

SISSA - Università di Trieste
Corso di Laurea Magistrale in Matematica
A. A. 2005/2006
Appunti sulla MECCANICA ANALITICA

Boris DUBROVIN

February 5, 2010

Contents

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Il principio di minima azione | 3 |
| 1.1 | Spazio delle configurazioni di un sistema meccanico, gradi di libertà e coordinate generalizzate. Equazioni del moto. | 3 |
| 1.2 | La lagrangiana di un sistema meccanico. Il principio variazionale di Hamilton. Le equazioni di Eulero - Lagrange. | 4 |
| 1.3 | Sistemi di riferimento inerziali. Il principio di relatività galileiana | 6 |
| 1.4 | Dinamica del punto materiale | 8 |
| 1.5 | Sistema isolato di punti materiali. L'energia cinetica e potenziale | 9 |
| 1.6 | Equazioni di Eulero - Lagrange sulle varietà lisce. Dinamica sul fibrato tangente | 11 |
| 1.7 | Energia | 15 |
| 1.8 | Moti unidimensionali | 16 |
| 1.9 | Esercizi | 19 |
| 2 | Leggi di conservazione | 22 |
| 2.1 | Teorema di Noether | 22 |
| 2.2 | Impulso totale | 25 |
| 2.3 | Momento angolare | 27 |
| 2.4 | Trasformazioni di scala | 30 |
| 2.5 | Problema dei due corpi | 31 |
| 2.6 | Moto nel campo centrale | 32 |
| 2.7 | Il problema di Keplero | 34 |

| | | |
|----------|--|------------|
| 2.8 | Sistemi meccanici con vincoli. Il principio di D'Alembert | 37 |
| 2.9 | Sistemi di riferimento non inerziali | 41 |
| 2.10 | Esercizi | 42 |
| 3 | Meccanica Hamiltoniana | 45 |
| 3.1 | La trasformazione di Legendre. Le equazioni canoniche di Hamilton | 45 |
| 3.2 | Parentesi di Poisson e integrali primi di equazioni di Hamilton | 49 |
| 3.3 | I principi variazionali in meccanica hamiltoniana | 52 |
| 3.4 | Le trasformazioni canoniche e le simmetrie delle equazioni di Hamilton | 56 |
| 3.5 | Struttura simplettica sul fibrato cotangente. Teorema di Liouville | 62 |
| 3.6 | La definizione generale di parentesi di Poisson | 70 |
| 3.7 | Le equazioni del moto del corpo rigido | 85 |
| 3.8 | Riduzione di sistemi hamiltoniani con simmetrie | 95 |
| 3.9 | Le sottovarietà lagrangiane | 103 |
| 3.10 | Trasformazioni canoniche | 106 |
| 3.11 | Equazione di Hamilton - Jacobi | 112 |
| 3.12 | Metodo di separazione delle variabili | 114 |
| 3.13 | Sistemi completamente integrabili. Teorema di Liouville - Arnold | 118 |
| 3.14 | Le variabili azione - angolo | 122 |
| 3.15 | Esercizi | 129 |
| 4 | Introduzione alla teoria moderna di sistemi integrabili | 135 |
| 4.1 | Integrali primi associati a una coppia di Lax | 135 |
| 4.2 | Sistema di Toda | 137 |
| 4.3 | Sistema di Calogero - Moser | 142 |
| 4.4 | Equazioni di Eulero del moto di corpo rigido in dimensione arbitraria | 142 |
| 5 | Oscillazioni. Introduzione alle tecniche perturbative | 144 |
| 5.1 | Piccole oscillazioni vicino al punto di equilibrio | 144 |
| 5.2 | Oscillazioni forzate. Risonanze | 148 |
| 5.3 | Oscillazioni anarmoniche. Le forme normali di Birkhoff | 148 |
| 5.4 | Invarianti adiabatici | 154 |
| 5.5 | Cenni della teoria KAM. Teorema di Nekhoroshev | 154 |
| 6 | Risposte agli esercizi | 160 |

1 Il principio di minima azione

1.1 Spazio delle configurazioni di un sistema meccanico, gradi di libertà e coordinate generalizzate. Equazioni del moto.

L'idea del *punto materiale* è tra i concetti basilari di meccanica analitica. Si tratta di un corpo di cui si può trascurare le dimensioni per ottenere la descrizione del moto. Ad esempio, per lo studio della rivoluzione dei pianeti attorno il Sole possiamo considerarli come i punti materiali, ciò non è possibile per la descrizione della loro rotazione attorno gli assi propri.

La *posizione* del punto materiale nello spazio viene determinata dal suo vettore raggio $\mathbf{r} = (x, y, z)$. La derivata temporale

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \equiv \dot{\mathbf{r}} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$$

si chiama la *velocità*, e la seconda derivata

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = (\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z})$$

l'*accelerazione* del punto.

Per descrivere la configurazione di N punti materiali bisogna specificare N vettori, ovvero $3N$ coordinate. Più in generale, il numero n di parametri indipendenti necessari per specificare univocamente la configurazione del sistema si chiama il *numero dei gradi di libertà*.

Questi n parametri non vanno necessariamente scelti come le coordinate cartesiane dei punti. Qualsiasi n parametri q^1, q^2, \dots, q^n che determinino univocamente la configurazione del sistema con n gradi di libertà si chiamano le *coordinate generalizzate*; le loro derivate temporali $\dot{q}^1, \dot{q}^2, \dots, \dot{q}^n$ si chiamano le *velocità generalizzate*. Lo *stato* del sistema viene caratterizzato dall'insieme delle coordinate e velocità (generalizzate) $(q^1, q^2, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dot{q}^2, \dots, \dot{q}^n)$.

Il principio deterministico newtoniano: Lo stato iniziale $(q^1(t_0), q^2(t_0), \dots, q^n(t_0), \dot{q}^1(t_0), \dot{q}^2(t_0), \dots, \dot{q}^n(t_0))$, del sistema meccanico determina univocamente il moto $(q^1(t), q^2(t), \dots, q^n(t), \dot{q}^1(t), \dot{q}^2(t), \dots, \dot{q}^n(t))$ per $t > t_0$.

Osservazione 1.1.1 *Si ricordi che per un sistema delle equazioni differenziali di secondo ordine*

$$\left. \begin{aligned} \ddot{q}^1 &= f^1(q, \dot{q}, t) \\ \ddot{q}^2 &= f^2(q, \dot{q}, t) \\ &\dots \\ \ddot{q}^n &= f^n(q, \dot{q}, t) \end{aligned} \right\} \quad (1.1.1)$$

(noi usiamo le notazioni brevi $q = (q^1, \dots, q^n)$, $\dot{q} = (\dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)$) con le funzioni $f^1(q, \dot{q}, t), \dots, f^n(q, \dot{q}, t)$ lisce su un intorno del punto $(q_0, \dot{q}_0, t_0) = (q_0^1, q_0^2, \dots, q_0^n, \dot{q}_0^1, \dot{q}_0^2, \dots, \dot{q}_0^n, t_0)$ è valido il teorema di Cauchy: la soluzione

$$q^1 = q^1(t), \dots, q^n = q^n(t), \dot{q}^1 = \dot{q}^1(t), \dots, \dot{q}^n = \dot{q}^n(t)$$

del sistema con i dati iniziali

$$q^1(t_0) = q_0^1, \dots, q^n(t_0) = q_0^n, \frac{d}{dt}q^1(t)_{t=t_0} = \dot{q}_0^1, \dots, \frac{d}{dt}q^n(t)_{t=t_0} = \dot{q}_0^n$$

esiste ed è unica per $t > t_0$ per sufficientemente piccole $|t - t_0|$. Allora, il principio deterministico newtoniano è soddisfatto (almeno, localmente) per i sistemi meccanici descritti dalle equazioni differenziali di secondo ordine. Queste equazioni si chiamano le equazioni del moto del sistema meccanico.

1.2 La lagrangiana di un sistema meccanico. Il principio variazionale di Hamilton. Le equazioni di Eulero - Lagrange.

La formulazione più generale delle leggi del moto dei sistemi della meccanica classica è data dal *principio di minima azione* (chiamato anche il *principio variazionale di Hamilton*). Secondo questo principio ogni sistema meccanico viene caratterizzato da una funzione

$$L(q, \dot{q}, t)$$

chiamata *la funzione lagrangiana* (o, semplicemente, *la lagrangiana*) del sistema. Il moto del sistema soddisfa la seguente condizione. Supponiamo che all'istante iniziale $t = t_1$ e finale $t = t_2$ il sistema si trovi nella posizione iniziale caratterizzata dalle coordinate $q_1 = (q_1^1, q_1^2, \dots, q_1^n)$ e quella finale $q_2 = (q_2^1, q_2^2, \dots, q_2^n)$. Allora il moto del sistema tra queste posizioni è quello che minimizzi il valore dell'*azione*

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt. \quad (1.2.1)$$

Si intende che il valore dell'azione va minimizzato nella classe dei moti variati sincroni che conservano le configurazioni del sistema all'istante iniziale e finale,

$$q = q(t), \quad \dot{q} = \dot{q}(t), \quad t_1 \leq t \leq t_2, \quad q(t_1) = q_1, \quad q(t_2) = q_2.$$

Teorema 1.2.1 *Il moto del sistema meccanico con la lagrangiana $L = L(q, \dot{q}, t)$ soddisfa le equazioni differenziali di Eulero - Lagrange*

$$-\frac{\delta S}{\delta q^i(t)} \equiv \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.2.2)$$

Dimostrazione: Una piccola variazione del moto

$$q(t) \mapsto q(t) + \delta q(t), \quad \delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$$

provoca l'incremento dell'azione

$$S[q + \delta q] - S[q] = \int_{t_1}^{t_2} [L(q + \delta q, \dot{q} + \delta \dot{q}, t) - L(q, \dot{q}, t)] dt.$$

Sviluppando la differenza sotto l'integrale in una serie di Taylor e integrando per parti si ottiene

$$\begin{aligned} S[q + \delta q] - S[q] &= \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q^i} \delta q^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta \dot{q}^i \right) dt + O(\|\delta q\|^2) \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) \delta q^i dt + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta q^i \Big|_{t_1}^{t_2} + O(\|\delta q\|^2). \end{aligned}$$

La differenza $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta q^i \Big|_{t_1}^{t_2}$ sparisce; siccome la variazione δq^i è arbitraria, i coefficienti

$$\frac{\delta S}{\delta q^i(t)} := \frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}$$

sono tutti nulli. □

Osservazione 1.2.2 *La soluzione $q = q(t)$ delle equazioni di Eulero - Lagrange non necessariamente dà il minimo del funzionale S ma solo il punto stazionario:*

$$S[q + \delta q] - S[q] = O(\|\delta q\|^2).$$

Sotto certe ipotesi aggiuntive si può dimostrare che la soluzione è il minimo locale. Ad esempio, basta assumere che la matrice delle seconde derivate

$$\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} \right)_{1 \leq i, j \leq n}$$

è definita positiva. Il problema del minimo globale si studia nel calcolo variazionale e, per i casi particolari, nella geometria differenziale.

Corollario 1.2.3 *Se la lagrangiana del sistema è non degenera, ovvero soddisfa la condizione*

$$\det \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} \right)_{1 \leq i, j \leq n} \neq 0 \tag{1.2.3}$$

allora il sistema soddisfa il principio deterministico newtoniano.

Dimostrazione: Per la lagrangiana non degenera le equazioni di Eulero - Lagrange possono essere riscritti nella forma (1.1.1) con

$$f^i(q, \dot{q}, t) = A^{ij} \left(\frac{\partial L}{\partial q^j} - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^j \partial q^k} \dot{q}^k - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^j \partial t} \right), \quad i = 1, \dots, n$$

dove la matrice $(A^{ij}) = (A^{ij}(q, \dots, q, t))$ è inversa a $\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} \right)$,

$$A^{ik} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^k \partial \dot{q}^j} = \delta_j^i.$$

(La sommatoria rispetto agli indici doppi è sottintesa.) □

Ricapitolando, per i sistemi meccanici con le lagrangiane non degeneri le equazioni di Eulero - Lagrange (1.2.2) possono essere usate come le equazioni del moto.

Osservazione 1.2.4 Aggiungendo una derivata totale alla lagrangiana

$$L'(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q}, t) + \frac{d}{dt}f(q, t)$$

le equazioni del moto non cambiano. Infatti, l'azione S' del sistema con la lagrangiana L' si calcola come

$$S' = \int_{t_1}^{t_2} L'(q, \dot{q}, t) dt = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}f(q, t) dt = S + f(q_2, t_2) - f(q_1, t_1).$$

Il termine aggiuntivo $f(q_2, t_2) - f(q_1, t_1)$ è costante e quindi sparisce dalla variazione. Quindi, le equazioni $\delta S' = 0$ e $\delta S = 0$ sono equivalenti.

Insomma, la lagrangiana del sistema meccanico è definita solo modulo le derivate totali.

Le equazioni del moto non cambiano anche se la lagrangiana viene moltiplicata per un fattore costante. Per scegliere la normalizzazione universale si può usare

Il principio di additività: supponiamo che un sistema meccanico sia composta da due sottosistemi A e B . Si chiami L_A e L_B risp. le lagrangiane dei sottosistemi se quell'ultimi fossero isolati. Il principio dice che, aumentando la distanza tra i sottosistemi fino all'infinito, la lagrangiana del sistema composto tenda al limite

$$\lim L = L_A + L_B.$$

1.3 Sistemi di riferimento inerziali. Il principio di relatività galileiana

Per studiare i fenomeni meccanici bisogna scegliere il *sistema di riferimento*. Le leggi della meccanica si scrivono diversamente, a volta in modo assai complicato, in sistemi di riferimento diversi (e.g., il moto dei pianeti nel sistema geocentrico). La forma delle leggi della meccanica si semplifica nei sistemi di riferimento *inerziali*.

Il principio di relatività galileiana descrive la classe dei sistemi di riferimento inerziali della *meccanica classica* (nonrelativistica!). Secondo questo principio lo spazio-tempo della meccanica classica è uno spazio affine quadridimensionale \mathbf{A}^4 degli *eventi* provvisto di una struttura galileiana composta da

- funzione lineare sullo spazio vettoriale associato delle traslazioni di \mathbf{A}^4

$$t : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$$

che si chiama il *tempo*. Si dice che due eventi a e b sono *simultanei* se

$$t(b - a) = 0$$

($b - a \in \mathbb{R}$ è il vettore dal punto a al punto b).

- Una struttura euclidea (i.e., il prodotto scalare euclideo) sullo spazio tridimensionale degli eventi simultanei. La distanza tra gli eventi simultanei viene definita come

$$\rho(a, b) := \sqrt{(a - b, a - b)}, \quad t(b - a) = 0.$$

Le trasformazioni affini dello spazio-tempo che preservano la struttura galileiana si chiamano *le trasformazioni galileiane*.

Il prodotto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ dell'asse temporale per lo spazio euclideo tridimensionale porta una struttura galileiana naturale. Le trasformazioni galileiane

$$(t, \mathbf{r}) \mapsto (t', \mathbf{r}')$$

di questo spazio possono essere descritte nel seguente modo.

1. Traslazioni

$$t' = t + t_0, \quad \mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{r}_0.$$

2. Rotazioni + simmetrie

$$t' = t, \quad \mathbf{r}' = A \mathbf{r}, \quad A \in O(3).$$

3. Le trasformazioni galileiane speciali

$$t' = t, \quad \mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{v} t$$

associate al moto uniforme rettilineo di velocità \mathbf{v} di un sistema di riferimento rispetto ad un altro. Si osservi che i vettori di velocità $\mathbf{v}_i = \dot{\mathbf{r}}_i$ dei punti materiali si trasformano come

$$\mathbf{v}'_i = \mathbf{v}_i + \mathbf{v}.$$

Esercizio 1.3.1 *Dimostrare che ogni trasformazione galileiana dello spazio $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ può essere rappresentata come il prodotto delle trasformazioni della forma 1 - 3. Inoltre, dimostrare che tutte le trasformazioni galileiane formano un gruppo di Lie della dimensione 10.*

Esercizio 1.3.2 *Dimostrare che tutte strutture galileiane su \mathbf{A}^4 sono isomorfe (in particolare, ogni struttura galileiana è isomorfa a $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$).*

Un sistema di riferimento inerziale sullo spazio-tempo \mathbf{A}^4 è un isomorfismo con la struttura galileiana “standard”

$$\mathbf{A}^4 \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3.$$

Il principio di relatività galileiano dice che la lagrangiana di un sistema meccanico isolato è invariante, modulo le derivate totali aggiunte, rispetto alle trasformazioni galileiane. Questo implica che anche le equazioni del moto (ovvero, le equazioni di Eulero - Lagrange) sono invarianti rispetto alle trasformazioni galileiane.

Si possa subito derivare semplici ma importanti conseguenze del principio di relatività. Primo, dall'invarianza rispetto alle traslazioni temporali $t \mapsto t + t_0$ si deriva che la lagrangiana di un sistema isolato non dipende esplicitamente dal tempo. L'invarianza rispetto alle rotazioni significa che lo spazio tridimensionale è *isotropo*, ovvero non esiste nessuna direzione preferita in \mathbb{R}^3 . L'invarianza rispetto alle traslazioni e le trasformazioni galileiane speciali implica che le equazioni del moto di un sistema di N punti materiali rispetto un sistema di riferimento inerziale devono aver la forma

$$\ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{f}_i(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k, \dot{\mathbf{r}}_j - \dot{\mathbf{r}}_k), \quad i = 1, \dots, N.$$

1.4 Dinamica del punto materiale

Teorema 1.4.1 *La lagrangiana di un punto materiale rispetto ad un sistema di riferimento inerziale ha la forma*

$$L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = \frac{m \dot{\mathbf{r}}^2}{2} \quad (1.4.1)$$

dove m è una costante che si chiama la massa del punto materiale.

Dimostrazione: Dall'invarianza rispetto alle traslazioni $\mathbf{r} \mapsto \mathbf{r} + \mathbf{r}_0$ e le rotazioni si deriva che la lagrangiana non dipende da \mathbf{r} e può dipendere solo dal quadrato della velocità:

$$L = L(\dot{\mathbf{r}}^2), \quad \dot{\mathbf{r}}^2 := (\dot{\mathbf{r}}, \dot{\mathbf{r}}).$$

Dimostriamo che la lagrangiana è proporzionale al quadrato della velocità. Infatti, facendo una trasformazione galileiana

$$\mathbf{r} \mapsto \mathbf{r} + \epsilon \mathbf{v} t, \quad \epsilon \rightarrow 0$$

si ottiene

$$L(\dot{\mathbf{r}}^2) \mapsto L(\dot{\mathbf{r}}^2) + 2\epsilon(\mathbf{v}, \dot{\mathbf{r}})L'(\dot{\mathbf{r}}^2) + O(\epsilon^2).$$

Il termine lineare in ϵ può essere una derivata totale

$$(\mathbf{v}, \dot{\mathbf{r}})L'(\dot{\mathbf{r}}^2) = \frac{d}{dt}f(\mathbf{r})$$

se e solo se $L'(\dot{\mathbf{r}}^2) = \text{cost} =: \frac{m}{2}$. Viceversa, per qualsiasi valore della costante m la lagrangiana (1.4.1) è invariante rispetto le trasformazioni galileiane $\mathbf{r} \mapsto \mathbf{r} + \mathbf{v} t$:

$$\frac{m \dot{\mathbf{r}}^2}{2} \mapsto \frac{m \dot{\mathbf{r}}^2}{2} + m(\mathbf{v}, \dot{\mathbf{r}}) + \frac{m \mathbf{v}^2}{2} = \frac{m \dot{\mathbf{r}}^2}{2} + \frac{d}{dt} \left(m(\mathbf{v}, \mathbf{r}) + \frac{m \mathbf{v}^2 t}{2} \right).$$

□

Corollario 1.4.2 (la prima legge di Newton). *Nel sistema di riferimento inerziale un punto materiale isolato è fermo oppure è in moto rettilineo uniforme con velocità costante.*

Dimostrazione: Le equazioni di Eulero - Lagrange per la lagrangiana (1.4.1) si scrivono

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = m \ddot{x}_i = 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

□

È chiaro che la massa m dev'essere positiva. Infatti, per $m < 0$ il funzionale

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \frac{m \dot{\mathbf{r}}^2}{2} dt$$

non avrebbe mai il minimo, neanche localmente.

1.5 Sistema isolato di punti materiali. L'energia cinetica e potenziale

La lagrangiana di un sistema di N punti materiali è uguale alla somma

$$L = \sum_{a=1}^N \frac{m_a v_a^2}{2} \quad (1.5.1)$$

se i punti non interagiscono. La massa e la velocità del punto numero a si chiamano m_a e \mathbf{v}_a rispettivamente. Per prendere in considerazione l'interazione tra i punti bisogna aggiungere alla lagrangiana libera (1.5.1) una funzione $-U(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$:

$$L = \sum_{a=1}^N \frac{m_a v_a^2}{2} - U(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N). \quad (1.5.2)$$

La somma

$$T = \sum_{a=1}^N \frac{m_a v_a^2}{2} \quad (1.5.3)$$

si chiama *energia cinetica* del sistema dei punti materiali, e la funzione

$$U = U(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) \quad (1.5.4)$$

si chiama *energia potenziale* (vedi sotto la sezione 1.7). Allora, la formula (1.5.2) può essere riscritta come

$$L = T - U \quad (1.5.5)$$

(le cosiddette *lagrangiane naturali*).

Teorema 1.5.1 *Le equazioni del moto di un sistema di N punti materiali con lagrangiana (1.5.2) si scrivono nella forma*

$$m_a \ddot{\mathbf{r}}_a = \mathbf{F}_a, \quad a = 1, 2, \dots, N \quad (1.5.6)$$

dove

$$\mathbf{F}_a := -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_a}. \quad (1.5.7)$$

Il vettore \mathbf{F}_a si chiama *la forza* che agisce sul a -esimo punto. Le equazioni (1.5.6) sono quindi equivalenti alla **seconda legge di Newton**.

Esercizio 1.5.2 *Dimostrare che per ogni punto a*

$$\mathbf{F}_a = -\sum_{b \neq a} \mathbf{F}_b$$

(la **terza legge di Newton**).

Hint: usare l'invarianza rispetto alle traslazioni spaziali.

Osservazione 1.5.3 *I sistemi meccanici sono reversibili, ovvero invarianti anche rispetto alla trasformazione $t \mapsto -t$.*

Osservazione 1.5.4 *Considerando i sistemi non isolati si arriva a considerare le lagrangiane non invarianti rispetto alle trasformazioni galileiane che possono anche dipendere esplicitamente dal tempo. Infatti, si consideri un sistema A che interagisce con un altro sistema B che evolve indipendentemente da A ,*

$$\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_B(t).$$

(In questo caso si dice che il sistema A si muove nel campo esterno prodotto dal sistema B .) Supponendo che il sistema $A + B$ sia isolato scriviamo la lagrangiana del sistema composto nella forma

$$L = T_A(\dot{\mathbf{r}}_A) + T_B(\dot{\mathbf{r}}_B) - U(\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B).$$

Sostituendo

$$\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_B(t), \quad \dot{\mathbf{r}}_B = \frac{d}{dt}\mathbf{r}_B(t)$$

si ottiene, modulo le derivate totali, una lagrangiana con la dipendenza dal tempo

$$L_A(\mathbf{r}_A, \dot{\mathbf{r}}_A, t) = T_A(\dot{\mathbf{r}}_A) - U(\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B(t)).$$

Esempio 1. Le equazioni del moto unidimensionale lungo l'asse verticale z nel campo esterno con il potenziale

$$U(z) = m g z,$$

dove $g \simeq 9.8 \frac{m}{\text{sec}^2}$ è una costante (l'accelerazione di gravità), si può ottenere dalla lagrangiana

$$L = m\dot{z} - m g z$$

nella forma

$$\ddot{z} = -g.$$

Come è ben noto dagli esperimenti fisici, questa equazione descrive la caduta libera del punto materiale sulla terra. In questo caso l'accelerazione è costante e non dipende dalla massa (la legge di Galileo).

Esempio 2. Il moto di N punti materiali delle masse m_1, \dots, m_N nel campo gravitazionale viene descritto dalla lagrangiana

$$L = \sum \frac{m_a \dot{\mathbf{r}}^2}{2} + \sum_{a < b} G \frac{m_a m_b}{|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b|} \quad (1.5.8)$$

dove G è la costante gravitazionale. Nella descrizione *approssimata* del moto di un pianeta di massa m attorno il sole (chiamando M la massa del sole, $m \ll M$) si può assumere che l'effetto del pianeta sul moto del sole sia trascurabile, nonchè trascurare l'interazione con gli altri pianeti. In tal caso il moto del pianeta può essere descritto dalla lagrangiana di un punto materiale libero nel campo esterno con il potenziale newtoniano

$$L = \frac{m \dot{\mathbf{r}}^2}{2} + \frac{\alpha}{r}, \quad \alpha = G M m, \quad r = |\mathbf{r}| \quad (1.5.9)$$

(il problema di Keplero, v. sotto).

Esempio 3. Aggiungendo alla lagrangiana (1.5.2) un termine lineare rispetto alle velocità

$$\tilde{L} = L + \frac{e}{c} \sum_a (\mathbf{A}(\mathbf{r}_a), \dot{\mathbf{r}}_a) \quad (1.5.10)$$

si ottiene il sistema meccanico nel campo esterno magnetico. In questa formula $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ è il potenziale vettoriale del campo magnetico. La costante e si chiama la carica elettrica dei punti materiali, c è la velocità di luce nel vuoto. Si osservi che la lagrangiana (1.5.10) non è invariante rispetto alle trasformazioni galileiane! La ragione è che i fenomeni magnetici ammettono la descrizione naturale solo nell'ambito dell'approccio relativistico, dove l'invarianza galileiana non è più valida.

Esercizio 1.5.5 *Dimostrare che per la lagrangiana modificata le equazioni del moto (1.5.6) vengono modificate nel seguente modo:*

$$m_a \ddot{\mathbf{r}}_a = \mathbf{F}_a + \frac{e}{c} \dot{\mathbf{r}}_a \times \mathbf{B}(\mathbf{r}_a), \quad a = 1, 2, \dots, N$$

dove

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}.$$

Il termine aggiuntivo $\frac{e}{c} \dot{\mathbf{r}}_a \times \mathbf{B}(\mathbf{r}_a)$ è la forza di Lorenz che agisce sulla a -esima particella di carica e nel campo magnetico $\mathbf{B}(\mathbf{r})$.

1.6 Equazioni di Eulero - Lagrange sulle varietà lisce. Dinamica sul fibrato tangente

Usando le coordinate generalizzate

$$\mathbf{r}_a = \mathbf{r}_a(q^1, \dots, q^{3N}), \quad a = 1, \dots, N$$

per la descrizione del sistema meccanico si ottiene la lagrangiana del sistema nella forma

$$L = T - U, \quad T = \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^{3N} g_{kl}(q) \dot{q}^k \dot{q}^l, \quad U = U(q) \quad (1.6.1)$$

dove

$$g_{kl}(q) = \sum_{a=1}^N \left(\frac{\partial \mathbf{r}_a}{\partial q^k}, \frac{\partial \mathbf{r}_a}{\partial q^l} \right). \quad (1.6.2)$$

Per esempio, come sappiamo già la lagrangiana del punto materiale libero nelle coordinate cartesiane $\mathbf{r} = (x, y, z)$ si scrive come

$$L = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2).$$

Nelle coordinate cilindriche (r, ϕ, z) la stessa lagrangiana è

$$L = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2 + \dot{z}^2), \quad (1.6.3)$$

e nelle coordinate sferiche (r, ϕ, θ)

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2). \quad (1.6.4)$$

Si osservi che l'espressione

$$ds^2 = \sum_{k,l=1}^3 g_{kl}(q) dq^k dq^l, \quad g_{kl}(q) = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^k}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^l} \right)$$

è nient'altro che il quadrato dell'elemento dell'arco scritto nelle coordinate curvilinee q^1, q^2, q^3 . In particolare, nelle coordinate cartesiane

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2, \quad (1.6.5)$$

nelle coordinate cilindriche

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\phi^2 + dz^2, \quad (1.6.6)$$

nelle coordinate sferiche

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (1.6.7)$$

Si ricordi che la lunghezza s dell'arco della curva $q = q(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$ si calcola come

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{ds^2} = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g_{kl}(q(t)) \dot{q}^k \dot{q}^l} dt. \quad (1.6.8)$$

Si consideri ora la situazione più generale, dove q^1, \dots, q^n sono le coordinate locali su una varietà liscia M . Si ricordi che con qualsiasi varietà liscia n -dimensionale q si associa un'altra varietà TM della dimensione $2n$ che si chiama lo spazio del *fibrato tangente*. I punti della varietà TM sono le coppie $(q, \dot{q}) \in TM$, dove $q \in M$ è un punto della varietà M , e $\dot{q} \in T_q M$ è un vettore tangente nel punto q . Le coordinate locali q^1, \dots, q^n sulla base M inducono le coordinate locali

$$q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n$$

sul fibrato tangente TM : per ogni i la coordinata \dot{q}^i del vettore tangente $v \in T_q M$ si definisce come

$$\dot{q}^i(v) = v^i, \quad v = v^1 \frac{\partial}{\partial q^1} + \dots + v^n \frac{\partial}{\partial q^n}.$$

Il cambio delle coordinate locali (e.g., sull'intersezione di due carte) sulla base M determina una classe particolare delle trasformazioni delle coordinate sul fibrato tangente

$$\tilde{q}^i = \tilde{q}^i(q), \quad \dot{\tilde{q}}^i = \frac{\partial \tilde{q}^i}{\partial q^k} \dot{q}^k \quad (1.6.9)$$

lineare rispetto alle coordinate \dot{q} sulle fibre.

Esercizio 1.6.1 *Data una funzione liscia $L = L(q, \dot{q})$ sulla varietà TM , dimostrare che le derivate*

$$p_i := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}, \quad i = 1, \dots, n$$

(il cosiddetto momento cinetico) si trasformano come componenti di una sezione del fibrato cotangente T^*M :

$$\tilde{p}_i = \frac{\partial q^k}{\partial \tilde{q}^i} p_k, \quad i = 1, \dots, n.$$

Inoltre, dimostrare che la matrice delle seconde derivate della lagrangiana rispetto alle coordinate \dot{q} si trasforma come un $(0,2)$ -tensor:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \tilde{q}^i \partial \tilde{q}^j} = \frac{\partial q^k}{\partial \tilde{q}^i} \frac{\partial q^l}{\partial \tilde{q}^j} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^k \partial \dot{q}^l}$$

Definizione 1.6.2 La varietà M si chiama lo spazio delle configurazioni, la varietà TM si chiama lo spazio delle fasi. La dimensione n dello spazio delle configurazioni si chiama il numero di gradi di libertà del sistema meccanico. Una funzione liscia $L = L(q, \dot{q}, t)$ sullo spazio $TM \times \mathbb{R}$ si chiama la lagrangiana del sistema meccanico. La lagrangiana $L(q, \dot{q}, t)$ si chiama non degenera se il determinante della matrice

$$\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} \right)_{1 \leq i, j \leq n}$$

è non nullo.

Grazie al secondo enunciato dell'esercizio precedente la classe delle lagrangiane non degenera non dipende dalla scelta delle coordinate locali sullo spazio delle configurazioni.

Ad ogni lagrangiana si associa un funzionale (l'azione del sistema meccanico)

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}) dt$$

definito sulle curve lisce $q(t) \in M$ tali che

$$q(t_1) = q_1, \quad q(t_2) = q_2, \quad q_1, q_2 \in M.$$

Le equazioni di Eulero - Lagrange che determinano i punti stazionari del funzionale S hanno la stessa forma (1.2.2):

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Supponiamo che la lagrangiana sia non degenera e (per semplificare la descrizione geometrica) non dipenda esplicitamente dal tempo. In tal caso le equazioni di Eulero - Lagrange determinano un sistema dinamico sulla varietà TM .

Per il sistema di N punti materiali lo spazio delle configurazioni è nient'altro che

$$M = \mathbb{R}^{3N}.$$

I sistemi meccanici sugli spazi delle configurazioni più generali si ottengono considerando i sistemi vincolati, assumendo che i vincoli siano ideali ed olonomi, oppure come il risultato di riduzione di un sistema con simmetria (vedi sotto).

Una classe importante dei sistemi meccanici è definita sulle varietà riemanniane. Si ricordi che una struttura di una varietà riemanniana su M è determinata da una metrica riemanniana

$$ds^2 = g_{ij}(q) dq^i dq^j$$

ovvero da un (0,2)-tensore simmetrico con la matrice $g_{ij}(q)$ definita positiva. (Vista la legge di trasformazione tensoriale

$$\tilde{g}_{kl}(\tilde{q}) = \frac{\partial q^i}{\partial \tilde{q}^k} \frac{\partial q^j}{\partial \tilde{q}^l} g_{ij}(q)$$

la definizione è invariante rispetto alle trasformazioni delle coordinate.) Sulla varietà riemanniana M sono definite le lunghezze delle curve, usando la stessa formula (1.6.8) e gli angoli tra di loro usando il prodotto scalare dei vettori tangenti:

$$(a, b) = g_{ij}(q) a^i b^j, \quad a, b \in T_q M. \quad (1.6.10)$$

Come nello spazio euclideo, il cambio *monotono* della parametrizzazione della curva,

$$t = t(\tau), \quad \tau_1 \leq \tau \leq \tau_2, \quad \frac{dt}{d\tau} \neq 0$$

non cambia la lunghezza dell'arco della curva stessa.

Data una metrica riemanniana sulla varietà M , possiamo definire l'energia cinetica del punto materiale di massa m come

$$T = \frac{m}{2} g_{ij}(q) \dot{q}^i \dot{q}^j = \frac{m}{2} (\dot{q}, \dot{q}).$$

Esercizio 1.6.3 *Dimostrare che le equazioni di Eulero - Lagrange per il funzionale*

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2} g_{ij}(q) \dot{q}^i \dot{q}^j dt \quad (1.6.11)$$

hanno la forma

$$\ddot{q}^k = \Gamma_{ij}^k(q) \dot{q}^i \dot{q}^j, \quad k = 1, \dots, n \quad (1.6.12)$$

dove

$$\Gamma_{ij}^k(q) = \frac{1}{2} g^{km} \left(\frac{\partial g_{mj}}{\partial q^i} + \frac{\partial g_{im}}{\partial q^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^m} \right) \quad (1.6.13)$$

sono i coefficienti di Christoffel della connessione di Levi-Civita associata con la metrica ds^2 , la matrice $(g^{ij}(q))$ è inversa alla matrice $(g_{ij}(q))$.

Le soluzioni delle equazioni (1.6.12) si chiamano le *curve geodetiche* sulla varietà riemanniana M . Localmente le geodetiche minimizzano non solo il valore dell'azione S , ma anche la *lunghezza*

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g_{ij}(q) \dot{q}^i \dot{q}^j} dt. \quad (1.6.14)$$

Discuteremo queste proprietà delle geodetiche più avanti.

Esempio. Per il pendolo sferico di massa m e lunghezza R lo spazio delle configurazioni è la sfera $M = S^2$ di raggio R . Usando le coordinate sferiche (θ, ϕ) si ottiene la lagrangiana del

pendolo applicando la formula (3.6.25) per il quadrato dell'elemento dell'arco nelle coordinate sferiche:

$$L = \frac{m}{2} R^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2).$$

Il moto di questo sistema viene descritto dalle geodetiche sulla sfera, ovvero dai grandi cerchi.

Più generalmente, si possono considerare le lagrangiane naturali simili a (1.6.1) sulle varietà riemanniane:

$$L = \frac{m}{2} g_{ij}(q) \dot{q}^i \dot{q}^j - U(q) \quad (1.6.15)$$

dove $U(q)$ è una funzione liscia sulla varietà M . Alcuni esempi dei sistemi meccanici vincolati ammettono la formulazione naturale sulle varietà “non banali” vedi sotto).

1.7 Energia

Definizione 1.7.1 *Dato un sistema meccanico, la funzione $I = I(q, \dot{q}, t)$ si chiama la legge di conservazione (oppure, l'integrale primo, o anche la quantità conservata) se la derivata totale della funzione I è nulla:*

$$\frac{d}{dt} I := \frac{\partial I}{\partial q^i} \dot{q}^i + \frac{\partial I}{\partial \dot{q}^i} \ddot{q}^i + \frac{\partial I}{\partial t} = 0. \quad (1.7.1)$$

In altre parole, la funzione I prende valori costanti su ogni soluzione delle equazioni del moto:

$$I(q(t), \dot{q}(t), t) = \text{cost.} \quad (1.7.2)$$

Teorema 1.7.2 *Se la lagrangiana del sistema meccanico non dipende esplicitamente dal tempo, $L = L(q, \dot{q})$, allora l'energia del sistema*

$$E(q, \dot{q}) = p_i \dot{q}^i - L, \quad p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \quad (1.7.3)$$

è l'integrale primo del sistema meccanico.

Dimostrazione: La formula

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q^i} \dot{q}^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \ddot{q}^i$$

può essere riscritta, usando le equazioni di Eulero - Lagrange come

$$\frac{dL}{dt} = \dot{q}^i \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \ddot{q}^i = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \dot{q}^i \right),$$

ovvero

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \dot{q}^i - L \right) = 0.$$

□

Esempio. Per il sistema meccanico di N punti materiali con la lagrangiana $L = T - U$ come in (1.5.2) si ottiene

$$\mathbf{p}_a = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_a} = m \dot{\mathbf{r}}_a.$$

Allora

$$\sum_a (\mathbf{p}_a, \dot{\mathbf{r}}_a) = 2T,$$

e quindi

$$E = T + U, \tag{1.7.4}$$

ovvero l'energia del sistema meccanico è uguale alla somma della energia cinetica T e l'energia potenziale U .

