Функциональный анализ и его приложения,
1989, т. 23, вып. 2, 57—59

УДК 513

О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ СКОБКАХ ПУАССОНА НА РЕШЕТКЕ

Б. А. Дубровин

Понятие дифференциально-геометрических скобок Пуассона (ДГСП) было введено в [1] в связи с изучением свойств скобок Пуассона гидродинамического типа [2] и их обобщений. Напомним, что однородные ДГСП m-го порядка на фазовом пространстве полей $u^i(x)$, $i=1,\ldots,N$, $x\in\mathbf{R}$ (в этой заметке мы ограничиваемся только пространственно-одномерным случаем), принимающих значения в многообразии $\mathscr{M}^N$, задаются формулами

$$\{u^i(x), u^j(y)\} = \sum_{k=0}^{m} G_k^{ij}(u(x), u'(x), \ldots, u^{(k)}(x))\, \delta^{(m-k)}(x-y), \tag{1}$$

где коэффициенты G_k^{ij} являются градуированно-однородными полиномами от $u, u', \ldots$ $\ldots, u^{(k)}$ степени k, причем по определению $\deg u^{(l)} = l$, $l = 0, 1, \ldots$ (Стандартные свойства скобки — билинейность, косая симметрия, тождества Лейбница и Якоби — подразумеваются.) При локальных заменах полевых переменных вида

$$u^i(x) \to v^i(u(x)), \ i = 1, \ldots, N, \tag{2}$$

задаваемых заменами локальных координат $u^i \to v^i(u)$ на многообразии $\mathscr{M}^N$, класс скобок вида (1) остается инвариантным, причем коэффициенты G_k^{ij} преобразуются как «дифференциально-геометрические объекты k-го порядка», так что, например, $G_0^{ij} = G_0^{ij}(u)$— метрика на многообразии $\mathscr{M}^N$, $G_1^{ij} = \Gamma_s^{ij}(u)\, u_x^s$ определяет связность на нем же и т. д. Условия на коэффициенты G_k^{ij}, обеспечивающие косую симметрию и тождество Якоби, также записываются в дифференциально-геометрических терминах. Общая ДГСП является суммой однородных скобок разных порядков. Обзор результатов по теории ДГСП и ее приложениям см. в [3].

В настоящей заметке мы опишем дискретный вариант ДГСП, где вместо непрерывных переменных x, y вводятся дискретные $m, n\in\mathbf{Z}$. Фазовое пространство состоит из последовательностей $u_n = \{u_n^i\} \in \mathscr{M}^N$, $n\in\mathbf{Z}$. ДГСП на (одномерной) целочисленной решетке определяется формулами

$$\{u_m^i, u_n^j\} = g_{m-n}^{ij}(u_m, u_n), \tag{3}$$

причем $g_k^{ij} \equiv 0$ при $|k| > M$. Скобки (3) инвариантны относительно локальных замен

$$u_n^i \to v_n^i = v^i(u_n), \qquad n\in\mathbf{Z}, \tag{4}$$

аналогичных (2), при которых коэффициенты преобразуются по закону

$$g_k^{ij}(u', u'') \to \frac{\partial v^i(u')}{\partial u^p} \frac{\partial v^j(u'')}{\partial u^q} g_k^{pq}(u', u''). \tag{5}$$

В «континуальном пределе» типа $u_n^i = u^i(n\varepsilon)$, где $\varepsilon\to 0$ — шаг решетки, скобка (3) определяет ДГСП на пространстве полей (нелокальные), зависящие от ε, вида

$$\{u^i(x), u^j(y)\}_\varepsilon \equiv \sum_{q=0}^{\infty} \varepsilon^q \{u^i(x), u^j(y)\}_q = \sum_{k=-M}^{M} g_k^{ij}(u(x), u(y))\, \delta(x-y-k\varepsilon). \tag{6}$$

Младший член $\{u^i(x), u^j(y)\}_m$ ряда (6), где $\{u^i(x), u^j(y)\}_k \equiv 0$ при $k < m$, определяет однородную ДГСП m-го порядка.

Мы будем рассматривать только случай $M = 1$ (случай $M = 0$ тривиален; общий случай $M > 0$ сводится к $M = 1$ укрупнением решетки). В этом случае ДГСП определяется парой матриц

$$g_1^{ij}(u, v) \equiv g^{ij}(u, v), \quad g_0^{ij}(u, u) \equiv h^{ij}(u). \tag{7}$$

Будем предполагать выполненным условие невырожденности

$$\det g^{ij}(u, u) \neq 0. \tag{8}$$

Оказывается, многообразие $\mathcal{M}^N$ (локально) наделяется тогда структурой группы Гамильтона — Ли (см. [4]), $\mathcal{M}^N = G$. Напомним [4], что локально группа Гамильтона — Ли с алгеброй Ли $L = L(G)$ определяется структурой алгебры Ли на сопряженном пространстве L^*, согласованной с L, т. е. тензор структурных констант $f_\gamma^{\alpha\beta} \in \mathrm{Hom}(L, L \otimes L)$ является 1-коциклом на алгебре Ли L. Назовем группу Гамильтона — Ли C *допустимой*, если:

1) на L^* заданы две структуры алгебры Ли, L_1^* и L_2^*, согласованные с L;

2) заданы взаимно сопряженные гомоморфизмы алгебр Ли r_i: $L_1^* \to L$, $i = 1, 2$, $r_2 = r_1^+$, т. е. если $r_i = (r_i^{\alpha\beta})$, $i = 1, 2$, то $r_2^{\alpha\beta} = r_1^{\beta\alpha}$;

