала была доказана еще в [21]; для периодического случая это также было хорошо известно после [21]; строгое доказательство опубликовано, например, в [66]. Что касается функции $p(E)$, то известно, что она определяется спектром периодической задачи (включая вырожденные уровни), так как след матрицы трансляции $a_R = \frac{1}{2}\operatorname{Sp}\hat{T}$ является целой функцией порядка $1/2$ и полностью определяется уровнями периодической задачи $a_R = 1$ с указанием их кратности (собственное число $e^{ip(E)}$ матрицы трансляции $\hat{T}$ называется «экспонентой Флоке», следуя классической терминологии). Так как при почти

---

[1]) Сейчас работа Лакса опубликована [63].

[2]) Конструкция этих интегралов одновременно и независимо получена также в обзоре [62] — см. по этому поводу раздел «Заключительные замечания» настоящего обзора.

любом малом возмущении $u + \delta u$ все собственные числа становятся невырожденными и функционал $p(E)$ гладкий, то равенство нулю скобок Пуассона $[p(E),\ p(E')] \equiv 0$ следует формально из [66]. Это указал Л. Д. Фаддеев (см. Введение и § 1 работы [38]).

Доказательство утверждения 1). Рассмотрим высшее уравнение КдФ и его операторное представление

$$\dot{u} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\sum c_i \frac{\delta I_{n-i}}{\delta u(x)}\right), \qquad \dot{L} = [A,\ L],$$

где $A = \sum c_i A_{n-i}$. Известно, что A — это кососимметрический оператор. Если $\dot{u} = 0$ и $\dot{L} = 0$, то мы имеем $[L,\ A] = 0$. Поэтому если $L\psi_j = \lambda_j\psi_j$ и λ_j — невырожденный уровень периодической задачи, то $A\psi_j = \mu_j\psi_j$. Это следует из элементарных общеалгебраических соображений. Из кососимметрии следует, что μ_j — чисто мнимо. Из вещественности оператора и функции ψ_j следует, что μ_j действительно. Поэтому $\mu_j = 0$. Значит, все невырожденные периодические собственные функции ψ_j оператора L таковы, что $A\psi_j = 0$. Так как порядок оператора A есть $2n + 1$, мы видим, что имеется не более $2n + 1$ невырожденных уровней λ_j для оператора L, поскольку все ψ_j должны быть линейно независимы. Утверждение 1) доказано. Вывод неэффективен: неясно пока, как найти этим методом положение уровней λ_j.

Доказательство утверждения 2). Используем результат [21], [22] о том, что интегралы $I_m = \int_0^T P_m(u,\ u',\ \ldots,\ u^{(m)})dx$ инволютивны. Скобка Пуассона имеет вид

$$[I_n,\ I_m] = \int_0^T \left(\frac{\delta I_m}{\delta u(x)} \frac{d}{dx} \frac{\delta I_n}{\delta u(x)}\right) dx, \tag{П.2.1}$$

и, как мы знаем, $[I_n,\ I_m] = 0$. Очевидно, из равенства нулю этого интеграла для любой периодической функции $u(x)$ следует

$$\frac{\delta I_m}{\delta u(x)} \frac{d}{dx} \frac{\delta I_n}{\delta u(x)} = \frac{d}{dx} J_{mn}(u,\ u',\ \ldots), \tag{П.2.2}$$

где J_{mn} — полином от $u,\ u',\ u''$, ... Очевидно, что

$$J_{mn} + J_{nm} = \frac{\delta I_n}{\delta u(x)} \frac{\delta I_m}{\delta u(x)}.$$

Рассмотрим стационарное уравнение

$$\sum_{i=0}^{n} c_i \frac{\delta I_{n-i}}{\delta u(x)} = d, \qquad \text{или} \qquad \sum_{i=0}^{n+1} c_i \frac{\delta I_{n-i}}{\delta u(x)} = 0, \tag{П.2.3}$$

где $d = c_{n+1}$, $I_{-1} = -\int_0^T u\, dx$. Умножив это равенство на $\frac{d}{dx}\frac{\delta I_m}{\delta u(x)}$, мы получим, учитывая (П.2.2),

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{i=0}^{n+1} c_i J_{n-i,\ m}\right) = 0. \tag{П.2.4}$$

Пусть

$$(\text{П}.2.4') \qquad \tilde{I}_m = \sum_{i=0}^{n+1} c_i J_{n-i,\, m} \qquad (m = 0, \ldots, n-1).$$

В силу (П.2.4) все полиномы $\tilde{I}_m$ являются интегралами уравнения (2.2.22) и утверждение 2 доказано. Легко доказать, что интегралы $\tilde{I}_m$ алгебраически независимы. Прямым подсчетом показывается, что все $\tilde{I}_m$ сохраняются во времени также и в силу высших КдФ (это проделано в препринте).