Esercizio 1.7.3 Derivare la formula (1.7.4) per la lagrangiana naturale (1.6.15) sulla varietà riemanniana.

Esercizio 1.7.4 Data una qualsiasi lagrangiana $L(q, \dot{q})$ sul fibrato tangente M dimostrare che l'energia (1.7.3) non dipende dalla scelta delle coordinate locali su M .

Hint: Usare la prima parte dell'esercizio 1.6.1.

Esercizio 1.7.5 Data una varietà riemanniana M , si consideri la lagrangiana

$$L = \frac{1}{2} g_{ij}(q) \dot{q}^i \dot{q}^j$$

dove

$$ds^2 = g_{ij}(q) dq^i dq^j$$

è la metrica riemanniana su M . Come sappiamo già (vedi l'esercizio 1.6.3) le traiettorie del moto in questo caso coincidono con le geodetiche sulla varietà riemanniana. Dimostrare che la velocità del moto sulla geodetica è costante:

$$(\dot{q}, \dot{q}) = \text{cost.}$$

Esercizio 1.7.6 Per una lagrangiana $L = L(q, \dot{q}, t)$ dipendente dal tempo si dimostri che la derivata totale rispetto all tempo coincide con la derivata parziale:

$$\dot{E} = \frac{\partial E}{\partial t}. \tag{1.7.5}$$

1.8 Moti unidimensionali

Moto nel sistema con un grado di libertà si chiama *moto unidimensionale*. Se il sistema meccanico unidimensionale si trova nelle condizioni esterni stazionarie, allora la lagrangiana deve aver la forma

$$L = \frac{1}{2} g(q) \dot{q}^2 - U(q).$$

Scegliendo la coordinata cartesiana $q = x$ si ottiene la lagrangiana

$$L = \frac{m \dot{x}^2}{2} - U(x). \tag{1.8.1}$$

La legge di conservazione dell'energia

$$\frac{m \dot{x}^2}{2} + U(x) = E,$$

dove E è una costante, permette di integrare le equazioni del moto

$$m \ddot{x} = -\frac{dU(x)}{dx}$$

per quadrature

$$t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}} + \text{cost.} \quad (1.8.2)$$

Le due costanti di integrazione sono E e cost.

Dato che l'energia cinetica è sempre positiva, allora l'energia totale è sempre maggiore di quella potenziale, ovvero il punto può muoversi solo negli intervalli $U(x) \leq E$. I punti $x_i = x_i(E)$ tali che

$$U(x_i) = E, \quad i = 1, \dots$$

determinano i limiti del moto. Essi sono *i punti di arresto* siccome la velocità $\dot{x} = 0$ in questi punti.

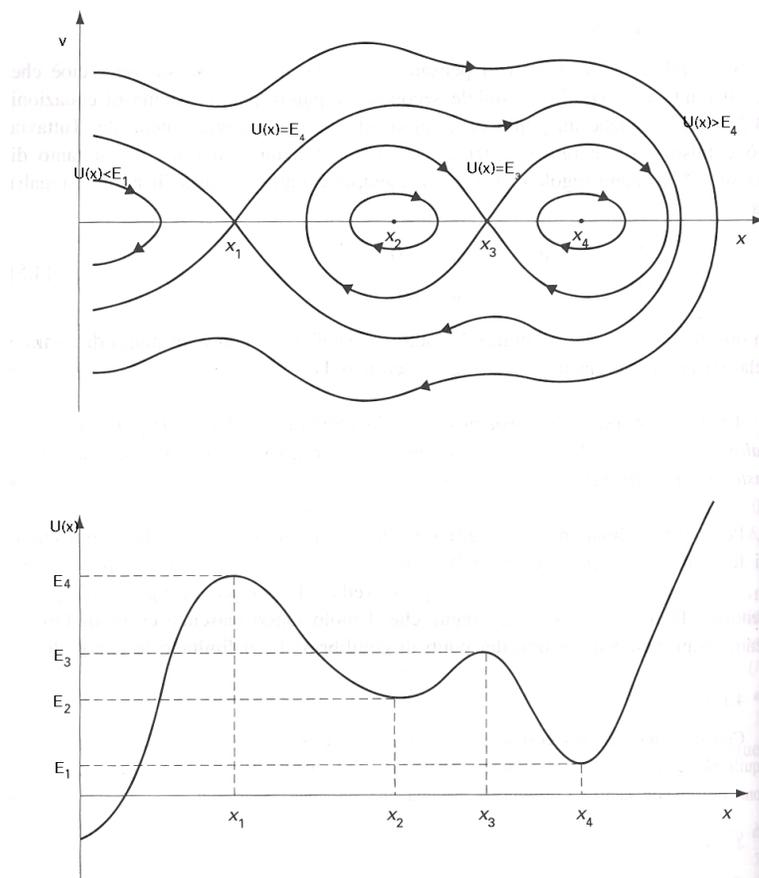


Fig.1: Moto unidimensionale: il grafico del potenziale e il moto sul piano delle fasi ($x, v = \dot{x}$)

Se l'intervallo del moto è limitato da due punti di arresto, $x_A(E) < x_B(E)$, allora il moto è *finito*. Il moto finito è necessariamente *un moto oscillatorio*: il punto si muove dentro la buca del potenziale AB tra i punti $x_A(E)$ e $x_B(E)$,

$$U(x) < E \quad \text{per} \quad x_A(E) < x < x_B(E).$$

Si ricordi che il tempo di ritorno da $x_B(E)$ a $x_A(E)$ è uguale al tempo di andata da $x_A(E)$ a $x_B(E)$ grazie alla reversibilità del tempo. Quindi per il periodo delle oscillazioni si ottiene la formula

$$T(E) = \sqrt{2m} \int_{x_A(E)}^{x_B(E)} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}}. \quad (1.8.3)$$

Al contrario, se l'intervallo è infinito, oppure semiinfinito, allora il punto va all'infinito.

Esempio. La lagrangiana del pendolo di massa m e la lunghezza l si ottiene nella forma

$$L = \frac{m l^2 \dot{\phi}^2}{2} + m g l \cos \phi$$

(usiamo la coordinata angolare ϕ per descrivere la configurazione del sistema). Il moto è finito per $-m g l \leq E \leq m g l$. L'angolo della deviazione massimale ϕ_0 viene determinato dall'equazione

$$E = -m g l \cos \phi_0.$$

Per il periodo delle oscillazioni si arriva alla formula

$$T = 4 \sqrt{\frac{l}{2g}} \int_0^{\phi_0} \frac{d\phi}{\sqrt{\cos \phi - \cos \phi_0}}.$$

Esercizio 1.8.1 *Esprimere il periodo delle oscillazioni tramite l'integrale ellittico di prima specie:*

$$T = 4 \sqrt{\frac{l}{g}} K \left(\sin \frac{\phi_0}{2} \right),$$

$$K(k) := \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}.$$

Per le oscillazioni di piccola ampiezza $\phi_0 \ll 1$ derivare la formula approssimata

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{1}{16} \phi_0^2 + O(\phi_0^4) \right). \quad (1.8.4)$$

Hint: fare la sostituzione

$$\sin \theta = \frac{\sin \frac{\phi}{2}}{\sin \frac{\phi_0}{2}}.$$

Osservazione 1.8.2 La formula (1.8.4) implica che per le piccole ampiezze il periodo delle oscillazioni approssimativamente non dipende dall'ampiezza (e, quindi, non dipende dall'energia E). Lo stesso risultato può essere ottenuto approssimando il potenziale per piccoli $|\phi|$ con un polinomio di secondo grado:

$$U(\phi) = -mgl \cos \phi \simeq \frac{mgl\phi^2}{2} + \text{cost.}$$

Trascurando l'inessenziale costante, si arriva alla lagrangiana L_{osc} dell'oscillatore armonico

$$L_{osc} = \frac{m l^2 \dot{\phi}^2}{2} - \frac{m g l \phi^2}{2}. \quad (1.8.5)$$

Le equazioni del moto dell'oscillatore armonico diventano lineari:

$$\ddot{\phi} + \frac{g}{l} \phi = 0,$$

e la soluzione generale si ottiene nella forma

$$\phi = a \cos \omega t + b \sin \omega t, \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

dove a e b sono due costanti arbitrarie. Le funzioni $\cos \omega t$ e $\sin \omega t$ sono entrambe periodiche in t con periodo

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

1.9 Esercizi

Esercizio 1.9.1 Determinare la forma del potenziale pari, $U(-x) = U(x)$, per avere le oscillazioni isocrone, ovvero il periodo T indipendente dall'energia E .

Negli esercizi successivi i sistemi si trovano nel campo gravitazionale uniforme ($g =$ accelerazione di gravità).

Esercizio 1.9.2 Il punto materiale di massa 1 si muove senza attrito sulla curva simmetrica rispetto all'asse Oy :

$$\left. \begin{array}{l} x = x(s) \\ y = y(s) \end{array} \right\}, \quad x(-s) = -x(s), \quad y(-s) = y(s), \quad x'(0) \neq 0.$$

a) Scrivere la lagrangiana del sistema.

b) (Problema di Huygens¹). Determinare la forma della curva per avere le oscillazioni isocrone.

¹Huygens cercava di vincere la gara per la costruzione del miglior cronometro marino.

Hint: scegliere sulla curva la *parametrizzazione naturale*, i.e., tale che

$$x'^2 + y'^2 \equiv 1,$$

poi usare il risultato dell'esercizio 1.9.1.

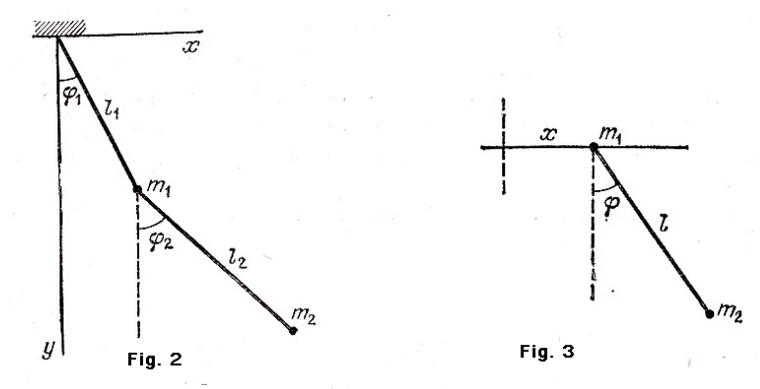
Hint: usare la seguente formula per la soluzione dell'equazione integrale di Abel

$$\int_0^x \frac{f'(y) dy}{\sqrt{x-y}} = g(x)$$

per la funzione $f(x)$ tale che $f(0) = 0$, data una funzione liscia $g(x)$ allora la soluzione è

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^x \frac{g(y) dy}{\sqrt{x-y}}.$$

Esercizio 1.9.3 Trovare la lagrangiana del doppio pendolo piatto (vedi Fig. 2).



Esercizio 1.9.4 Il punto di sospensione, di massa m_1 del pendolo piatto di massa m_2 può muoversi orizzontalmente (vedi Fig. 3) lungo l'asse x . Trovare la lagrangiana del sistema.

Esercizio 1.9.5 Trovare la lagrangiana del pendolo piatto il cui punto di sospensione:

a) si muove uniformemente lungo una circonferenza verticale con la velocità angolare costante ω (vedi Fig. 4).

b) oscilla orizzontalmente secondo la legge $x = a \cos \omega t$.

c) oscilla verticalmente secondo la legge $x = a \cos \omega t$.

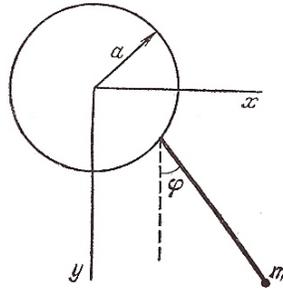


Fig. 4

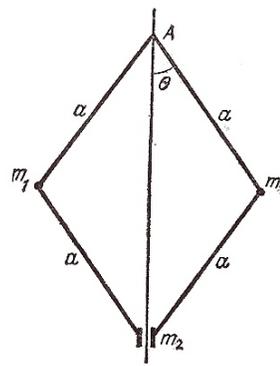


Fig. 5

Esercizio 1.9.6 *Trovare la lagrangiana del sistema mostrato sulla Fig. 5: il punto m_2 può muoversi verticalmente, il sistema si gira con la velocità angolare costante ω intorno all'asse verticale.*

2 Leggi di conservazione

2.1 Teorema di Noether

In questa sezione cominciamo lo studio del profondo legame tra le *simmetrie* di un sistema meccanico e le *leggi di conservazione* per il sistema stesso. Il teorema di Noether² dà la formulazione matematicamente precisa di questo legame nell'ambito della meccanica lagrangiana. Più avanti, nella meccanica Hamiltoniana, ritorneremo di nuovo allo studio delle simmetrie e delle leggi di conservazione in una versione più avanzata.

Data una varietà liscia M (lo spazio delle configurazioni) si consideri un sistema meccanico con lagrangiana $L(q, \dot{q})$, $(q, \dot{q}) \in TM$.

Definizione 2.1.1 *Un diffeomorfismo*

$$\Phi : M \rightarrow M$$

si chiama *simmetria del sistema meccanico* se la lagrangiana è invariante rispetto a Φ ,

$$L(\Phi(q), \Phi_*\dot{q}) = L(q, \dot{q}) \quad \forall q \in M, \quad \forall \dot{q} \in T_qM. \quad (2.1.1)$$

Si ricordi che la mappa liscia $\Phi : M \rightarrow M$ si chiama *diffeomorfismo* se essa è invertibile e la mappa inversa Φ^{-1} è liscia. Ogni mappa liscia Φ determina una mappa lineare

$$\Phi_* : T_qM \rightarrow T_{\Phi(q)}M, \quad \Phi_*v := \frac{d}{dt}\Phi(q + tv)_{t=0}, \quad v \in T_qM$$

degli spazi tangenti che si chiama *il differenziale* della mappa Φ . Nelle coordinate locali la matrice della mappa lineare coincide con la matrice di Jacobi

$$\Phi_* = \left(\frac{\partial \Phi^i(q)}{\partial q^j} \right)_{1 \leq i, j \leq n}.$$

La proprietà fondamentale delle simmetrie dei sistemi meccanici (e, più in generale, delle simmetrie delle equazioni differenziali) stabilisce che

Teorema 2.1.2 *Data una simmetria di un sistema meccanico, allora per ogni soluzione $q(t)$ delle equazioni di Eulero - Lagrange anche $\Phi(q(t))$ soddisfa le stesse equazioni.*

Per costruire le leggi di conservazione bisogna considerare famiglie di diffeomorfismi che dipendono da parametri.

Definizione 2.1.3 *Una famiglia a un parametro $s \in \mathbb{R}$ di diffeomorfismi*

$$\Phi_s : M \rightarrow M$$

²In realtà Emmy Noether ha dimostrato un teorema più generale che riguarda i sistemi della teoria dei campi. I lavori di Noether sulla teoria degli invarianti furono già riconosciuti dagli esperti di algebra astratta quando D.Hilbert la invitò, nell'anno 1915, a lavorare sul problema dell'energia nella appena creata relatività generale. Noether cominciò a studiare fisica; il celebre lavoro fu fatto in tempi brevi e pubblicato nel 1918.

si chiama gruppo a un parametro se sono verificate le seguenti proprietà:

$$\Phi_0 = \text{id}$$

e, inoltre, per ogni $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$

$$\Phi_{s_1}(\Phi_{s_2}(q)) = \Phi_{s_1+s_2}(q) \quad \forall q \in M.$$

Si noti che la mappa inversa a Φ_s è Φ_{-s} .

A ogni gruppo a un parametro di diffeomorfismi si associa un campo vettoriale $X(q)$ sulla varietà M :

$$X(q) := \frac{d}{ds} \Phi_s(q)_{s=0}.$$

Per i valori di $|s|$ il diffeomorfismo Φ_s agisce come

$$q \mapsto \Phi_s(q) = q + sX(q) + O(s^2). \quad (2.1.2)$$

Viceversa, il gruppo a un parametro di diffeomorfismi (eventualmente definito solo per i valori sufficientemente piccoli di s) può essere ricostruito dal campo vettoriale $X(q)$ secondo la seguente costruzione.

Dato un campo vettoriale $X(q)$ liscio sulla varietà M , si consideri il sistema dinamico

$$\frac{dq}{ds} = X(q).$$

Si chiami $Q(s, q)$ la soluzione delle equazioni differenziali con il dato iniziale

$$Q(s=0, q) = q.$$

Supponiamo che la soluzione $Q(s, q)$ esista per ogni $q \in M$ almeno per valori sufficientemente piccoli del parametro

$$|s| < \epsilon.$$

La mappa $\Phi_s : M \rightarrow M$ è definita per $|s| < \epsilon$ in seguente modo:

$$\Phi_s(q) := Q(s, q).$$

Esercizio 2.1.4 *Dimostrare le proprietà del gruppo a un parametro di diffeomorfismi per i valori di s_1, s_2 tali che*

$$|s_1| < \epsilon, \quad |s_2| < \epsilon, \quad |s_1 + s_2| < \epsilon.$$

Teorema 2.1.5 (theorem di Noether). *Dato un gruppo a un parametro $\Phi_s : M \rightarrow M$ di simmetrie del sistema meccanico, con la lagrangiana $L(q, \dot{q})$, allora la quantità*

$$I(q, \dot{q}) := p_i X^i, \quad p_i(q, \dot{q}) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}, \quad X(q) = \frac{d}{ds} \Phi_s(q)_{s=0} \quad (2.1.3)$$

è una legge di conservazione del sistema.

Dimostrazione: Usando la rappresentazione (2.1.2) delle simmetrie, scriviamo la condizione di invarianza infinitesima della lagrangiana:

$$L(q + s X(q), \dot{q} + s \frac{\partial X}{\partial q} \dot{q}) = L(q, \dot{q}) + O(s^2). \quad (2.1.4)$$

Sviluppando la parte sinistra in una serie in s la condizione viene riscritta come

$$\frac{\partial L}{\partial q^i} X^i + p_i \frac{\partial X^i}{\partial q^j} \dot{q}^j = 0, \quad (2.1.5)$$

dove è stata usata la notazione

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}$$

come sopra. Il secondo termine della formula può essere riscritto come

$$p_i \frac{\partial X^i}{\partial q^j} \dot{q}^j = \frac{d}{dt} (p_i X^i) - \frac{dp_i}{dt} X^i.$$

Dunque, riscriviamo la parte sinistra dell'equazione (2.1.5) come

$$\frac{\partial L}{\partial q^i} X^i + p_i \frac{\partial X^i}{\partial q^j} \dot{q}^j = \frac{d}{dt} (p_i X^i) + \left(\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) X^i = \frac{d}{dt} (p_i X^i).$$

Nell'ultimo passaggio sono state usate le equazioni di Eulero - Lagrange. Abbiamo dimostrato che

$$\frac{d}{dt} I(q, \dot{q}) = 0.$$

□

Esempio: le coordinate cicliche. Dato un sistema meccanico con lagrangiana $L(q, \dot{q})$, definito mediante le coordinate $q = (q^1, \dots, q^n)$ sullo spazio delle configurazioni, si dice che la i -esima coordinata q^i è *ciclica* se la lagrangiana non dipende da q^i :

$$\frac{\partial L}{\partial q^i} = 0.$$

In questo caso la lagrangiana è invariante rispetto al gruppo a un parametro delle traslazioni lungo l'asse q^i :

$$\Phi_s(q^1, \dots, q^i, \dots, q^n) = (q^1, \dots, q^i + s, \dots, q^n). \quad (2.1.6)$$

Il campo vettoriale X è costante:

$$X(q) = (0, \dots, 1, \dots, 0)$$

(1 sull' i -esimo posto). Allora, la quantità conservata è

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i},$$

come segue anche direttamente dalla i -esima equazione di Eulero - Lagrange.

Osservazione 2.1.6 La dimostrazione del teorema di Noether nel caso generale può essere ridotta al caso particolare di un sistema con una coordinata ciclica usando il cosiddetto teorema di rettificazione del campo vettoriale X su M nonché l'invarianza della somma

$$p_i X^i$$

per qualsiasi campo vettoriale $X(q)$ rispetto alle trasformazioni delle coordinate su M (vedi la prima parte dell'esercizio 1.6.1).

Esercizio 2.1.7 Se il gruppo a un parametro di diffeomorfismi Φ_s lascia invariante solo l'azione ma non la lagrangiana, allora la formula del teorema di Noether va cambiata. Infatti, in tal caso l'invarianza (2.1.4) è valida solo modulo le derivate totali,

$$L(q + sX(q), \dot{q} + s \frac{\partial X}{\partial q} \dot{q}) = L(q, \dot{q}) + s \frac{d}{dt} f(q) + O(s^2)$$

per una funzione $f(q)$ su M . Si dimostri che l'integrale primo del sistema è

$$\tilde{I}(q, \dot{q}) = p_i X^i - f(q).$$

2.2 Impulso totale

La legge di conservazione dell' impulso totale è legata alla omogeneità dello spazio euclideo, ovvero all'invarianza rispetto alle traslazioni.

Teorema 2.2.1 Si consideri un sistema meccanico di N punti con i raggi vettori \mathbf{r}_a e con lagrangiana

$$L = \sum_a \frac{m_a v_a^2}{2} - U(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$$

invariante rispetto alle traslazioni

$$\mathbf{r}_a \mapsto \mathbf{r}_a + \Delta \mathbf{r}, \quad a = 1, \dots, N.$$

Allora, la quantità vettoriale

$$\mathbf{P} := \sum_{a=1}^N m_a \mathbf{v}_a, \quad \mathbf{v}_a = \dot{\mathbf{r}}_a \tag{2.2.1}$$

è costante lungo le traiettorie del moto.

Dimostrazione: Siccome il vettore della traslazione è arbitrario, si ottiene

$$\sum_a \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_a} = 0.$$

Quindi

$$\frac{d}{dt} \mathbf{P} = \sum_{a=1}^N \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_a} = 0.$$

□

Definizione 2.2.2 La quantità (2.2.1) si chiama l'impulso totale.

Se la lagrangiana del sistema meccanico è invariante rispetto alle traslazioni lungo una direzione particolare \mathbf{n} , allora è conservata solo la proiezione dell'impulso totale sulla direzione stessa:

$$P_{\mathbf{n}} := (\mathbf{P}, \mathbf{n}) = \text{cost}$$

(si assume che $|\mathbf{n}| = 1$).

La conservazione dell'impulso totale può essere interpretata anche nel seguente modo: la somma di tutte le forze che agiscono sui punti materiali del sistema isolato è nulla:

$$\sum_{a=1}^N \mathbf{F}_a = 0.$$

Esempio: il baricentro. Data una trasformazione galileiana

$$t = t', \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{V}t$$

l'impulso totale del sistema meccanico si trasforma secondo la formula

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}' + \mathbf{V} \sum_a m_a.$$

Infatti, questa formula segue dalla legge di trasformazione delle velocità dei punti materiali:

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v}'_a + \mathbf{V}, \quad a = 1, \dots, N.$$

Se l'impulso totale rispetto a un sistema di riferimento è nullo, si dice che il sistema meccanico è fermo nel sistema di riferimento. Per un sistema meccanico isolato è sempre possibile trovare un sistema di riferimento inerziale rispetto a cui il sistema è fermo (il sistema di riferimento "co-moving"). La velocità di questo sistema di riferimento è

$$\mathbf{V} = \frac{\mathbf{P}}{\sum_a m_a} = \frac{\sum m_a \mathbf{v}_a}{\sum m_a}.$$

Questa velocità quindi può essere interpretata come la velocità del sistema meccanico totale. La formula precedente può essere riscritta come

$$\mathbf{P} = M \mathbf{V}, \quad M := \sum_{a=1}^N m_a.$$

In altre parole, l'impulso totale del sistema di punti materiali è uguale al prodotto della massa totale di tutti i punti per la velocità del sistema totale.

La velocità del sistema come un intero può essere rappresentata come la velocità del moto del punto con il raggio vettore

$$\mathbf{R} = \frac{\sum m_a \mathbf{r}_a}{\sum m_a}.$$

Questo punto si chiama il *baricentro* del sistema. Per un sistema di punti materiali il baricentro è fermo oppure è in moto rettilineo uniforme con velocità costante.

L'energia totale del sistema meccanico fermo nel sistema di riferimento "co-moving" si chiama l'energia interna E_{int} . Essa consiste in due contributi: l'energia cinetica del moto relativo delle particelle del sistema nonché l'energia potenziale di interazione tra di loro. L'energia del sistema rispetto ad un altro sistema di riferimento inerziale è uguale a

$$E = E_{\text{int}} + \frac{M V^2}{2}$$

dove $V = |\mathbf{V}|$, \mathbf{V} è la velocità del sistema totale.

Esercizio 2.2.3 *Si consideri un sistema isolato di punti materiali di carica elettrica e nel campo magnetico uniforme costante \mathbf{B} (vedi l'esercizio 1.5.5). Si dimostri che le quantità conservate sono le componenti del vettore*

$$\tilde{\mathbf{P}} = \mathbf{P} + \frac{e}{c} \mathbf{B} \times \mathbf{R}.$$

In questa formula \mathbf{P} è l'impulso totale del sistema in assenza del campo magnetico, \mathbf{R} il raggio vettore del baricentro.

Hint: Usare il risultato dell'esercizio 2.1.7.

2.3 Momento angolare

La conservazione del momento angolare è legata alla proprietà di *isotropia* dello spazio euclideo, ovvero all'invarianza del sistema fisico rispetto alle rotazioni.

Ricordiamo prima la struttura delle matrici ortogonali vicine all'identità

$$A(s) \in SO(n), \quad A(0) = 1, \quad |s| < \epsilon \quad (2.3.1)$$

per un numero positivo piccolo ϵ . Si ricordi che la condizione di ortogonalità impone che

$$A^T(s)A(s) \equiv 1 \quad \forall s, \quad |s| < \epsilon \quad (2.3.2)$$

dove $A^T(s)$ è la matrice trasposta a $A(s)$.

Lemma 2.3.1 *Data una famiglia di matrici ortogonali della forma (2.3.1), ovvero*

$$A(s) = 1 + sX + O(s^2), \quad A^T(s)A(s) \equiv 1 \quad (2.3.3)$$

la matrice X è antisimmetrica

$$X^T = -X. \quad (2.3.4)$$

Viceversa, data una matrice antisimmetrica X qualsiasi, esiste una famiglia di matrici ortogonali $A(s)$ della forma (2.3.4).

Dimostrazione: Usando

$$(1 + sX + O(s^2))^T = 1 + sX^T + O(s^2)$$

si ottiene

$$A^T(s)A(s) = 1 + s(X^T + X) + O(s^2).$$

Dall'approssimazione principale in s si arriva alla condizione di antisimmetria della matrice X . Vice versa, data una matrice antisimmetrica X , la famiglia delle matrici

$$A(s) = e^{sX} = 1 + sX + \frac{s^2}{2!}X^2 + \frac{s^3}{3!}X^3 + \dots$$

è ortogonale per ogni s :

$$A^T(s)A(s) = e^{sX^T}e^{sX} = e^{-sX}e^{sX} \equiv 1.$$

□

Osservazione 2.3.2 *Il risultato del lemma può essere presentato anche in seguente modo. Si consideri la varietà liscia $SO(n)$ rappresentata nello spazio delle matrici $n \times n$ dalle equazioni*

$$A^T A = 1, \quad \det A = +1.$$

La matrice $1 \in SO(n)$ (l'identità) è un punto particolare della varietà stessa. Allora, lo spazio tangente in questo punto si identifica con lo spazio delle matrici $n \times n$ antisimmetriche:

$$T_1 SO(n) = \{X \mid X^T = -X\}.$$

Si ricordi che nello spazio euclideo tridimensionale ogni trasformazione ortogonale $A \in SO(3)$ con determinante $+1$ è una rotazione attorno ad un asse.

Esercizio 2.3.3 *Data una matrice 3×3 antisimmetrica $X = (X_{ij})$, si dimostri che la trasformazione*

$$\mathbf{r} \mapsto \mathbf{r} + sX\mathbf{r} + O(s^2)$$

per $|s|$ sufficientemente piccoli a meno di ordini superiori è la rotazione attorno all'asse passante per l'origine parallelo al vettore

$$\mathbf{N} = (X_{32}, X_{13}, X_{21})$$

di un angolo

$$\delta\varphi = s|\mathbf{N}|.$$

Definizione 2.3.4 *Il momento angolare del punto materiale di massa m con il vettore raggio \mathbf{r} e l'impulso $\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{r}}$ è il tensore antisimmetrico*

$$M_{ij} = x_i p_j - p_i x_j, \quad 1 \leq i, j \leq 3.$$

Il tensore del momento angolare può essere definito da una formula simile in uno spazio euclideo di qualsiasi dimensione. Nel caso dello spazio tridimensionale c'è una corrispondenza ben nota tra i tensori antisimmetrici (M_{ij}) e vettori \mathbf{M} :

$$\mathbf{M} := (M_{23}, M_{31}, M_{12}).$$

Si ricordi che la proprietà principale di questa corrispondenza discende dalla seguente identità, valida per qualsiasi due vettori $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ e $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$:

$$\sum_{i,j=1}^3 M_{ij}x_iy_j = (\mathbf{M}, \mathbf{x} \times \mathbf{y}). \quad (2.3.5)$$

La definizione del momento angolare di un punto materiale si riscrive come

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}.$$

Teorema 2.3.5 *Dato un sistema meccanico isolato invariante rispetto alle rotazioni, allora le componenti del vettore del momento angolare totale*

$$\mathbf{M} = \sum_a \mathbf{r}_a \times \mathbf{p}_a$$

sono le quantità conservate.

Dimostrazione: Il campo vettoriale sullo spazio delle configurazioni \mathbb{R}^{3N} associato alle rotazioni simultanee

$$(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) \mapsto (A(s)\mathbf{r}_1, \dots, A(s)\mathbf{r}_N) = (\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) + s(X\mathbf{r}_1, \dots, X\mathbf{r}_N) + O(s^2)$$

è

$$(X\mathbf{r}_1, \dots, X\mathbf{r}_N).$$

La formula del teorema di Noether quindi dà la legge di conservazione

$$I_X = \sum_a (\mathbf{p}_a, X\mathbf{r}_a)$$

per ogni matrice antisimmetrica X . Usando il vettore \mathbf{X} associato, come nella formula (2.3.5), al tensore antisimmetrico $X = (X_{ij})$ si riscrive l'ultima espressione come

$$I_X = (\mathbf{X}, \sum_a \mathbf{p}_a \times \mathbf{r}_a) = (\mathbf{X}, \mathbf{M}).$$

Allora, dalla conservazione della quantità I_X per ogni matrice antisimmetrica X segue la conservazione del vettore \mathbf{M} . \square

Se il sistema meccanico è invariante rispetto alle rotazioni attorno a *un asse*, allora la quantità conservata è la proiezione del momento angolare sull'asse stesso.

Esempio. Si dice che il sistema meccanico con lagrangiana

$$L = \sum_a \frac{m_a \dot{\mathbf{r}}_a^2}{2} - U(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$$

ammette una *simmetria assiale* se il potenziale è invariante rispetto alle rotazione simultanee attorno a un asse. Per esempio, se l'asse della simmetria assiale è Oz , allora la quantità conservata è il componente M_z del vettore del momento angolare $\mathbf{M} = (M_x, M_y, M_z)$,

$$M_z = \sum_a m_a (x_a \dot{y}_a - y_a \dot{x}_a). \quad (2.3.6)$$

Nelle coordinate cilindriche (r, ϕ, z) ,

$$\begin{aligned}x_a &= r_a \cos \phi_a \\y_a &= r_a \sin \phi_a\end{aligned}$$

si ottiene l'espressione

$$M_z = \sum_a m_a r_a^2 \dot{\phi}_a. \quad (2.3.7)$$

2.4 Trasformazioni di scala

In questa sezione usiamo la semplice osservazione (vedi sopra) che le lagrangiane L e cL , dove c è una costante non nulla, determinano le stesse equazioni del moto.

Si consideri un sistema meccanico

$$L = \sum_a \frac{m_a \dot{\mathbf{r}}_a^2}{2} - U(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$$

per il quale il potenziale è una funzione omogenea di un certo grado k :

$$U(\lambda \mathbf{r}_1, \dots, \lambda \mathbf{r}_N) = \lambda^k U(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) \quad \forall \lambda > 0.$$

Teorema 2.4.1 *Per il potenziale omogeneo le equazioni del moto sono invarianti rispetto alle trasformazioni di scala*

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_a &\mapsto \lambda \mathbf{r}_a, & a = 1, \dots, N \\t &\mapsto \lambda^{1-\frac{k}{2}} t\end{aligned} \quad (2.4.1)$$

Dimostrazione: Si consideri la trasformazione

$$\mathbf{r}_a \mapsto \lambda \mathbf{r}_a, \quad t \mapsto \mu t.$$

Questa trasformazione moltiplica le velocità dei punti per

$$\frac{d\mathbf{r}_a}{dt} \mapsto \frac{\lambda}{\mu} \frac{d\mathbf{r}_a}{dt}.$$

Quindi, le energie cinetica e potenziale vengono moltiplicate per

$$T \mapsto \frac{\lambda^2}{\mu^2} T, \quad U \mapsto \lambda^k U.$$

Per $\mu = \lambda^{1-\frac{k}{2}}$ i due fattori diventano uguali,

$$\frac{\lambda^2}{\mu^2} = \lambda^k.$$

Allora, la lagrangiana $L = T - U$ viene moltiplicata per il fattore stesso,

$$L \mapsto \lambda^k L.$$

□

Esempio 1. Per l'oscillatore armonico

$$L = \frac{\dot{x}^2}{2} - \omega^2 x^2$$

il potenziale è una funzione omogenea di grado due. In questo caso

$$1 - \frac{k}{2} = 0,$$

e quindi, come sappiamo già, il periodo delle oscillazioni non dipende dall'ampiezza delle oscillazioni.

Esempio 2. Per il problema di Keplero (vedi sopra)

$$L = \frac{m v^2}{2} + \frac{\alpha}{|\mathbf{r}|}, \quad \alpha > 0$$

il grado del potenziale è uguale a $k = -1$. Allora, $1 - \frac{k}{2} = 3/2$, e quindi le traiettorie del sistema sono invarianti rispetto alle trasformazioni

$$\mathbf{r} \mapsto \lambda^2 \mathbf{r}, \quad t \mapsto \lambda^3 t.$$

In particolare, si ottiene **la terza legge di Keplero**: il quadrato del periodo di rivoluzione è proporzionale al cubo della dimensione lineare dell'orbita.

2.5 Problema dei due corpi

Si consideri il sistema meccanico isolato di due punti materiali. Rispetto al sistema di riferimento inerziale la lagrangiana deve avere la forma

$$L = \frac{m_1 \dot{\mathbf{r}}_1^2}{2} + \frac{m_2 \dot{\mathbf{r}}_2^2}{2} - U(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|). \quad (2.5.1)$$

Questo sistema è il primo esempio che dimostra come usare le leggi di conservazione per l'integrazione delle equazioni del moto.

Ponendo l'origine nel baricentro si ottiene

$$m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 = 0.$$

Allora, possiamo esprimere i raggi vettori tramite un singolo vettore

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \\ \mathbf{r}_1 &= \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r}, \quad \mathbf{r}_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r}. \end{aligned} \quad (2.5.2)$$

La sostituzione nelle equazioni del moto

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = -\nabla U$$

$$m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = \nabla U$$

dà

$$m \ddot{\mathbf{r}} = -\nabla U(r), \quad m := \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}.$$

Queste sono le equazioni del moto di un punto materiale in un campo esterno *centrale* con potenziale $U(r)$, ovvero con lagrangiana

$$L = \frac{m \dot{\mathbf{r}}^2}{2} - U(r). \quad (2.5.3)$$

Bisogna risolvere le equazioni del moto di questo sistema, e poi determinare il moto dei punti materiali usando le formule (2.5.2).

Ricapitolando, abbiamo ridotto il problema di due punti materiali, cioè, un problema a 6 gradi di libertà, ad un problema a 3 gradi di libertà usando la conservazione del momento totale. Nella sezione successiva usiamo altre leggi di conservazione per risolvere il sistema (2.6).

2.6 Moto nel campo centrale

Le equazioni del moto per la lagrangiana (2.6)

$$m \ddot{\mathbf{r}} = -U'(r) \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad r = |\mathbf{r}| \quad (2.6.1)$$

hanno tre costanti del moto, ovvero le tre componenti del vettore di momento angolare

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}.$$

Teorema 2.6.1 *Le traiettorie del moto (2.6.1) sono piane.*

Dimostrazione: Il vettore costante $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ è ortogonale a $\mathbf{p} = m \dot{\mathbf{r}}$. Allora, il punto materiale si muove nel piano

$$(\mathbf{M}, \mathbf{r}) = \text{cost.} \quad (2.6.2)$$

□

Introducendo sul piano (2.6.2) le coordinate polari (r, ϕ) si ottiene la lagrangiana

$$L = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2) - U(r) \quad (2.6.3)$$

(vedi formula (1.6.3) sopra), ovvero un sistema a due gradi di libertà con una coordinata ciclica ϕ . Il corrispondente integrale primo è

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = m r^2 \dot{\phi} = M_z$$

(si ricordi che l'asse Oz è ortogonale al piano del moto).

Esercizio 2.6.2 *Usando la legge di conservazione*

$$m r^2 \dot{\phi} = \text{cost}$$

si dimostri la seconda legge di Keplero: l'area del settore spazzato dal raggio vettore del punto che si muove in un campo centrale durante l'intervallo da t a $t + dt$ non dipende da t .