3) структурные константы $f_{1\gamma}^{\alpha\beta}$ и $f_{2\gamma}^{\alpha\beta}$ алгебр Ли L_1^* и L_2^* определяют когомологичные коциклы,

$$f_{1\gamma}^{\alpha\beta} - f_{2\gamma}^{\alpha\beta} = c_{\varepsilon\gamma}^{\alpha} h^{\varepsilon\beta} + h^{\alpha\varepsilon} c_{\varepsilon\gamma}^{\beta}, \tag{9}$$

где $h^{\alpha\beta} = -h^{\beta\alpha}$ — некоторая матрица, $c_{\beta\gamma}^{\alpha}$ — структурные константы L;

4) матрица $h^{\alpha\beta}$ удовлетворяет уравнению

$$c_{\mu\nu}^{\alpha} h^{\mu\beta} h^{\nu\gamma} + h^{\alpha\mu} c_{\mu\nu}^{\beta} h^{\nu\gamma} + h^{\alpha\mu} h^{\beta\nu} c_{\mu\nu}^{\gamma} = f_{1\mu}^{\alpha\beta} h^{\mu\gamma} + f_{1\mu}^{\gamma\alpha} h^{\mu\beta} + f_{1\mu}^{\beta\gamma} h^{\mu\alpha}. \tag{10}$$

Группу Гамильтона — Ли будем называть *сильно-допустимой*, если $r \equiv r_1 = r_2^+$ — изоморфизм. Такой объект локально определяется алгеброй Ли L и невырожденной матрицей $r = (r^{\alpha\beta})$, удовлетворяющими перечисленным выше условиям.

Т е о р е м а. *Любая ДГСП на решетке вида* (3) *с* $M = 1$, *удовлетворяющая* (8), *локально задается сильно допустимой группой Гамильтона — Ли* G, r *по формулам*

$$\{\varphi(u_n), \psi(u_{n+1})\} = -r^{\alpha\beta} \partial_\alpha \varphi(u_n) \partial'_\beta \psi(u_{n+1}), \tag{11}$$

$$\{\varphi(u_n), \psi(u_n)\} = \{\varphi(u_n), \psi(u_n)\}_0 + h^{\alpha\beta} \partial'_\alpha \varphi(u_n) \partial'_\beta \psi(u_n),$$

$$\{\varphi(u_n), \psi(u_m)\} = 0 \text{ при } |m - n| > 1.$$

Здесь φ, ψ — *любые гладкие функции на* G, ∂_α *и* ∂'_α — *соответственно лево- и правоинвариантные векторные поля на* G, *совпадающие в единице*, $\{,\}_0$ — *групповая скобка Пуассона на* G, *определяемая по алгебре Ли* L_1^* *согласно* [4]. *Для любой допустимой группы Гамильтона — Ли формула* (11) *также определяет ДГСП на решетке, но без условия невырожденности.*

Отметим, что ДГСП на решетке с условием невырожденности однозначно определяет группу G (локально), но целое семейство матриц $r^{\alpha\beta}(u) = g^{\alpha\beta}(u, u)$.

П р и м е р 0. Для абелевой группы G скобка (11) постоянна.

П р и м е р 1. Для простейшей 2-мерной неабелевой группы G в качестве r можно взять произвольную невырожденную матрицу. Получаем следующее семейство скобок:

$$g^{ij}(u, v) = \begin{pmatrix} \sigma y^2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x' & \frac{1}{2} y' \end{pmatrix}, \quad u = (x, y), \quad v = (x', y'), \tag{12}$$

$$h^{ij}(u) = g^{ij}(u, u) - g^{ji}(u, u), \quad \sigma = \pm 1.$$

Для $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ из (12) получаем вторую гамильтонову структуру для цепочки Тода [5]. (Этот пример найден В. П. Черкашиным.)

П р и м е р 2. Пусть матрица $r^{\alpha\beta}$ кососимметрична и удовлетворяет классическому уравнению Янга — Бакстера на алгебре Ли $L = L(G)$ (см., например, [4]). Она определяет тогда ДГСП на решетке вида

$$\{\varphi(u_n), \psi(u_{n+1})\} = -r^{\alpha\beta} \partial_\alpha \varphi(u_n) \partial'_\beta \psi(u_{n+1}), \tag{13}$$

$$\{\varphi(u_n), \psi(u_n)\} = r^{\alpha\beta} (\partial_\alpha \varphi(u_n) \partial_\beta \psi(u_n) + \partial'_\alpha \varphi(u_n) \partial'_\beta \psi(u_n)).$$

Эта скобка удовлетворяет условию невырожденности (8), если $\det r^{\alpha\beta} \neq 0$ (такие алгебры Ли называются квазифробениусовыми [6]). Скобка (13) (точнее, ее преобразование вида (6)) фактически совпадает с той, что возникла в [7] в процессе решения задачи о квантовании алгебры токов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Дубровин Б. А., Новиков С. П.* // ДАН СССР.— 1984. Т. 279, № 2.— С. 294—297. 2. *Дубровин Б. А., Новиков С. П.* // ДАН СССР.— 1983. Т. 270, № 4.— С. 781—785. 3. *Новиков С. П.* // УМН.—1985. Т. 40, № 4.— С. 79—89. 4. *Дринфельд В. Г.* // ДАН СССР.— 1983. Т. 268, № 2.— С. 285—287. 5. *Adler M.* // Invent. math. —1979. V. 50.— P. 219—248. 6. *Элашвили А. Г.* // Тр. Тбилисск. мат. ин-та.— 1985. Т. 77.— С. 127—137. 7. *Semenov-Tian-Shansky M.* // Publ. RIMS Kyoto University.— 1985. V. 21. № 6.— P. 1237—1260.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступило в редакцию
12 декабря 1988 г.