Конечно, отсюда уже более или менее следует, что эти интегралы $\tilde{I}_m$ выражаются через края зон потенциала. Поэтому в силу результатов § 2 главы 2 их можно выразить через константы $c_0 = 1, c_1, \ldots, c_n, c_{n+1}$ и интегралы J_α. Однако само выражение пока неясно, и Лакс не делает никаких утверждений о вычислении краев зон через интегралы $\tilde{I}_m$ и константы $c_0, \ldots$ $\ldots, c_{n+1}$ $(c_0 = 1,\ c_{n+1} = d)$ (см. [65]).

Отметим, наконец, что из этих результатов тривиально следует, что множество периодических потенциалов при заданном спектре есть n-мерное вещественное алгебраическое многообразие в пространстве R^{2n}, ограниченные связные компоненты которого изоморфны торам T^n. Комплексификация этих многообразий и почти-периодические потенциалы в работе Лакса не обсуждаются. В самой постановке Лакс исходит из следующей задачи: как минимизировать функционал I_n при заданных связях $\{I_k = a_k\}$ $(k < n)$ на классе периодических функций с заданным периодом?

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ЛИНЕЙНЫХ И НЕЛИНЕЙНЫХ ФОРМУЛ СЛЕДОВ ПРИ ИНТЕГРИРОВАНИИ УРАВНЕНИЙ ТИПА КдФ И ВЫРАЖЕНИЕ БЛОХОВСКОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ШРЁДИНГЕРА ЧЕРЕЗ θ-ФУНКЦИЮ

В математической литературе, начиная с работ И. М. Гельфанда, Б. М. Левитана и Л. А. Дикого [13], [14], выполненных в 1953—1955 гг., имеется много публикаций, посвященных выводу различных тождеств для сумм степеней собственных чисел линейных дифференциальных операторов — формул следов.

Формулы этого типа, которые мы будем называть нелинейными формулами следов, по существу уже появлялись в основной части обзора. Точнее было установлено соотношение

$$(\text{П}.3.1) \qquad \sum_{i=1}^{n} \gamma_i(x,\, t) = \frac{-u(x,\, t)}{2} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{2n+1} E_j,$$

а из формулы (2.3.11′) непосредственно вытекает равенство

$$(\text{П}.3.2) \qquad \sum_{i=1}^{n} \gamma_i^2(x,\, t) = \frac{u_{xx}(x,\, t)}{4} - \frac{u^2(x,\, t)}{2} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{2n+1} E_j.$$

Вычисления, которые проводились при выводе формулы (П.3.2), легко обобщить на высшие формулы следов; в частности, для суммы кубов величин γ_i легко получается выражение

$$\sum_{i=1}^{n}\gamma_i^3=-\frac{u^3}{2}+\frac{3}{4}uu_{xx}+\frac{15}{32}u_x^2-\frac{3}{32}u_{xxxx}+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}E_i^3.$$

Отметим, что с точностью до вычисления постоянных $\frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n}E_i^k$ эти формулы, как объяснено в работе [54], непосредственно вытекают из результатов Л. А. Дикого [14]. Еще проще их можно (опять с точностью до констант $\frac{1}{2}\sum\limits_i E_i^k$) получить из уже отмечавшегося в обзоре факта, что полином

$$P=\prod_i(E-\gamma_i(x,\ t))$$

удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$-P_{xxx}+4P_xu(x,\ t)+2u_xP=4EP_x.$$

Подчеркнем, что вывод формул следов в нашей ситуации связан лишь с римановой поверхностью Γ функции $\sqrt{\prod\limits_{i=1}^{2n+1}(E-E_i)}$ и остается в силе при произвольных комплексных значениях чисел E_i. Обоснование формул следов при произвольных краях зон можно получить также, используя следующую теорему, доказанную А. Р. Итсом [54] и представляющую самостоятельный интерес.