Teorema 2.6.3 *Si consideri un punto materiale in un campo centrale qualsiasi. Allora le soluzioni delle equazioni del moto si riducono a quadrature.*

Dimostrazione: Usando la legge di conservazione

$$m r^2 \dot{\phi} = M \quad (2.6.4)$$

si può riscrivere l'integrale dell'energia nella forma

$$E = \frac{m}{2} \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2 \right) + U(r) = \frac{m \dot{r}^2}{2} + \frac{M^2}{2m r^2} + U(r). \quad (2.6.5)$$

Allora

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m} [E - U(r)] - \frac{M^2}{m^2 r^2}},$$

ovvero una quadratura per la funzione $r = r(t)$

$$t = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m} [E - U(r)] - \frac{M^2}{m^2 r^2}}} + \text{cost.} \quad (2.6.6)$$

Dall'integrale (2.6.4) segue

$$d\phi = \frac{M}{m r^2} dt,$$

e, quindi, la seconda quadratura per determinare la dipendenza $\phi = \phi(r)$

$$\phi = \int \frac{\frac{M}{r^2}}{\sqrt{2m [E - U(r)] - \frac{M^2}{r^2}}} dr + \text{cost.} \quad (2.6.7)$$

□

Osservazione 2.6.4 *La legge di conservazione (2.6.5) può essere considerata come l'energia di un sistema a un grado di libertà con il potenziale effettivo*

$$U_{\text{eff}}(r) = U(r) + \frac{M^2}{2m r^2}. \quad (2.6.8)$$

In altre parole, abbiamo ridotto la descrizione del moto *radiale* a un sistema meccanico unidimensionale con lagrangiana

$$L = \frac{m \dot{r}^2}{2} - U_{\text{eff}}(r). \quad (2.6.9)$$

Date due radici consecutive r_{\min} , r_{\max} dell'equazione

$$U_{\text{eff}}(r) = E,$$

il moto radiale è limitato dentro la buca di potenziale

$$r_{\min} \leq r \leq r_{\max}.$$

Nel piano la traiettoria del punto sta dentro la corona circolare:

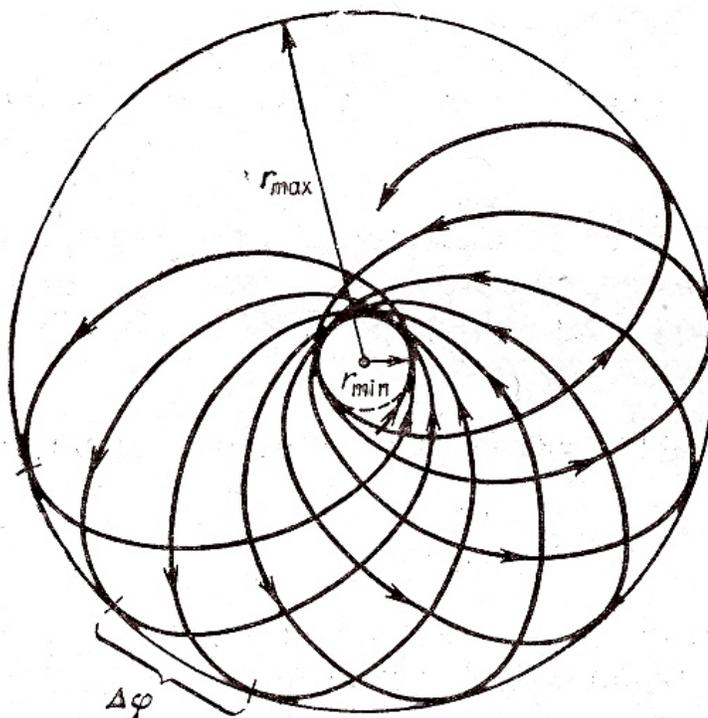


Fig. 6

Esercizio 2.6.5 Si consideri l'integrale

$$\Delta\phi := 2 \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{\frac{M}{r^2}}{\sqrt{2m[E - U(r)] - \frac{M^2}{r^2}}} dr.$$

Si dimostri che il moto è periodico se e solo se

$$\Delta\phi = 2\pi \frac{m}{n}, \quad m, n \in \mathbb{Z}.$$

2.7 Il problema di Keplero

Si consideri il caso particolare del problema dei due corpi soggetti al potenziale newtoniano. Il potenziale effettivo (2.6.8) si scrive nella forma

$$U_{\text{eff}}(r) = -\frac{k}{r} + \frac{M^2}{2mr^2}, \quad k > 0, \quad M := M_z. \quad (2.7.1)$$

Per $r \rightarrow 0$ il potenziale tende a $+\infty$, poi decresce fino al valore minimale

$$(U_{\text{eff}})_{\min} = -\frac{k^2 m}{2M^2} \quad \text{per} \quad r = \frac{M^2}{km},$$

e, finalmente, tende a 0 per $r \rightarrow +\infty$. Allora, il moto è finito se e solo se

$$-\frac{k^2 m}{2 M^2} < E < 0.$$

Per $E \geq 0$ il moto è infinito.

La forma della traiettoria viene determinata calcolando l'integrale (2.6.7):

$$\phi = \arccos \frac{\frac{M}{r} - \frac{k m}{M}}{\sqrt{2 m E + \frac{k^2 m^2}{M^2}}} + \text{cost.}$$

Scegliendo il valore zero della costante l'equazione della traiettoria può essere riscritta come

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \phi} \quad (2.7.2)$$

$$p := \frac{M^2}{k m}, \quad e := \sqrt{1 + \frac{2 E M^2}{k^2 m}}.$$

Questa è l'equazione di una conica (cf. la **prima legge di Keplero**) con fuoco all'origine, parametro focale p ed eccentricità e . L'angolo ϕ è stato scelto in modo tale che il punto $\phi = 0$ corrisponda al *perielio* dell'orbita.

Comè ben noto dalla geometria elementare, la conica (2.7.2) è un'ellisse per $E < 0$, ovvero per $0 < e < 1$. I semiassi dell'ellisse sono dati dalle formule ben note:

$$a = \frac{p}{1 - e^2}, \quad b = \frac{p}{\sqrt{1 - e^2}}.$$

Per $E = 0$ abbiamo una parabola (i.e., $e = 1$); la iperbole si ottiene per $e > 1$.

Per determinare la dipendenza dal tempo bisogna calcolare l'integrale

$$t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{dr}{\sqrt{E - U_{\text{eff}}(r)}}, \quad U_{\text{eff}}(r) = -\frac{k}{r} + \frac{M^2}{2 m r^2}.$$

Si consideri il caso delle orbite ellittiche, $e < 1$. La sostituzione

$$M = \sqrt{k m p}, \quad E = -k \frac{1 - e^2}{2 p}, \quad p = a(1 - e^2)$$

riduce l'integrale alla forma

$$t = \sqrt{\frac{m a}{k}} \int \frac{r dr}{\sqrt{-r^2 + 2 a r - a p}} = \sqrt{\frac{m a}{k}} \int \frac{r dr}{\sqrt{a^2 e^2 - (r - a)^2}}.$$

Nell'ultimo passo è stata usata la sostituzione

$$r - a = -a e \cos \xi$$

che riduce l'integrale a

$$t = \sqrt{\frac{m a^3}{k}} \int (1 - e \cos \xi) d\xi = \sqrt{\frac{m a^3}{k}} (\xi - e \sin \xi) + \text{cost.}$$

Usando l'arbitrarietà nella scelta dell'origine dei tempi, si può scegliere $\text{cost} = 0$. Allora, si ottiene la rappresentazione parametrica del moto radiale

$$\left. \begin{aligned} r &= a(1 - e \cos \xi) \\ t &= \sqrt{\frac{ma^3}{k}} (\xi - e \sin \xi) \end{aligned} \right\}. \quad (2.7.3)$$

La trasformazione

$$\xi \mapsto \xi + 2\pi$$

non cambia la posizione del punto nello spazio. Quindi il *periodo* del moto sull'orbita ellittica è

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{ma^3}{k}}. \quad (2.7.4)$$

Per riscrivere il moto nelle coordinate cartesiane $x = r \cos \phi$, $y = r \sin \phi$ usiamo l'equazione

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \phi} = a(1 - e \cos \xi)$$

per derivare le formule

$$\cos \phi = \frac{\cos \xi - e}{1 - e \cos \xi}, \quad \sin \phi = \sqrt{1 - e^2} \frac{\sin \xi}{1 - e \cos \xi}.$$

Quindi, le equazioni parametriche delle orbite ellittiche nelle coordinate cartesiane si ottengono nella seguente forma:

$$\left. \begin{aligned} x &= a(\cos \xi - e) \\ y &= a\sqrt{1 - e^2} \sin \xi \\ t &= \sqrt{\frac{ma^3}{k}} (\xi - e \sin \xi) \end{aligned} \right\}. \quad (2.7.5)$$

Per ottenere la dipendenza *esplicita* dal tempo t si possono usare le seguenti formule trovate da Bessel.

Esercizio 2.7.1 *Si consideri l'equazione*

$$\tau = \xi - e \sin \xi$$

con $0 < e < 1$. *Dimostrare che le funzioni $\sin \xi$, $\cos \xi$ ammettono i seguenti sviluppi nelle serie di Fourier:*

$$\sin \xi = \frac{2}{e} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} J_n(ne) \sin n\tau \quad (2.7.6)$$

$$\cos \xi = -\frac{e}{2} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} J'_n(ne) \cos n\tau \quad (2.7.7)$$

dove

$$J_n(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{z}{2}\right)^{2m+n}}{m!(m+n)!}$$

è la funzione di Bessel.

Hint: usare la seguente rappresentazione integrale delle funzioni di Bessel:

$$J_n(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(z \sin \phi - n \phi) d\phi, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

La descrizione del moto per il caso iperbolico $E > 0$ si ottiene in modo analogo:

Esercizio 2.7.2 *Si ottenga la seguente rappresentazione parametrica del moto sull'iperbole*

$$\left. \begin{aligned} x &= a(e - \cosh \xi) \\ y &= a\sqrt{e^2 - 1} \sinh \xi \\ t &= \sqrt{\frac{ma^3}{k}} (e \sinh \xi - \xi) \end{aligned} \right\}. \quad (2.7.8)$$

2.8 Sistemi meccanici con vincoli. Il principio di D'Alembert

Si consideri un sistema meccanico con lagrangiana naturale

$$L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = \sum_{a=1}^N \frac{m_a \dot{\mathbf{r}}^2}{2} - U(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) \quad (2.8.1)$$

i cui punti sono costretti a soddisfare un certo insieme di *vincoli*³

$$f_1(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) = 0, \dots, f_k(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) = 0 \quad (2.8.2)$$

dove f_1, \dots, f_k sono certe funzioni lisce di $3N$ variabili. Questo significa che

- si considerano solo i punti iniziale/finale

$$q_1 = (\mathbf{r}_1^{(1)}, \dots, \mathbf{r}_N^{(1)}), \quad q_2 = (\mathbf{r}_1^{(2)}, \dots, \mathbf{r}_N^{(2)})$$

che soddisfano i vincoli (2.8.2);

- l'azione

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) dt$$

$$\mathbf{r}_a(t_1) = \mathbf{r}_a^{(1)}, \quad \mathbf{r}_a(t_2) = \mathbf{r}_a^{(2)}, \quad a = 1, \dots, N$$

va minimizzata considerando solo i moti variati che obbediscono ai vincoli (2.8.2).

Il moto determinato da queste due condizioni si chiama *moto vincolato*.

Il principio di D'Alembert stabilisce che il moto di un sistema meccanico vincolato può essere considerato come il moto di un sistema libero in presenza delle forze aggiuntive che si chiamano le *forze di reazione* dei vincoli.

³Noi consideriamo soltanto i cosiddetti *vincoli olonomi*. Nel caso anolonomo sono vincolate sia le posizioni sia le velocità dei punti.

Per darle la formulazione precisa si assuma che le k equazioni (2.8.2) siano *indipendenti*, ovvero definiscano una sottovarietà liscia Q dello spazio delle configurazioni $M = \mathbb{R}^{3N}$,

$$Q \subset M, \quad \dim Q = 3N - k.$$

Si ricordi che lo spazio tangente alla sottovarietà in un punto $q \in Q$ è un sottospazio lineare

$$T_q Q \subset \mathbb{R}^{3N}$$

nello spazio ambiente $T_q \mathbb{R}^{3N} = \mathbb{R}^{3N}$. Il complemento ortogonale allo spazio tangente è un sottospazio lineare di dimensione k generato dai gradienti delle funzioni f_1, \dots, f_k :

$$\nu_1 = \nabla f_1, \dots, \nu_k = \nabla f_k.$$

Teorema 2.8.1 *Si consideri un sistema meccanico (2.8.1) soggetto ai vincoli (2.8.2) indipendenti. Allora le equazioni del moto vincolato si scrivono nel seguente modo*

$$m_a \ddot{\mathbf{r}}_a = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_a} + \mathbf{R}_a, \quad a = 1, \dots, N \quad (2.8.3)$$

dove la forza di reazione $\mathbf{R} = (\mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_N)$ è ortogonale alla sottovarietà Q definita dai vincoli

$$\sum_{a=1}^N (\mathbf{R}_a, \delta \mathbf{r}_a) = 0 \quad (2.8.4)$$

per ogni vettore $\delta \mathbf{r} = (\delta \mathbf{r}_1, \dots, \delta \mathbf{r}_N)$ tangente alla sottovarietà (2.8.2).

Dimostrazione: Per derivare le equazioni del moto vincolato è opportuno ricorrere a tecniche variazionali (il metodo di moltiplicatori di Lagrange). Infatti, le curve stazionarie del problema vincolato vengono determinate dalla minimizzazione del funzionale

$$\tilde{S}[\mathbf{r}_1(t), \dots, \mathbf{r}_N(t), \lambda_1(t), \dots, \lambda_k(t)] = \int_{t_1}^{t_2} \left[L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) - \sum_{i=1}^k \lambda_i(t) f_i(\mathbf{r}) \right] dt \quad (2.8.5)$$

dove $\lambda_1(t), \dots, \lambda_k(t)$ sono i *moltiplicatori di Lagrange*. Le equazioni di Eulero - Lagrange per il funzionale \tilde{S} assumono la forma

$$m_a \ddot{\mathbf{r}}_a = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_a} + \sum_{i=1}^k \lambda_i(t) \frac{\partial f_i(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}_a}$$

insieme alle equazioni (2.8.2) della sottovarietà Q . Siccome i vettori

$$\frac{\partial f_i(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}_a}$$

per ogni i sono ortogonali alla sottovarietà stessa,

$$\sum_{a=1}^N \left(\frac{\partial f_i(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}_a}, \delta \mathbf{r}_a \right) = 0,$$

allora anche la combinazione lineare

$$\mathbf{R}_a := \sum_{i=1}^k \lambda_i(t) \frac{\partial f_i(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}_a}$$

è ortogonale a Q . □

Osservazione 2.8.2 *Il risultato del teorema spesso viene riformulato nel seguente modo: in un sistema vincolato il lavoro totale delle forze di reazione sui moti virtuali è uguale a zero.*

Le equazioni del moto (2.8.3) assieme alle (2.8.4) possono essere usate per determinare completamente sia il moto del sistema vincolato sia le reazioni $\mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_N$.

Osservazione 2.8.3 *In modo simile si trattano i vincoli con dipendenza esplicita dal tempo (cf. l'esercizio 1.9.5).*

Il moto vincolato può essere descritto anche in modo intrinseco da un sistema meccanico sul fibrato tangente della sottovarietà Q . (Implicitamente tale descrizione è stata già usata negli esercizi 1.9.2 - 1.9.4.) Infatti, si introduca un sistema di coordinate locali q_1, \dots, q_n sulla sottovarietà Q , $n = 3N - k$:

$$\mathbf{r}_a = \mathbf{r}_a(q), \quad a = 1, \dots, N, \quad q = (q_1, \dots, q_n).$$

Teorema 2.8.4 *Il moto vincolato può essere descritto dal sistema meccanico su TQ con lagrangiana*

$$L_Q(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n g_{ij}(q) \dot{q}^i \dot{q}^j - U(\mathbf{r}_1(q), \dots, \mathbf{r}_N(q)) \quad (2.8.6)$$

dove

$$g_{ij}(q) = \sum_{a=1}^N m_a \left(\frac{\partial \mathbf{r}_a}{\partial q^i}, \frac{\partial \mathbf{r}_a}{\partial q^j} \right) \quad (2.8.7)$$

è la metrica riemanniana indotta dalla metrica euclidea

$$ds^2 = \sum_{a=1}^N m_a (d\mathbf{r}_a, d\mathbf{r}_a)$$

sulla sottovarietà Q .

Dimostrazione: Infatti, il valore dell'azione S da minimizzare sui moti variati appartenenti alla sottovarietà Q può essere calcolato come

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L \left(\mathbf{r}(q(t)), \frac{d}{dt} \mathbf{r}(q(t)) \right) dt = \int_{t_1}^{t_2} L_Q(q, \dot{q}) dt.$$

□

In modo simile si possono considerare i sistemi vincolati sul fibrato tangente di una varietà liscia M di una certa dimensione n . Infatti, data una lagrangiana non degenere $L(x, \dot{x})$ su TM si consideri una sottovarietà liscia $Q \subset M$ di dimensione m . Si dice che la sottovarietà Q è *regolare* rispetto alla lagrangiana $L(x, \dot{x})$ se la restrizione del tensore (vedi l'esercizio 1.6.1)

$$\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^j} \right)_{1 \leq i, j \leq n}$$

sulla sottovarietà Q è ancora un tensore non degenere:

$$\det \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^j} \frac{\partial x^i}{\partial q^k} \frac{\partial x^j}{\partial q^l} \right)_{1 \leq k, l \leq m} \neq 0.$$

In questa formula q^1, \dots, q^m sono le coordinate locali sulla sottovarietà Q , l'immersione della sottovarietà in M viene descritta dalle equazioni

$$x^1 = x^1(q), \dots, x^n = x^n(q), \quad q = (q^1, \dots, q^m).$$

Come prima, il moto vincolato viene definito come il moto che minimizza l'azione

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(x, \dot{x}) dt, \quad x(t_1) \in Q, \quad x(t_2) \in Q$$

considerata sui moti variati appartenenti alla sottovarietà Q .

Si osservi che la mappa di immersione delle varietà

$$i : Q \subset M$$

induce un'immersione dei fibrati tangenti

$$i_* : TQ \subset TM.$$

Denotiamo con

$$L_Q(q, \dot{q}) := L(x(q), \frac{\partial x}{\partial q} \dot{q}) \tag{2.8.8}$$

la restrizione della lagrangiana sul sottofibrato TQ .

Esercizio 2.8.5 *Dimostrare che il moto vincolato sulla sottovarietà regolare Q viene determinato dalle equazioni di Eulero – Lagrange associate alla lagrangiana (2.8.8).*

Esempio. Qualsiasi sottovarietà liscia $Q \subset \mathbb{R}^n$ nello spazio euclideo è regolare rispetto alla lagrangiana

$$L = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \dot{x}_k^2.$$

La lagrangiana L_Q del moto vincolato ha la seguente forma

$$L_Q = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m g_{ij}(q) \dot{q}^i \dot{q}^j$$

dove

$$g_{ij}(q) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial x_k}{\partial q^i} \frac{\partial x_k}{\partial q^j}$$

è la metrica riemanniana indotta sulla varietà Q dalla metrica euclidea

$$ds^2 = dx_1^2 + \dots + dx_n^2.$$

Come sappiamo già (vedi l'esercizio 1.6.3) le traiettorie del moto per la lagrangiana L_Q coincidono con le geodetiche della metrica.

2.9 Sistemi di riferimento non inerziali

La forma naturale delle lagrangiane di sistemi meccanici si cambia se il sistema di riferimento non è inerziale.

Per derivare le equazioni del moto nei sistemi di riferimento non inerziali consideriamo prima il sistema di riferimento che si muove con la velocità $\mathbf{V}(t)$ rispetto al sistema di riferimento inerziale. Si chiami \mathbf{v} la velocità del punto materiale nel sistema di riferimento inerziale e \mathbf{v}' rispetto al sistema non inerziale. Allora

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{V}(t).$$

Sostituendo questa formula nella lagrangiana di partenza

$$L = \frac{m \mathbf{v}^2}{2} - U$$

si ottiene

$$L = \frac{m \mathbf{v}'^2}{2} + m (\mathbf{v}', \mathbf{V}) + \frac{m}{2} \mathbf{V}^2(t) - U.$$

Usando la formula

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{r}', \mathbf{V}) = (\mathbf{v}', \mathbf{V}) + \left(\mathbf{r}', \frac{d}{dt} \mathbf{V} \right)$$

possiamo modificare la lagrangiana, aggiungendo le derivate temporali, per arrivare all'espressione

$$L' = \frac{m \mathbf{v}'^2}{2} - m (\mathbf{W}(t), \mathbf{r}') - U$$

dove

$$\mathbf{W}(t) := \frac{d}{dt} \mathbf{V}(t)$$

è l'accelerazione del sistema di riferimento nuovo rispetto a quello inerziale.

Si osservi che il termine $-m \mathbf{W}(t)$ nelle equazioni del moto

$$m \frac{d\mathbf{v}'}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}'} - m \mathbf{W}(t)$$

può essere interpretato come una forza aggiuntiva (la *forza di inertia*) dovuta all'accelerazione del sistema di riferimento mobile.

Si consideri ancora un sistema di riferimento che si gira con la velocità angolare $\boldsymbol{\Omega}$ attorno all'origine del sistema di riferimento precedente. Per il sistema di riferimento nuovo abbiamo

$$\begin{aligned} \mathbf{r}' &= \mathbf{r}'' \\ \mathbf{v}' &= \mathbf{v}'' + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}'' \end{aligned}$$

Sostituendo questa espressione nella lagrangiana L' si ottiene finalmente

$$L'' = \frac{m \mathbf{v}''^2}{2} + m (\mathbf{v}'', \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}'') + \frac{m}{2} (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}'', \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}'') - m (\mathbf{W}, \mathbf{r}'') - U. \quad (2.9.1)$$

In questa formula abbiamo cambiato le notazioni

$$\mathbf{r}'' \rightarrow \mathbf{r}, \quad \mathbf{v}'' \rightarrow \mathbf{v}$$

per far la formula più leggibile.

Esercizio 2.9.1 Si dimostri che le equazioni del moto per la lagrangiana (2.9.1) assumono la seguente forma

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} - m \mathbf{W} + m \mathbf{r} \times \dot{\boldsymbol{\Omega}} + 2m \mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega} + m \boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\Omega}). \quad (2.9.2)$$

La forza aggiuntiva $m \mathbf{r} \times \dot{\boldsymbol{\Omega}}$ è dovuta alla non uniformità della rotazione del sistema. Il secondo termine aggiunto $2m \mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega}$ si chiama la *forza di Coriolis*. A differenza dalle altre la forza di Coriolis dipende dalla velocità del punto. L'ultimo pezzo $m \boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\Omega})$ si chiama la *forza centrifuga*.

2.10 Esercizi

Esercizio 2.10.1 Si consideri il pendolo sferico di massa m e lunghezza l in un campo gravitazionale omogeneo. Ridurre a quadrature le equazioni del moto.

Esercizio 2.10.2 Si consideri il sistema dell'esercizio 1.9.4. Integrare le equazioni del moto.

Esercizio 2.10.3 Nel problema di Keplero si consideri il moto sulla parabola, i.e. $E = 0$. Derivare la seguente rappresentazione parametrica del moto:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{p}{2} (1 - \eta^2) \\ y &= p \eta \\ t &= \sqrt{\frac{m p^3}{k}} \frac{\eta}{2} \left(1 + \frac{\eta^2}{3} \right) \end{aligned} \right\}.$$

Esercizio 2.10.4 Si dimostri che le componenti del vettore

$$\mathbf{L} := \mathbf{v} \times \mathbf{M} - k \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (2.10.1)$$

sono integrali (di Laplace - Runge - Lenz) del moto per il problema di Keplero.

Esercizio 2.10.5 Si consideri una piccola perturbazione

$$\delta U = \frac{\epsilon}{r^2}$$

del potenziale newtoniano $U = -\frac{k}{r}$. Determinare lo spostamento $\delta\phi$ del perielio dell'orbita ellittica (vedi l'esercizio 2.6.5) nell'approssimazione lineare in ϵ .

Hint: rappresentare la formula (2.6.5) nella forma

$$\delta\phi = -2 \frac{\partial}{\partial M} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \sqrt{2m(E - U(r)) - \frac{M^2}{r^2}} dr.$$

Esercizio 2.10.6 Data una varietà riemanniana Q con la metrica

$$ds^2 = g_{ij}(q) dq^i dq^j$$

si consideri il moto sul fibrato tangente definito da lagrangiana

$$L = \frac{1}{2} g_{ij}(q) \dot{q}^i \dot{q}^j$$

(cf. l'esercizio 1.6.3). Si dimostri che sulle soluzioni $q = q(t)$ delle equazioni del moto il tempo t è proporzionale al parametro naturale, i.e.

$$(\dot{q}, \dot{q}) = \text{cost.}$$

Esercizio 2.10.7 Data una funzione $f(z)$ a valori positivi sull'intervallo $a \leq z \leq b$ si consideri una superficie di rivoluzione nello spazio euclideo \mathbb{R}^3

$$\sqrt{x^2 + y^2} = f(z).$$

Si dimostri che le geodetiche sulla superficie sono le curve che soddisfano la seguente proprietà: chiamando φ l'angolo della geodetica con il parallelo

$$z = \text{cost}$$

allora il prodotto

$$f(z) \cos \varphi$$

non dipende da z .

Esercizio 2.10.8 Un'asta BD di peso $P = mg$ e lunghezza l è appoggiata sul muro com'è mostrato in figura 7; nel punto B si inserisce la corda AB . Determinare le forze di reazione.

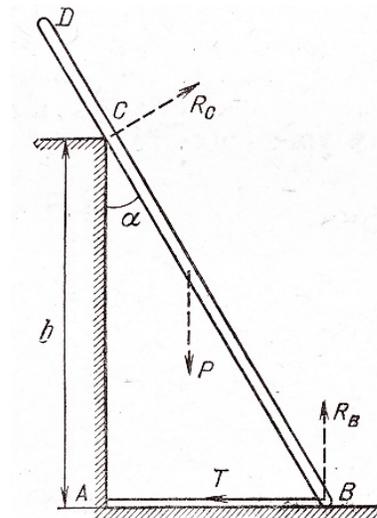


Fig. 7

Esercizio 2.10.9 Un'asta AB di peso $P = mg$ è appoggiata con i suoi estremi su due piani, uno verticale ed uno orizzontale (vedi figura 8); in questa posizione viene trattenuta con due corde orizzontali AD e BC ; inoltre, la corda BC giace nello stesso piano verticale con l'asta AB . Determinare le forze di reazione.

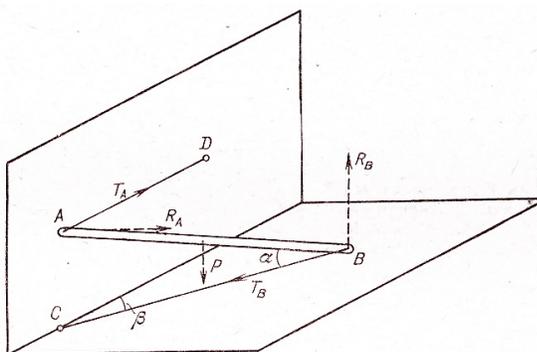


Fig. 8

Esercizio 2.10.10 Le due aste di lunghezza l sono collegate con una cerniera nel punto C e con una corda AB (vedi figura 9). La forza F è applicata al centro di una delle aste. Supponendo che le masse delle aste siano trascurabili, determinare le forze di reazione.

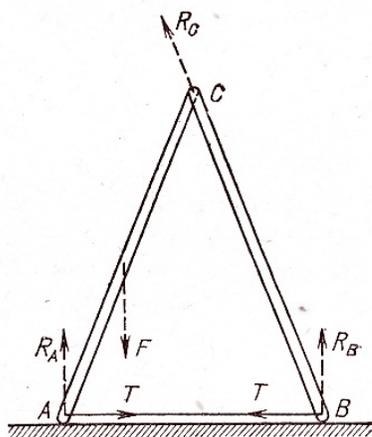


Fig. 9

Esercizio 2.10.11 Si consideri un punto materiale di massa m in caduta libera sulla terra dall'altezza h sopra un punto con latitudine θ . Si determini il punto di caduta nell'approssimazione lineare rispetto alla velocità angolare Ω della rotazione della terra.

Esercizio 2.10.12 Si considerino piccole oscillazioni di un pendolo nel campo gravitazionale terrestre (il pendolo di Foucault). Si determini l'effetto di rotazione della terra sul piano delle

oscillazioni, assumendo che la velocità angolare della terra Ω sia piccola rispetto alla frequenza ω delle oscillazioni del pendolo.

3 Meccanica Hamiltoniana

3.1 La trasformazione di Legendre. Le equazioni canoniche di Hamilton

Data una varietà liscia M si consideri una lagrangiana non degenera $L(q, \dot{q})$. Come sappiamo già le equazioni di Eulero - Lagrange si scrivono come un sistema dinamico sullo spazio del fibrato tangente TM della varietà stessa. Questo sistema può essere riscritto nel modo particolarmente simmetrico, trovato da Poisson e Hamilton, sullo spazio del fibrato *cotangente*.

Definizione 3.1.1 *La mappa dello spazio del fibrato tangente TM allo spazio del fibrato cotangente T^*M definita nelle coordinate locali q^1, \dots, q^n dalle formule*

$$(q, \dot{q}) \mapsto (q, p), \quad p = (p_1, \dots, p_n) \in T_q^*M, \quad p_i = \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}^i}, \quad i = 1, \dots, n \quad (3.1.1)$$

si chiama trasformazione di Legendre.

Esercizio 3.1.2 *Si dimostri che la definizione della mappa (3.1.1) non dipende dalla scelta delle coordinate locali.*

Hint: usare il risultato dell'esercizio 1.6.1.

Lemma 3.1.3 *La trasformazione di Legendre è un diffeomorfismo locale.*

Dimostrazione: Bisogna dimostrare che lo jacobiano della mappa (3.1.1) sia diverso da zero. Infatti, la matrice di Jacobi è una matrice $2n \times 2n$ della forma

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial q^i}{\partial q^j} & \frac{\partial q^i}{\partial \dot{q}^j} \\ \frac{\partial p_i}{\partial q^j} & \frac{\partial p_i}{\partial \dot{q}^j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_j^i & 0 \\ \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial q^j} & \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} \end{pmatrix}.$$

Il determinante di questa matrice è uguale a

$$\det \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} \right) \neq 0.$$

□

Come segue dal lemma, per una lagrangiana non degenera localmente si può invertire la mappa (3.1.1), ovvero risolvere le equazioni

$$p_i = \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}^i}, \quad i = 1, \dots, n$$

nella forma

$$\dot{q}^i = \dot{q}^i(q, p), \quad i = 1, \dots, n.$$

Quindi, localmente ogni funzione sullo spazio del fibrato tangente definisce una funzione sullo spazio del fibrato cotangente.

Definizione 3.1.4 *L'energia totale $E(q, \dot{q})$ del sistema meccanico considerata come una funzione sul fibrato cotangente si chiama hamiltoniana del sistema:*

$$H(q, p) := p_i \dot{q}^i - L(q, \dot{q}), \quad \dot{q} = \dot{q}(q, p). \quad (3.1.2)$$

Riscriviamo ora le equazioni di Eulero - Lagrange per la lagrangiana $L(q, \dot{q})$ sul fibrato cotangente.

Teorema 3.1.5 *Le equazioni di Eulero - Lagrange nelle coordinate (q, p) assumono la seguente forma*

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad (3.1.3)$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i}$$

$$i = 1, \dots, n$$

dove $H = H(q, p)$ è l'hamiltoniana del sistema.

Dimostrazione: Il differenziale

$$dH(q, p) = \frac{\partial H}{\partial q^i} dq^i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i \quad (3.1.4)$$

della funzione $H(q, p)$ può essere calcolato in seguente modo:

$$\begin{aligned} dH(q, p) &= d [p_i \dot{q}^i(q, p) - L(q, \dot{q}(q, p))] = \dot{q}^i dp_i + p_i d\dot{q}^i(q, p) - \frac{\partial L}{\partial q^i} dq^i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} d\dot{q}^i(q, p) \\ &= \dot{q}^i dp_i - \dot{p}_i dq^i \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

dove sono state usate le formule

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}$$

nonché le equazioni di Eulero - Lagrange

$$\dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q^i}.$$

Il confronto di (3.1.4) con (3.1.5) implica (3.1.3). □

Esercizio 3.1.6 *Si dimostri che l'hamiltoniana $H(q, p)$ definita in (3.1.2) soddisfa la condizione*

$$\det \left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_j} \right) \neq 0.$$

Inoltre, dimostrare che l'inversione della trasformazione di Legendre può essere scritta nella seguente forma

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H(q, p)}{\partial p_i}, \quad i = 1, \dots, n \quad (3.1.6)$$

$$L(q, \dot{q}) = p_i \dot{q}^i - H.$$

Esempio. Data una varietà riemanniana M con la metrica

$$ds^2 = g_{ij}(q) dq^i dq^j$$

si consideri la lagrangiana

$$L = \frac{m}{2} g_{ij}(q) \dot{q}^i \dot{q}^j$$

sul fibrato tangente TM . La trasformazione di Legendre si scrive nella forma

$$p_i = m g_{ij}(q) \dot{q}^j, \quad i = 1, \dots, n;$$

per invertirla bisogna introdurre la matrice inversa

$$(g^{ij}(q))_{1 \leq i, j \leq n}$$

alla matrice della metrica

$$(g_{ij}(q))_{1 \leq i, j \leq n},$$

cioè,

$$g^{ik}(q) g_{kj}(q) = \delta_j^i, \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (3.1.7)$$

Allora

$$\dot{q}^i = \frac{1}{m} g^{ij}(q) p_j, \quad i = 1, \dots, n.$$

L'hamiltoniana si ottiene nella forma

$$H = \frac{1}{2m} g^{ij}(q) p_i p_j. \quad (3.1.8)$$

Osservazione 3.1.7 Un tensore $g_{ij}(q)$ di tipo $(0, 2)$, ovvero una forma bilineare (\cdot, \cdot) sullo spazio tangente della varietà, definisce una mappa

$$TM \rightarrow T^*M, \quad T_q M \ni v \mapsto p := (v, \cdot) \in T_q^*M.$$

Il tensore si chiama non degenere se la mappa $T_q M \rightarrow T_q^*M$ è un isomorfismo per ogni $q \in M$. Usando questo isomorfismo si possono identificare gli spazi tangenti e cotangenti e, in particolare, definire una forma bilineare duale $(\cdot, \cdot)^*$ su T^*M usando la forma originale su TM . La matrice di questa forma duale coincide con la matrice inversa

$$(dq^i, dq^j)^* = g^{ij}(q).$$

In altre parole, la matrice inversa $(g^{ij}(q))$ è un tensore di tipo $(2, 0)$.

L'hamiltoniana di un punto libero di massa m nelle coordinate cartesiane si scrive nella forma

$$H = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2).$$

Usando le formule (1.6.6), (3.6.25) per la lagrangiana di un punto materiale di massa m nelle coordinate cilindriche o sferiche si ottiene le hamiltoniane nelle coordinate cilindriche

$$H = \frac{1}{2m} \left(p_z^2 + p_r^2 + \frac{1}{r^2} p_\phi^2 \right)$$

e sferiche

$$H = \frac{1}{2m} \left[p_r^2 + \frac{1}{r^2} \left(p_\theta^2 + \frac{1}{\sin^2 \theta} p_\phi^2 \right) \right].$$

Nel caso più generale di una lagrangiana naturale

$$L = \frac{m}{2} g_{ij}(q) \dot{q}^i \dot{q}^j - U(q)$$

definita sul fibrato tangente di una varietà riemanniana l'hamiltoniana prende la seguente forma

$$H(q, p) = \frac{1}{2m} g^{ij}(q) p_i p_j + U(q).$$

Esercizio 3.1.8 *Si consideri una lagrangiana che dipende dalle derivate di ordini superiori:*

$$L = L(x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots, x^{(n)})$$

(viene considerato solo il caso di dimensione 1 per evitare le notazioni complicate).

a) *Si dimostri che le equazioni variazionali*

$$\frac{\delta S}{\delta x(t)} = 0$$

per il funzionale

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots, x^{(n)}) dt$$

$$x^{(i)}(t_1) = x^{(i)}(t_2) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, n-1$$

si scrivono nella seguente forma

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial L}{\partial \ddot{x}} - \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dt^n} \frac{\partial L}{\partial x^{(n)}} = 0. \quad (3.1.9)$$

b) *Sotto l'ipotesi*

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^{(n)} \partial x^{(n)}} \neq 0$$

si dimostri che l'equazione differenziale (3.1.9) di ordine $2n$ è equivalente al sistema delle equazioni canoniche di Hamilton nelle coordinate canoniche

$$q^k = x^{(k-1)}$$

$$p_k = \sum_{s=0}^{n-k} (-1)^s \frac{d^s}{dt^s} \frac{\partial L}{\partial x^{(k+s)}},$$

$k = 1, \dots, n$, con l'hamiltoniana

$$H(q, p) = p_1 q^2 + p_2 q^3 + \dots + p_{n-1} q^n + p_n \dot{q}^n - L. \quad (3.1.10)$$

3.2 Parentesi di Poisson e integrali primi di equazioni di Hamilton

Sullo spazio delle fasi $P := T^*M$ di un sistema meccanico esiste una struttura geometrica importante per lo studio degli integrali primi del sistema stesso.

Si ricordi che una scelta delle coordinate locali q^1, \dots, q^n su M determina le coordinate $(q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n)$ sulla varietà T^*M . Le funzioni sulla varietà T^*M vengono quindi scritte nella forma $f = f(q, p)$.

Definizione 3.2.1 *Date due funzioni $f = f(q, p)$, $g = g(q, p)$ su $P = T^*M$, la parentesi di Poisson di esse è una nuova funzione $\{f, g\}$ definita dalla seguente formula*

$$\{f, g\} := \frac{\partial f}{\partial q^i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q^i}. \quad (3.2.1)$$

Si ricordi che la sommatoria rispetto agli indici doppi è sempre sottointesa.

Esercizio 3.2.2 *Si dimostri che la definizione della parentesi di Poisson sulla varietà T^*M non dipende dalla scelta delle coordinate locali su M .*

Teorema 3.2.3 *La parentesi di Poisson definisce sullo spazio $C^\infty(P)$ delle funzioni lisce sulla varietà $P = T^*M$ una struttura di un'algebra di Lie, cioè, l'operazione*

$$C^\infty(P) \times C^\infty(P) \rightarrow C^\infty(P)$$

$$(f, g) \mapsto \{f, g\}$$

è antisimmetrica

$$\{g, f\} = -\{f, g\}, \quad (3.2.2)$$

bilineare

$$\{a_1 f_1 + a_2 f_2, g\} = a_1 \{f_1, g\} + a_2 \{f_2, g\}, \quad \{f, a_1 g_1 + a_2 g_2\} = a_1 \{f, g_1\} + a_2 \{f, g_2\}, \quad a_1, a_2 \in \mathbb{R}, \quad (3.2.3)$$

soddisfa l'identità di Jacobi

$$\{\{f, g\}, h\} + \{\{h, f\}, g\} + \{\{g, h\}, f\} = 0 \quad (3.2.4)$$

per qualsiasi tre funzioni f, g, h . Inoltre, l'operazione (3.2.1) soddisfa l'identità di Leibnitz rispetto al prodotto delle funzioni:

$$\{f g, h\} = g \{f, h\} + f \{g, h\}. \quad (3.2.5)$$

Dimostrazione: Solo l'identità di Jacobi richiede una dimostrazione. Per dimostrarla si osservi che ogni termine in (3.2.4) contiene seconde derivate di una delle funzione f, g , o h . Dimostriamo, ad esempio, che tutti i termini con le seconde derivate della funzione f

spariscono. Infatti, basta verificare che i termini con le seconde derivate della f nella parentesi $\{\{f, g\}, h\}$ siano simmetriche in g e h . Questi termini sono

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\partial^2 f}{\partial q^j \partial q^i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial^2 f}{\partial q^j \partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q^i} \right] \frac{\partial h}{\partial p_j} - \left[\frac{\partial^2 f}{\partial p_j \partial q^i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial^2 f}{\partial p_j \partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q^i} \right] \frac{\partial h}{\partial q^j} \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial q^i \partial q^j} \frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial h}{\partial p_j} + \frac{\partial^2 f}{\partial p_i \partial p_j} \frac{\partial g}{\partial q^i} \frac{\partial h}{\partial q^j} - \frac{\partial^2 f}{\partial p_i \partial q^j} \left[\frac{\partial g}{\partial q^i} \frac{\partial h}{\partial p_j} + \frac{\partial h}{\partial q^i} \frac{\partial g}{\partial p_j} \right]. \end{aligned}$$

La simmetria di questa espressione in g e h è ovvia. \square

Lemma 3.2.4 *Data una funzione liscia $F = F(q, p)$ su P , ed un sistema hamiltoniano (3.1.3) si consideri la derivata totale della funzione F rispetto al tempo. Allora, la seguente formula è valida per questa derivata:*

$$\frac{d}{dt} F \equiv \frac{\partial F}{\partial q^i} \dot{q}^i + \frac{\partial F}{\partial p_i} \dot{p}_i = \{F, H\}. \quad (3.2.6)$$

Dimostrazione: è ovvia. \square

Esercizio 3.2.5 *Si consideri le parentesi di Poisson delle funzioni coordinate. Si dimostri che tutte le parentesi possono essere ricavate dalle seguente formule:*

$$\{q^i, p_j\} = \delta_j^i, \quad \{q^i, q^j\} = \{p_i, p_j\} = 0, \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (3.2.7)$$

Introducendo la notazione “collettiva” per le $2n$ coordinate sulla varietà P

$$x = (x^1, \dots, x^{2n}) := (q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n) \quad (3.2.8)$$

il sistema hamiltoniano (3.1.3) prende la seguente forma compatta:

$$\dot{x}^a = \{x^a, H\}, \quad a = 1, \dots, 2n. \quad (3.2.9)$$

Si osservi che la parentesi di Poisson (3.2.7) delle funzioni coordinate viene riscritta nel seguente modo:

$$\{x^a, x^b\} = \pi^{ab}, \quad a, b = 1, \dots, 2n \quad (3.2.10)$$

dove π^{ab} sono gli elementi matriciali della seguente matrice antisimmetrica

$$\left(\pi^{ab} \right)_{1 \leq a, b \leq 2n} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.2.11)$$

La formula (3.2.1) per la parentesi di due funzioni qualsiasi prende la seguente forma:

$$\{f, g\} = \pi^{ab} \frac{\partial f}{\partial x^a} \frac{\partial g}{\partial x^b}. \quad (3.2.12)$$

Per concludere questa sezione consideriamo i primi integrali di un sistema hamiltoniano.

Definizione 3.2.6 Si dice che le funzioni F e H su P commutano (oppure, che sono in involuzione) se

$$\{H, F\} = 0.$$

Teorema 3.2.7 Dato un sistema hamiltoniano con l'hamiltoniana H , e una funzione F liscia. Allora, la funzione F è un integrale primo del sistema hamiltoniano se e solo se F commuta con H .

La dimostrazione segue dalla formula (3.2.6). □

Corollario 3.2.8 Gli integrali primi di un sistema hamiltoniano formano una sottoalgebra nell'algebra di Lie $C^\infty(P)$. In altre parole, dati due integrali F e G di un sistema hamiltoniano, allora anche la funzione $\{F, G\}$ è un integrale del sistema hamiltoniano stesso.

Dimostrazione: Se H è l'hamiltoniana del sistema, per gli integrali primi dobbiamo avere

$$\{F, H\} = 0, \quad \{G, H\} = 0.$$

Usando l'identità di Jacobi (3.2.4) si conclude che anche

$$\{\{F, G\}, H\} = 0,$$

ovvero $\{F, G\}$ è un integrale primo. □

Corollario 3.2.9 L'hamiltoniana H è un integrale primo del sistema hamiltoniano (3.1.3).

Questo corollario è la “versione hamiltoniana” della legge di conservazione dell'energia. In particolare, si ottiene la seguente riformulazione dell'ultimo corollario:

Corollario 3.2.10 Le curve integrali $q = q(t)$, $p = p(t)$ del sistema hamiltoniano appartengono alle superficie di livello dell'hamiltoniana

$$H(q(t), p(t)) = \text{cost.}$$

Concludiamo questa sezione con una descrizione hamiltoniana di sistemi meccanici con lagrangiane $L = L(q, \dot{q}, t)$, $q \in M$, dipendenti dal tempo. In quest caso arriviamo sempre alle equazioni canoniche di forma (3.1.3) nello spazio esteso $\hat{P} = T^*M \times \mathbb{R}^2$ della dimensione $2n + 2$ (dove $n = \dim M$) con le coordinate canoniche $(q^1, \dots, q^n, q^{n+1}, p_1, \dots, p_n, p_{n+1})$. Le coordinate q^i , p_i per $i \leq n$ sono quelle come prima, le coordinate aggiunte hanno la seguente forma

$$q^{n+1} = t, \quad p_{n+1} = E, \tag{3.2.13}$$

dove E è una nuova variabile indipendente, con l'hamiltoniana

$$\hat{H} = H - p_{n+1} \dot{q}^{n+1} \equiv H - E, \tag{3.2.14}$$

$H = H(q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n, t)$ è data dalla vecchia formula

$$H = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}^i - L(q, \dot{q}, t), \quad \dot{q}^i = \dot{q}^i(q, p, t).$$

Sulla superficie di livello $\hat{H} = 0$ le equazioni del moto

$$\dot{q}^i = \frac{\partial \hat{H}}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial \hat{H}}{\partial q^i}, \quad i = 1, \dots, n$$

$$\dot{t} = 1, \quad \dot{E} = \frac{\partial H}{\partial t}$$

sono equivalenti alle equazioni di Eulero - Lagrange assieme con la formula

$$E = p_i \dot{q}^i - L(q, \dot{q}, t)$$

per l'energia (cf. esercizio 1.7.6). Si osservi il segno opposto della parentesi

$$\{q^{n+1}, p_{n+1}\} = -1.$$

3.3 I principi variazionali in meccanica hamiltoniana

Come descrivere le soluzioni $q = q(t)$, $p = p(t)$ di un sistema hamiltoniano canonico

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \tag{3.3.1}$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i}$$

$i = 1, \dots, n$, a partire da un principio variazionale? Il modo più semplice è quello di ritornare al principio variazionale di Hamilton, usando la formula (3.1.6) di inversione della trasformazione di Legendre. Più precisamente, il seguente teorema descrive le soluzioni del sistema hamiltoniano come i “punti” stazionari di un certo funzionale:

Teorema 3.3.1 *Data un'hamiltoniana $H = H(q, p)$, allora le soluzioni del sistema hamiltoniano (3.3.1) sono i punti stazionari del seguente funzionale*

$$S = \int_{t_1}^{t_2} [p_i \dot{q}^i - H(q, p)] dt, \quad q(t_1) = q_1, \quad q(t_2) = q_2. \tag{3.3.2}$$

Si osservi la differenza rispetto al principio di minima azione formulato nella sezione 1.2: agli estremi $t = t_1$, $t = t_2$ sono fissati solo i valori delle coordinate $q(t)$; i valori degli impulsi $p(t_1)$ e $p(t_2)$ restano arbitrari.

Dimostrazione: La variazione dell'azione si scrive nel seguente modo:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left[\dot{q}^i \delta p_i + p_i \delta \dot{q}^i - \frac{\partial H}{\partial q^i} \delta q^i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i \right] dt.$$

Integrando per parti il secondo termine si ottiene

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left[\dot{q}^i \delta p_i - \dot{p}_i \delta q^i - \frac{\partial H}{\partial q^i} \delta q^i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i \right] dt + p_i \delta q^i \Big|_{t_1}^{t_2}.$$

Siccome i valori ai bordi $t = t_1$ e $t = t_2$ di δq^i sono nulli, finalmente arriviamo alla formula

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left[\left(\dot{q}^i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) \delta p_i - \left(\dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q^i} \right) \delta q^i \right] dt.$$

Usando l'arbitrarietà delle variazioni δp e δq otteniamo le equazioni canoniche. □

Spesso l'azione (3.3.2) si scrive nel seguente modo:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} [p_i dq^i - H dt]. \quad (3.3.3)$$

È sottinteso che sulle curve $q = q(t)$, $p = p(t)$ bisogna sostituire

$$p_i dq^i = p_i(t) \dot{q}^i(t) dt.$$

Un'altra versione del principio variazionale è stata trovata da Maupertuis⁴. Il *principio variazionale di Maupertuis* considera le curve che soddisfano un vincolo imposto dalla legge di conservazione dell'energia (vedi il corollario 3.2.10). Più precisamente, è valido il seguente

Teorema 3.3.2 *Data una funzione $H = H(q, p)$, e un numero reale E , allora i punti stazionari dell'azione troncata*

$$S_0 = \int p_i dq^i \quad (3.3.4)$$

nella classe delle curve $q = q(t)$, $p = p(t)$ che appartengono alla superficie di livello

$$H(q(t), p(t)) = E$$

e connettono il punto iniziale $q = q_1$ con quello finale $q = q_2$ determinano le traiettorie (isoenergetiche) del sistema hamiltoniano con l'hamiltoniana H .

Bisogna sottolineare che dal principio di Maupertuis vengono determinate solo le *traiettorie* del moto; la *dinamica* sulle traiettorie non è fissata dal principio variazionale. Inoltre, non possiamo più fissare il momento $t = t_2$ di arrivo al punto finale $q = q_2$; esso viene determinato dalla soluzione del problema variazionale.

Dimostrazione: Applicando al problema variazionale il metodo dei moltiplicatori di Lagrange arriviamo alla seguente formulazione:

$$\delta \int [p_i \dot{q}^i - \lambda(t)(H(q, p) - E)] dt = 0.$$

⁴Pierre Louis Maupertuis (1698 - 1759) fu il primo che elevò il principio di minima azione a principio universale metafisico sottostante a tutte le leggi della meccanica.

Ripetendo i calcoli usati nella dimostrazione del teorema precedente otteniamo le equazioni

$$\dot{q}^i = \lambda(t) \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\lambda(t) \frac{\partial H}{\partial q^i}, \quad H(q, p) = E.$$

La riparametrizzazione

$$ds = \lambda(t) dt$$

riduce il sistema alle equazioni canoniche. \square

Nelle applicazioni più importanti il principio di Maupertuis viene usato per determinare le proiezioni $q = q(t)$ delle traiettorie in T^*M nello spazio M delle configurazioni. A questo scopo bisogna restringere il funzionale sul sottoinsieme delle curve su cui sono valide le equazioni

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H(q, p)}{\partial p_i}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Secondo il teorema precedente questo vincolo aggiuntivo è compatibile con il problema variazionale, scegliendo opportunamente la parametrizzazione. Risolvendo queste equazioni nella forma

$$p_i = p_i(q, \dot{q}), \quad i = 1, \dots, n$$

e sostituendo nella legge di conservazione

$$H(q, p(q, \dot{q})) = E$$

troviamo il differenziale del tempo dt in funzione delle coordinate q e dei loro differenziali dq . Infine, sostituendo queste espressioni nell'azione (3.3.4) si ottiene il problema variazionale che caratterizza le traiettorie nello spazio delle configurazioni:

$$\delta \int p_i(q, \frac{dq}{dt}) \dot{q}^i dt = 0.$$

Esempio 1. Moto libero sulla varietà riemanniana e le geodetiche. Data una varietà riemanniana M con una metrica

$$ds^2 = g_{ij}(q) dq^i dq^j \tag{3.3.5}$$

si consideri il moto libero di un punto di massa m . L'hamiltoniana è stata calcolata prima (vedi la formula (3.7.20)):

$$H = \frac{1}{2m} g^{ij}(q) p_i p_j.$$

La prima parte delle equazioni hamiltoniane ci dà il legame già noto tra gli impulsi e le velocità:

$$p_i = m g_{ij}(q) \dot{q}^j.$$

Sostituendo tali espressioni nella legge di conservazione otteniamo

$$\frac{m}{2} g_{ij}(q) \frac{dq^i dq^j}{dt^2} = E, \quad \text{ovvero} \quad dt = \sqrt{\frac{m}{2E}} \sqrt{g_{ij}(q) dq^i dq^j}.$$

Sostituendo nel funzionale (3.3.4) si ottiene il seguente problema variazionale:

$$\delta S_0 = 0, \quad S_0 = \sqrt{2mE} \int_{q_1}^{q_2} ds, \quad \text{dove} \quad ds = \sqrt{g_{ij}(q) dq^i dq^j}. \quad (3.3.6)$$

Abbiamo quindi dimostrato il seguente

Teorema 3.3.3 *Data una varietà riemanniana con la metrica (3.3.5), allora le traiettorie del moto libero sulla varietà sono le geodetiche della metrica.*

Si ricordi che le geodetiche, tra tutte le curve che connettono due punti della varietà, sono le curve lisce (oppure lisce a tratti) che minimizzano la lunghezza. (Si ricordi che in generale la minimizzazione va sostituita con la proprietà più debole di stazionarietà del funzionale di lunghezza della curva.) Come sappiamo già il valore del funzionale di lunghezza

$$s = \int \sqrt{g_{ij}(q) dq^i dq^j}$$

è invariante rispetto alle riparametrizzazioni.

Esempio 2. Metrica di Jacobi. Si consideri ora una lagrangiana naturale

$$L = \frac{m}{2} g_{ij}(q) \dot{q}^i \dot{q}^j - U(q)$$

sul fibrato tangente di una varietà riemanniana M . Come sappiamo già, fissando il livello di energia E il moto è limitato dalla parte di M definita dalla disuguaglianza

$$U(q) < E. \quad (3.3.7)$$

Teorema 3.3.4 *Le traiettorie del sistema meccanico nel dominio (3.3.7) sono le geodetiche della metrica*

$$ds_E^2 = 2m(E - U(q)) g_{ij}(q) dq^i dq^j. \quad (3.3.8)$$

Dimostrazione: Come nella dimostrazione del teorema precedente, otteniamo

$$p_i \dot{q}^i = m \frac{ds^2}{dt^2}, \quad dt = \sqrt{\frac{m}{2}} \frac{ds}{\sqrt{E - U(q)}},$$

allora per l'azione S_0 si ottiene la seguente formula

$$S_0 = \int \sqrt{2m(E - U(q))} ds = \int ds_E$$

che coincide con la lunghezza della curva nella metrica (3.3.8). □

La metrica (3.3.8) si chiama la *metrica di Jacobi*. La dinamica sulle geodetiche della metrica di Jacobi viene determinata dalla quadratura

$$t - t_0 = \frac{1}{2} \int \frac{ds_E}{E - U(q)}.$$

Esempio 3. Il principio di Fermat e l'ottica geometrica. La propagazione della luce in un mezzo isotropo è descritta dall'hamiltoniana

$$H(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = c(\mathbf{r}) p, \quad p = |\mathbf{p}| \quad (3.3.9)$$

dove $c(\mathbf{r})$ è una funzione a valori positivi uguale alla velocità di luce nel punto \mathbf{r} . Applicando il metodo già usato si arriva alle formule

$$\dot{\mathbf{r}} = c(\mathbf{r}) \frac{\mathbf{p}}{p}, \quad p = \frac{E}{c(\mathbf{r})}.$$

Allora

$$\langle \mathbf{p}, d\mathbf{r} \rangle = |\mathbf{p}| |d\mathbf{r}| = \frac{E}{c(\mathbf{r})} |d\mathbf{r}|.$$

Per l'azione (3.3.4) si ottiene la seguente espressione

$$S_0 = E \int \frac{|d\mathbf{r}|}{c(\mathbf{r})}. \quad (3.3.10)$$

Si osservi che l'integrale

$$t := \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \frac{|d\mathbf{r}|}{c(\mathbf{r})}$$

è nient'altro che il tempo di propagazione di luce dal punto \mathbf{r}_1 al punto \mathbf{r}_2 . Otteniamo quindi il seguente risultato

Teorema 3.3.5 *La luce in un mezzo isotropo si propaga in modo tale da minimizzare il tempo di percorrenza. Le traiettorie della luce sono le curve geodetiche della metrica*

$$ds_{\text{Fermat}}^2 = \frac{ds^2}{c^2(\mathbf{r})}$$

dove

$$ds^2 = d\mathbf{r}^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

3.4 Le trasformazioni canoniche e le simmetrie delle equazioni di Hamilton

Data una varietà liscia M si consideri lo spazio $P = T^*M$ del fibrato cotangente. Come già sappiamo, sullo spazio P si può costruire una parentesi di Poisson, ovvero, una struttura di un'algebra di Lie sullo spazio delle funzioni lisce $\mathcal{C}^\infty(P)$.

Definizione 3.4.1 *Dato un diffeomorfismo*

$$\Phi : P \rightarrow P$$

si dice che Φ è una trasformazione canonica di P se la mappa Φ^* indotta sullo spazio delle funzioni,

$$\Phi^* : \mathcal{C}^\infty(P) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(P), \quad \Phi^* f(x) = f(\Phi(x)),$$

è un automorfismo dell'algebra di Lie, ovvero

$$\{\Phi^* f, \Phi^* g\} = \Phi^* \{f, g\} \quad (3.4.1)$$

per due qualsiasi funzioni $f, g \in \mathcal{C}^\infty(P)$.

Nelle coordinate $x = (x^1, \dots, x^{2n})$ su P la mappa Φ viene descritta da $2n$ funzioni di $2n$ variabili:

$$x = (x^1, \dots, x^{2n}) \mapsto \Phi(x) = (\Phi^1(x), \dots, \Phi^{2n}(x)).$$

In queste coordinate la definizione (3.4.1) assume la seguente forma

$$\pi^{cd} \frac{\partial \Phi^a(x)}{\partial x^c} \frac{\partial \Phi^b(x)}{\partial x^d} = \pi^{ab}, \quad a, b = 1, \dots, 2n. \quad (3.4.2)$$

Esempio 1. Il sollevamento Φ di un diffeomorfismo ϕ definito sulla base

$$\begin{aligned} \phi : M &\rightarrow M, & \phi(q) &= (\phi^1(q), \dots, \phi^n(q)) \\ \Phi : T^*M &\rightarrow T^*M, & \Phi(q, p) &= (\phi(q), \phi^{*-1}p), \quad (\phi^*p)_i = \frac{\partial \phi^j(q)}{\partial q^i} p_j \end{aligned}$$

allo spazio del fibrato cotangente è una trasformazione canonica (cf. l'esercizio 3.2.2).

Le trasformazioni canoniche più generali possono “mescolare” le coordinate e gli impulsi.

Esempio 2. La trasformazione

$$\Phi : (q, p) \mapsto (p, -q)$$

è una trasformazione canonica.

Esercizio 3.4.2 Si considerino le trasformazioni canoniche lineari dello spazio delle fasi lineare $P = \mathbb{R}^{2n}$,

$$x \mapsto Ax$$

dove A è una matrice $2n \times 2n$. Si dimostri che la trasformazione lineare è canonica se e solo se la matrice A soddisfa la seguente equazione:

$$A G A^T = G, \quad G = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.4.3)$$

Come diventa chiaro dal seguente teorema le trasformazioni canoniche “rispettano” la classe dei sistemi hamiltoniani:

Teorema 3.4.3 Data una trasformazione canonica

$$\Phi : P \rightarrow P,$$

allora per ogni soluzione $x = x(t)$ del sistema hamiltoniano con hamiltoniana H la funzione $\Phi(x(t))$ è una soluzione del sistema hamiltoniano con hamiltoniana $\Phi^{-1*}H$.

Dimostrazione: Denotando $\tilde{x}(t) := \Phi(x(t))$, per qualsiasi funzione liscia $f(x)$ la definizione del sistema hamiltoniano

$$\frac{d}{dt} f(x) = \{f, H\}|_{x=x(t)}$$

implica la seguente formula per la derivata temporale della funzione $f(\tilde{x}(t)) \equiv \Phi^* f(x(t))$:

$$\frac{d}{dt} f(\tilde{x}(t)) = \{f(\Phi(x)), H(x)\}.$$

Riscrivendo la parte destra della formula nel seguente modo:

$$\{f(\Phi(x)), H(x)\} = \{f(\Phi(x)), H(\Phi^{-1}(\Phi(x)))\} = \{\Phi^* f, \Phi^* \Phi^{-1*} H\},$$

e usando la definizione di trasformazione canonica, arriviamo a

$$\frac{d}{dt} f(\tilde{x}(t)) = \Phi^* \{f, \Phi^{-1*} H\} = \{f, \Phi^{-1*} H\}|_{x=\tilde{x}(t)}.$$

□

Per approfondire la descrizione dei legami tra le trasformazioni canoniche e i sistemi hamiltoniani conviene introdurre anche la versione infinitesima della definizione 3.4.1. Questa definizione può essere formulata nel seguente modo.

Definizione 3.4.4 *Dato un campo vettoriale X sulla varietà P , si dice che questo campo è una simmetria infinitesima della parentesi di Poisson se per qualsiasi due funzioni f, g su P è valida la seguente identità:*

$$X \{f, g\} = \{X f, g\} + \{f, X g\}. \quad (3.4.4)$$

Esercizio 3.4.5 *Dato un gruppo a un parametro di trasformazioni canoniche, cioè, le trasformazioni Φ_t che soddisfano l'identità*

$$\{\Phi_t^* f, \Phi_t^* g\} = \Phi_t^* \{f, g\}$$

per ogni $t \in \mathbb{R}$, si dimostri che il campo vettoriale X che genera il gruppo,

$$X(x) := \frac{d}{dt} \Phi_t(x)|_{t=0}$$

è una simmetria infinitesima. Viceversa, si dimostri che il gruppo a un parametro

$$\Phi_t : P \rightarrow P$$

associato ad una simmetria infinitesima X qualsiasi agisce come una trasformazione canonica.

Presentiamo ora il metodo per costruire i gruppi a un parametro di trasformazioni canoniche. Infatti, dimostriamo che i flussi hamiltoniani producono tali gruppi.

Prima di tutto, conviene introdurre una notazione per i campi vettoriali associati ai sistemi dinamici hamiltoniani. Data una funzione H sulla varietà P , si osservi che la mappa

$$f \mapsto \{f, H\}, \quad f \in C^\infty(P) \quad (3.4.5)$$

è un operatore differenziale lineare del primo ordine, come segue dall'identità di Leibnitz. Usando la solita identificazione

operatori differenziali lineari del primo ordine \leftrightarrow campi vettoriali

possiamo associare all'operatore (3.4.5) un campo vettoriale X_H tale che

$$X_H f = \{f, H\}. \quad (3.4.6)$$

Il campo vettoriale X_H si chiama il *campo hamiltoniano* generato dall'*hamiltoniana* H . Nelle coordinate q, p il campo hamiltoniano X_H si scrive nel seguente modo:

$$X_H = \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial H}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial p_i}. \quad (3.4.7)$$

Nelle coordinate "collettive" $x = (q, p)$ la formula per il campo hamiltoniano assume la forma

$$X_H = \pi^{ab} \frac{\partial H}{\partial x^b} \frac{\partial}{\partial x^a}. \quad (3.4.8)$$

Si osservi che il campo X_H coincide con il campo del sistema dinamico (3.1.3):

$$X_H f = \frac{d}{dt} f = \frac{\partial f}{\partial q^i} \dot{q}^i + \frac{\partial f}{\partial p_i} \dot{p}_i \quad (3.4.9)$$

per una qualsiasi funzione $f = f(q, p)$.

Si ottiene una mappa

$$\mathcal{C}^\infty(P) \rightarrow \text{Vect}(P), \quad H \mapsto X_H \quad (3.4.10)$$

dello spazio delle funzioni lisce su P nello spazio dei campi vettoriali lisci sulla varietà stessa. Si ricordi che quest'ultimo possiede una struttura naturale di algebra di Lie rispetto al commutatore $[,]$ (i.e., la parentesi di Lie) dei campi vettoriali. L'identità di Jacobi (3.2.4) può essere riformulata nel seguente modo.

Lemma 3.4.6 *La mappa (3.4.10) è un antiomomorfismo delle algebre di Lie, ovvero per qualsiasi due funzioni H_1 e H_2 sulla varietà P abbiamo*

$$[X_{H_1}, X_{H_2}] = -X_{\{H_1, H_2\}}. \quad (3.4.11)$$

Dimostrazione: Per la definizione del commutatore di due campi vettoriale per una funzione qualsiasi f su P abbiamo la seguente formula

$$[X_{H_1}, X_{H_2}] f := X_{H_1} (X_{H_2} f) - X_{H_2} (X_{H_1} f).$$

Usando la definizione (3.4.6) possiamo esprimere la parte destra dell'ultima formula tramite parentesi di Poisson:

$$X_{H_1} (X_{H_2} f) - X_{H_2} (X_{H_1} f) = \{\{f, H_2\}, H_1\} - \{\{f, H_1\}, H_2\}.$$

Infine, usando l'identità di Jacobi (3.2.4) si ottiene che

$$\{\{f, H_2\}, H_1\} - \{\{f, H_1\}, H_2\} = -\{f, \{H_1, H_2\}\} = -X_{\{H_1, H_2\}} f.$$

□

Teorema 3.4.7 *Date due hamiltoniane H, F in involuzione, i.e., $\{F, H\} = 0$, allora, i due sistemi hamiltoniani*

$$\frac{d}{dt} x = \{x, H\} \quad \text{e} \quad \frac{d}{ds} x = \{x, F\}$$

commutano:

$$\frac{d}{ds} \frac{d}{dt} x = \frac{d}{dt} \frac{d}{ds} x.$$

In queste formule denotiamo con x una coordinata locale qualsiasi sulla varietà P .

Dimostrazione: segue dal lemma precedente. □

Una proprietà geometrica importante dei campi vettoriali hamiltoniani è quella di essere *simmetrie infinitesime* della parentesi di Poisson.

Teorema 3.4.8 *Data una funzione liscia H su P , allora il campo hamiltoniano X_H è una simmetria infinitesima della parentesi di Poisson. Viceversa, per ogni simmetria infinitesima X localmente esiste una funzione H su P tale che $X = X_H$.*

Dimostrazione: Come sappiamo già la derivata di una funzione rispetto a un campo vettoriale hamiltoniano si calcola secondo la seguente formula

$$X_H f = \{f, H\}$$

(vedi la formula (3.4.6)). Allora, la parte sinistra della formula (3.4.4) è uguale a

$$X_H \{f, g\} = \{\{f, g\}, H\}.$$

La parte destra invece si ottiene nella forma

$$\{X_H f, g\} + \{f, X_H g\} = \{\{f, H\}, g\} + \{f, \{g, H\}\}.$$

Dall'identità di Jacobi (3.2.4) segue che queste due espressioni sono uguali.

Per dimostrare la seconda parte del teorema scriviamo la formula (3.4.4) per $f(x) = x^a$, $g(x) = x^b$ (due funzioni coordinate) usando l'espressione (3.2.12):

$$\begin{aligned} \{X f, g\} + \{f, X g\} - X \{f, g\} &= \{X^a(x), x^b\} + \{x^a, X^b(x)\} \\ &= \pi^{cb} \frac{\partial X^a}{\partial x^c} + \pi^{ac} \frac{\partial X^b}{\partial x^c}. \end{aligned}$$

Scegliendo i valori degli indici a, b da 1 a $2n$ otteniamo le equazioni

$$\pi^{cb} \frac{\partial X^a}{\partial x^c} + \pi^{ac} \frac{\partial X^b}{\partial x^c} = 0, \quad a, b = 1, \dots, 2n. \quad (3.4.12)$$

Pongo

$$\omega_a := \pi_{ab} X^b$$

dove la matrice π_{ab} è l'inversa di π^{ab} . Moltiplicando l'equazione (3.4.12) per $\pi_{ia}\pi_{jb}$ e facendo la sommatoria rispetto agli indici doppi a, b si ottiene

$$\frac{\partial\omega_i}{\partial x^j} - \frac{\partial\omega_j}{\partial x^i} = 0, \quad i, j = 1, \dots, 2n,$$

ovvero la 1-forma

$$\omega = \omega_i dx^i$$

è chiusa, $d\omega = 0$. Usando il lemma di Poincaré concludiamo che localmente esiste una funzione H tale che

$$\omega = dH, \quad \text{ovvero} \quad \omega_a = \frac{\partial H}{\partial x^a}, \quad a = 1, \dots, 2n.$$

Quindi, risolvendo le equazioni

$$\pi_{ab}X^b = \frac{\partial H}{\partial x^a}$$

rispetto a X (bisogna moltiplicarle per la matrice inversa π^{ca}) si ottiene

$$X^a = \pi^{ab} \frac{\partial H}{\partial x^b},$$

ovvero il campo vettoriale X coincide con il campo hamiltoniano X_H . □

Definizione 3.4.9 *Dato un gruppo a un parametro di trasformazioni canoniche $\Phi_t : P \rightarrow P$, allora l'hamiltoniana H tale che*

$$\frac{d}{dt}\Phi_t(x)|_{t=0} = X_H(x)$$

si chiama generatore hamiltoniano del gruppo.

Abbiamo dimostrato l'esistenza *locale* del generatore hamiltoniano per qualsiasi gruppo a un parametro delle trasformazioni canoniche. In molti esempi però il generatore del gruppo a un parametro esiste anche globalmente.

Esercizio 3.4.10 *Dato un gruppo a un parametro di diffeomorfismi della base del fibrato cotangente $P = T^*M$,*

$$\phi_t : M \rightarrow M,$$

*si consideri il sollevamento del gruppo allo spazio T^*M ,*

$$\Phi_t : P \rightarrow P, \quad \Phi_t(q, p) = \left(\phi_t(q), \phi_t^{-1*} p \right) \tag{3.4.13}$$

(vedi l'esempio 1 sopra). Si dimostri che il generatore hamiltoniano delle trasformazioni canoniche (3.4.13) dipende linearmente dalle coordinate p_1, \dots, p_n ed è dato dalla seguente formula

$$\begin{aligned} H(q, p) &= \langle p, X(q) \rangle \equiv p_i X^i(q) & (3.4.14) \\ X(q) &= (X^1(q), \dots, X^n(q)), \quad X(q) = \frac{d}{dt}\phi_t(q)|_{t=0}. \end{aligned}$$

Esercizio 3.4.11 Si consideri il gruppo a un parametro delle trasformazioni canoniche Φ_t generato dall'hamiltoniana quadratica

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (p_i^2 + q_i^2).$$

Si dimostri che la trasformazione $\Phi_{t=\frac{\pi}{2}}$ agisce nel seguente modo (cf. l'esempio 2 sopra)

$$\Phi_{t=\frac{\pi}{2}} : (q, p) \mapsto (p, -q).$$

Finalmente siamo in grado di completare la teoria delle simmetrie delle equazioni canoniche di Hamilton.

Definizione 3.4.12 Dato un sistema hamiltoniano sulla varietà $P = T^*M$ con hamiltoniana H , ed un diffeomorfismo $\Phi : P \rightarrow P$, si dice che Φ è una simmetria del sistema hamiltoniano se Φ è una trasformazione canonica e $\Phi^*H = H$.

Come segue dal teorema 3.4.3, le simmetrie mappano le soluzioni del sistema hamiltoniano in altre soluzioni.

Il seguente teorema stabilisce una corrispondenza tra le simmetrie di un sistema hamiltoniano e le leggi di conservazione (i.e., gli integrali primi):

Teorema 3.4.13 Dato un sistema hamiltoniano sulla varietà $P = T^*M$, ed un integrale primo F del sistema, allora, il gruppo a un parametro generato dall'hamiltoniana F consiste delle simmetrie del sistema hamiltoniano. Viceversa, dato un gruppo a un parametro $\Phi_t : P \rightarrow P$ delle simmetrie del sistema hamiltoniano, allora localmente esiste un integrale primo F che genera questo gruppo.

Dimostrazione: La prima parte del teorema segue dai teoremi 3.4.7 e 3.4.8. Viceversa, il generatore hamiltoniano del gruppo Φ_t costruito localmente nella seconda parte del teorema 3.4.8 commuta con l'hamiltoniana, ovvero esso è un integrale primo. \square

3.5 Struttura simplettica sul fibrato cotangente. Teorema di Liouville

In questa sezione introduciamo un'altra struttura geometrica, importante per la meccanica hamiltoniana, sullo spazio del fibrato cotangente $P = T^*M$.

Definizione 3.5.1 Data una varietà liscia P , e una 2-forma su P ,

$$\omega = \sum_{i < j} \omega_{ij}(x) dx^i \wedge dx^j$$

si dice che la 2-forma defisce su P una struttura simplettica se la 2-forma è chiusa,

$$d\omega = 0$$

e non degenerare

$$\det(\omega_{ij}(x))_{1 \leq i, j \leq \dim P} \neq 0, \quad \forall x \in P$$

Si osservi che la matrice $(\omega_{ij}(x))$ è antisimmetrica,

$$\omega_{ji}(x) = -\omega_{ij}(x).$$

Quindi, il determinante di questa matrice è identicamente nullo se la dimensione della varietà P è dispari. Allora, la dimensione di una varietà simplettica è necessariamente pari,

$$\dim P = 2n.$$

Per costruire una struttura simplettica sullo spazio del fibrato cotangente $P = T^*M$, $\dim M = n$, usiamo le coordinate canoniche q, p associate alle coordinate locali q^1, \dots, q^n su M . La 2-forma simplettica è definita dalla seguente formula

$$\omega = dp_i \wedge dq^i \tag{3.5.1}$$

(si ricordi la solita sommatoria rispetto agli indici doppi).

Esercizio 3.5.2 Qual è la matrice della 2-forma ω nelle coordinate q, p ?

La risposta:

$$(\omega_{ab})_{1 \leq a, b \leq 2n} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.5.2}$$

Si osservi che questa matrice è inversa alla matrice (π^{ab}) della parentesi di Poisson introdotta in (3.2.11).

Teorema 3.5.3 La 2-forma ω scritta in (3.5.1) non dipende dalla scelta delle coordinate locali q^1, \dots, q^n sulla base M del fibrato cotangente. Questa 2-forma è chiusa e non degenere, ovvero, ω definisce una struttura simplettica sulla varietà T^*M .

Dimostrazione: Visto che ogni forma differenziale a coefficienti costanti è chiusa, e la matrice (3.5.2) è non degenere, basta dimostrare l'invarianza della 2-forma ω rispetto alle trasformazioni delle coordinate su M :

$$q^i \mapsto \tilde{q}^i = \tilde{q}^i(q), \quad p_i \mapsto \tilde{p}_i = \frac{\partial q^k}{\partial \tilde{q}^i} p_k. \tag{3.5.3}$$

In realtà è più semplice dimostrare l'invarianza di un'opportuna 1-forma.