Т е о р е м а. *Функция*

$$\psi(x,\ t,\ E)=e^{i\omega(E)x}\frac{\theta(A(E)+x\vec{U}+t\vec{W}+l(0,\ 0))\,\theta(t\vec{W}+l(0,\ 0))}{\theta(A(E)+t\vec{W}+l(0,\ 0))\,\theta(x\vec{U}+t\vec{W}+l(0,\ 0))},$$

где

$$\omega(E)=\int_{E_{2n+1}}^{E}\frac{z^n+b_1z^{n-1}+\ldots b_n}{2\sqrt{\prod\limits_{j=1}^{2n+1}(z-E_j)}}\,dz,\qquad \oint_{a_k}d\omega(E)=0\qquad(k=1,\ \ldots,\ n),$$

$$(A(E))_k=\int_{\infty}^{E}\Omega_k\qquad(k=1,\ \ldots,\ n),$$

удовлетворяет уравнению Шредингера с потенциалом (2.3.34). *При этом* $\psi(x,\ t,\ E)$ *и* $\psi(x,\ t,\ E^*)$, $E^*=TE$ (*где* T — *инволютивный автоморфизм* Γ, *переставляющий листы*), *представляют фундаментальную систему решений уравнения Шрёдингера.*

Риманова поверхность Γ порождает, однако, серию формул следов другого сорта — линейных формул следов. Эти формулы получаются интегрированием формы $E^m\,d\ln F$, где F определена формулой (2.3.35) по краю $\partial\widetilde{\Gamma}$ поверхности $\widetilde{\Gamma}$, получающейся разрезанием Γ по всем базисным циклам a_i, b_i, и имеют вид

$$\text{(П.3.3)}\qquad \sum_{k=1}^{n}\gamma_k^m(x,\ t)=\sum_{k=1}^{n}\oint_{a_k}E^m\Omega_k-\operatorname*{res}_{E=\infty}\{E^md\ln F\}.$$

Вычисление вычета в первой из этих формул уже обсуждалось выше и привело к формуле (2.3.34). При $m = 2$ вычисление вычета и последующее дифференцирование по x дают

$$\frac{d}{dx}\sum_{k=1}^{n}\gamma_k^2(x,\ t)=\frac{u_{xxx}}{12}-\frac{u_t}{6}. \tag{П.3.4}$$

Одним из авторов обзора было замечено [53], [54], что сравнение линейных и нелинейных формул следов можно взять за основу при интегрировании нелинейных уравнений, связанных с римановыми поверхностями.

Эта идея использовалась при интегрировании нелинейного уравнения Шрёдингера и модифицированного уравнения Кортевега — де Фриза (см. [52]).

Применительно к уравнению Кортевега — де Фриза она выглядит особенно эффективной: дифференцируя правую часть формулы (П.3.2) и сравнивая получившееся тождество с (П.3.4), мы видим, что функция $u(x)$ (первоначально определенная как сумма $u = -2\sum\gamma_i + \sum E_i$) удовлетворяет уравнению КдФ, а вычисление вычета в правой части (П.3.3) при $m = 1$ порождает явное представление для u. Для интегрирования высших аналогов уравнения КдФ в рамках такой идеологии нужно уметь правильно выписывать соответствующие проблемы Якоби, т. е. выбирать соответствующее направление (вектор $\vec{W}$) на якобиане римановой поверхности. Оказывается, вид соответствующих векторов $\vec{W}$ однозначно определяется требованием, чтобы правые части формул (П.3.3) после вычисления вычета и последующего дифференцирования по x имели вид Gu, где G — линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами. Поэтому вид соответствующих векторов $\vec{W}$ определяется асимптотикой выражения $\frac{\varphi_k(E)}{\sqrt{R(E)}}$ при $E\to\infty$, где $\omega_k = \frac{\varphi_k(E)}{\sqrt{R(E)}}dE$. Подробное описание этого способа интегрирования высших уравнений КдФ дано в [54]. Приведем здесь лишь формулу для вектора $\vec{W}$, описывающего решение второго уравнения КдФ:

$$W_j = 32i\left\{c_{j_3}+\frac{1}{2}cc_{j_2}+c_{j_1}\left[\frac{3}{8}c^2-\frac{1}{2}\sum_{i>j}E_iE_j\right]\right\},\qquad c=\sum_{j=1}^{n}E_j.$$

Напомним, что второе уравнение КдФ имеет вид

$$u_t = u_x^{(5)} - 20u_xu_{xx} - 10uu_{xxx} - 30u^2u_x.$$

Следует отметить также, что в этом «следовом» подходе к интегрированию нелинейных уравнений можно пользоваться другими по форме и происхождению нелинейными формулами следов, которые мы условимся называть динамическими. Источником таких формул служат уравнения (2.4.3); например, для уравнения КдФ из уравнений (2.4.3) непосредственно следует формула

$$\frac{\partial\gamma_j(x,\ t)}{\partial t}=2(u+2\gamma_j)\frac{\partial\gamma_j}{\partial x},$$

суммирование которой по j дает равенство

$$\frac{d}{dx}\sum_{j=1}^{n}\gamma_j^2(x, t)=\frac{1}{2}uu_x-\frac{1}{4}u_t. \tag{П.3.5}$$

Сравнивая формулы (П.3.5) и (П.3.4), мы опять убеждаемся, что u есть решение уравнения КдФ, причем при таком способе рассуждений мы вообще нигде не используем уравнения Шрёдингера, а имеем все время дело с объектами, непосредственно связанными с римановой поверхностью.

Применительно к гиперэллиптическим поверхностям, порожденным полиномом четного порядка $P(E)=\prod\limits_{j=1}^{2n}(E-E_j)$, этот подход приводит, как показал А. Р. Итс, к интегрированию ряда нелинейных эволюционных систем, обобщающих нелинейное уравнение Шрёдингера и модифицированное уравнение КдФ, которые обсуждались выше. Приведем некоторые из этих систем:

$$\begin{cases} iu_t+u_{xx}-2vu=0,\\ iv_t-v_{xx}+2\left(v\frac{u_x}{u}\right)_x=0,\end{cases}$$

$$\begin{cases} v_z-6vv_x+v_{xxx}-3\left[\frac{u_x}{u}\left(v_x-\frac{u_x}{u}v\right)\right]_x=0,\\ u_z-6u_xv+u_{xxx}=0,\end{cases}$$

$$\begin{cases} if_t+f_{xx}-2iff_x-2iv_x=0,\\ iv_t-v_{xx}-2i(fv)_x=0,\end{cases}$$

$$\begin{cases} v_z-6vv_x+v_{xxx}-3[f(fv-iv_x)]_x=0,\\ f_z-3f^2f_x+f_{xxx}-\frac{3}{2}i(f^2)_{xx}-6(vf)_x=0.\end{cases}$$

Заключительные замечания[1])

1. Летом 1975 г. Л. Д. Фаддеев ознакомил авторов с новыми препринтами, полученными им в мае этого года в США. В работе McKean and Van Moerbeke «On Hill's equation» содержится доказательство ряда результатов, приведенных в главе 2, § 3 этого обзора. По-видимому авторы этого пре принта не были знакомы с работами [39], [42], [43], опубликованными в 1974 г. Кстати, в этом тексте имеется историческое недоразумение: конечнозонность потенциалов Ламе $n(n+1)\wp(x)$ установлена не в 1975 г., а много лет назад (см., например, Введение этого обзора).

Серия препринтов (M. Kac and P. Moerbeke) посвящена периодическим задачам для цепочки Тода и дискретному варианту КдФ. Все эти тексты написаны в 1975 г.; первый из них, содержащий лишь небольшую часть результатов, недавно появился в печати (Proc. Nat. Acad. Sci. USA **72** (1975), 1627; Adv. in Math. **16** (1975), 160). В дальнейших препринтах независимо получена часть результатов § 1 главы 3 этого обзора, которые раньше не публиковались. Авторы этих работ, видимо, были незнакомы с работой С. В. Мана-

[1]) Это добавление поступило в редакцию 24 сентября 1975 г.

кова [35] по дискретным системам, где была впервые найдена $\mathbf{L}$ — $\mathbf{A}$-пара операторов для дискретного КдФ (см. также § 5 главы 1 и § 1 главы 3).

Кроме того, из Японии поступил препринт (E. Date, S. Tanaka «Exact solutions for the periodic Toda lattice»), где метод авторов также применен к периодической задаче для цепочки Тода.

2. И. М. Гельфанд сообщил нам, что в обзоре И. М. Гельфанд, Л. А. Дикий «Асимптотика резольвенты штурм-лиувиллевских уравнений и алгебр уравнений Кортевега — де Фриза», УМН **30**:5 (185), (1975), 67—100, который выходит из печати в октябре 1975 г., содержится конструкция интегралов стационарных задач для высших КдФ, изложенная в Приложении 3 этого обзора по недавнему препринту Лакса. Эта конструкция была найдена ими одновременно и независимо с Лаксом. Более того, И. М. Гельфанд и Л. А. Дикий доказали также инволютивность этих интегралов, подвергнув их конкретному анализу (этого результата в работе Лакса нет). Не зная результатов И. М. Гельфанда — Л. А. Дикого, С. П. Новиков и О. И. Богоявленский также доказали инволютивность этих интегралов как следствие весьма простой и абсолютно общей теоремы о взаимоотношении гамильтоновых формализмов нестационарных и стационарных уравнений (на такую связь обращалось внимание еще в работе [38], но это оставалось четко недоформулированным). Приведем здесь формулировку этой теоремы (см. [64]). Напомним, что гамильтоновы системы на функциональном пространстве имеют вид согласно Гарднеру