Lemma 3.5.4 Data una varietà liscia M e un sistema di coordinate locali q^1, \dots, q^n su M , allora l'espressione

$$\eta = p_i dq^i \tag{3.5.4}$$

definisce una 1-forma sullo spazio del fibrato cotangente T^*M che non dipende dalla scelta delle coordinate locali. Inoltre, il differenziale di questa 1-forma coincide con la 2-forma (3.5.1):

$$d\eta = \omega.$$

Dimostrazione: Usando la legge di trasformazione (3.5.3) si deriva subito che

$$\tilde{p}_i d\tilde{q}^i = \frac{\partial q^k}{\partial \tilde{q}^i} p_k \frac{\partial \tilde{q}^i}{\partial q^l} dq^l = p_k dq^k,$$

dove è stata usata l'identità

$$\frac{\partial q^k}{\partial \tilde{q}^i} \frac{\partial \tilde{q}^i}{\partial q^l} = \delta_l^k.$$

L'invarianza è stata dimostrata. La formula $\omega = d\eta$ è ovvia. \square

L'invarianza della 2-forma ω segue dall'invarianza della 1-forma η . \square

Come abbiamo già chiarito, sulla varietà $P = T^*M$ sono definite due strutture geometriche “naturali”, ovvero la struttura di una parentesi di Poisson nonché una struttura simplettica. In coordinate queste due strutture vengono da due tensori antisimmetrici: il tensore di tipo (2,0) π^{ab} (una forma bilineare sugli spazi cotangenti) della parentesi di Poisson e il tensore di tipo (0,2) ω_{ab} (una forma bilineare sullo spazio tangente). Questi tensori hanno matrici associate reciprocamente inverse,

$$\omega_{ac}\pi^{cb} = \delta_a^b, \quad a, b = 1, \dots, 2n. \quad (3.5.5)$$

In coordinate canoniche le matrici di questi tensori assumono la consueta forma costante rispettivamente (3.2.11) e (3.5.2). Ora costruiamo un breve “dizionario” di corrispondenze, traducendo e adottando certe nozioni già introdotte nella teoria della parentesi di Poisson nel linguaggio delle varietà simplettiche. Cominciamo da una definizione “duale” rispetto a quella della trasformazione canonica.

Definizione 3.5.5 *Dato un diffeomorfismo*

$$\Phi : P \rightarrow P$$

di una varietà simplettica (P, ω) , si dice che Φ è una trasformazione simplettica, oppure un simplettomorfismo, se la forma simplettica ω è invariante rispetto a Φ :

$$\Phi^*\omega = \omega. \quad (3.5.6)$$

Teorema 3.5.6 *Ogni trasformazione canonica*

$$\Phi : P \rightarrow P$$

è un simplettomorfismo e viceversa.

Dimostrazione: Pongo

$$y^a = \Phi^a(x), \quad a = 1, \dots, 2n;$$

la definizione di trasformazione canonica scritta in coordinate nella forma (3.4.2) equivale

$$\pi^{cd} \frac{\partial y^a}{\partial x^c} \frac{\partial y^b}{\partial x^d} = \pi^{ab}, \quad a, b = 1, \dots, 2n.$$

Invertendo le matrici scritte nella definizione precedente si ottiene la seguente equazione:

$$\frac{\partial x^c}{\partial y^a} \frac{\partial x^d}{\partial y^b} \omega_{cd} = \omega_{ab}, \quad a, b = 1, \dots, 2n.$$

Quest'ultima è la definizione di invarianza della 2-forma

$$\omega = \sum_{a < b} \omega_{ab} dx^a \wedge dx^b = \frac{1}{2} \omega_{ab} dx^a \wedge dx^b$$

rispetto alla trasformazione *inversa*

$$x^a = \Phi^{-1a}(y).$$

Allora

$$\Phi^{-1*} \omega = \omega.$$

L'applicazione di Φ^* implica l'invarianza di ω rispetto a Φ . Invertendo i calcoli si ottiene la dimostrazione anche della seconda parte del teorema. \square

In realtà nella dimostrazione del teorema non abbiamo usato la struttura $P = T^*M$ della varietà P . Nel caso più specifico del fibrato cotangente possiamo usare la 1-forma $\eta = p_i dq^i$.

Lemma 3.5.7 *Dato un simplettomorfismo*

$$\Phi : T^*M \rightarrow T^*M,$$

*allora localmente esiste una funzione S sulla varietà T^*M tale che*

$$\Phi^* \eta - \eta = dS. \tag{3.5.7}$$

Dimostrazione: Siccome $\omega = d\eta$, dalla definizione di simplettomorfismo

$$\Phi^* \omega - \omega = 0$$

segue che la differenza $\Phi^* \eta - \eta$ è una 1-forma chiusa:

$$0 = \Phi^* \omega - \omega = \Phi^* d\eta - d\eta = d(\Phi^* \eta - \eta).$$

Applicando il lemma di Poincarè dimostriamo l'esistenza locale della funzione S . \square

La funzione S si chiama la *funzione generatrice* della trasformazione simplettica. Torneremo allo studio delle trasformazioni simplettiche e delle loro funzioni generatrici nella sezione 3.10.

Confrontando i risultati del teorema 3.5.6 con quelli del teorema 3.4.8 arriviamo al seguente

Teorema 3.5.8 *Data una funzione H sulla varietà $P = T^*M$, allora il flusso hamiltoniano Φ_t generato da H è un gruppo a un parametro di simplettomorfismi di (P, ω) .*

Procediamo ora alla versione infinitesima del teorema 3.5.6. Dato un campo vettoriale X sulla varietà simplettica (P, ω) , si dice che il campo X è una *trasformazione simplettica infinitesima* se la derivata di Lie della 2-forma ω lungo il campo vettoriale X è nulla:

$$\text{Lie}_X \omega = 0. \quad (3.5.8)$$

Si ricordi che la derivata di Lie di una forma differenziale viene definita dalla formula

$$\text{Lie}_X \omega := \left(\frac{d}{dt} \Phi_t^* \omega \right)_{t=0} \quad (3.5.9)$$

dove Φ_t è il gruppo a un parametro di diffeomorfismi generato dal campo vettoriale X . La motivazione del nome ‘trasformazione simplettica infinitesima’ diventa chiara dal seguente fatto: dato un campo vettoriale X che soddisfa (3.5.8), allora la trasformazione

$$\Phi_t : P \rightarrow P, \quad x \mapsto \Phi_t(x) = x + t X(x)$$

per piccoli valori del parametro t soddisfa la proprietà (3.5.6) modulo $O(t^2)$.

Il seguente teorema identifica le trasformazioni simplettiche infinitesime con i campi hamiltoniani.

Teorema 3.5.9 *Data una trasformazione simplettica infinitesima X sulla varietà simplettica (P, ω) , allora localmente esiste una funzione H tale che*

$$X = X_H.$$

La *dimostrazione* può essere facilmente derivata dal confronto della seconda parte del teorema 3.4.8 con 3.5.6. □

Esercizio 3.5.10 *Dato un campo hamiltoniano $X = X_H$ sullo spazio cotangente, si dimostri la seguente formula⁵:*

$$i_X \omega = -dH. \quad (3.5.13)$$

⁵Si ricordi che l’operazione di convoluzione i_X di una 1-forma $\eta = \eta_a(x) dx^a$ con un campo vettoriale

$$X = X^a(x) \frac{\partial}{\partial x^a}$$

(che corrisponde all’accoppiamento naturale tra lo spazio tangente e cotangente) viene definita dalla seguente formula:

$$i_X \eta = \eta_a X^a. \quad (3.5.10)$$

Il risultato della convoluzione è una funzione su P . Più in generale, data una k -forma

$$\Omega = \frac{1}{k!} \Omega_{i_1 \dots i_k}(x) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k},$$

allora la convoluzione di Ω con un campo vettoriale X è una $(k-1)$ -forma definita nel seguente modo:

$$(i_X \Omega)_{i_1 \dots i_{k-1}} = X^s \Omega_{s i_1 \dots i_{k-1}}. \quad (3.5.11)$$

La seguente formula per l’anticommutatore degli operatori i_X e d viene usata spesso:

$$i_X d + d i_X = \text{Lie}_X. \quad (3.5.12)$$

Nell'approccio simplettico alla meccanica hamiltoniana la formula (3.5.13) viene usata come definizione di campo hamiltoniano.

Per ottenere formulazione simplettica dei sistemi hamiltoniani con la dipendenza esplicita dal tempo è necessario introdurre una struttura simplettica sullo spazio delle fasi esteso

$$\tilde{P} = T^*M \times \mathbb{R}^2$$

(vedi la fine della sezione 3.2). Nelle coordinate $(q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n, q^{n+1} = t, p_{n+1} = E)$ la forma simplettica su \tilde{P} si scrive nella seguente forma

$$\tilde{\omega} = dp_i \wedge dq^i - dE \wedge dt. \quad (3.5.14)$$

Si osservi che

$$\tilde{\omega} = d\tilde{\eta}, \quad \tilde{\eta} = p_i dq^i - E dt. \quad (3.5.15)$$

Prima di procedere al teorema di Liouville, si faccia il seguente calcolo:

Lemma 3.5.11 *Si consideri la forma simplettica ω scritta come in (3.5.1) nello spazio di dimensione $2n$, allora il prodotto esterno di n copie della forma ω è proporzionale alla forma di volume:*

$$\frac{1}{n!} \omega \wedge \dots \wedge \omega = dp_1 \wedge dq^1 \wedge \dots \wedge dp_n \wedge dq^n. \quad (3.5.16)$$

Dimostrazione: Per due indici $i < j$ distinti abbiamo

$$(dp_i \wedge dq^i) \wedge (dp_j \wedge dq^j) = (dp_j \wedge dq^j) \wedge (dp_i \wedge dq^i) = dp_i \wedge dq^i \wedge dp_j \wedge dq^j$$

(in questa formula niente sommatoria!) Per gli indici coincidenti abbiamo invece

$$(dp_i \wedge dq^i) \wedge (dp_i \wedge dq^i) = 0.$$

Quindi, nel prodotto esterno di n copie della 2-forma

$$\omega = dp_1 \wedge dq^1 + \dots + dp_n \wedge dq^n$$

ci sono $n!$ termini identici uguale alla parte destra della formula (3.5.16). \square

Da questo lemma siamo in grado di derivare l'invarianza di volume rispetto alle trasformazioni canoniche (i.e., rispetto ai simplettomorfismi). Il volume di un sottoinsieme $D \subset P = T^*M$ viene definito come l'integrale

$$Vol(D) := \int_D dvol, \quad \text{dove} \quad dvol = dp_1 dq^1 \dots dp_n dq^n \quad (3.5.17)$$

assumendo l'esistenza dell'integrale (in tal caso si dice che il sottoinsieme D è misurabile).

Esercizio 3.5.12 *Si dimostri che il volume del sottoinsieme D del fibrato cotangente T^*M non dipende dalla scelta delle coordinate locali q^1, \dots, q^n su M .*

Teorema 3.5.13 *Data una trasformazione canonica*

$$\Phi : T^*M \rightarrow T^*M,$$

e un sottoinsieme misurabile $D \subset T^*M$, allora

$$\text{Vol}(\Phi(D)) = \text{Vol}(D). \quad (3.5.18)$$

Dimostrazione: Usando la formula (3.5.17) appena dimostrata, riscriviamo la definizione del volume nel seguente modo:

$$\text{Vol}(D) = \int_D \Omega, \quad \Omega = \frac{1}{n!} \omega \wedge \cdots \wedge \omega.$$

Usando le formule

$$\int_{\Phi(D)} \Omega = \int_D \Phi^* \Omega$$

(cambio delle variabili nell'integrale multiplo) e anche

$$\Phi^*(\omega \wedge \cdots \wedge \omega) = \Phi^* \omega \wedge \cdots \wedge \Phi^* \omega$$

assieme con l'invarianza $\Phi^* \omega = \omega$ si ottiene la dimostrazione del teorema. \square

La versione più utilizzata del teorema precedente è la seguente.

Teorema 3.5.14 (teorema di Liouville) *Data una varietà simplettica P e un'hamiltoniana H su P , allora il flusso Hamiltoniano Φ_t generato da H preserva il volume, cioè, per ogni sottoinsieme $D \subset P$ misurabile e per ogni valore di t abbiamo*

$$\text{Vol}(\Phi_t(D)) = \text{Vol}(D).$$

La *dimostrazione* segue dal teorema precedente e dal teorema 3.5.8.

Gli invarianti più generali si ottengono dalla considerazione dei prodotti esterni della 2-forma ω moltiplicata per se stessa k volte, $k \leq n$:

$$\Omega_k := \frac{1}{k!} \omega^{\wedge k}.$$

Per $k = n$ si ottiene la forma di volume considerata prima; per $k < n$ la $2k$ -forma Ω_k può essere integrata rispetto a sottovarietà chiuse $2k$ -dimensionali, oppure, nel modo più generale, rispetto ai cicli $C_{2k} \in H_{2k}(P, \mathbb{Z})$ nella varietà simplettica P . Gli integrali

$$\int_{C_{2k}} \Omega_k$$

sono invarianti rispetto ai sistemi hamiltoniani:

$$\int_{\Phi_t(C_{2k})} \Omega_k = \int_{C_{2k}} \Omega_k$$

per ogni t . Questi integrali si chiamano gli *invarianti integrali di Poincaré - Cartan*.

Per concludere questa sezione è opportuno sottolineare che *tutte* le varietà simplettiche localmente hanno la forma di un fibrato cotangente. Più esattamente, è valido il seguente

Teorema 3.5.15 (Lemma di Darboux). *Data una forma simplettica ω sulla varietà P , $\dim P = 2n$, allora esistono coordinate locali $(q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n)$ in un intorno di un qualsiasi punto di P tali che*

$$\omega = dp_i \wedge dq^i.$$

Dimostrazione: Sia x un sistema di coordinate locali in un intorno U_{x_0} del punto x_0 e $\omega = \omega_{ij}(x)dx^i \wedge dx^j$. Si vuole costruire una trasformazione di coordinate tali che ω prenda la forma canonica. Iniziamo col definire la coordinata p_1 dove $p_1(x)$ è una funzione liscia in un intorno di x_0 e tale che $p_1(x_0) = 0$. Consideriamo il campo hamiltoniano non nullo X_{p_1} definito da $\omega(X_{p_1}, \cdot) = -dp_1$. Per il teorema di rettificazione nell'intorno del punto x_0 esiste un sistema di coordinate $(q^1, y^0, y^1, \dots, y^{n-2})$ tali che

$$X_{p_1} = \frac{\partial}{\partial q^1}$$

cioè il flusso hamiltoniano generato da X_{p_1} è una traslazione nella coordinata q^1 . Scegliamo q^1 in modo tale che $q^1(x_0) = 0$. La funzione p_1 non può dipendere da q^1 nelle nuove coordinate in quanto $x_{p_1} p_1 = 0$ e dunque si può prendere come nuovo sistema di coordinate locali $(q^1, p_1, y^1, \dots, y^{n-2})$. Inoltre, poichè $X_{p_1} q^1 = 1$ si ha

$$\{q^1, p_1\} = 1.$$

Se n è uguale ad uno la costruzione è finita. Per $n > 1$ procediamo per induzione e supponiamo che il lemma di Darboux sia dimostrato per \mathbb{R}^{2n-2} . Si consideri ora l'insieme M definito dall'intersezione dei due iperpiani

$$p_1(x) = 0, \quad q^1(x) = 0.$$

Poichè $\omega(X_{p_1}, X_{q^1}) = \{q^1, p_1\} = 1$ significa che i campi hamiltoniani X_{p_1} e X_{q^1} sono linearmente indipendenti in un intorno di x_0 e quindi l'insieme M è una varietà di dimensione $2n - 2$ in tale intorno.

Lemma 3.5.16 *La struttura simplettica ω in \mathbb{R}^{2n} induce in un intorno $V_{x_0} \in M$ una struttura simplettica.*

Dimostrazione: È sufficiente mostrare che $\omega|_M$ è non degenere.

Sia $\xi \in T_x M$ e si consideri il flusso Φ_τ^ξ generato dal vettore ξ . Consideriamo ora le derivate di p_1 e q^1 nella direzione ξ , cioè

$$\frac{d}{d\tau} p_1(\Phi_\tau^\xi x) = 0, \quad \frac{d}{d\tau} q^1(\Phi_\tau^\xi x) = 0, \quad x \in M,$$

in quanto p_1 e q^1 sono costanti su M . Segue che

$$\omega(\xi, X_{p_1}) = dp_1(\xi) = 0, \quad \omega(\xi, X_{q^1}) = dq^1(\xi) = 0, \quad \forall \xi \in T_x M$$

Dunque $T_x M$ è il complemento anti-ortogonale a X_{p_1} e X_{q^1} . Siccome ω è non degenere su \mathbb{R}^{2n} , segue che ω è non degenere su $T_x M$. Il lemma è dimostrato.

Per ipotesi induttiva, sulla varietà $(M, \omega|_M)$, nell'intorno $V_{x_0} \in M$ esistono coordinate simplettiche $(q^2, \dots, q^n, p_2, \dots, p_n)$. Prolunghiamo ora le funzioni q^2, \dots, q^n e p_2, \dots, p_n in un intorno $U_{x_0} \subset \mathbb{R}^{2n}$. Ogni punto $z \in U_{x_0} \setminus V_{x_0}$ si può scrivere in modo unico come

$$z = \Phi_t^{p_1} \Phi_s^{q^1}(x), \quad x \in V_{x_0}$$

con s e t piccoli in quanto i campi hamiltoniani X_{p_1} e X_{q^1} sono linearmente indipendenti e commutano $[X_{q^1}, X_{p_1}] = -X_{\{q^1, p_1\}} = 0$. Definiamo $q^i(z) = q^i(x)$ e $p_i(z) = p_i(x)$, $i = 2, \dots, n$. Le $2n$ funzioni $q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n$ formano un sistema di coordinate locali nell'intorno del punto x_0 di \mathbb{R}^{2n} . Resta da dimostrare che le coordinate così costruite sono simplettiche. Osserviamo che per s e t piccoli, le coordinate $q^2, \dots, q^n, p_2, \dots, p_n$ sono per costruzione invarianti rispetto ai flussi $\Phi_t^{p_1}$ e $\Phi_s^{q^1}$ e dunque

$$\{q^1, q^i\} = \{q^1, p^i\} = \{p_1, q^i\} = \{p_1, p^i\} = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Da queste relazioni segue che i campi X_{q^i}, X_{p_i} sono tangenti alla varietà definita da $p_1(z) = c_1, q^1(z) = c_2$, per c_1 e c_2 piccoli e dunque sono campi hamiltoniani su tale varietà con funzione di Hamilton $q^i, p_i, i = 2, \dots, n$. Inoltre, poichè $\Phi_t^{p_1}$ e $\Phi_s^{q^1}$ sono flussi hamiltoniani, essi conservano la struttura simplettica di ω e dunque

$$\omega(X_{q^i}, X_{p_i}) = \omega(X_{q^i|_M}, X_{p_i|_M}), \quad i, j = 2, \dots, n,$$

dove $q^i = q^i(z)$ $p_i = p_i(z)$. Per ipotesi di induzione le coordinate su M sono simplettiche e dunque su tutto l'intorno U_{x_0} in \mathbb{R}^{2n} le coordinate così costruite sono simplettiche e vale

$$\{q^i, p_j\} = \delta_j^i, \quad \{q^i, q^j\} = \{p_i, p_j\} = 0, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Da qui segue che la forma simplettica ω nell'intorno $U_{x_0} \subset \mathbb{R}^{2n}$ è data da

$$\omega = dp_i \wedge dq^i.$$

Il lemma di Darboux è dimostrato.

3.6 La definizione generale di parentesi di Poisson

La definizione generale di parentesi di Poisson⁶ può essere utilizzata per introdurre un approccio assiomatico alla meccanica hamiltoniana.

Definizione 3.6.1 *Data una varietà liscia P , si dice che su P è definita una parentesi di Poisson se sullo spazio $C^\infty(P)$ delle funzioni lisce sulla varietà P è fissata una struttura di un'algebra di Lie, cioè, è definita una mappa*

$$C^\infty(P) \times C^\infty(P) \rightarrow C^\infty(P)$$

$$(f, g) \mapsto \{f, g\} \tag{3.6.1}$$

antisimmetrica

$$\{g, f\} = -\{f, g\}, \tag{3.6.2}$$

⁶Sembrerebbe dovuta a P.Dirac, 1950

bilineare

$$\{a_1 f_1 + a_2 f_2, g\} = a_1 \{f_1, g\} + a_2 \{f_2, g\}, \quad \{f, a_1 g_1 + a_2 g_2\} = a_1 \{f, g_1\} + a_2 \{f, g_2\}, \quad a_1, a_2 \in \mathbb{R}, \quad (3.6.3)$$

che soddisfa l'identità di Jacobi

$$\{\{f, g\}, h\} + \{\{h, f\}, g\} + \{\{g, h\}, f\} = 0 \quad (3.6.4)$$

per tre funzioni f, g, h qualsiasi, e che, inoltre, è compatibile con il prodotto delle funzioni, cioè, soddisfa l'identità di Leibnitz rispetto al prodotto delle funzioni:

$$\{f g, h\} = g \{f, h\} + f \{g, h\}. \quad (3.6.5)$$

La varietà P sulla quale è definita una parentesi di Poisson si chiama varietà di Poisson.

Esempio. Sullo spazio del fibrato cotangente $P = T^*M$ di una varietà liscia qualsiasi c'è una parentesi di Poisson costruita nella sezione 3.2.

Per riscrivere la definizione 3.6.1 in coordinate locali $x = (x^1, \dots, x^N)$ si introduca la matrice

$$\pi^{ij}(x) := \{x^i, x^j\}, \quad i, j = 1, \dots, N = \dim P. \quad (3.6.6)$$

Teorema 3.6.2 1) Data una varietà di Poisson P , e un sistema di coordinate locali su P , allora la matrice $\pi^{ij}(x)$ definita in (3.6.6) è antisimmetrica e soddisfa le seguenti equazioni:

$$\frac{\partial \pi^{ij}(x)}{\partial x^s} \pi^{sk}(x) + \frac{\partial \pi^{ki}(x)}{\partial x^s} \pi^{sj}(x) + \frac{\partial \pi^{jk}(x)}{\partial x^s} \pi^{si}(x) = 0, \quad 1 \leq i < j < k \leq N. \quad (3.6.7)$$

Inoltre, la parentesi di Poisson di due funzioni lisce si calcola in base alla seguente formula

$$\{f, g\} = \pi^{ij}(x) \frac{\partial f(x)}{\partial x^i} \frac{\partial g(x)}{\partial x^j}. \quad (3.6.8)$$

2) Data una trasformazione di coordinate

$$\tilde{x}^k = \tilde{x}^k(x), \quad k = 1, \dots, N,$$

allora le matrici $\pi^{ij}(x) = \{x^i, x^j\}$ e $\tilde{\pi}^{kl}(\tilde{x}) = \{\tilde{x}^k, \tilde{x}^l\}$ obbediscono alla legge di trasformazione di un tensore antisimmetrico di tipo $(2,0)$:

$$\tilde{\pi}^{kl}(\tilde{x}) = \pi^{ij}(x) \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^i} \frac{\partial \tilde{x}^l}{\partial x^j}. \quad (3.6.9)$$

3) Viceversa, data una varietà liscia P con un tensore antisimmetrico di tipo $(2,0)$ $\pi^{ij}(x)$ che soddisfa le equazioni (3.6.7), allora la formula (3.6.8) definisce su P una parentesi di Poisson.

Dimostrazione: L'antisimmetria della matrice $\pi^{ij}(x)$ è ovvia da (3.6.2). Per derivare la formula (3.6.8) usiamo la regola di Leibnitz (3.6.5). Infatti, fissando la funzione f , la regola di Leibnitz dice che la corrispondenza

$$g \mapsto \{f, g\}$$

è un operatore differenziale lineare del primo ordine. Allora, esiste un campo vettoriale

$$X_f = X_f^j \frac{\partial}{\partial x^j}$$

tale che

$$\{f, g\} = X_f g.$$

Per calcolare le componenti X_f^j del campo vettoriale basta conoscere l'azione dell'operatore su $g(x) = x^j$:

$$X_f^j = X_f x^j = \{f, x^j\}.$$

Fissando il valore dell'indice j e riguardando la parte destra dell'ultima formula

$$f \mapsto \{f, x^j\}$$

come un operatore differenziale lineare che agisce su f , si ottiene un campo vettoriale

$$Y^j = Y^{ij} \frac{\partial}{\partial x^i}$$

tale che

$$X_f^j = \{f, x^j\} = Y^j f.$$

Come prima, le componenti del campo vettoriale si calcolano nel seguente modo:

$$Y^{ij} = Y^j x^i = \{x^i, x^j\} = \pi^{ij}.$$

Quindi,

$$\{f, g\} = X_f^j \frac{\partial g}{\partial x^j} = Y^j f \frac{\partial g}{\partial x^j} = \pi^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial g}{\partial x^j}.$$

Usando questa formula e scrivendo la parte sinistra dell'identità di Jacobi (3.6.4) per $f = x^i$, $g = x^j$, $h = x^k$ si ottiene la (3.6.7). Infine, applicando la stessa formula per calcolo della parentesi delle coordinate $\tilde{x}^k(x)$ e $\tilde{x}^l(x)$ si ottiene la legge tensoriale (3.6.9).

Viceversa, dato un (2,0)-tensore antisimmetrico $\pi^{ij}(x)$, l'operazione

$$(f, g) \mapsto \{f, g\} := \pi^{ij}(x) \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial g}{\partial x^j}$$

è bilineare, antisimmetrica, soddisfa la regola di Leibnitz e non dipende dalla scelta delle coordinate locali:

$$\tilde{\pi}^{kl} \frac{\partial f}{\partial \tilde{x}^k} \frac{\partial g}{\partial \tilde{x}^l} = \pi^{st} \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^s} \frac{\partial \tilde{x}^l}{\partial x^t} \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^k} \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^l} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial g}{\partial x^j} = \pi^{st} \delta_s^i \delta_t^j \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial g}{\partial x^j} = \pi^{ij}(x) \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial g}{\partial x^j}.$$

Per dimostrare la validità dell'identità di Jacobi basta osservare che per tre funzioni f, g, h qualsiasi e per qualsiasi tensore antisimmetrico $\pi^{ij}(x)$ è valida la seguente formula

$$\begin{aligned} & \{\{f, g\}, h\} + \{\{h, f\}, g\} + \{\{g, h\}, f\} \\ &= \left[\{\{x^i, x^j\}, x^k\} + \{\{x^k, x^i\}, x^j\} + \{\{x^j, x^k\}, x^i\} \right] \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial g}{\partial x^j} \frac{\partial h}{\partial x^k}. \end{aligned}$$

Allora, l'identità di Jacobi segue dalle equazioni (3.6.7). □

Data una varietà di Poisson (P, π) qualsiasi, i campi vettoriali hamiltoniani X_H su P sono definiti dalla formula⁷ identica alla (3.4.6):

$$X_H f = \{f, H\}$$

per una funzione f arbitraria. La funzione H si chiama l'hamiltoniana del campo X_H . In coordinate locali il campo hamiltoniano viene descritto dal seguente sistema dinamico:

$$\dot{x}^i = \pi^{ij}(x) \frac{\partial H(x)}{\partial x^j}, \quad i = 1, \dots, N. \quad (3.6.11)$$

La maggior parte dei risultati delle sezioni 3.2 e 3.4, dimostrati per $P =$ fibrato cotangente, rimane valida sulla qualsiasi varietà di Poisson, ovvero

- la corrispondenza tra gli integrali primi del sistema hamiltoniano (3.6.11) e le funzioni in involuzione con l'hamiltoniana H ; l'algebra di Lie degli integrali primi di un sistema hamiltoniano;
- l'antiomorfismo di algebre di Lie

$$\mathcal{C}^\infty(P) \rightarrow Vect(P), \quad H \mapsto X_H;$$

- i campi hamiltoniani rappresentano ancora le simmetrie infinitesime della parentesi:

$$X_H \{f, g\} = \{X_H f, g\} + \{f, X_H g\}, \quad f, g \in \mathcal{C}^\infty(P)$$

(non viceversa; nella costruzione del generatore hamiltoniano è stato utilizzato il fatto che la matrice π^{ij} è non degenere);

- il flusso Φ_t generato da un integrale primo di un sistema hamiltoniano agisce come gruppo a un parametro di simmetrie del sistema stesso.

Le dimostrazioni di tutti questi teoremi ripetono con minime modifiche gli argomenti già sfruttati nelle sezioni 3.2 e 3.4.

Per chiarire i legami tra le varietà di Poisson e le varietà simplettiche si introduce la seguente

Definizione 3.6.3 *Data una varietà di Poisson (P, π) , si dice che la parentesi π è non degenere se*

$$\det(\pi^{ij}(x)) \neq 0, \quad x \in P.$$

⁷Una notazione alternativa per il campo hamiltoniano è:

$$X_H = J dH$$

dove la mappa lineare

$$J : T_x^* P \rightarrow T_x P$$

viene definita tramite la forma bilineare $\pi = (\pi^{ij}(x))$:

$$(J \alpha)^i = \pi^{ij}(x) \alpha_j(x), \quad \alpha = \alpha_j(x) dx^j \in T_x^* P. \quad (3.6.10)$$

Per una parentesi non degenere la mappa

$$J : T_x^*P \rightarrow T_xP, \quad J(\alpha) = \pi(\cdot, \alpha) \in (T_x^*P)^* \simeq T_xP,$$

(cf. (3.6.10)) è un isomorfismo. Si osservi che la dimensione di una varietà di Poisson munita di una parentesi non degenere è necessariamente pari, $N = 2n$.

Esercizio 3.6.4 *Data una varietà di Poisson (P, π) connessa munita di una parentesi non degenere, e una funzione $r = r(x)$ tale che*

$$\{r, H\} = 0 \quad \forall H \in C^\infty(P),$$

si dimostri che la funzione r è una costante.

Teorema 3.6.5 *Data una varietà di Poisson (P, π) con una parentesi non degenere, si introduca la matrice inversa*

$$(\omega_{ij}(x)) := (\pi^{ij}(x))^{-1}.$$

Allora, la 2-forma

$$\omega = \sum_{i < j} \omega_{ij}(x) dx^i \wedge dx^j$$

definisce su P una struttura simplettica. Viceversa, data una varietà simplettica (P, ω) , si introduca la matrice inversa

$$(\pi^{ij}(x)) := (\omega_{ij}(x))^{-1}.$$

Quindi (P, π) è una varietà di Poisson con una parentesi non degenere.

Dimostrazione: Prima di tutto, la matrice inversa a un tensore di tipo $(2,0)$ è un tensore di tipo $(0,2)$. Ovviamente $\omega_{ij}(x)$ è un tensore antisimmetrico. Quindi, la definizione della 2-forma ω non dipende dalla scelta delle coordinate. Inoltre, è ovvio che la 2-forma è non degenere. Dimostriamo che questa 2-forma è chiusa. Infatti, moltiplicando la parte sinistra dell'equazione (3.6.7) per $\omega_{ai} \omega_{bj} \omega_{ck}$ e sommando rispetto agli indici doppi i, j, k si ottengono le equazioni

$$\begin{aligned} 0 &= \omega_{ai} \omega_{bj} \omega_{ck} \left[\frac{\partial \pi^{ij}}{\partial x^s} \pi^{sk} + \frac{\partial \pi^{ki}}{\partial x^s} \pi^{sj} + \frac{\partial \pi^{jk}}{\partial x^s} \pi^{si} \right] \\ &= -\omega_{ai} \frac{\partial \pi^{ij}}{\partial x^c} \omega_{jb} - \omega_{ck} \frac{\partial \pi^{ki}}{\partial x^b} \omega_{ia} - \omega_{bj} \frac{\partial \pi^{jk}}{\partial x^a} \omega_{kc} \end{aligned}$$

valide per qualsiasi valori degli indici a, b, c . Usando la formula

$$\frac{\partial \omega_{ab}}{\partial x^c} = -\omega_{ai} \frac{\partial \pi^{ij}}{\partial x^c} \omega_{jb}$$

per la derivata della matrice inversa⁸, l'ultima equazione viene riscritta nella seguente forma

$$\frac{\partial \omega_{ab}}{\partial x^c} + \frac{\partial \omega_{ca}}{\partial x^b} + \frac{\partial \omega_{bc}}{\partial x^a} = 0, \quad a, b, c = 1, \dots, N = 2n. \quad (3.6.12)$$

⁸Cf. la stessa formula scritta nelle notazioni matriciali: data una matrice invertibile $\Pi(x)$ che dipende dal parametro x , allora la derivata della matrice inversa $\Omega(x) = \Pi^{-1}(x)$ si calcola in base alla seguente formula:

$$\frac{\partial \Omega(x)}{\partial x} = -\Pi^{-1}(x) \frac{\partial \Pi(x)}{\partial x} \Pi^{-1}(x).$$

Questa equazione significa che la 2-forma ω è chiusa.

Invertendo i calcoli, dalle equazioni (3.6.12), valide su una varietà simplettica, si derivano le equazioni (3.6.7) per la matrice inversa $\pi = \omega^{-1}$. Dal teorema precedente segue che (P, π) è una varietà di Poisson. \square

Usando il lemma di Darboux formulato nella sezione 3.5 si ottiene il seguente

Corollario 3.6.6 *Data una varietà di Poisson (P, π) con una parentesi non degenera, allora su un intorno di ogni punto $x \in P$ esiste un sistema di coordinate canoniche $(q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n)$ tali che*

$$\{q^i, q^j\} = \{p_i, p_j\} = 0, \quad \{q^i, p_j\} = \delta_j^i.$$

In queste coordinate ogni sistema hamiltoniano assume la forma canonica

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i}, \quad i = 1, \dots, n.$$

La geometria di una parentesi di Poisson degenera può essere più complicata. Consideriamo solo il caso importante di una parentesi di rango costante,

$$\text{rk} (\pi^{ij}(x)) = 2n < N = \dim P \quad (3.6.13)$$

(si ricordi che questa condizione non dipende dalla scelta delle coordinate locali). Il fenomeno nuovo da osservare è l'esistenza di funzioni non costanti che commutano con una *qualsiasi* hamiltoniana.

Definizione 3.6.7 *Data una varietà di Poisson (P, π) e una funzione $r = r(x)$ su P , si dice che r è una funzione di Casimir (o, semplicemente, un casimir) se*

$$\{r, H\} = 0 \quad \forall H \in C^\infty(P).$$

I casimiri sulla varietà di Poisson P sono integrali primi di un sistema hamiltoniano con una hamiltoniana *qualsiasi*. Il risultato dell'esercizio 3.6.4 implica che, per una varietà di Poisson con una parentesi non degenera, i casimiri sono tutti costanti. Per il caso generale i casimiri $r = r(x)$ si ottengono dal seguente sistema di equazioni:

$$\{x^1, r\} = 0, \quad \{x^2, r\} = 0, \dots, \{x^N, r\} = 0,$$

oppure, più esplicitamente

$$\pi^{1j}(x) \frac{\partial r(x)}{\partial x^j} = 0, \quad \pi^{2j}(x) \frac{\partial r(x)}{\partial x^j} = 0, \dots, \pi^{Nj}(x) \frac{\partial r(x)}{\partial x^j} = 0. \quad (3.6.14)$$

Il seguente lemma stabilisce l'esistenza dei casimiri per una parentesi di rango costante.

Lemma 3.6.8 *Sia data una varietà di Poisson (P, π) con una parentesi degenera di rango costante, $\text{rk} \pi = 2n$, $\dim P = 2n + k$, $k > 0$. Allora, su un intorno di ogni punto $x_0 \in P$ esistono k casimiri indipendenti $r^1(x), \dots, r^k(x)$.*

Si ricordi che le funzioni $r^1(x), \dots, r^k(x)$ su una varietà P si chiamano *indipendenti* se i loro differenziali $dr^1(x), \dots, dr^k(x)$ sono linearmente indipendenti come elementi dello spazio cotangente T_x^*P per ogni x . In coordinate locali l'indipendenza delle funzioni viene formulata nei termini del rango della seguente matrice:

$$\text{rk} \begin{pmatrix} \frac{\partial r^1}{\partial x^1} & \frac{\partial r^1}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial r^1}{\partial x^N} \\ \frac{\partial r^2}{\partial x^1} & & \cdots & \frac{\partial r^2}{\partial x^N} \\ \cdot & & \cdots & \cdot \\ \cdot & & \cdots & \cdot \\ \frac{\partial r^k}{\partial x^1} & & \cdots & \frac{\partial r^k}{\partial x^N} \end{pmatrix} = k. \quad (3.6.15)$$

Dimostrazione: Per dimostrare il lemma usiamo la seguente riformulazione del classico teorema di Frobenius:

Teorema 3.6.9 (teorema di Frobenius) *Sia data una varietà liscia P di dimensione N e m campi vettoriali X_1, \dots, X_m linearmente indipendenti nel punto $x_0 \in P$ tali che*

$$[X_\alpha, X_\beta] = \sum_{\gamma=1}^m c_{\alpha\beta}^\gamma(x) X_\gamma, \quad \alpha, \beta = 1, \dots, m.$$

Allora, esistono $N - m$ funzioni indipendenti $r^1(x), \dots, r^{N-m}(x)$ definite su un intorno $|x - x_0| < \epsilon$ del punto x_0 , per un numero positivo piccolo ϵ , tali che

$$X_\alpha r^i(x) \equiv 0, \quad \alpha = 1, \dots, m, \quad i = 1, \dots, N - m. \quad (3.6.16)$$

Supponendo che le funzioni $r^i(x)$ siano state scelte in modo che

$$r^i(x_0) = 0, \quad i = 1, \dots, N - m,$$

allora i campi vettoriali X_1, \dots, X_m sono tangenti alle superficie di livello

$$P_{r_0} := \{x \in P \mid r^1(x) = r_0^1, \dots, r^{N-m}(x) = r_0^{N-m}\} \cap \{|x - x_0| < \epsilon\} \quad (3.6.17)$$

per costanti sufficientemente piccole $r_0^1, \dots, r_0^{N-m} = 0$. Le superficie di livello P_{r_0} sono sotto-varietà in P di dimensione m . I campi vettoriali X_1, \dots, X_m sono tangenti alle sotto-varietà. Variando i valori delle costanti r_0^1, \dots, r_0^{N-m} si ottiene una foliazione dell'intorno del punto x_0 , cioè, una sotto-varietà della forma (3.6.17) passa attraverso ogni punto dell'intorno. Inoltre, esistono m funzioni $s^1(x), \dots, s^m(x)$ definite sull'intorno stesso, tali che la mappa

$$x \mapsto (s^1(x), \dots, s^m(x), r^1(x), \dots, r^{N-m}(x))$$

è un diffeomorfismo dell'intorno $\{x \in P \mid |x - x_0| < \epsilon\}$ su un certo aperto in $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{N-m}$. Rispetto a queste coordinate le foglie (3.6.17) diventano i piani paralleli m -dimensionali; le funzioni s^1, \dots, s^m sono le coordinate sulle foglie.