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \dot{u} = \frac{d}{dx}\frac{\delta I}{\delta u(x)}, \tag{1}$$

где

$$I = \int P(u, u', u'', \ldots, u^{(n)})dx, \quad u' = \frac{\partial u}{\partial x},$$

I — гамильтониан. Будем предполагать, что P не зависит явно от x. Мы рассматриваем систему формально, не уточняя функционального пространства, которое может оказаться даже из растущих функций.

Для двух функционалов

$$I = \int P\,dx, \quad J = \int Q\,dx$$

скобка Пуассона имеет вид

$$\langle I, J\rangle = \int \left(\frac{d}{dx}\frac{\delta J}{\delta u(x)}\right)\frac{\delta I}{\delta u(x)}\,dx, \tag{2}$$

причем гамильтониан $\langle I, J\rangle$ формально задает коммутатор двух потоков (на любом классе функций на прямой). Если потоки коммутируют $\langle I, J\rangle = 0$, то мы, по определению, имеем

$$\left(\frac{d}{dx}\frac{\delta J}{\delta u(x)}\right)\frac{\delta I}{\delta u(x)} = \frac{dV(I, J)}{dx},$$

где $V = V(u, u', \ldots)$. Рассмотрим стационарную задачу $\frac{\delta I}{\delta u(x)} = 0$ (или const), которая имеет гамильтонов вид в канонических координатах (см. [38], пример 2 для $n = 2$)

$$(3)\qquad \begin{cases} q_1 = u, \quad q_2 = u', \quad q_3 = u'', \quad \ldots, \quad q_n = u^{(n-1)}, \\ p_1 = \dfrac{\partial P}{\partial u'} - \left(\dfrac{\partial P}{\partial u''}\right)' + \left(\dfrac{\partial P}{\partial u'''}\right)'' - \ldots \pm \left(\dfrac{\partial P}{\partial u^{(n)}}\right)^{(n-1)}, \\ p_2 = \dfrac{\partial P}{\partial u''} - \left(\dfrac{\partial P}{\partial u'''}\right)'' + \left(\dfrac{\partial P}{\partial u^{(4)}}\right)''' - \ldots \pm \left(\dfrac{\partial P}{\partial u^{(n)}}\right)^{(n-2)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_n = \dfrac{\partial P}{\partial u^{(n)}} \end{cases}$$

с гамильтонианом

$$(4)\qquad H(p, q) = P - u'p_1 - u''p_2 - \ldots - u^{(n)}p_n,$$

если все можно выразить через координаты (p, q). Это указано в учебниках по вариационному исчислению с высокими производными.

Если $I = \int P(u, u', \ldots, u^{(n)})dx$ и $J = \int Q(u, u', \ldots, u^{(m)})dx$, причем $\langle I, J\rangle = 0$, то на множестве неподвижных точек потока (1) функционал J определяет поток $\dot u = \frac{d}{dx}\frac{\delta J}{\delta u(x)}$ как конечномерную динамическую систему — например, как высшие КдФ в работе [38]. При этих условиях имеет место общая и довольно простая

Теорема. *Если $m < n$ и $\langle I, J\rangle = 0$, то поток $\dot u = \frac{d}{dx}\frac{\delta J}{\delta u(x)}$ на множестве неподвижных точек потока (1) является однопараметрическим семейством конечномерных динамических систем, зависящих от константы интегрирования $\frac{\delta I}{\delta u(x)} = d$; все эти системы гамильтоновы и задаются гамильтонианом $V_d(I, J)$, выраженным через фазовые координаты* (3), *где*

$$\frac{d}{dx} V_d(I, J) = \left(\frac{d}{dx}\frac{\delta J}{\delta u(x)}\right)\left(\frac{\delta I}{\delta u(x)} - d\right).$$

Пример: пусть $J = \int \frac{u^2}{2}\,dx$; в этом случае поток $\dot u = \frac{d}{dx}\frac{\delta J}{\delta u(x)} = u'$ задает группу сдвигов по x и коммутирует с I, если P не содержит явной зависимости от x. Тогда мы имеем

$$V_0(I, J) = H(p, q), \qquad \frac{dV}{dx} = u'\frac{\delta I}{\delta u(x)},$$

где $H(p, q)$ — гамильтониан стационарной задачи для потока (1).

Из теоремы, очевидно, вытекает, что если два интеграла J_1, J_2 потока (1) коммутируют в нестационарной задаче $\langle J_1, J_2\rangle = 0$, то их образы $V(I, J_1)$ и $V(I, J_2)$ коммутируют в фазовом пространстве стационарной задачи с каноническими координатами (3).

Применение теоремы к теории КдФ очевидно, ибо в этой теории мы имеем много коммутирующих потоков в функциональном пространстве (высших КдФ согласно Гарднеру); образы этих потоков на множестве неподвижных точек одного из них, как говорилось в работе [38], дают набор коммутирующих систем в стационарной задаче. Интересно, что в [38] был найден полный набор интегралов $J_1, \ldots, J_n$ стационарной задачи, выраженных явно через спектр оператора Штурма — Лиувилля (Хилла, Шрёдингера). В следующей работе мы укажем взаимное выражение этих интегралов Новикова и интегралов Лакса — Гельфанда — Дикого друг через друга (см. [65]).

3. В самое последнее время И. М. Кричевер, развивая технику Б. А. Дубровина и А. Р. Итса — В. Б. Матвеева, нашел красивый алгебро-геометрический метод построения аналогов конечнозонных решений периодической задачи (по x) для «двумерного КдФ» или уравнения Кадомцева — Петвиашвили (см. [37] и главу 1, § 2 этого обзора) и некоторых других уравнений Захарова и Шабата, содержащих лишнюю координату y. Замечательно, что в конструкции решений «двумерного КдФ» по схеме Кричевера появляется уже любая риманова поверхность рода g. Возможность применения этого метода к задачам алгебраической геометрии (и явного построения универсальных расслоений над многообразием модулей римановых поверхностей) по схеме Новикова — Дубровина (см. [43] и § 4 главы 2 этого обзора и § 2 главы III), подвергается сейчас тщательному анализу.

4. В самое последнее время появились новые работы Ю. Мозера (Three integrable hamiltonian systems connected whith isospectrum deformations, Adv. in Math. **16** (1976), 354), где найдена **L** — **A**-пара для весьма интересного класса дискретных систем классических частиц на прямой с различными потенциалами взаимодействия (в некоторых из этих моделей согласно работам Калоджеро и Сазерленда была известна полная решаемость соответствующей квантовой задачи). Интересный групповой подход к системам Мозера и Калоджеро развивается сейчас А. М. Переломовым и Ольшанецким («Вполне интегрируемые системы, связанные с алгебрами Ли»). Эти системы приводят, в отличие от цепочки Тода, к «нелокальным» операторам **L** и пока не укладываются в методы данного обзора даже и в тех случаях, когда для них имеет смысл периодическая задача.

ЛИТЕРАТУРА

[1] G. Borg, Eine Umkehrung der Sturm-Liouvilleschen Eigenwertaufgabe, Acta Math. **78**: 1 (1946), 1—96.

[2] V. Bargmann, Determination of a central field of force form the elastic scattering phase shifts, Phys. Rev. **75** (1949), 301—303.

[3] И. М. Гельфанд, Б. М. Левитан, Об определении дифференциального уравнения по его спектральной функции, Изв. АН, сер. матем. **15** (1951), 309—360.

[4] В. А. Марченко, Некоторые вопросы теории одномерных дифференциальных операторов. I, Труды ММО **1** (1952), 327—420.

[5] Л. Д. Фаддеев, Свойства S-матрицы одномерного уравнения Шрёдингера, Труды МИАН им. В. А. Стеклова **73** (1964), 314—336.

[6] И. В. Станкевич, Об одной обратной задаче спектрального анализа для уравнения Хилла, ДАН **192**: 1 (1970), 34—37.

[7] E. L. Ince, Further investigations into the periodic Lamé functions, Proc. Roy. Soc. Edinburgh **60** (1940), 83—99.

[8] I. Kay, H. Moses, Reflectionaless transmission through dielectrics and scattering potentials, J. Appl. Phys. **27**: 12 (1956), 1503—1508.

[9] H. Hochstadt, On the determination of a Hill's equation from its spectrum, Arch. Ration. Mech. and Anal. **19**: 5 (1965), 535—562.

[10] Н. И. Ахиезер, Континуальный аналог ортогональных многочленов на системе интервалов, ДАН **141** : 2 (1961), 263—266.

[11] А. Б. Шабат, О потенциалах с нулевым коэффициентом отражения, Сб. «Динамика сплошной среды», № 5, 130—145. Новосибирск, 1970.