Per applicare il teorema di Frobenius alla dimostrazione del lemma si considerino N campi vettoriali hamiltoniani

$$X_{x^i} = \pi^{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x^j}, \quad i = 1, \dots, N.$$

Applicando la formula per il commutatore

$$[X_f, X_g] = -X_{\{f,g\}}$$

al caso $f = x^i$, $g = x^j$ si ottiene l'espressione dei commutatori dei campi vettoriali come combinazioni lineari dei campi stessi:

$$[X_{x^i}, X_{x^j}] = -X_{\pi^{ij}(x)} = \sum_{k=1}^N c_k^{ij}(x) X_{x^k}, \quad c_k^{ij}(x) = \frac{\partial \pi^{ij}(x)}{\partial x^k}.$$

Poi, secondo l'ipotesi del lemma i campi vettoriali X_{x^1}, \dots, X_{x^N} generano un sottospazio⁹ in $T_x P$ di dimensione $2n$ per ogni x . Scegliendo tra di loro una base di $2n$ campi linearmente indipendenti X_α , $\alpha = 1, \dots, 2n$ arriviamo alla situazione del teorema di Frobenius. Quindi, localmente esistono $N - 2n = k$ funzioni indipendenti $r^1(x), \dots, r^k(x)$ tali che

$$X_\alpha r^s(x) \equiv 0, \quad \alpha = 1, \dots, 2n, \quad s = 1, \dots, k.$$

Siccome i campi X_α formano una base del sottospazio generato da X_{x^1}, \dots, X_{x^N} , allora per ogni $i = 1, \dots, N$ abbiamo

$$X_{x^i} r^s(x) = 0.$$

Esplicitamente l'ultima equazione si scrive

$$X_{x^i} r^s(x) = \pi^{ij} \frac{\partial r^s}{\partial x^j} = \{x^i, r^s\} = 0, \quad i = 1, \dots, N$$

(cf. le equazioni (3.6.14)). Quindi, per ogni funzione liscia $f(x)$

$$\{f, r^s\} = \frac{\partial f}{\partial x^i} \pi^{ij} \frac{\partial r^s}{\partial x^j} = 0,$$

ovvero la funzione $r^s(x)$ per ogni $s = 1, \dots, k$ è un casimir della parentesi. \square

Esercizio 3.6.10 *Data una varietà di Poisson (P, π) di dimensione $2n+k$ con una parentesi del rango costante $2n$, si considerino i casimiri indipendenti $r^1(x), \dots, r^k(x)$ costruiti su un intorno di un punto $x_0 \in P$ secondo il lemma 3.6.8. Allora, si dimostri che ogni altro casimir $f(x)$ definito sullo stesso intorno può essere rappresentato come*

$$f(x) = F\left(r^1(x), \dots, r^k(x)\right)$$

per una certa funzione liscia di k variabili $F(r^1, \dots, r^k)$.

⁹Si osservi che questo sottospazio è nient'altro che l'immagine

$$\text{span}(X_{x^1}, \dots, X_{x^N}) = J(T_x^* P) \subset T_x P$$

rispetto alla mappa (3.6.10).

Secondo il lemma appena dimostrato, applicando anche il teorema di Frobenius, possiamo costruire le coordinate locali $(s^1, \dots, s^{2n}, r^1, \dots, r^k)$ sulla varietà di Poisson di rango costante, dove r^1, \dots, r^k sono i casimiri indipendenti, e s^1, \dots, s^{2n} sono le coordinate sulle foglie

$$P_{r_0} := \{x \in P \mid r^1(x) = r_0^1, \dots, r^k(x) = r_0^k\}. \quad (3.6.18)$$

Adoperiamo queste coordinate per introdurre localmente su P la struttura di una *foliazione simplettica*. Dimostriamo prima

Lemma 3.6.11 *Data una varietà di Poisson di rango costante $2n = \dim P - k$, e le coordinate locali $(s^1, \dots, s^{2n}, r^1, \dots, r^k)$ costruite come sopra, allora la parentesi di Poisson rispetto a queste coordinate ha la seguente forma*

$$\begin{aligned} \{s^\alpha, s^\beta\} &= \varpi^{\alpha\beta}(s, r), \quad \alpha, \beta = 1, \dots, 2n \\ \{s^\alpha, r^i\} &= \{r^i, r^j\} = 0, \quad \alpha = 1, \dots, 2n, \quad i, j = 1, \dots, k \end{aligned} \quad (3.6.19)$$

dove la matrice $(\varpi^{\alpha\beta}(s, r))$ è non degenere,

$$\det \left(\varpi^{\alpha\beta}(s, r) \right)_{1 \leq \alpha, \beta \leq 2n} \neq 0.$$

Dimostrazione: La struttura (3.6.19) della matrice delle parentesi segue dalla definizione dei casimiri r^1, \dots, r^k . Il rango di questa matrice dev'essere uguale a $2n$, il ciò implica che il blocco $2n \times 2n$ formato dalle parentesi $\{s^\alpha, s^\beta\}$ è non degenere. \square

Ora siamo in grado di costruire sulle foglie (3.6.18) la struttura simplettica. Infatti, si consideri la matrice inversa

$$(\omega_{\alpha\beta}(s, r)) := \left(\varpi^{\alpha\beta}(s, r) \right)^{-1}$$

e la 2-forma

$$\omega_{r_0} = \sum_{1 \leq \alpha < \beta \leq 2n} \omega_{\alpha\beta}(s, r) ds^\alpha \wedge ds^\beta. \quad (3.6.20)$$

Lemma 3.6.12 *Data una varietà di Poisson del rango costante $2n = \dim P - k$, e le coordinate locali $(s^1, \dots, s^{2n}, r^1, \dots, r^k)$ costruite come nel lemma precedente, allora la restrizione della 2-forma (3.6.20)*

$$\omega|_{r=r_0} = \sum_{1 \leq \alpha < \beta \leq 2n} \omega_{\alpha\beta}(s, r_0) ds^\alpha \wedge ds^\beta$$

su ogni foglia (3.6.18) è una struttura simplettica su questa foglia.

La *dimostrazione* ripete gli argomenti usati nella prima parte del teorema 3.6.5 (nel nostro caso possiamo dire che la matrice delle parentesi di Poisson delle variabili s^1, \dots, s^{2n} è non degenere ma dipende dai parametri aggiuntivi r^i). \square

Arriviamo al teorema principale che descrive la struttura locale delle varietà di Poisson del rango costante.

Teorema 3.6.13 *Data una varietà di Poisson P del rango costante $2n = \dim P - k$, allora localmente, su un aperto sufficientemente piccolo $U \subset P$, è definita una struttura di una foliazione simplettica che consiste di:*

- k funzioni indipendenti $r^1(x), \dots, r^k(x)$ che sono i casimiri della parentesi;
- la struttura simplettica ω_{r_0} sulle superficie di livello dei casimiri

$$P_{r_0} = \{x \in U \subset P \mid r^1(x) = r_0^1, \dots, r^k(x) = r_0^k\}$$

definita come in lemma 3.6.12.

Inoltre, questa struttura non dipende dalla scelta dei casimiri, cioè, se $\tilde{r}^1(x), \dots, \tilde{r}^k(x)$ sono altri casimiri indipendenti definiti sull'aperto stesso U , e $\tilde{\omega}_{\tilde{r}_0}$ è la struttura simplettica sulle foglie

$$\tilde{P}_{\tilde{r}_0} = \{x \in U \subset P \mid \tilde{r}^1(x) = \tilde{r}_0^1, \dots, \tilde{r}^k(x) = \tilde{r}_0^k\},$$

allora esistono due diffeomorfismi f e F_r tali che per ogni r_0

$$F_{r_0} : P_{r_0} \rightarrow \tilde{P}_{\tilde{r}_0=f(r_0)}$$

è un simplettomorfismo:

$$F_{r_0}^* \tilde{\omega}_{\tilde{r}_0} = \omega_{r_0}.$$

Dimostrazione: Rimane dimostrare l'indipendenza della struttura della foliazione simplettica dalla scelta delle coordinate locali $(s^1, \dots, s^{2n}, r^1, \dots, r^k)$. Prima di tutto, per un'altra scelta dei casimiri secondo il risultato dell'esercizio 3.6.10 esistono k funzioni lisce f^1, \dots, f^k di k variabile ciascuna tali che

$$\tilde{r}^1(x) = f^1(r^1(x), \dots, r^k(x)), \dots, \tilde{r}^k(x) = f^k(r^1(x), \dots, r^k(x)).$$

Queste funzioni definiscono la mappa f . Scambiando i ruoli dei casimiri $r \leftrightarrow \tilde{r}$ otteniamo la mappa inversa

$$r^1(x) = \tilde{f}^1(\tilde{r}^1(x), \dots, \tilde{r}^k(x)), \dots, r^k(x) = \tilde{f}^k(\tilde{r}^1(x), \dots, \tilde{r}^k(x)).$$

Quindi, f è un diffeomorfismo. Completando li casimiri $\tilde{r}^1, \dots, \tilde{r}^k$ con le funzioni $\tilde{s}^1, \dots, \tilde{s}^{2n}$ per produrre le coordinate locali, si ottiene una trasformazione invertibile delle coordinate locali nella forma

$$(s^1, \dots, s^{2n}, r^1, \dots, r^k) \mapsto (\tilde{s}^1 = F_r^1(s), \dots, \tilde{s}^{2n} = F_r^{2n}(s), \tilde{r}^1 = f^1(r), \dots, \tilde{r}^k = f^k(r)).$$

La matrice di Jacobi della trasformazione ha una forma blocco triangolare

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_r^\alpha}{\partial s^\beta} & \frac{\partial F_r^\alpha}{\partial r^j} \\ 0 & \frac{\partial f^i}{\partial r^j} \end{pmatrix}$$

e, quindi, F_r per ogni r è un diffeomorfismo locale. Infine, la parentesi di Poisson delle coordinate nuove si calcola applicando la regola tensoriale:

$$\{\tilde{s}^\alpha, \tilde{s}^\mu\} = \sum_{\lambda, \nu=1}^{2n} \frac{\partial F_r^\alpha}{\partial s^\lambda} \frac{\partial F_r^\beta}{\partial s^\mu} \{s^\lambda, s^\mu\}. \quad (3.6.21)$$

Le derivate rispetto alle variabili r non appaiono nella parte destra, visto che r sono i casimiri. L'equazione precedente significa che la mappa

$$F_r : P_r \rightarrow \tilde{P}_{\tilde{r}=f(r)}$$

per ogni r è una trasformazione canonica rispetto alle parentesi di Poisson definite su queste varietà. Invertendo tutte le matrici nell'equazione (3.6.21) si ottiene che F_r è un simplettomorfismo. \square

La seguente versione del lemma di Darboux con i parametri perfeziona la descrizione locale delle varietà di Poisson del rango costante.

Corollario 3.6.14 *Data una varietà di Poisson (P, π) con una parentesi di rango costante $2n = \dim P - k$, allora su un intorno di ogni punto $x_0 \in P$ esistono coordinate locali $(q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n, r^1, \dots, r^k)$ tali che le parentesi assumono la seguente forma:*

$$\{q^i, q^j\} = \{p_i, p_j\} = 0, \quad \{q^i, p_j\} = \delta_j^i, \quad i, j = 1, \dots, n$$

$$\{q^i, r^a\} = \{p_i, r^a\} = \{r^a, r^b\} = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad a, b = 1, \dots, k.$$

Esercizio 3.6.15 *Data una varietà di Poisson (P, π) di rango costante, e un campo hamiltoniano X_H sulla varietà P , allora si dimostri che il campo hamiltoniano è tangente alle foglie simplettiche. Inoltre, si dimostri che la restrizione del campo hamiltoniano su ogni foglia simplettica P_{r_0} è un campo hamiltoniano sulla varietà simplettica P_{r_0} con la struttura simplettica costruita nel teorema ?? e con hamiltoniana*

$$H_{r_0} := H|_{P_{r_0}}.$$

Esercizio 3.6.16 *Data una varietà di Poisson (P, π) di rango costante, e una trasformazione canonica infinitesima X , allora si dimostri che il campo vettoriale X localmente è un campo hamiltoniano, $X = X_H$ se e solo se X è tangente alle foglie della foliazione simplettica.*

Consideriamo ora gli esempi delle varietà di Poisson.

Esempio 1. Dato uno spazio affine P con le coordinate affini x^1, \dots, x^N , e una matrice $N \times N$ antisimmetrica costante arbitraria (π^{ij}) , allora la formula

$$\{x^i, x^j\} = \pi^{ij}, \quad i, j = 1, \dots, N$$

definisce una parentesi di Poisson su P . La foliazione simplettica in questo caso è fatta da una famiglia di piani affini paralleli di dimensione uguale al rango della matrice (π^{ij}) . Inoltre, le coordinate (q, p, r) del corollario 3.6.14 sono le combinazioni lineari delle coordinate di partenza.

Esempio 2. Data una varietà liscia M , abbiamo già costruito una struttura di Poisson non degenera sul fibrato cotangente $P = T^*M$. Una struttura diversa si ottiene fissando una 2-forma chiusa sulla base M :

$$\Omega = \sum_{i < j} \Omega_{ij}(q) dq^i \wedge dq^j, \quad d\Omega = 0$$

nel seguente modo:

$$\begin{aligned}\{q^i, q^j\} &= 0, & \{q^i, p_j\} &= \delta_j^i \\ \{p_i, p_j\} &= \Omega_{ij}(q), & i, j &= 1, \dots, n.\end{aligned}\tag{3.6.22}$$

Esercizio 3.6.17 *Si dimostri che (3.6.22) è una parentesi di Poisson. Inoltre, se la 1-forma $A = A_i(q) dq^i$ definita localmente su M è tale che $\Omega = dA$, allora si dimostri che le coordinate di Darboux (\tilde{q}, \tilde{p}) per la parentesi (3.6.22) possono essere scelte nel seguente modo:*

$$\tilde{q}^i = q^i, \quad \tilde{p}_i = p_i + A_i, \quad i = 1, \dots, n$$

$$\{\tilde{q}^i, \tilde{q}^j\} = \{\tilde{p}_i, \tilde{p}_j\} = 0, \quad \{\tilde{q}^i, \tilde{p}_j\} = \delta_j^i.$$

Esempio 3: le parentesi di **Lie - Poisson**. Dato uno spazio lineare P si consideri la parentesi di Poisson tale che la matrice $\pi^{ij}(x) = \{x^i, x^j\}$ dipende *linearmente* dalle coordinate lineari x :

$$\{x^i, x^j\} = c_k^{ij} x^k, \quad i, j = 1, \dots, N = \dim P.\tag{3.6.23}$$

In questa formula i coefficienti c_k^{ij} della funzione lineare

$$\pi^{ij}(x) = c_k^{ij} x^k$$

sono costanti. Queste costanti debbono soddisfare certe condizioni che noi stiamo per formulare ora.

L'osservazione cruciale è che, data una parentesi di Poisson lineare, allora le funzioni lineari su P formano una *sottoalgebra di Lie chiusa* nell'algebra di Lie $\mathbb{C}^\infty(P)$ di tutte funzioni lisce. Infatti date due funzioni lineari $a = a(x)$, $b = b(x)$,

$$a(x) = a_i x^i, \quad b(x) = b_j x^j$$

allora anche la parentesi $\{a, b\}$ è una funzione lineare:

$$\{a, b\} = c_k x^k, \quad c_k = c_k^{ij} a_i b_j.\tag{3.6.24}$$

Identificando l'insieme di tutte le funzioni lineari su P con lo spazio duale P^* si ottiene il seguente

Teorema 3.6.18 *Sia dato uno spazio lineare P con una parentesi di Poisson lineare (3.6.23). Allora, la parentesi induce sullo spazio duale P^* una struttura di algebra di Lie. Viceversa, data un'algebra di Lie finito dimensionale \mathfrak{g} , allora sullo spazio duale $P = \mathfrak{g}^*$ esiste ed è unica una struttura naturale di una varietà di Poisson con una parentesi di Poisson lineare definita in modo tale che la parentesi di due funzioni lineari su \mathfrak{g}^* coincide con il suo commutatore in \mathfrak{g} :*

$$a, b \in (\mathfrak{g}^*)^* \simeq \mathfrak{g} \Rightarrow \{a, b\} = [a, b] \in \mathfrak{g}.$$

Definizione 3.6.19 *Data un'algebra di Lie \mathfrak{g} , la struttura di Poisson lineare sullo spazio duale $P = \mathfrak{g}^*$ costruita nel teorema 3.6.18 si chiama la parentesi di Lie - Poisson.*

Per fare i calcoli espliciti della parentesi di Lie - Poisson bisogna prendere in considerazione la corrispondenza

$$\text{base in } \mathfrak{g} \leftrightarrow \text{sistema di coordinate lineari su } \mathfrak{g}^*.$$

Data una base e^1, e^2, \dots, e^N in un'algebra di Lie \mathfrak{g} , il commutatore $[e^i, e^j]$ di ogni due elementi della base può essere rappresentato come una combinazione lineare dei vettori della base stessa:

$$[e^i, e^j] = c_k^{ij} e^k, \quad i, j = 1, \dots, N.$$

I coefficienti c_k^{ij} si chiamano le *costanti di struttura* dell'algebra di Lie. Identificando

$$\mathfrak{g} \ni e^i \leftrightarrow x^i \in (\mathfrak{g}^*)^*$$

i vettori della base con le funzioni lineari su \mathfrak{g}^* si ottiene la parentesi nella forma (3.6.23) con gli *stessi* coefficienti:

$$\{x^i, x^j\} = c_k^{ij} x^k.$$

Esempio 3a. Nell'algebra di Lie $\mathfrak{g} = so(3)$ delle matrici 3×3 antisimmetriche si può scegliere una base di tre matrici x, y, z con i commutatori

$$[x, y] = z, \quad [y, z] = x, \quad [z, x] = y$$

(vedi, e.g., l'esercizio 3.15.3). Identificando i vettori della base in \mathfrak{g} con le coordinate sullo spazio duale, si ottiene una parentesi sullo spazio tridimensionale \mathfrak{g}^* con le coordinate x, y, z :

$$\{x, y\} = z, \quad \{y, z\} = x, \quad \{z, x\} = y.$$

Il rango della matrice della parentesi

$$(\pi^{ij}(x, y, z)) = \begin{pmatrix} 0 & z & -y \\ -z & 0 & x \\ y & -x & 0 \end{pmatrix}$$

per $x^2 + y^2 + z^2 \neq 0$ è uguale a 2. Quindi, per costruire la foliazione simplettica bisogna trovare un casimir della parentesi. È facile da vedere che la funzione

$$r = x^2 + y^2 + z^2$$

è un casimir:

$$\begin{aligned} \{x, r\} &= z \frac{\partial r}{\partial y} - y \frac{\partial r}{\partial z} = 0 \\ \{y, r\} &= x \frac{\partial r}{\partial z} - z \frac{\partial r}{\partial x} = 0 \\ \{z, r\} &= y \frac{\partial r}{\partial x} - x \frac{\partial r}{\partial y} = 0. \end{aligned}$$

Allora, le foglie simplettiche sono le sfere

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \quad R > 0. \tag{3.6.25}$$

Esercizio 3.6.20 Si dimostri che la struttura simplettica sulle foglie (3.6.25) è proporzionale alla forma dell'area della sfera:

$$\omega = R \cos \theta d\theta \wedge d\phi$$

(sono state usate le coordinate sferiche).

Esercizio 3.6.21 Introducendo il vettore tridimensionale $\mathbf{r} = (x, y, z)$, si dimostri che le equazioni hamiltoniane $\dot{\mathbf{r}} = \{\mathbf{r}, H\}$ con hamiltoniana $H = H(\mathbf{r})$ sono scritte nella seguente forma:

$$\dot{\mathbf{r}} = \nabla H \times \mathbf{r}. \quad (3.6.26)$$

Esempio 3b. Si consideri il gruppo $E(3)$ delle isometrie dello spazio euclideo tridimensionale. Com'è ben noto, ogni isometria che preserva l'orientazione dello spazio è una combinazione di una rotazione e una traslazione. Quindi, l'algebra di Lie $e(3)$ del gruppo è generata da tre rotazioni infinitesime

$$M_1 = z \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial z}, \quad M_2 = x \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial x}, \quad M_3 = y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y}$$

insieme con tre traslazioni infinitesime

$$P_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad P_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad P_3 = \frac{\partial}{\partial z}.$$

I commutatori fra questi generatori hanno la seguente forma (cf. l'esercizio 3.15.5)

$$\begin{aligned} [M_i, M_j] &= \epsilon_{ijk} M_k \\ [M_i, P_j] &= \epsilon_{ijk} P_k \\ [P_i, P_j] &= 0 \end{aligned} \quad (3.6.27)$$

dove il simbolo di Levi-Civita $\epsilon_{ijk} = 0, \pm 1$ è definito come in (3.15.3). Di nuovo, identificando i vettori della base dell'algebra di Lie $\mathfrak{g} = e(3)$ con le coordinate sullo spazio duale si ottiene una parentesi di Poisson su $P = \mathfrak{g}^*$:

$$\begin{aligned} \{M_i, M_j\} &= \epsilon_{ijk} M_k \\ \{M_i, P_j\} &= \epsilon_{ijk} P_k \\ \{P_i, P_j\} &= 0. \end{aligned} \quad (3.6.28)$$

Esercizio 3.6.22 Si consideri l'hamiltoniana definita sullo spazio duale all'algebra di Lie $e(3)$ come una funzione $H = H(\mathbf{M}, \mathbf{P})$ su $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$. Si dimostri che il sistema hamiltoniano

$$\dot{M}_i = \{M_i, H\}, \quad \dot{P}_i = \{P_i, H\}, \quad i = 1, 2, 3$$

rispetto alla parentesi (3.6.28) può essere scritto nel seguente modo:

$$\dot{\mathbf{M}} = \nabla_{\mathbf{M}} H \times \mathbf{M} + \nabla_{\mathbf{P}} H \times \mathbf{P} \quad (3.6.29)$$

$$\dot{\mathbf{P}} = \nabla_{\mathbf{M}} H \times \mathbf{P}.$$

Esercizio 3.6.23 Si consideri la matrice 6×6 data dalla parentesi di Poisson (3.6.28). Si dimostri che per

$$\sum_i P_i^2 \neq 0$$

il rango della matrice è uguale a 4. Inoltre, si dimostri che i due casimiri indipendenti della parentesi possono essere scelti nel seguente modo:

$$r_1 = \sum_i P_i^2, \quad r_2 = \sum_i P_i M_i.$$

La struttura della foliazione simplettica per questo caso è descritta negli esercizi 3.15.10, 3.15.11.

Per concludere questa sezione consideriamo brevemente il caso generale della parentesi di Lie - Poisson sullo spazio \mathfrak{g}^* . Sia G il gruppo di Lie connesso¹⁰ associato all'algebra di Lie \mathfrak{g} , per ogni $a \in \mathfrak{g}$ si denoti con $g_a(t) \in G$ il sottogruppo a un parametro generato dall'elemento a :

$$g_a(t_1)g_a(t_2) = g_a(t_1 + t_2), \quad g_a(0) = 1 \in G, \quad \frac{d}{dt}g_a(t)|_{t=0} = a \in T_1G \simeq \mathfrak{g}.$$

Si ricordi che il commutatore nell'algebra di Lie è legato al prodotto nel gruppo G tramite la seguente formula valida per piccoli valori di $|t|$:

$$g_a(t)g_b(t)g_a^{-1}(t)g_b^{-1}(t) = 1 + t^2[a, b] + O(t^3).$$

Per ogni $g \in G$ è definita una mappa

$$T_g : G \rightarrow G, \quad T_g(h) = ghg^{-1}.$$

Siccome $T_g(1) = 1$, il differenziale dT_g definisce una mappa lineare

$$dT_g : T_1G \rightarrow T_1G.$$

Identificando lo spazio tangente T_1G con l'algebra di Lie \mathfrak{g} del gruppo, si ottiene l'azione aggiunta del gruppo G sull'algebra di Lie \mathfrak{g} , ovvero l'omomorfismo dei gruppi:

$$\text{Ad} : G \rightarrow \text{Aut}(\mathfrak{g}), \quad \text{Ad}(g) = dT_g.$$

Dualizzando si ottiene l'azione coaggiunta del gruppo G sullo spazio duale \mathfrak{g}^* :

$$\text{Ad}^* : G \rightarrow \text{Aut}(\mathfrak{g}^*). \tag{3.6.30}$$

Teorema 3.6.24 Dato un gruppo di Lie G connesso, con algebra di Lie \mathfrak{g} , si consideri la parentesi di Lie - Poisson (3.6.23) sullo spazio duale $P = \mathfrak{g}^*$. Allora, le foglie simplettiche della parentesi coincidono con le orbite dell'azione coaggiunta (3.6.30) del gruppo G sullo spazio \mathfrak{g}^* .

¹⁰Come segue dalla teoria di S.Lie, a ogni algebra di Lie \mathfrak{g} di dimensione finita è associato un gruppo di Lie connesso e semplicemente connesso con l'algebra di Lie \mathfrak{g} .

Dimostrazione: Dato un elemento $a = a_i e^i \in \mathfrak{g}$, e una funzione $r(x)$ su \mathfrak{g}^* , allora è valida la seguente formula

$$\frac{d}{dt} [r(\text{Ad}^*(g_a(t))x)]_{t=0} = a_i c_k^{ij} x^k \frac{\partial r(x)}{\partial x^j},$$

dove $g_a(t) \in G$ è il gruppo a un parametro generato da a . Allora, dato un casimir $r = r(x)$ della parentesi di Lie - Poisson, cioè, una funzione che soddisfa le equazioni

$$a_i c_k^{ij} x^k \frac{\partial r(x)}{\partial x^j} = 0 \quad \forall a \in \mathfrak{g}, \quad \forall x \in \mathfrak{g}^*,$$

allora la derivata

$$\frac{d}{dt} [r(\text{Ad}^*(g_a(t))x)]_{t=0} = 0.$$

Sfruttando il fatto che $g_a(t)$ è un gruppo a un parametro si deriva facilmente che

$$\frac{d}{dt} [r(\text{Ad}^*(g_a(t)))](x) = 0$$

per ogni t . Quindi, per un casimir $r(x)$, e un punto $x \in \mathfrak{g}^*$, la funzione

$$r(\text{Ad}^*(g)x)$$

assume valori costanti in $g \in G$ su un intorno del punto $1 \in G$. Siccome il gruppo G è connesso, allora la funzione è costante in g dappertutto, cioè, è invariante rispetto all'azione coaggiunta. \square

La struttura simplettica sulle orbite coaggiate (dovuta a Kirillov e Kostant) ha diverse applicazioni, in particolare, nella teoria di rappresentazioni di gruppi di Lie.

3.7 Le equazioni del moto del corpo rigido

Dato un sistema meccanico di punti materiali

$$\mathbf{X}(a) = (X_1(a), \dots, X_n(a)), \quad a = 1, 2, \dots$$

dello spazio euclideo \mathbb{R}^n , si dice che questo sistema forma un *corpo rigido* se, durante il moto, le distanze tra i punti rimangono invariate:

$$|\mathbf{X}(a) - \mathbf{X}(b)| \equiv \sqrt{\sum_{i=1}^n (X_i(a) - X_i(b))^2} = \text{cost} \quad \forall a, = 1, 2, \dots \quad (3.7.1)$$

Il moto di un corpo rigido rispetto al sistema inerziale (X_1, \dots, X_n) può essere descritto nel seguente modo. Si associa ad un corpo rigido un sistema ortogonale di coordinate mobile (x_1, \dots, x_n) tale che ogni punto del corpo rigido è *fermo* in coordinate nuove (in generale, il sistema di coordinate mobile non è un sistema di riferimento inerziale!). Allora, denotando $\mathbf{x}(a) = (x_1(a), \dots, x_n(a))$ le coordinate di un a -esimo punto rispetto al sistema mobile, abbiamo

$$\frac{d}{dt} x_i(a) = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Per essere più specifico, mettiamo l'origine del sistema di coordinate mobile nel baricentro del corpo rigido, cioè,

$$\sum_a \rho_a x_i(a) = 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (3.7.2)$$

dove ρ_a è la massa dell' a -esimo punto.

La configurazione dei vettori $\mathbf{x}(a)$ insieme con le masse ρ_a determinano le proprietà meccaniche del corpo rigido. Per descrivere il moto del corpo si introduce la trasformazione tra i due sistemi di coordinate

$$\mathbf{X} = g \mathbf{x} + \mathbf{X}^0. \quad (3.7.3)$$

Siccome entrambi i sistemi di coordinate $\mathbf{X} = (x_1, \dots, x_n)$ e $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ sono cartesiani, allora la matrice di transizione g è ortogonale. Inoltre, senza perdere in generalità, possiamo assumere che le orientazioni dei due sistemi di coordinate coincidano, ovvero $\det g > 0$. Quindi, la matrice g appartiene al gruppo di rotazioni $SO(n)$,

$$SO(n) = \{g \in Mat(n) \mid g^T g = 1, \quad \det g = +1\}.$$

Abbiamo stabilito che il moto del corpo rigido è completamente determinato da due funzioni del tempo t

$$g = g(t) \text{ a valori in } SO(n), \quad \mathbf{X}^0 = \mathbf{X}^0(t) \text{ a valori in } \mathbb{R}^n.$$

Per descrivere le velocità dei punti del corpo rigido, si introduce la matrice

$$\Omega(t) = -\dot{g}(t)g^{-1}(t). \quad (3.7.4)$$

Lemma 3.7.1 *La matrice $\Omega(t)$ è antisimmetrica per ogni t .*

Dimostrazione: Derivando in t l'identità $g^T(t)g(t) \equiv 1$, si ottiene

$$\dot{g}^T(t)g(t) + g^T(t)\dot{g}(t) = 0.$$

Moltiplicando da destra per $g^{-1}(t) = g^T(t)$ e da sinistra per $(g^T(t))^{-1} = g(t)$ si arriva alla dimostrazione di antisimmetria. \square

Dal lemma, derivando l'equazione

$$\mathbf{X}(a) = g(t)\mathbf{x}(a) + \mathbf{X}^0$$

rispetto al tempo e sfruttando $\dot{\mathbf{x}}(a) = 0$, si ottiene la seguente formula per la velocità dell' a -esimo punto del sistema:

$$\dot{\mathbf{X}}(a) = -\Omega(t)\bar{\mathbf{X}} + \mathbf{V}(t), \quad \bar{\mathbf{X}} = \mathbf{X}(a) - \mathbf{X}^0 \quad (3.7.5)$$

dove

$$\mathbf{V}(t) = (V_1(t), \dots, V_n(t)) = \dot{\mathbf{X}}^0(t)$$

è la velocità del moto del baricentro rispetto al sistema inerziale.

Per derivare le formule per l'energia cinetica del corpo rigido nonché per l'impulso totale e il momento angolare, si introducono i seguenti tensori simmetrici

$$Q = (Q_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}, \quad Q_{ij} = \sum_a \rho_a X_i(a) X_j(a). \quad (3.7.6)$$

$$Q^0 = (Q_{ij}^0)_{1 \leq i, j \leq n}, \quad Q_{ij}^0 = \mu X_i^0(a) X_j^0(a). \quad (3.7.7)$$

Lemma 3.7.2 *L'impulso totale*

$$\mathbf{P} = \sum_a \rho_a \dot{\mathbf{X}}(a),$$

il momento angolare totale

$$M = (M_{ij}), \quad M_{ij} = \sum_a \rho_a (X_i(a) \dot{X}_j(a) - X_j(a) \dot{X}_i(a))$$

e l'energia cinetica

$$T = \frac{1}{2} \sum_a \rho_a \dot{\mathbf{X}}^2(a)$$

di un corpo rigido vengono scritti nelle seguente formule

$$\mathbf{P} = \mu \mathbf{V} \quad (3.7.8)$$

dove

$$\mu = \sum_a \rho_a$$

è la massa totale del corpo rigido,

$$M = Q\Omega + \Omega Q + M^0 \quad (3.7.9)$$

dove

$$\begin{aligned} M_{ij}^0 &= \mu (X_i^0 V_j - X_j^0 V_i) + (Q^0 \Omega)_{ij} + (\Omega Q^0)_{ij} \\ T &= \frac{1}{2} \langle \Omega, Q\Omega + \Omega Q \rangle - \frac{1}{2} \langle \Omega, Q^0 \Omega + \Omega Q^0 \rangle + \frac{\mu}{2} \mathbf{V}^2. \end{aligned} \quad (3.7.10)$$

Il prodotto scalare sullo spazio $so(n)$ di matrici antisimmetriche utilizzato nella formula per l'energia cinetica è definito nel seguente modo (cf. (3.15.12)):

$$\langle A, B \rangle = -\frac{1}{2} \operatorname{tr} AB = -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n A_{ij} B_{ji}, \quad A = (A_{ij}), B = (B_{ij}) \in so(n). \quad (3.7.11)$$

Dimostrazione: Moltiplicando la velocità dell' a -esimo punto

$$\dot{\mathbf{X}}(a) = \dot{g}\mathbf{x}(a) + \mathbf{V}$$

per la massa ρ_a , sommando in a e sfruttando (3.7.2) si ottiene (3.7.8). Poi, sostituendo (3.7.5) nella formula per il momento angolare si ottiene

$$\begin{aligned} M_{ij} &= \sum_a \rho_a \left[X_i(a) \left(- \sum_{k=1}^n \Omega_{jk} \bar{X}_k(a) + V_j \right) - X_j(a) \left(- \sum_{k=1}^n \Omega_{ik} \bar{X}_k(a) + V_i \right) \right] \\ &= \sum_{k=1}^n [Q_{ik} \Omega_{kj} + \Omega_{ik} Q_{kj}] + \mu (X_i^0 V_j - X_j^0 V_i) + \sum_{k=1}^n [Q_{ik}^0 \Omega_{kj} + \Omega_{ik} Q_{kj}^0] \end{aligned}$$

dov'è stata utilizzata la formula

$$\sum_a \rho_a \mathbf{X}(a) = \mu \mathbf{X}^0,$$

nonché la simmetria della matrice Q e antisimmetria della matrice Ω .

Infine, sostituendo la stessa formula (3.7.5) nella solita espressione per l'energia cinetica arriviamo a

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_a \rho_a \sum_{k=1}^n \dot{X}_k^2(a) = \frac{1}{2} \sum_a \rho_a \sum_{k=1}^n \left(- \sum_{i=1}^n \Omega_{ki} \bar{X}_i(a) + V_k \right) \left(- \sum_{j=1}^n \Omega_{kj} \bar{X}_j(a) + V_k \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j,k=1}^n \Omega_{ki} \Omega_{kj} Q_{ij} - \frac{1}{2} \sum_{i,j,k=1}^n \Omega_{ki} \Omega_{kj} Q_{ij}^0 + \frac{\mu}{2} \mathbf{V}^2. \end{aligned}$$

Per completare la dimostrazione del lemma rimane da osservare che

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \langle \Omega, Q\Omega + \Omega Q \rangle &= -\frac{1}{4} \sum_{i,j=1}^n \Omega_{ij} (Q\Omega + \Omega Q)_{ji} = -\frac{1}{4} \sum_{i,j,k=1}^n \Omega_{ij} (Q_{jk} \Omega_{ki} + \Omega_{jk} Q_{ki}) \\ &= \frac{1}{4} \sum_{i,j,k=1}^n \Omega_{ij} \Omega_{ik} Q_{jk} + \frac{1}{4} \sum_{i,j,k=1}^n \Omega_{ji} \Omega_{jk} Q_{ik} = \frac{1}{2} \sum_{i,j,k=1}^n \Omega_{ki} \Omega_{kj} Q_{ij}. \end{aligned}$$

□

Per derivare le equazioni del moto di corpo rigido cominciamo dal caso del *moto libero*, ovvero tutte le forze esterne sono nulle. In tal caso la velocità \mathbf{V} del baricentro è costante, e, quindi, possiamo scegliere il sistema di riferimento inerziale in modo tale che

$$\mathbf{X}^0(t) \equiv 0.$$

Riscriviamo ora i tensori $Q = (Q_{ij})$, $\Omega = (\Omega_{ij})$, $M = (M_{ij})$ nel sistema di riferimento *non inerziale*, cioè, nel quello “congelato” nel corpo rigido. Denotando i tensori del sistema (x_1, \dots, x_n) , rispettivamente, $q = (q_{ij})$, $\omega = (\omega_{ij})$, $m = (m_{ij})$, e utilizzando la legge di trasformazione di un tensore di rango due¹¹ rispetto alla trasformazione di coordinate $\mathbf{X} = g \mathbf{x}$

¹¹C'è una sottigliezza: il tensore Q secondo la definizione è un tensore di tipo (0,2) e, quindi, si trasforma secondo la legge $Q \mapsto gQg^T$. Nella formula (3.7.9), dove entra il prodotto di operatori lineari, esso è stato considerato come un tensore di tipo (1,1); per questi tensori la legge di trasformazione in generale è diversa: $Q \mapsto gQg^{-1}$. Le due leggi di trasformazione coincidono però per le trasformazioni ortogonali, per le quali $g^{-1} = g^T$.

si ottengono le seguente formule

$$\begin{aligned} Q &= g q g^T \\ \Omega &= g \omega g^T \\ M &= g m g^T. \end{aligned}$$

Lemma 3.7.3 *Il tensore $q = (q_{ij})$ definito nella formula precedente si calcola in base alla seguente formula*

$$q_{ij} = \sum_a \rho_a x_i(a) x_j(a), \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (3.7.12)$$

Dimostrazione: Sostituendo

$$X_i(a) = \sum_{k=1}^n g_{ik} x_k(a)$$

nella formula (3.7.6) si ottiene

$$Q_{ij} = \sum_{k,l=1}^n g_{ik} g_{jl} q_{kl}.$$

Questa formula equivale a $Q = g q g^T$. □

Definizione 3.7.4 *Data una qualsiasi configurazione di punti $\mathbf{x}(a)$ di masse $\rho_a > 0$ nello spazio euclideo, e un sistema di coordinate ortonormali $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, allora il tensore q_{ij} definito dalla formula (3.7.12) si chiama il tensore di inerzia del corpo rigido¹².*

Si osservi che la matrice (3.7.12) del tensore di inerzia non dipende dal tempo. Inoltre, è valido il seguente

Lemma 3.7.5 *Data una qualsiasi configurazione di punti $\mathbf{x}(a)$ di masse $\rho_a > 0$ nello spazio euclideo, allora il tensore di inerzia (3.7.12) è definito positivo.*

Dimostrazione: Come è ben noto dall' algebra lineare, data una matrice $n \times n$ simmetrica $q = (q_{ij})$, allora esiste una rotazione $g_0 \in SO(n)$ tale che

$$g_0 q g_0^T = \text{diag}(q_1, \dots, q_n).$$

Utilizzando la rotazione g_0 , possiamo introdurre nuove coordinate ortonormali $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ in modo tale che

$$\mathbf{y} = g_0 \mathbf{x}.$$

Nelle nuove coordinate, la matrice del tensore q si scrive con formule simili a (3.7.12), da ciò otteniamo

$$\begin{aligned} q_k &= \sum_a \rho_a y_k^2(a) > 0, \quad k = 1, \dots, n \\ \sum_a \rho_a y_i(a) y_j(a) &= 0, \quad i \neq j. \end{aligned}$$

¹²La nostra definizione del tensore di inerzia è diversa da quella tradizionale usata nella dimensione $n = 3$ nei libri di meccanica (vedi sotto) dove il tensore di inerzia viene definito come l'operatore lineare $\omega \mapsto q\omega + \omega q$.

Allora, tutti gli autovalori q_1, \dots, q_n della matrice q sono positivi. □

Dato un sistema di coordinate ortonormali (x_1, \dots, x_n) nello spazio euclideo, si dice che le coordinate sono associate agli *assi principali* del corpo rigido se il tensore di inerzia (3.7.12) diventa diagonale in queste coordinate.

Spesso si possono sfruttare gli argomenti basati sulle simmetrie del corpo rigido per determinare gli assi principali. Ad esempio, se la configurazione dei punti è invariante rispetto alle rotazioni attorno ad un asse, allora quest'ultimo può essere scelto come uno degli assi principali.

Osservazione 3.7.6 *Tutte le considerazioni precedenti funzionano anche nel caso di un sistema infinito di punti materiali posizionati dentro un certo dominio $D \subset \mathbb{R}^n$. La distribuzione di masse viene definita tramite una funzione di distribuzione $\rho(\mathbf{x}) > 0$, cioè, la massa totale $\rho(U)$ di punti materiali dentro un dominio $U \subset \mathbb{R}^n$ si calcola in base al seguente integrale:*

$$\rho(U) = \int_U \rho(\mathbf{x}) d^n x, \quad d^n x = dx_1 \dots dx_n.$$

Il tensore di inertia in questo caso viene definito dalla seguente formula analoga a (3.7.12):

$$q_{ij} = \int_D \rho(\mathbf{x}) x_i x_j d^n x, \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (3.7.13)$$

Torniamo alle equazioni del moto del corpo rigido libero. Com'è stato spiegato sopra, il moto libero del corpo rigido è univocamente caratterizzato dalla funzione $g(t)$ a valori nel gruppo di Lie $SO(n)$ di matrici ortogonali. Possiamo quindi considerare la varietà $M = SO(n)$ come lo spazio delle configurazioni per il moto libero del corpo rigido. Si ricordi che la dimensione di questa varietà è uguale a

$$\dim SO(n) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Le equazioni del moto libero del corpo rigido sono definite sullo spazio $T SO(n)$ del fibrato tangente della varietà $SO(n)$. Il seguente teorema presenta queste equazioni in variabili matriciali $m = m(t) \in so(n)$ (il momento angolare rispetto al sistema di coordinate mobile attaccato al corpo rigido), $g = g(t) \in SO(n)$.

Teorema 3.7.7 *Le equazioni del moto libero del corpo rigido con il tensore di inerzia $q = (q_{ij})$ si scrivono nel seguente modo*

$$\dot{m} = [\omega, m] \quad (3.7.14)$$

$$m = q\omega + \omega q \quad (3.7.15)$$

$$\dot{g} = -g\omega. \quad (3.7.16)$$

Dimostrazione: La seconda equazione (3.7.15) si ottiene riscrivendo nelle coordinate mobili \mathbf{x} la formula

$$M = Q\Omega + \Omega Q$$

(cf. (3.7.9)), derivata nelle coordinate fisse \mathbf{X} . L'ultima equazione (3.7.16) segue dalla definizione della matrice Ω ,

$$\dot{g} = -\Omega g$$

assieme con la trasformazione

$$\Omega = g \omega g^T = g \omega g^{-1}.$$

Infine, dalla formula

$$m = g^{-1} M g$$

derivando in t e sfruttando la conservazione del momento angolare per il moto libero, $\dot{M} = 0$, si ottiene

$$\dot{m} = -g^{-1} \dot{g} g^{-1} M g + g^{-1} M \dot{g} = \omega m - m \omega.$$

Per completare la dimostrazione bisogna verificare che il sistema di equazioni (3.7.14) - (3.7.16) è chiuso, cioè, la dipendenza della matrice ω dal tempo è univocamente determinata da queste equazioni. Infatti, questo segue dal seguente

Lemma 3.7.8 *Dato il tensore di inertia $q = (q_{ij})$ di un corpo rigido, allora la mappa lineare*

$$I : so(n) \rightarrow so(n), \quad I(\omega) = q\omega + \omega q \tag{3.7.17}$$

è un isomorfismo.

Dimostrazione: In coordinate associate con gli assi principali del corpo rigido, dove il tensore q diventa diagonale,

$$q_{ij} = q_i \delta_{ij},$$

la formula della mappa (3.7.17) assume la seguente forma:

$$I(\omega)_{ij} = (q_i + q_j) \omega_{ij}.$$

Siccome tutti i numeri q_1, \dots, q_n sono positivi, allora la mappa $\omega \mapsto I(\omega) = m$ è invertibile,

$$\omega_{ij} = \frac{m_{ij}}{q_i + q_j}.$$

Il lemma, e anche il teorema sono dimostrati. □

Come abbiamo stabilito, le equazioni del moto libero di un corpo rigido con il tensore di inerzia q consistono di due parti: un sistema di equazioni non lineari sull'algebra di Lie $so(n)$,

$$\dot{m} = [I^{-1}(m), m], \quad m \in so(n), \tag{3.7.18}$$

ed un sistema di equazioni lineari (3.7.16).

Definizione 3.7.9 *Data una matrice $n \times n$ simmetrica $q = (q_{ij})$ definita positiva, allora le equazioni (3.7.18), dove l'operatore lineare I è definito dalla formula (3.7.17), si chiamano le equazioni di Eulero¹³.*

¹³Derivate da Eulero per $n = 3$ e da Poincaré (1901) per il caso generale

Per descrivere la struttura hamiltoniana delle equazioni di Eulero utilizziamo la parentesi di Lie - Poisson associate all'algebra di Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(n)$.

Teorema 3.7.10 *Le equazioni di Eulero (3.7.18) sono un sistema hamiltoniano rispetto alla parentesi di Lie - Poisson sullo spazio $\mathfrak{g}^* \simeq \mathfrak{g}$ con hamiltoniana quadratica*

$$H = \frac{1}{2} \langle I^{-1}(m), m \rangle \quad (3.7.19)$$

Il prodotto scalare (3.7.11) è stato usato nella formula (3.7.19), e anche nell'identificazione dell'algebra di Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(n)$ con lo spazio duale. Si osservi che l'operatore I è un operatore autoaggiunto rispetto al prodotto scalare (3.7.11).

Dimostrazione: Secondo il risultato dell'esercizio 3.15.12, il sistema hamiltoniano sullo spazio duale di un'algebra di Lie \mathfrak{g} provvista di una forma invariante possono essere scritte sull'algebra di Lie stessa nella forma

$$\dot{m} = [\nabla H, m], \quad m \in \mathfrak{g}, \quad H = H(m).$$

Per l'hamiltoniana quadratica (3.7.19) abbiamo

$$\nabla H = I^{-1}(m).$$

□

Si osservi che l'hamiltoniana (3.7.19) delle equazioni di Eulero è nient'altro che l'energia cinetica (3.7.10) (nel nostro caso $\mathbf{V} = 0$) riscritta come funzione di m .

Osservazione 3.7.11 *L'energia cinetica $T = H$ può essere interpretata come una metrica sulla varietà $SO(n)$. Infatti, abbiamo una funzione quadratica rispetto alle "velocità" \dot{g} :*

$$H = \frac{1}{2} \langle g^{-1} \dot{g}, I(g^{-1} \dot{g}) \rangle, \quad g \in SO(n). \quad (3.7.20)$$

La corrispondente metrica riemanniana sulla varietà $SO(n)$ ha la seguente forma:

$$ds^2 = \langle g^{-1} dg, I(g^{-1} dg) \rangle. \quad (3.7.21)$$

La metrica (3.7.21) possiede una proprietà importante di invarianza a sinistra. Per formulare questa proprietà si consideri il diffeomorfismo del gruppo $G = SO(n)$ su se stesso dato dalle traslazioni sul gruppo che agiscono da sinistra:

$$L_g : G \rightarrow G, \quad L_g(h) = gh \quad h \in G \quad \forall g \in G.$$

Denotando $(\cdot, \cdot)_I$ il prodotto scalare di vettori tangenti al gruppo definito dalla metrica (3.7.21),

$$(X, Y)_I = \langle g^{-1} X, I(g^{-1} Y) \rangle, \quad X, Y \in T_g G$$

si ottiene la proprietà di invarianza a sinistra nella seguente forma:

$$(dL_g X, dL_g Y)_I = (X, Y)_I \quad \forall g \in G. \quad (3.7.22)$$

Esercizio 3.7.12 *Si dimostri che ogni metrica su $SO(n)$ invariante a sinistra può essere rappresentata nella forma (3.7.21) per un operatore autoaggiunto positivo I .*

Ricapitolando, le equazioni del moto libero del corpo rigido nello spazio euclideo di dimensione n si identificano con le equazioni per le geodetiche di una metrica invariante a sinistra sul gruppo di Lie $SO(n)$. La forma particolare della metrica viene determinata dal tensore di inerzia del corpo rigido secondo le formule (3.7.21), (3.7.17).

Esempio. Le equazioni di Eulero per $n = 3$. Si ricordi che nel caso tridimensionale i tensori antisimmetrici vengono identificati con i vettori. Per esempio, al tensore $\omega = (\omega_{ij})$ corrisponde un vettore $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ secondo le regole chiare dalla seguente formula:

$$\omega = \begin{pmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Associando in modo simile un vettore $\mathbf{m} = (m_1, m_2, m_3)$ al tensore antisimmetrico (m_{ij}) si ottiene la formula per l'hamiltoniana:

$$H = \frac{m_1^2}{2I_1} + \frac{m_2^2}{2I_2} + \frac{m_3^2}{2I_3} = \frac{1}{2} (I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2)$$

dove

$$I_1 = \int_D \rho (y^2 + z^2) dV, \quad I_2 = \int_D \rho (x^2 + z^2) dV, \quad I_3 = \int_D \rho (x^2 + y^2) dV,$$

$dV = dx dy dz$, sono gli autovalori dell'operatore (3.7.17) e le coordinate sono scelte in modo tale che gli assi del sistema di coordinate coincidono con gli assi principali del corpo rigido D con la distribuzione di massa $\rho = \rho(x, y, z)$. Il sistema hamiltoniano

$$\dot{m} = \{m, H\}$$

rispetto alla parentesi

$$\{m_1, m_2\} = m_3, \quad \{m_2, m_3\} = m_1, \quad \{m_3, m_1\} = m_2$$

nelle notazioni tridimensionali assume la classica forma di equazioni di Eulero

$$\begin{aligned} I_1 \dot{\omega}_1 &= (I_2 - I_3) \omega_2 \omega_3 \\ I_2 \dot{\omega}_2 &= (I_3 - I_1) \omega_3 \omega_1 \\ I_3 \dot{\omega}_3 &= (I_1 - I_2) \omega_1 \omega_2. \end{aligned} \tag{3.7.23}$$

Il casimir della parentesi

$$m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 =: m^2 \tag{3.7.24}$$

è il cosiddetto integrale geometrico delle equazioni di Eulero (cioè, che non dipende dalla scelta di hamiltoniana). Allora, le traiettorie del sistema (3.7.23) sono le intersezioni di una sfera con un'ellissoide

$$m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 = m^2$$

$$\frac{m_1^2}{2I_1} + \frac{m_2^2}{2I_2} + \frac{m_3^2}{2I_3} = E$$

dove m e E sono due costanti positive.

Per determinare la dinamica sulle traiettorie bisogna tener presente che la restrizione del flusso (3.7.23) sulla foglia simplettica è un flusso sulla varietà simplettica (3.7.24) con la struttura simplettica

$$\Omega_m = m \cos \theta d\phi \wedge d\theta$$

(vedi l'esercizio 3.6.20) dove θ , ϕ sono le coordinate sferiche sulla foglia:

$$m_1 = m \cos \phi \cos \theta$$

$$m_2 = m \sin \phi \cos \theta$$

$$m_3 = m \sin \theta.$$

La restrizione della hamiltoniana sulla foglia diventa

$$H_m = \frac{m^2}{2} \left(\frac{\cos^2 \phi \cos^2 \theta}{I_1} + \frac{\sin^2 \phi \cos^2 \theta}{I_2} + \frac{\sin^2 \theta}{I_3} \right)$$

e la parentesi di Poisson è scritta nel seguente modo

$$\{\theta, \phi\}_m = \frac{1}{m \cos \theta}.$$

La dinamica $\phi = \phi(t)$, $\theta = \theta(t)$ definita dalle equazioni hamiltoniane

$$\dot{\phi} = \{\phi, H_m\}_m = m \sin \theta \left[\frac{\cos^2 \phi}{I_1} + \frac{\sin^2 \phi}{I_2} - \frac{1}{I_3} \right]$$

$$\dot{\theta} = \{\theta, H_m\}_m = m \frac{I_1 - I_2}{I_1 I_2} \cos \theta \cos \phi \sin \phi$$

può essere calcolata tramite integrali ellittici in base all'integrale di energia

$$\frac{\cos^2 \phi \cos^2 \theta}{I_1} + \frac{\sin^2 \phi \cos^2 \theta}{I_2} + \frac{\sin^2 \theta}{I_3} = \frac{2E}{m^2}.$$

Consideriamo ora il moto di corpo rigido in presenza di forze esterne. Più specificatamente, si consideri il moto nel campo gravitazionale uniforme (solo il caso $n = 3$ viene considerato) di un corpo rigido attorno a un punto fisso (la cosiddetta *trottola*). In questo caso conviene scegliere l'origine sia del sistema di coordinate fisse sia del sistema mobile nel punto fisso del corpo rigido. Si denoti \mathbf{x}^0 il vettore raggio del baricentro del corpo rigido rispetto al sistema mobile attaccato al corpo. Inoltre, denotando con \mathbf{g} il vettore della forza gravitazionale, costante in coordinate fisse \mathbf{X} , lo stesso vettore considerato in sistema mobile viene denotato con \mathbf{p} :

$$\mathbf{g} = g(t) \mathbf{p}.$$

Il vettore \mathbf{p} dipende dal tempo, a differenza dal vettore \mathbf{g} . La dipendenza dei vettori del momento angolare $\mathbf{m} = (m_1, m_2, m_3)$ e del campo gravitazionale $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$ calcolati nel sistema di riferimento mobile attaccato alla trottola viene descritta dal seguente teorema:

Teorema 3.7.13 *Si consideri il sistema hamiltoniano sullo spazio duale all'algebra di Lie $e(3)$ con la parentesi di Lie - Poisson*

$$\{m_i, m_j\} = \epsilon_{ijk} m_k$$

$$\{m_i, p_j\} = \epsilon_{ijk} p_k$$

$$\{p_i, p_j\} = 0$$

e con hamiltoniana

$$H = \frac{1}{2} \langle m, I^{-1}(m) \rangle + (\mathbf{x}^0, \mathbf{p}).$$

Dimostrazione: Utilizzando la trasformazione $\mathbf{X} = g(t)\mathbf{x}$ tra le coordinate mobili e coordinate fisse, per il momento angolare arriviamo alla formula simile a

Le equazioni hamiltoniane si ottengono nella seguente forma:

$$\dot{\mathbf{m}} = I^{-1}(\mathbf{m}) \times \mathbf{m} + \mu \mathbf{x}^0 \times \mathbf{p}$$

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{p} \times I^{-1}(\mathbf{m}).$$

3.8 Riduzione di sistemi hamiltoniani con simmetrie

In questo paragrafo affronteremo la relazione tra simmetrie dell'hamiltoniana, integrali primi del moto e riduzione del ordine delle equazioni del moto. Sia (P, ω) , $\dim P = 2n$, una varietà симплекtica. Visto che i sistemi hamiltoniani a un grado di libertà sono sempre integrabili per quadrature, consideriamo solo il caso $n > 1$. Ricordiamo che una trasformazione $\Phi : P \rightarrow P$ è una simmetria dell'Hamiltoniana H se

$$\Phi^* H = H \quad \text{e} \quad \Phi^* \omega = \omega$$

(cioè, Φ è una trasformazione canonica). Per esempio se H ha una coordinata ciclica q_n ,

$$H = H(q_1, \dots, q_{n-1}, p_1, \dots, p_n)$$

allora la traslazione $q_n \rightarrow q_n + s$ è una simmetria dell'hamiltoniana per ogni s .

Definizione 3.8.1 *Sia Φ_s , $s \in \mathbb{R}$, una famiglia ad un parametro di simmetrie dell'hamiltoniana H . Tale famiglia si dice gruppo ad un parametro di simmetrie se*

1. $\Phi_0 = id$,
2. $\Phi_{s_1+s_2} = \Phi_{s_1} \circ \Phi_{s_2}$.

Si è visto nell'esercizio 3.4.5, che ogni gruppo ad un parametro di simmetrie di un sistema hamiltoniano, genera una simmetria infinitesima definita dal campo

$$X = \frac{d}{ds} \Phi_s(x)|_{s=0}.$$

Inoltre per il teorema 3.4.8 per ogni simmetria infinitesima X , esiste *localmente* una funzione F su P (il generatore hamiltoniano) tale che $X = X_F$ ed inoltre

$$\{H, F\} = \frac{d}{ds}H(\Phi_s(x))|_{s=0} = 0$$

per l'invarianza di H rispetto a Φ_s . Faremo ora vedere che l'esistenza di una famiglia ad un parametro di simmetrie del sistema hamiltoniano permette di definirne una riduzione su una varietà simplettica di dimensione $2n - 2$.

L'idea di base della costruzione della varietà simplettica ridotta è di considerare il quoziente

$$P/\Phi_s := \{x \in P \mid x_1 \sim x_2 \text{ se } x_2 = \Phi_s(x_1) \text{ per un certo } s \in \mathbb{R}\} \quad (3.8.1)$$

della varietà simplettica rispetto all'azione del gruppo a un parametro Φ_s . In altre parole, P/Φ_s è l'insieme delle orbite del gruppo Φ_s . Ogni funzione H su P invariante rispetto all'azione del gruppo definisce una funzione sul quoziente P/Φ_s .

Supponiamo che il quoziente porti una struttura di una varietà liscia. Siccome le orbite hanno la dimensione uno, il quoziente dovrebbe aver la dimensione $2n - 1$. Infatti, per costruire una carta vicino ad un'orbita

$$\{\cup_s \Phi_s(x_0)\} \in P/\Phi_s$$

di un punto $x_0 \in P$ basta trovare un'ipersuperficie $\tilde{P} \subset P$ che passi attraverso x_0 ed è trasversale alle orbite. La trasversalità significa che gli sottospazi di $T_{x_0}P$ tangenti all'ipersuperficie

$$T_{x_0}\tilde{P} \text{ ed all'orbita } T_{x_0}\Phi_s(x_0) = \text{span } X(x_0)$$

generano l'intero spazio tangente $T_{x_0}P$. Localmente tale ipersuperficie sempre esiste se il campo vettoriale X è diverso da zero nel punto x_0 (basta applicare la rettificazione del campo vettoriale vicino a x_0). Allora, le coordinate locali (z^1, \dots, z^{2n-1}) sull'ipersuperficie trasversale definiscono le coordinate su P/Φ_s .

Abbiamo stabilito che vicino al punto $x_0 \in P$ tale che $X(x_0) \neq 0$ almeno il quoziente *locale*

$$(P/\Phi_s)_{\text{loc}} := \{x \in U \subset P \mid \quad (3.8.2)$$

$$x_1 \sim x_2 \text{ se } x_2 = \Phi_s(x_1) \text{ per un certo } s \in \mathbb{R} \text{ e } \cup_{t \in [0, s]} \Phi_t(x_1) \subset U\},$$

per un aperto sufficientemente piccolo U , $x_0 \in U \subset P$, è ben definito ed è una varietà liscia di dimensione $2n - 1$.

La costruzione precedente del quoziente rispetto ad azione di un gruppo a un parametro è universale e ben nota. In particolare, questa costruzione viene utilizzata nella teoria delle equazioni differenziali per ridurre *di uno* l'ordine del sistema delle equazioni differenziali che ammette un integrale primo. Ora sfruttiamo la geometria simplettica per ridurre *di due* l'ordine del sistema hamiltoniano utilizzando un solo integrale primo!

Prima di tutto, si osservi che le funzioni sull'quoziente P/Φ_s possono essere identificate come le funzioni H su P che *commutino* con il generatore hamiltoniano F del gruppo Φ_s :

$$\mathcal{C}^\infty(P/\Phi_s) = \{H \in \mathcal{C}^\infty(P) \text{ tali che } \{H, F\} = 0\}. \quad (3.8.3)$$

Poi, l'invarianza rispetto al gruppo delle trasformazioni canoniche Φ_s della struttura simplettica implica l'invarianza della struttura di Poisson. Possiamo quindi definire la parentesi di Poisson sul quoziente nel seguente modo. Date due funzioni H_1, H_2 su P che commutano con F , si consideri la parentesi di Poisson $\{H_1, H_2\}$. Come è stato spiegato già più volte, anche la funzione $\{H_1, H_2\}$ commuta con F , ovvero definisce una funzione sul quoziente.

La costruzione precedente definisce una parentesi di Poisson sulla varietà P/Φ_s . Ma la dimensione di questa varietà è dispari, cioè, la parentesi di Poisson sul quoziente per forza deve essere degenerare. In realtà non è difficile capire qual'è il casimir della parentesi sul quoziente: lo è la funzione F stessa. Infatti, questa funzione genera l'azione del gruppo Φ_s che diventa banale su P/Φ_s per definizione del quoziente. Applicando il teorema ?? otteniamo una struttura simplettica sulle superficie di livello del casimir:

$$P_{\text{rid}}^f := (F(x) = f) / \Phi_s \quad (3.8.4)$$

per i valori del parametro f sufficientemente vicini a $f_0 = F(x_0)$. È ovvio che la dimensione della foglia simplettica (3.8.4) nella varietà $(2n - 1)$ -dimensionale P/Φ_s è uguale a $2n - 2$.

Infine, l'hamiltoniana di partenza H invariante rispetto al gruppo Φ_s definisce una funzione sul quoziente e, quindi, la restrizione sul foglio simplettico P_{rid}^f . Denotiamo questa restrizione con

$$H_{\text{rid}}^f \in C^\infty \left(P_{\text{rid}}^f \right).$$

Il significato del flusso generato dall'hamiltoniana ridotta sulla varietà P_{rid}^f può essere interpretato nel seguente modo. Grazie alla commutatività $\{H, F\} = 0$ il flusso hamiltoniano generato da X_H commuta con il flusso generato da X_F . Quindi, il flusso generato da X_H "permuta" le orbite del gruppo Φ_s , cioè, definisce un flusso sullo spazio delle orbite. Questo è esattamente il flusso generato dall'hamiltoniana ridotta H_{rid}^f dopo la restrizione sulla foglia simplettica $F(x) = f$.

Abbiamo dimostrato il seguente

Teorema 3.8.2 *Data una varietà simplettica (P, ω) di dimensione $2n > 2$ e un gruppo a un parametro Φ_s di simplettomorfismi di P generato da $F \in C^\infty(P)$. Allora, localmente, vicino a un punto $x_0 \in P$ tale che*

$$\frac{d}{ds} \Phi_s(x_0)|_{s=0} \neq 0$$

il quoziente

$$P/\Phi_s$$

porta una struttura naturale di una varietà di Poisson; le foglie simplettiche

$$P_{\text{rid}}^f := (F(x) = f) / \Phi_s$$

di questa varietà hanno la dimensione $2n - 2$. Inoltre, data un'hamiltoniana qualsiasi H invariante rispetto al gruppo Φ_s è definita la proiezione sul quoziente P/Φ_s del flusso hamiltoniano generato da H ; dopo la restrizione sulla foglia simplettica P_{rid}^f questa proiezione diventa un flusso hamiltoniano sulla varietà simplettica P_{rid}^f generato dall'hamiltoniana H_{rid}^f .

Esempio. Data un'hamiltoniana H su $P = \mathbb{R}^{2n}$ che non dipende da p_n , allora il flusso generato da $F = p_n$ sono le traslazioni

$$\Phi_s : q_n \mapsto q_n + s.$$

Le coordinate sul quoziente P/Φ_s sono $(q_1, \dots, q_{n-1}, p_1, \dots, p_{n-1}, p_n)$. La coordinata p_n commuta con le altri, cioè, appunto, è il casimir della parentesi sul quoziente. Le varietà simpletiche ridotte sono le foglie

$$P_{\text{rid}}^f = \mathbb{R}^{2n-2} \ni (q_1, \dots, q_{n-1}, p_1, \dots, p_{n-1}), \quad p_n = f.$$

L'hamiltoniana ridotta è

$$H_{\text{rid}}^f = H(q_1, \dots, q_{n-1}, p_1, \dots, p_{n-1}, f).$$

Data una soluzione $(q_1(t), \dots, q_{n-1}(t), p_1(t), \dots, p_{n-1}(t))$ del sistema hamiltoniano su P_{rid}^f scritto nella solita forma

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H_{\text{rid}}^f}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H_{\text{rid}}^f}{\partial q_i}, \quad i = 1, \dots, n-1,$$

basta calcolare ancora una quadratura

$$\dot{q}_n = \frac{\partial}{\partial f} H(q_1(t), \dots, q_{n-1}(t), p_1(t), \dots, p_{n-1}(t), f)$$

per risolvere completamente il sistema hamiltoniano.

Il caso generale essenzialmente riduce all'esempio precedente, come segue dal seguente risultato.

Esercizio 3.8.3 *Data una varietà simpletica P di dimensione $2n > 2$, una funzione liscia $F(x)$ su P e un punto $x_0 \in P$ tale che $\nabla F(x_0) \neq 0$, si dimostri che vicino a x_0 esistono le coordinate locali $(y^1, \dots, y^{2n-2}, s, f)$ su P tali che*

$$F(y^1, \dots, y^{2n-2}, s, f) = f$$

e le parentesi di Poisson hanno la seguente forma:

$$\begin{aligned} \{y^j, y^k\} &= \pi^{jk}(y, f) \\ \{y^j, s\} &= 0 \\ \{y^j, f\} &= 0 \\ \{s, f\} &= 1 \end{aligned} \tag{3.8.5}$$

dove la matrice $(\pi^{jk}(y, f))_{1 \leq j, k \leq 2n-2}$ è non degenere. Si verifichi che le variabili y^1, \dots, y^{2n-2} possono essere usate come le coordinate locali sulla varietà ridotta P_{rid}^f , e che la parentesi di Poisson sulla varietà ridotta è definita dalla matrice $(\pi^{jk}(y, f))$. Inoltre, si dimostri

che ogni hamiltoniana H che commuta con F nelle coordinate (y, s, f) non dipende dalla variabile s , l'hamiltoniana ridotta assume la forma

$$H_{\text{rid}}^f := H(y^1, \dots, y^{2n-2}, f),$$

e che l'integrazione del sistema hamiltoniano con hamiltoniana H si riduce con l'integrazione $y = y(t)$ del sistema hamiltoniano a $n - 1$ gradi di libertà e a una quadratura

$$\dot{s} = \frac{\partial H(y(t), f)}{\partial f}.$$

Nel caso generale in cui il sistema hamiltoniano abbia k famiglie ad un parametro di simmetrie, il processo di riduzione è più complicato e non è sempre possibile ridurre i gradi di libertà a $2n - 2k$ se le simmetrie *non commutano* tra di loro. Per esempio l'hamiltoniana di una particella di massa m in un campo centrale in \mathbb{R}^3 ha la forma $H(x, p) = |p|^2/2m + U(|x|)$ ed ha simmetria sferica. Quindi esistono tre quantità conservate che sono le tre componenti del momento angolare

$$M_1 = x_2 p_3 - x_3 p_2, \quad M_2 = x_3 p_1 - x_1 p_3, \quad M_3 = x_1 p_2 - x_2 p_1$$

con parentesi di Poisson

$$\{M_i, M_j\} = \epsilon_{ijk} M_k.$$

Come è ben noto il moto di una particella in un campo centrale in \mathbb{R}^3 può essere ridotto a un sistema con due gradi di libertà, quindi la presenza di tre simmetrie riduce il sistema di solo quattro gradi di libertà.

Esiste una procedura abbastanza generale per ridurre lo spazio delle fasi in presenza di simmetrie. Sia (P, ω) una varietà simplettica e supponiamo che sia definita l'azione simplettica di un gruppo di Lie G finito-dimensionale su P , cioè un omomorfismo da G al gruppo $\mathcal{D}(P)$ dei diffeomorfismi di P tale che

$$G \ni g \rightarrow \Phi_g \in \mathcal{D}(P),$$

tale che

$$\Phi_g^*(\omega) = \omega, \quad \Phi_g^* H = H, \quad \forall g \in G.$$

Si consideri l'algebra di Lie \mathfrak{g} del gruppo G e sia e_1, \dots, e_r una base in \mathfrak{g} tale che

$$[e_i, e_j] = c_{ij}^k e_k.$$

Ad ogni elemento e_i dell'algebra di Lie possiamo associare il gruppo ad un parametro $g_t^i = \exp(te_i)$ a cui corrisponde il gruppo ad un parametro di diffeomorfismi $\Phi_t^{e_1}$. Definiamo

$$X_{e_i}(x) = \frac{d}{dt} \Phi_t^{e_1}(x)|_{t=0}$$

il vettore tangente a $T_x P$. Osserviamo che la mappa che associa ad un elemento ξ dell'algebra di Lie \mathfrak{g} un campo vettoriale X_ξ è una mappa lineare e soddisfa

$$[X_\xi, X_\eta] = X_{[\xi, \eta]}, \quad \xi, \eta \in \mathfrak{g}.$$

Definizione 3.8.4 L'azione simplettica di un gruppo di Lie G su (P, ω) è detta *poissoniana* se $\forall \xi \in \mathfrak{g}$ esiste una funzione $F_\xi \in C^\infty(P)$ tale che

$$dF_\xi = -\omega(X_\xi, \cdot).$$

Inoltre data e_1, \dots, e_r una base in \mathfrak{g} si ha

$$\{F_{e_i}, F_{e_j}\} = c_{ij}^k F_{e_k},$$

dove c_{ij}^k sono le costanti di struttura di \mathfrak{g} .

Esempio Si consideri l'esempio 3.4.10. Sia $P = T^*M$ e si supponga che il gruppo di Lie G agisca su M come gruppo di diffeomorfismi. L'azione del gruppo G può essere sollevata al fibrato cotangente T^*M . Siano e_1, \dots, e_r una base dell'algebra di Lie del gruppo G e si consideri il campo $X_{e_i}(q)$ generato dal sottogruppo ad un parametro $\Phi_t^{e_i}$ associato ad e_i . Le funzioni

$$\begin{aligned} F_{e_i}(q, p) &= p_k X_{e_i}^k(q), \quad i = 1, \dots, r \\ X_{e_i}(q) &= (X_{e_i}^1(q), \dots, X_{e_i}^n(q)), \quad X_{e_i}(q) = \left. \frac{d}{dt} \Phi_t^{e_i}(q) \right|_{t=0}, \end{aligned} \quad (3.8.6)$$

sono definite globalmente su T^*M e sono i generatori hamiltoniani dell'azione del gruppo G su M . La loro parentesi di Poisson ha la forma.

$$\{F_{e_i}, F_{e_j}\} = \sum_{l=1}^n p_l [X_{e_i}, X_{e_j}]_l = c_{ij}^k F_{e_k}.$$

L'azione poissoniana del gruppo G sulla varietà P induce una applicazione dalla varietà P al duale di \mathfrak{g} che si chiama *mappa momento*. Infatti, ad ogni $\xi \in \mathfrak{g}$ corrisponde un'hamiltoniana F_ξ , si ottiene in questo modo una mappa dall'algebra di Lie \mathfrak{g} a $C^\infty(P)$. Valutando questa mappa in un punto dello spazio P si ottiene una mappa da $\mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $\xi \rightarrow F_\xi(x)$.

Definizione 3.8.5 La *mappa momento* $\mathcal{M} : P \rightarrow \mathfrak{g}^*$ associa ad un punto $x \in P$ un elemento $\rho \in \mathfrak{g}^*$ tale che per ogni elemento $\xi \in \mathfrak{g}$ si ha

$$\rho(\xi) = F_\xi(x).$$

La controimmagine della mappa momento \mathcal{M} definisce un insieme di livello su P che denotiano con P_ρ dove $\rho \in \mathfrak{g}^*$. Si ha che $x \in P_\rho$ se $\forall \xi \in \mathfrak{g} \rho(\xi) = F_\xi(x)$. Per valori regolari di ρ , P_ρ può essere una varietà. Osserviamo che se $\dim \mathfrak{g} = r$ ed e_1, \dots, e_r sono una base di \mathfrak{g} allora la controimmagine della mappa momento è definita dall'intersezione delle r superfici di livello

$$F_{e_i}(x) = \rho(e_i), \quad i = 1, \dots, r$$

e dunque $\dim P_\rho = 2n - r$.

Sia ora G_ρ il sottogruppo di G tale che

$$Ad_g^* \rho = \rho, \quad \forall g \in G_\rho.$$

Il gruppo G_ρ lascia invariato l'insieme di livello P_ρ . Lo spazio delle fasi ridotto si ottiene come quoziente rispetto all'azione del gruppo G_ρ . Affinchè lo spazio quoziente possa avere la struttura di varietà è necessario fare delle ipotesi. Supponiamo che

- P_ρ sia una varietà;
- gli elementi del gruppo G_ρ operano su P_ρ senza lasciare punti fissi.

Con queste ipotesi si può definire una struttura di varietà regolare sul quoziente

$$R_\rho = P_\rho / G_\rho.$$

La varietà così ottenuta si chiama spazio delle fasi ridotto.

Sia $[\xi]$ un vettore dello spazio tangente $T_r R_\rho$ nel punto r dove r è una delle orbite del gruppo G_ρ . Il vettore $[\xi]$ si ottiene dai vettori ξ appartenenti a $T_x P_\rho$, dove x è un punto dell'orbita r , per mezzo della proiezione $\pi : P_\rho \rightarrow R_\rho$.

Per definire una forma simplettica sullo spazio delle fasi ridotto è necessario dimostrare che la restrizione della forma ω a R_ρ è non degenere.

Lemma 3.8.6 *Lo spazio tangente alla varietà di livello del momento, $T_x P_\rho$, è antiortogonale a $T_x(Gx)$, lo spazio tangente all'orbita del gruppo G .*

Dimostrazione: I due spazi sono antiortogonali se $\forall \eta \in T_x P_\rho$ le derivate delle funzione di hamilton F_{e_i} corrispondenti ai flussi generati da G rispetto al direzione η sono nulle. Poichè F_{e_i} sono costanti sulla varietà di livello del momento si ha

$$X_\eta F_{e_i}(x) = 0, \forall \eta \in T_x P_\rho, \quad i = 1, \dots, r,$$

da cui segue l'antiortogonalità.