[12] K. M. Case, M. Kac, A. discrete version of the inverse scattering problem, J. Math. Phys. **14** (1973), 594—603.

[13] И. М. Гельфанд, Б. М. Левитан, Об одном простом тождестве для собственных значений оператора Штурма — Лиувилля, УМН **30**: 6 (186) (1975).

[14] Л. А. Дикий, Об одной формуле Гельфанда — Левитана, УМН 8: 2 (1963).

[15] Э. Ч. Титчмарш, Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка, т. 2, глава XXI, М., ИЛ, 1961.

[16] G. B. Whitham, Non-linear dispersive waves, Proc. Roy. Soc. **A283** (1965).

[17] M. Kruskal, N. Zabusky, Interaction of «solytons» in a collisionless plasma and the reccurence of initial states, Phys. Rev. Lett. **15** (1965), 240—243.

[18] C. Gardner, J. Green, M. Kruskal, R. Miura, A method for solving the Korteweg — de Vries equation, Phys. Rev. Lett. **19** (1967), 1095—1098.

[19] П. Д. Лакс, Интегралы нелинейных уравнений эволюции и уединенные волны, Математика **13**: 5 (1969), 128—150.

[20] В. Е. Захаров, Кинетическое уравнение для солитонов, ЖЭТФ **60** : 3 (1971).

[21] В. Е. Захаров, Л. Д. Фаддеев, Уравнение Кортевега — де Фриза — вполне интегрируемая гамильтонова система, Функц. анализ **5**: 4 (1971), 18—27.

[22] C. Gardner, Korteweg — de Vries equation and generalisations. IV, The Korteweg-de Vries equation as a hamiltonian system, J. Math. Phys. **12**: 8 (1971), 1548—1551.

[23] В. Е. Захаров, К проблеме стохастизации одномерных цепочек нелинейных осциллятров, ЖЭТФ **65**: 1 (1973), 219—225.

[24] В. С. Дрюма, Об аналитическом решении двумерного уравнения Кортевега — де Фриза, Письма в ЖЭТФ **19**: 12 (1974), 753—755.

[25] В. Е. Захаров, А. Б. Шабат, Точная теория двумерной самофокусировки и одномерной автомодуляции волн в нелинейных средах, ЖЭТФ **61**: 1 (1971).

[26] В. Е. Захаров, А. Б. Шабат, О взаимодействии солитонов в устойчивой среде, ЖЭТФ **64**: 5 (1973), 1627—1639.

[27] В. Е. Захаров, С. В. Манаков, О резонансном взаимодействии волновых пакетов в нелинейных средах, Письма в ЖЭТФ **18**: 7 (1973)в 413—417.

[28] Л. А. Тахтаджян, Точная теория распространения ультракоротких оптических импульсов в двухуровневых средах, ЖЭТФ **66**: 2 (1974), 476—489.

[29] M. A. Ablowitz, D. J. Kaup, A. C. Newell, H. Segur, Method for solving the sine-gordon equation, Phys. Rev. Lett. **30** (1973), 1262—1264.

[30] В. Е. Захаров, Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, Полное описание решений «sin-gordon», ДАН **219**: 6 (1974), 1334—1337.

[31] M. Toda, Waves in nonlinear lattice, Progr. Theor. Phys. Suppl. **45** (1970), 174—200.

[32] M. Henon, Integrals of the Toda lattice, Phys. Rev. **B9** (1974), 1921—1923.

[33] H. Flaschka, Toda lattice. I, Phys. Rev. **B9** (1974), 1924—1925.

[34] H. Flaschka, Toda lattice. II, Progr. Theor. Phys. **51** (1974), 703—716.

[35] С. В. Манаков, О полной интегрируемости и стохастизации в дискретных динамических системах, ЖЭТФ **67**: 2 (1974), 543—555.

[36] А. Б. Шабат, Об уравнении Кортевега — де Фриза, ДАН **211**: 6 (1973).

[37] В. Е. Захаров, А. Б. Шабат, Схема интегрирования нелинейных уравнений математической физики методом обратной задачи рассеяния. I, Функц. анализ **8**: 3 (1974), 43—53.

[38] С. П. Новиков, Периодическая задача Кортевега — де Фриза. I, Функц. анализ 8 : 3 (1974), 54—66.

[39] С. П. Новиков, Б. А. Дубровин, Периодическая задача Кортевега — де Фриза и Штурма — Лиувилля, Доклад на семинаре им. И. Г. Петровского 6 марта 1974 г., УМН **29**: 6 (1974).

[40] Б. А. Дубровин, Обратная задача теории рассеяния для периодических конечнозонных потенциалов, Функц. анализ 9: 1 (1975), 65—66.

[41] А. Р. Итс, В. Б. Матвеев, Об операторах Хилла с конечным числом лакун, Функц. анализ 9: 1 (1975), 69—70.
[42] Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, Периодический и условно-периодический аналоги многосолитонных решений уравнения Кортевега — де Фриза, ЖЭТФ 67: 12 (1974), 2131—2143.
[43] Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, Периодическая задача для уравнений Кортевега — де Фриза и Штурма — Лиувилля. Их связь с алгебраической геометрией, ДАН 219: 3 (1974), 19—22.
[44] В. А. Марченко, Периодическая задача Кортевега — де Фриза, ДАН 217 : 2 (1974), 276—279.
[45] В. А. Марченко, Периодическая задача Кортевега — де Фриза, Матем. сб. 95: 3 (1974), 331—356.
[46] Б. В. Дубровин, Периодическая задача для уравнения Кортевега — де Фриза в классе конечнозонных потенциалов, Функц. анализ 9: 3 (1975).
[47] А. Р. Итс, В. Б. Матвеев, Операторы Хилла с конечным числом лакун и многосолитонные решения уравнения Кортевега — де Фриза, ТМФ 23 : 1 (1975), 51—67.
[48] Е. А. Кузнецов, А. В. Михайлов, Устойчивость стационарных волн в нелинейных средах со слабой дисперсией, ЖЭТФ, 67: 11 (1974), 1717—1727.
[49] И. М. Кричевер, Безотражательные потенциалы на фоне конечнозонных, Функц. анализ 9: 2 (1975).
[50] P. D. Lax, Periodic solutions of the KdV equation, Lectures in Appl. Math. 15 (1974), 85—96.
[51] Б. А. Дубровин, Конечнозонные линейные операторы и абелевы многообразия УМН 31: 4 (1976).
[52] А. Р. Итс, Канонические системы с конечнозонным спектром и периодические решения нелинейного уравнения Шрёдингера, Вестник ЛГУ, 1976.
[53] В. Б. Матвеев, Новая схема интегрирования уравнения Кортевега — де Фриза, УМН 30: 6 (1975), 201—203.
[54] А. Р. Итс, В. Б. Матвеев, Об одном классе решения уравнения КдФ, Сб. «Проблемы математической физики», № 8, ЛГУ, 1976.
[55] Дж. Спрингер, Введение в теорию римановых поверхностей, М., ИЛ., 1961.
[56] Э. И. Зверович, Краевые задачи теории аналитических функций, УМН 26: 1 (1971).
[57] В. В. Голубев, Лекции по интегрированию уравнений движения тяжелого твердого тела с одной неподвижной точкой, М., Гостехиздат, 1953.
[58] W. Goldberg, On the determination of a Hill's equation from its spectrum, Bull. Amer. Math. Soc. 80: 6 (1974), 1111—1112.
[59] Е. И. Динабург, Я. Г. Синай, О спектре одномерного уравнения Шрёдингера с квазипериодическим потенциалом, Функц. анализ 9: 4 (1975), 8—21.
[60] В. П. Котляров, Периодическая задача для нелинейного уравнения Шрёдингера, «Математическая физика и функциональный анализ», Труды ФТИНТ АН УССР, вып. 6 (1975).
[61] В. А. Козел, Об одном классе решений уравнения «Sin-gordon», «Математическая физика и функциональный анализ», Труды ФТИНТ АН УССР, вып. 6 (1975).
[62] И. М. Гельфанд, Л. А. Дикий, Асимптотика резольвенты штурм-лиувиллевских уравнений и алгебра уравнений Кортевега — де Фриза, УМН 30: 5 (1975).
[63] P. D. Lax, Periodic solutions of the KdV equations, Comm. Pure and Appl. Math. 28 (1975), 141—188.
[64] О. И. Богоявленский, С. П. Новиков, О связи гамильтоновых формализмов стационарных и нестационарных задач, Функц. анализ 10: 1 (1976).
[65] О. И. Богоявленский, Об интегралах высших стационарных уравнений КдФ и собственных числах операторов Хилла, Функц. анализ 10: 2 (1976).
[66] В. Е. Захаров, С. В. Манаков, О полной интегрируемости нелинейного уравнения Шрёдингера, ТМФ 19 (1974).

Поступило в редакцию 2 июня 1975 г.