Possiamo ora definire una forma simplettica ω_ρ sullo spazio delle fasi ridotto. Siano $\xi, \eta \in T_x P_\rho$ e $[\xi], [\eta]$ le corrispondenti classi di equivalenza nello spazio $T_x P_\rho / T_x(G_\rho x)$.

Proposizione 3.8.7 *Sullo spazio delle fasi R_ρ la formula*

$$\omega_\rho([\xi], [\eta]) := \omega(\xi, \eta)|_{T_r R_\rho}, \quad \xi, \eta \in T_x P_\rho$$

definisce una forma simplettica non degenere.

Dimostrazione: Osserviamo che la definizione della forma simplettica ω_ρ non dipende dalla scelta del punto x sull'orbita di r in quanto la forma simplettica è invariante rispetto all'azione del gruppo G . Inoltre non dipende dalla scelta dei vettori $\xi, \eta \in T_x P_\rho$ in quanto $T(Gx)$ è antiortogonale a $T_x P_\rho$ per il lemma 3.8.6. Infatti sia $\xi', \eta' \in T_x(G_\rho x) = T_x P_\rho \cap T_x(Gx)$. Per il lemma 3.8.6 si ha

$$\omega(\xi + \xi', \eta + \eta')|_{T_r R_\rho} = \omega(\xi, \eta)|_{T_r R_\rho} + \omega(\xi', \eta')|_{T_r R_\rho} = \omega(\xi, \eta)|_{T_r R_\rho}.$$

La forma $\omega_\rho([\xi], [\eta])$ è non degenere in quanto se fosse

$$\omega_\rho([\xi], [\eta]) = 0, \quad \forall [\eta] \in T_r R_\rho$$

significa che $\xi \in T_x P_\rho \cap T_x(Gx) = T_x(G_\rho x)$ e dunque $[\xi] = 0$.

Il seguente corollario è immediata conseguenza dell'esistenza di una forma simplettica non degenere su R_ρ .

Corollario 3.8.8 *Lo spazio ridotto R_p ha dimensione pari.*

Esempio. Si consideri una particella di massa m nello spazio tridimensionale e soggetta ad un potenziale a simmetria sferica. Lo spazio delle fasi è $P = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ e l'hamiltoniana $H(q, p)$

$$H(q, p) = \frac{|p|^2}{2m} + U(|q|).$$

Il gruppo $G = SO(3)$ agisce su \mathbb{R}^3 . I generatori dell'algebra di Lie $so(3)$ sono

$$e_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

con

$$[e_i, e_j] = \epsilon_{ijk} e_k.$$

Il gruppo ad un parametro di rotazioni sulla base del fibrato è dato da

$$\phi_t^{e_i} q = \exp(te_i)q, \quad i = 1, 2, 3,$$

che rappresenta una rotazione con asse q_i . L'azione sulla base si può sollevare a tutto il fibrato tramite $(\phi_t^{e_i})^{-1*} p_k$

La trasformazione $(q, p) \rightarrow \Phi_t^{e_i}(q, p) = (\phi_t^{e_i} q, (\phi_t^{e_i})^{-1*} p)$ lascia invariata l'hamiltoniana $H(q, p)$. Consideriamo il campo vettoriale X_{e_i} dato da

$$X_{e_i}(q, p) = \frac{d}{dt} \Phi_t^{e_i}(q, p)|_{t=0}$$

È immediato verificare che

$$X_{e_1}(q, p) = (0, -q^3, q^2, 0, p_3, -p_2)$$

a cui corrisponde l'hamiltoniana $M_{e_1} = q^2 p_3 - q^3 p_2$. Similmente per gli altri due generatori dell'algebra di Lie e_2 , ed e_3 le corrispondenti hamiltoniane sono $M_{e_2} = q^3 p_1 - q^1 p_3$ e $M_{e_3} = q^1 p_2 - q^2 p_1$. È noto che le componenti del momento angolare M_{e_i} soddisfano la relazione di commutazione

$$\{M_{e_i}, M_{e_j}\} = \epsilon_{ijk} M_{e_k}$$

L'algebra di Lie $(so(3), [,])$ dove $[,]$ è il commutatore è isomorfa all'algebra di Lie (\mathbb{R}^3, \times) dove \times è il prodotto vettoriale in \mathbb{R}^3 . Questo isomorfismo è dato da

$$\vec{\xi} = (\xi^1, \xi^2, \xi^3) \rightarrow \xi = \begin{pmatrix} 0 & -\xi^3 & \xi^2 \\ \xi^3 & 0 & -\xi^1 \\ -\xi^2 & \xi^1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il duale $so(3)^*$ si può identificare con \mathbb{R}^3 attraverso la mappa

$$\mathbb{R}^3 \ni \vec{\rho} \rightarrow \rho \in so(3)^*$$

dove per $\xi \in so(3)$

$$\rho(\xi) = (\vec{\rho}, \vec{\xi}),$$

dove $(\vec{\rho}, \vec{\xi})$ è il prodotto scalare in \mathbb{R}^3 . Con questa identificazione la mappa momento associa ad ogni punto dello spazio delle fasi un vettore $\vec{\rho} = (\rho_1, \rho_2, \rho_3) \in \mathbb{R}^3$ tale che per ogni elemento $\xi \in \mathfrak{g}$, $\xi = \xi^i e_i$, $\xi^i \in \mathbb{R}$, si ha

$$M_\xi(x) = \xi^i \rho_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Consideriamo lo spazio delle fasi ridotto P_ρ , $\dim P_\rho = 3$, dato dalle superfici di livello

$$M_{e_i} = \rho_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Senza perdita di generalità supponiamo che $\rho_1 = \mu$, $\rho_2 = \rho_3 = 0$. In questo caso $q^1 = p_1 = 0$ e il moto avviene sulla superficie tridimensionale $q^1 = p^1 = 0$ e $q^2 p_3 - q^3 p_2 = \mu$. Chiaramente le rotazioni con asse q^1 lasciano invariato il vettore $\rho_1 = \mu$, $\rho_2 = \rho_3 = 0$. Dunque il gruppo ad un parametro $\Phi_t^{e_1}$ lascia invariato P_ρ . Fattorizzando P_ρ per l'azione di questo gruppo, si ottiene uno spazio delle fasi bidimensionale. Introduciamo le coordinate polari

$$q^2 = r \cos \theta, \quad q^3 = r \sin \theta,$$

e i momenti coniugati

$$p_2 = p_r \cos \theta - \frac{p_\theta}{r} \sin \theta, \quad p_3 = p_r \sin \theta + \frac{p_\theta}{r} \cos \theta$$

da cui segue che

$$p_\theta = \mu.$$

r, p_r sono le coordinate canoniche nello spazio delle fasi ridotto con hamiltoniana

$$\tilde{H}(r, p_r) = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{\mu^2}{2mr^2} + U(r).$$

La dipendenza di θ dal tempo si ottiene per quadratura dall'equazione

$$\dot{\theta} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial p_\theta} = \frac{\mu}{mr^2}.$$

3.9 Le sottovarietà lagrangiane

Definizione 3.9.9 Una sottovarietà $\Lambda \in T^*M$, $\dim M = n$, è detta **lagrangiana** se la sua dimensione è n e la 2-forma simplettica ω si annulla sui vettori tangenti a Λ : $\forall v, u \in T\Lambda$, $\omega(u, v) = 0$.

Ora vediamo di caratterizzare le sottovarietà lagrangiane. In generale una sottovarietà $\Lambda \in T^*M$ di dimensione n può essere descritta almeno localmente da un numero n di equazioni

$$f_i(q^j, p_k) = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.9.7)$$

dove le f_i sono funzioni indipendenti su T^*M , cioè la matrice $2n \times n$

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial q^j}, \frac{\partial f_i}{\partial p_k} \right)$$

ha rango massimo.

Teorema 3.9.10 *La sottovarietà Λ definita dalle equazioni (3.9.7) è lagrangiana se e solo se le funzioni f_i sono in involuzione su Λ , cioè*

$$\{f_i, f_j\}|_{\Lambda} = 0, \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (3.9.8)$$

Dimostrazione: Si considerino i campi vettoriali X_{f_i} generati dalle f_i , cioè $\omega(X_{f_i}, \cdot) = -df_i$. La derivata di f_i rispetto alla direzione del vettore X_{f_j} è data da

$$X_{f_j} f_i = \{f_i, f_j\}.$$

Se vale la (3.9.8) segue che su Λ si ha che $X_{f_j} f_i = 0$, cioè i campi X_{f_j} sono tangenti alla superficie e inoltre X_{f_j} sono linearmente indipendenti in quanto df_i per ipotesi lo sono. Dunque X_{f_j} sono una base di $T\Lambda$. Poichè

$$\omega(X_{f_i}, X_{f_j}) = \{f_i, f_j\}$$

segue da (3.9.8) che $\omega(X_{f_i}, X_{f_j}) = 0$, $i, j = 1, \dots, n$ che equivale a dire che ω ristretta al tangente $T\Lambda$ è identicamente nulla. Viceversa supponiamo che Λ sia una sottovarietà lagrangiana. Ogni vettore tangente $v \in T\Lambda$ è caratterizzato dall'equazione $df_i(v) = 0$, cioè

$$\omega(X_{f_i}, v) = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.9.9)$$

Consideriamo ora il complemento ortogonale simplettico di $T\Lambda$, vale a dire l'insieme

$$T\Lambda^{\perp} = \{v \in TP \mid \omega(u, v) = 0, \quad \forall u \in T\Lambda\}$$

La dimensione di $T\Lambda^{\perp}$ è complementare a quella di $T\Lambda$ e dunque uguale a n . Poichè Λ è lagrangiano segue che $T\Lambda \subset T\Lambda^{\perp}$. Ma poichè i due sottospazi hanno la stessa dimensione significa che sono uguali. Dunque ogni vettore ortogonale a $T\Lambda$ sta in $T\Lambda$. Quindi per la (3.9.9) i vettori X_{f_i} sono tangenti a Λ e dunque per la lagrangianità di Λ si ha che

$$\omega(X_{f_i}, X_{f_j}) = 0 = \{f_i, f_j\}.$$

Esempio Le più semplici sottovarietà lagrangiane sono date da

$$\Lambda_{q_0} = \{(q, p) \mid q = q_0, p \text{ arbitrario}\}$$

o

$$\Lambda_{p_0} = \{(q, p) \mid p = p_0, q \text{ arbitrario}\}$$

La trasformazione canonica $(q, p) \rightarrow (p, -q)$ scambia le due sottovarietà lagrangiane Λ_{q_0} e Λ_{p_0} .

Una sottovarietà lagrangiana può essere descritta localmente in modo parametrico dalle equazioni

$$q^i = q^i(u^s), \quad p_i = p_i(u^s), \quad s = 1, \dots, n$$

con la richiesta che la matrice $n \times 2n$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial q^i}{\partial u^s} & \frac{\partial p_i}{\partial u^s} \end{pmatrix}$$

abbia rango massimo.

Teorema 3.9.11 *La sottovarietà Λ è lagrangiana se e solo se valgono le uguaglianze*

$$\frac{\partial p_i}{\partial u^h} \frac{\partial q^i}{\partial u^k} - \frac{\partial p_i}{\partial u^k} \frac{\partial q^i}{\partial u^h} = 0. \quad (3.9.10)$$

Dimostrazione: Supponiamo che nelle coordinate (q, p) possiamo scrivere localmente la forma simplettica nella forma $\omega = dp_i \wedge dq^i$. Sostituendo le equazioni parametriche nella forma simplettica si ha

$$\omega|_{\Lambda} = \frac{\partial p_i}{\partial u^h} du^h \wedge \frac{\partial q^i}{\partial u^k} du^k \quad (3.9.11)$$

e per l'antisimmetria del prodotto esterno l'annullarsi di ω è equivalente alla (3.9.10).

Infine consideriamo una classe particolare di sottovarietà lagrangiane che hanno una rappresentazione parametrica della forma

$$p_i = W_i(q^j), \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (3.9.12)$$

Proposizione 3.9.12 *Le equazioni (3.9.12) definiscono una sottovarietà lagrangiana se e solo se la 1-forma su M*

$$W = W_i dq^i$$

è chiusa.

Dimostrazione: Usando il teorema 3.9.11, con $u^k = q^k$, la condizione (3.9.10) diventa

$$\frac{\partial p_k}{\partial q^h} - \frac{\partial p_h}{\partial q^k} = 0$$

o

$$\frac{\partial W_k}{\partial q^h} - \frac{\partial W_h}{\partial q^k} = 0.$$

Quest'ultima condizione è equivalente a $dW = 0$.

Osserviamo che se W è chiusa, è localmente esatta e quindi esiste $S : U \rightarrow \mathbb{R}$, $U \subset M$ tale che $dS = W$ e quindi

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q^i}.$$

La funzione S si chiama *funzione generatrice* della sottovarietà lagrangiana.

Osservazione 3.9.13 *La funzione generatrice di una sottovarietà lagrangiana si può ottenere da un sistema hamiltoniano con hamiltoniana H e con n integrali primi f_i in involuzione tali che*

$$\det \left(\frac{\partial f_i}{\partial p_k} \right) \neq 0. \quad (3.9.13)$$

Consideriamo per ogni $a = (a_1, \dots, a_n)$, $a_i \in \mathbb{R}$, la sottovarietà lagrangiana Λ_a descritta dalle equazioni

$$f_s(q, p) = a_s, \quad s = 1, \dots, n.$$

La condizione (3.9.13) permette di applicare il teorema della funzione implicita e risolvere le equazioni $f_s(q, p) = a_s$ rispetto a p_k e ottenere le funzioni

$$p_i = W_i(q, a).$$

Poichè l'equazione sopra descrive per costruzione una sottovarietà lagrangiana Λ_a per la proposizione 3.9.12 la 1-forma $W_i dq^i$ è chiusa. Esiste quindi localmente una funzione $S(q^i, a_k)$ per cui $p_i = \partial_{q^i} S$. Inoltre, poichè

$$\{f_i, H\} = 0,$$

il campo Hamiltoniano soddisfa la condizione $\omega(X_{f_i}, X_H) = 0$ e dunque $X_H \in T\Lambda_a$. Questo significa che se le traiettorie del flusso hamiltoniano intersecano Λ_a , giacciono interamente su Λ_a .

3.10 Trasformazioni canoniche

Si consideri una varietà P liscia su cui è definita una parentesi di Poisson. Nella definizione 3.4.1 si è visto che un diffeomorfismo $\Phi : P \rightarrow P$ è una trasformazione canonica di P se la mappa Φ^* indotta sullo spazio delle funzioni,

$$\Phi^* : \mathcal{C}^\infty(P) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(P), \quad \Phi^* f(x) = f(\Phi(x)),$$

è un automorfismo dell'algebra di Lie cioè $\Phi^* \{f, g\} = \{\Phi^* f, \Phi^* g\}$.

Inoltre per il teorema 3.5.6, ogni trasformazione canonica $\Phi : P \rightarrow P$ di una varietà simplettica (P, ω) , è un simplettomorfismo, cioè $\Phi^* \omega = \omega$. Per un sistema Hamiltoniano con coordinate canoniche (q, p) ed Hamiltoniana $H(q, p)$ le equazioni del moto hanno la forma

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H(p, q)}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H(p, q)}{\partial q^i}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Sotto l'azione di una trasformazione canonica Φ tale che

$$(q^i, p_i) \rightarrow (Q^i, P_i),$$

la forma simplettica $\omega = dp_i \wedge dq^i$ rimane invariata,

$$\phi^* \omega = dP_i \wedge dQ^i$$

e l'Hamiltoniana trasformata è $K(Q, P) = H(q(Q, P), p(Q, P))$. Dunque le equazioni del moto sono invarianti in forma

$$\dot{Q}^i = \frac{\partial K(P, Q)}{\partial P_i}, \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial K(P, Q)}{\partial Q^i}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Per determinare un cambio di coordinate $x \rightarrow X = (\Phi^1(x), \dots, \Phi^{2n}(x))$ in linea di principio è necessario fissare $2n$ funzioni. Se Φ è una trasformazione canonica allora Φ è univocamente determinata da una sola funzione detta *funzione generatrice* della trasformazione canonica. Per costruire questa funzione si inizia con l'applicare il lemma 3.5.7 che afferma che esiste localmente una funzione $S = S(q, p)$, tale che

$$p_i dq^i = P_i dQ^i + dS. \tag{3.10.1}$$

Osservazione 3.10.1 Se $q^i = Q^i$, $i = 1, \dots, n$ allora la funzione $S = S(q)$. Infatti dalla (3.10.1) si ha

$$p_i dq^i - P_i \frac{\partial Q^i}{\partial q^i} dq^i - P_i \frac{\partial Q^i}{\partial p_i} dp_i = (p_i - P_i) dq^i = \frac{\partial S}{\partial q^i} dq^i + \frac{\partial S}{\partial p_i} dp_i$$

da cui segue che $\frac{\partial S}{\partial p_i} = 0$ e

$$P_i = p_i + \frac{\partial S(q)}{\partial q^i}.$$

Ora si supponga che le $2n$ funzioni (q^i, Q^i) siano indipendenti, cioè formino un sistema di coordinate sulla varietà P . Questo è possibile se lo Jacobiano

$$\det \frac{\partial(q, Q)}{\partial(q, p)} = \det \frac{\partial Q}{\partial p} \neq 0.$$

Allora la funzione S si può esprimere localmente nelle coordinate q e Q

$$S_1(q, Q) = S(q, p(q, Q)),$$

e l'equazione (3.10.1) è equivalente alle equazioni

$$p_i = \frac{\partial S_1}{\partial q^i}, \quad P_i = -\frac{\partial S_1}{\partial Q^i}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.10.2)$$

Sottolineiamo che la funzione S_1 non è definita sullo spazio delle fasi P ma è definita in un dominio del prodotto $\mathbb{R}_q^n \times \mathbb{R}_Q^n$ di due spazi coordinati n -dimensionali.

Teorema 3.10.2 Sia $S_1(q, Q)$ una funzione definita in un intorno del punto (q_0, Q_0) del prodotto diretto di due spazi euclidei coordinati. Se

$$\det \frac{\partial^2 S_1(q, Q)}{\partial q, \partial Q} \neq 0, \quad (3.10.3)$$

e vale la (3.10.2), la funzione S_1 è funzione generatrice di una trasformazione canonica.

Dimostrazione: Consideriamo l'equazione (3.10.2) nelle coordinate Q

$$p_i = \frac{\partial S_1(q, Q)}{\partial q^i}, \quad i = 1 \dots, n.$$

Poichè vale (3.10.3) si può applicare il teorema della funzione implicita, e risolvere l'equazione per $Q = Q(q, p)$ in un intorno del punto $(q_0, p_0) = (q_0, \frac{\partial S_1(q, Q)}{\partial q}|_{Q_0, q_0})$. Consideriamo ora la seconda relazioni in (3.10.2) e poniamo

$$P_i(q, p) = -\frac{\partial S_1}{\partial Q^i}|_{Q=Q(q, p)}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Allora la trasformazione che porta (q, p) in $(Q(q, p), P(q, p))$ è canonica perchè per costruzione

$$p_i dq^i - P_i dQ^i = \frac{\partial S_1(q, Q)}{\partial q^i} dq^i + \frac{\partial S_1(q, Q)}{\partial Q^i} dQ^i = dS(q, Q).$$

Definizione 3.10.3 La trasformazione canonica $\Phi : P \rightarrow P$, con $\Phi(q, p) = (Q, P)$ si dice libera se come coordinate indipendenti si possono scegliere q e Q . In questo caso la funzione S espressa nelle coordinate q, Q si chiama funzione generatrice $S_1(q, Q)$.

Nota che la trasformazione identica non è libera in quanto $q = Q$, quindi solo alcune delle trasformazioni canoniche sono libere.

Si può passare ad una funzione generatrice di forma diversa tramite trasformazione di Legendre. Per esempio prendendo come coordinate indipendenti (q, P) , cioè nel caso in cui

$$\det \frac{\partial(q, P)}{\partial(q, p)} = \det \frac{\partial P}{\partial p} \neq 0$$

si ha che

$$p_i dq^i + Q_i dP^i = d(P_i Q^i + S).$$

La quantità $P_i Q^i + S$ espressa come funzione di (q, P) si chiama ugualmente funzione generatrice

$$S_2(q, P) = P_i Q^i(q, P) + S(q, p(q, P)).$$

Le coordinate p e Q sono espresse tramite S_2 dalle relazioni

$$p_i = \frac{\partial S_2(q, P)}{\partial q^i}, \quad Q^i = \frac{\partial S_2(q, P)}{\partial P_i}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.10.4)$$

Esempio. Consideriamo una trasformazione di coordinate $Q = Q(q)$ sulla base M di T^*M . La trasformazione dei momenti coniugati $p_i \rightarrow P_i$ indotta dal cambio di coordinate nella base del fibrato è data da $P_i = p_l \frac{\partial q^l}{\partial Q^i}$. Si è visto che $(q, p) \rightarrow (Q, P)$ è una trasformazione canonica. La funzione generatrice di tale trasformazione è

$$S_2(q, P) = \sum_{i=1}^n P_i Q^i(q).$$

In generale, fissato q si può scegliere una collezione

$$P_{\mathbf{i}} = (P_{i_1}, \dots, P_{i_k}), \quad Q^{\mathbf{j}} = (Q^{j_1}, \dots, Q^{j_{n-k}})$$

dove (i_1, \dots, i_k) e (j_1, \dots, j_{n-k}) sono una partizione di $(1, \dots, n)$ in insiemi disgiunti. Di tali partizioni ve ne sono in totale 2^n .

Teorema 3.10.4 Sia $\Phi : P \rightarrow P$ una trasformazione canonica definita dalle funzioni $P(q, p)$ e $Q(q, p)$. In un intorno del punto (q_0, p_0) si possono prendere come coordinate indipendenti almeno una delle 2^n collezioni di funzioni $(q, Q^{\mathbf{j}}, P_{\mathbf{i}})$ tali che

$$\det \frac{\partial(q, Q^{\mathbf{j}}, P_{\mathbf{i}})}{\partial(q, p)} \neq 0. \quad (3.10.5)$$

Inoltre la trasformazione canonica può essere ricavata dalla funzione

$$dS_3(q, Q^{\mathbf{j}}, P_{\mathbf{i}}) = \sum_{l=1}^k Q^{i_l} dP_{i_l} - \sum_{l=1}^{n-k} P_{j_l} dQ^{j_l} + \sum_{k=1}^n p_k dq^k$$

per mezzo delle relazioni

$$p_i = \frac{\partial S_3}{\partial q_i}, \quad Q^l = \frac{\partial S_3}{\partial P_l}, \quad l = 1, \dots, k, \quad P_{j_s} = -\frac{\partial S_3}{\partial Q^{j_s}}, \quad s = 1, \dots, n - k. \quad (3.10.6)$$

Inversamente, se $S_3(q, Q^j, P_i)$ è una trasformazione per la quale il determinante

$$\det \frac{\partial^2 S_3}{\partial q \partial R} \neq 0, \quad R = (Q^j, P_i),$$

allora le relazioni (3.10.6) definiscono una trasformazione canonica in un intorno del punto (q_0, p_0) .

La dimostrazione del teorema è identica a quella del teorema 3.10.2. Si deve solo dimostrare che esiste una scelta di coordinate per cui (3.10.5) è non nulla. Ma questo è sempre possibile perchè la trasformazione Φ che mappa $x = (q, p) \rightarrow \Phi(x) = (Q, P)$ e la sua inversa sono non degeneri e quindi la matrice $2n \times n$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial Q^j}{\partial p_k} & \frac{\partial P_i}{\partial p_k} \end{pmatrix}$$

deve avere rango massimo.

Proseguiamo questa sezione con le trasformazioni canoniche vicine all'identità. Supponiamo di avere una trasformazione che dipende da un parametro ϵ e per $\epsilon = 0$ la trasformazione si riduce all'identità, cioè

$$P_i = p_i + \epsilon h_i(q, p, \epsilon), \quad Q^i = q^i + \epsilon g^i(q, p, \epsilon), \quad (3.10.7)$$

dove ϵ è un parametro che varia in un aperto $(-\epsilon_0, \epsilon_0)$, $0 < \epsilon_0 \ll 1$ ed h_i e g^i sono funzioni lisce in un aperto U di T^*M . Supponiamo ϵ_0 sufficientemente piccolo cosicchè la trasformazione è non degenera.

Teorema 3.10.5 *Ogni trasformazione canonica vicina all'identità ammette una funzione generatrice della forma*

$$S_2(P, q; \epsilon) = \sum_i P_i q^i + \epsilon \psi(P, q, \epsilon). \quad (3.10.8)$$

dove ψ è una funzione liscia nei suoi argomenti nell'aperto $U \times (-\epsilon_0, \epsilon_0)$.

La dimostrazione segue dal teorema 3.10.2. Consideriamo ora le trasformazioni canoniche infinitesime.

Definizione 3.10.6 *La trasformazione di coordinate (3.10.7) definisce una trasformazione canonica infinitesima se*

$$\{Q^i, P_j\} = \delta_j^i + o(\epsilon), \quad \{Q^i, Q^j\} = \{P_i, P_j\} = o(\epsilon). \quad (3.10.9)$$

Teorema 3.10.7 *La trasformazione (3.10.7) è una trasformazione canonica infinitesima se e solo esiste una funzione $K = K(q, p)$ tale che*

$$h_i(q, p, 0) = -\frac{\partial K(q, p)}{\partial q^i}, \quad g_i(q, p, 0) = \frac{\partial K(q, p)}{\partial p_i}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.10.10)$$

Diremo che K è l'hamiltoniana associata alla trasformazione canonica infinitesima. Inoltre $K(q, p) = \psi(q, p, 0)$ dove $\psi(q, p, \epsilon)$ è definito in (3.10.8).

Dimostrazione: E' sufficiente sostituire la (3.10.7) nelle parentesi di Poisson (3.10.9) e dai termini di ordine ϵ si ottengono le condizioni

$$\frac{\partial h_i}{\partial p_j} + \frac{\partial g^j}{\partial q^i} = 0, \quad \frac{\partial h_i}{\partial p_j} - \frac{\partial h_j}{\partial p_i} = 0, \quad \frac{\partial g^j}{\partial q^i} - \frac{\partial g^i}{\partial q^j} = 0.$$

Da queste equazioni segue che esiste una funzione $K(q, p)$ definita in un aperto di T^*M tale che (3.10.10) è soddisfatta. Osservando infine dalla (3.10.4) e (3.10.8) che

$$Q^i = q^i + \epsilon \frac{\partial \psi(q, p, 0)}{\partial p_i} + o(\epsilon), \quad p_i = P_i + \epsilon \frac{\partial \psi(q, p, 0)}{\partial q^i} + o(\epsilon).$$

si ottiene $K(q, p) = \psi(q, p, 0)$.

Dalle espressioni sopra, concludiamo che una trasformazione infinitesima si può scrivere nella forma

$$Q^i = q^i + \epsilon \{q^i, K\}, \quad P_i = p_i + \epsilon \{p_i, K\}.$$

Per trattare sistemi hamiltoniani e trasformazioni canoniche dipendenti dal tempo consideriamo lo spazio delle fasi esteso

$$\tilde{P} = T^*M \times \mathbb{R}^2$$

e introduciamo una struttura simplettica nelle coordinate

$$(q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n, q^{n+1} = t, p_{n+1} = E)$$

la forma simplettica su \tilde{P} si scrive nella forma (3.5.14)

$$\tilde{\omega} = dp_i \wedge dq^i - dE \wedge dt.$$

In questo caso si ha che

$$\tilde{\omega} = d\tilde{\eta}, \quad \tilde{\eta} = p_i dq^i - E dt.$$

Una trasformazione $\tilde{\Phi} : \tilde{P} \rightarrow \tilde{P}$ che associa alle coordinate (q, p, E, t) le coordinate (Q, P, \tilde{E}, T) è canonica se preserva la forma simplettica cioè

$$\tilde{\Phi}^* \tilde{\omega} = \tilde{\omega}.$$

Come nel caso indipendente dal tempo, esiste una funzione $S(q, p, E, t)$ tale che

$$p_i dq^i - E dt - P_i dQ^i + \tilde{E} dT = dS(q, p, E, t).$$

Proposizione 3.10.8 *Sia $(q, p, E, t) \rightarrow (Q, P, \tilde{E}, T)$ una trasformazione canonica in \tilde{P} tale che T o è costante o $dT = dt$ e*

$$Q^i = Q^i(q, p, t), \quad P_i = P_i(q, p, t), \quad i = 1, \dots, n.$$

Allora $\frac{\partial S}{\partial E} = 0$.

Dimostrazione: Per dimostrare la proposizione è sufficiente considerare

$$p_i dq^i - E dt - P_i \left(\frac{\partial Q^i}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial Q^i}{\partial q^i} dq^i + \frac{\partial Q^i}{\partial t} dt \right) + \tilde{E} dt = \frac{\partial S}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial S}{\partial q^i} dq^i + \frac{\partial S}{\partial t} dt + \frac{\partial S}{\partial E} dE.$$

Confrontando i membri a destra e sinistra dell'uguaglianza si ottiene $\frac{\partial S}{\partial E} = 0$.

Scegliendo q , Q e t come variabili indipendenti si ottiene

$$p_i dq^i - E dt - P_i dQ^i + \tilde{E} dT = dS(q, Q, t) \quad (3.10.11)$$

che è equivalente all'equazioni

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q^i}, \quad P_i = -\frac{\partial S}{\partial Q^i}, \quad \tilde{E} - E = \frac{\partial S}{\partial t}, \quad (3.10.12)$$

dove si è usato il fatto che $dt = dT$. Usualmente l'ultima equazione è scritta come legge di trasformazione delle hamiltoniane

$$K(Q, P(q, Q, t), T(t)) = H(q, p(q, Q, t), t) + \frac{\partial S(q, Q, t)}{\partial t}. \quad (3.10.13)$$

Nel caso in cui si scelgano q , P e t come variabili indipendenti si ottengono le equazioni

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q^i}, \quad Q^i = \frac{\partial S}{\partial P_i},$$

$$K(Q(q, P, t), P, T(t)) = H(q, p(q, P, t), t) + \frac{\partial S(q, P, t)}{\partial t}. \quad (3.10.14)$$

Esempio. Consideriamo la trasformazione dipendente dal tempo generata dall'hamiltoniana $H(q, p) = p^2/2 + \alpha q$. Siano $q(0) = Q$, $p(0) = P$ le variabili al tempo $T = 0$ e q, p le variabili al tempo t date da

$$p = P - \alpha t, \quad q = Q + Pt - \frac{1}{2}\alpha t^2 \quad (3.10.15)$$

È immediato verificare che la trasformazione è canonica. Scrivendo il cambio di coordinate nella forma

$$p = \frac{q - Q}{t} - \frac{1}{2}\alpha t, \quad P = \frac{q - Q}{t} + \frac{1}{2}\alpha t,$$

vediamo che la funzione generatrice $S(q, Q, t)$ risolve le equazioni

$$p = \frac{\partial S(q, Q, t)}{\partial q} = \frac{q - Q}{t} - \frac{1}{2}\alpha t, \quad P = -\frac{\partial S(q, Q, t)}{\partial Q} = \frac{q - Q}{t} + \frac{1}{2}\alpha t,$$

da cui si ottiene

$$S = \frac{(q - Q)^2}{2t} - \frac{1}{2}\alpha t(q + Q) + f(t),$$

dove f è una funzione arbitraria che dipende solo dal tempo e non cambia le equazioni di hamilton per la nuova hamiltoniana K . Scegliendo $f'(t) = -1/8\alpha^2 t^2$, la nuova hamiltoniana

$$\begin{aligned} K(Q, P(q, Q, t), T(t)) &= H(q, p(q, Q, t)) + \frac{\partial S(q, Q, t)}{\partial t} = \frac{1}{2t^2}(q - Q)^2 + \frac{1}{8}\alpha^2 t^2 \\ &\quad - \frac{1}{2}\alpha(q - Q) + \alpha q - \frac{(q - Q)^2}{2t^2} - \frac{1}{2}\alpha(q + Q) + f'(t) \equiv 0, \end{aligned}$$

è identicamente nulla. Tale risultato si può dedurre direttamente dal fatto che $\dot{P} = \dot{Q} = 0$.

Proposizione 3.10.9 *Il flusso Hamiltoniano è una trasformazione canonica.*

Dimostrazione: Sia $H = H(q, p, t)$ una funzione hamiltoniana e consideriamo il flusso hamiltoniano ad essa associato. Siano $Q^i = q^i(0)$ e $P_i = p_i(0)$ le variabili al tempo $t = 0$ e $p_i = p_i(Q, P, t)$ e $q^i = q^i(Q, P, t)$ quelle al tempo t . Definiamo la funzione

$$S(Q, P, t) = \int_0^t \left[\sum_j p_j(Q, P, s) \frac{\partial q^j(Q, P, s)}{\partial s} - H(q(Q, P, s), p(Q, P, s), s) \right] ds.$$

È facile verificare che S è la funzione generatrice della trasformazione canonica. Infatti si ha

$$\frac{\partial S}{\partial Q^i} = \sum_j p_j(Q, P, t) \frac{\partial q^j(Q, P, t)}{\partial Q^i} - P_i,$$

$$\frac{\partial S}{\partial P_i} = \sum_j p_j(Q, P, t) \frac{\partial q^j(Q, P, t)}{\partial P_i},$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \sum_j p_j(Q, P, t) \frac{\partial q^j(Q, P, t)}{\partial t} - H(q(Q, P, t), p(Q, P, t), t).$$

Sommando i tre termini sopra si ottiene che

$$dS(q, p, t) = \sum_j [p_i(Q, P, t) dq^i(Q, P, t) - P_i dQ^i] - H(q(Q, P, t), p(Q, P, t), t) dt.$$

Dalla formula sopra si ottiene

$$dS = \sum_j [p_i dq^i - P_i dQ^i] - H dt$$

da cui segue che l'hamiltoniana trasformata K è identicamente nulla e prendendo come variabili indipendenti q e Q e t si ottiene $H(q, p(q, Q, t), t) = -\partial_t S(q, Q, t)$.

3.11 Equazione di Hamilton - Jacobi

Il problema di integrazione delle equazioni del moto di un sistema hamiltoniano con hamiltoniana $H(q, p, t)$ si può ridurre a quello di cercare una trasformazione canonica delle variabili (q, p) a nuove variabili $(Q(q, p, t), P(q, p, t))$, tali che la nuova hamiltoniana $K(Q, P, t)$ sia identicamente nulla. In questo modo le equazioni per Q e P si integrano immediatamente

$$Q^i = a^i, \quad P_i = b_i, \quad i = 1, \dots, N,$$

con a^i e b_i costanti arbitrarie. Se $S = S(q, P, t)$ è la funzione generatrice della trasformazione canonica, dalla condizione $P_i = b_i$ e dalle equazioni (3.10.13) segue che S soddisfa l'equazione differenziale

$$H\left(q, \frac{\partial S(q, b, t)}{\partial q}, t\right) + \frac{\partial S(q, b, t)}{\partial t} = 0 \quad (3.11.1)$$

che si chiama equazione di *Hamilton Jacobi*. L'integrazione delle equazioni del moto è quindi riconducibile alla determinazione di $S(q, b, t)$. Infatti dall'equazioni (3.10.12) si ottiene

$$a^i = \frac{\partial S(q, b, t)}{\partial b_i},$$

che, sotto opportune ipotesi sull'hessiano di S , può essere risolta per q^i come funzione di a, b e t . Infine i momenti coniugati p_i si ottengono dall'equazioni

$$p_i = \frac{\partial S(q, b, t)}{\partial q^i}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Per un'hamiltoniana H indipendente dal tempo si ha che $H = E = cost$ e dunque possiamo scrivere S nella forma

$$S(q, b, t) = S_0(q, b) - Et$$

e in questo modo le equazioni di Hamilton-Jacobi si riscrive nella forma

$$H(q, \frac{\partial S_0(q, b)}{\partial q}) = E. \quad (3.11.2)$$

L'integrazione dell'equazioni del moto procede allo stesso modo.

L'equazione (3.11.2) può essere interpretata nel seguente modo. Supponiamo che la trasformazione di coordinate generata da $S_0(q, b)$ mappa la nuova hamiltoniana $K(Q, P) = P_n$. In questo caso l'energia E è uguale alla costante b_n e l'integrazione delle equazioni del moto nelle coordinate (Q, P) diventa

$$P_i(t) = P_i(0) = b_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

$$Q^i(t) = a^i, \quad i = 1, \dots, n-1, \quad Q^n(t) = t - t_0.$$

Le variabili q^i e p_i si ricavano da $S_0(q, a)$ attraverso la relazione

$$a^i = \frac{\partial S_0(q, b)}{\partial b_i}, \quad i = 1, \dots, n-1, \quad t - t_0 = \frac{\partial S_0(q, b)}{\partial b_n},$$

che può essere risolta, sotto opportune ipotesi, per q come funzione di a, b e t . Dopo di che i momenti coniugati p_i si ricavano dall'equazione $p_i = \frac{\partial S_0(q, b)}{\partial q^i}$. Una variante del metodo sopra, (metodo di Jacobi), consiste nel supporre che la trasformazione di coordinate generata da $S_0(q, b)$ mappa la nuova hamiltoniana $K = K(P)$, cioè le coordinate Q sono cicliche. Quindi l'integrazione delle equazioni del moto nelle coordinate (Q, P) diventa

$$P_i = b_i, \quad Q^i = k^i t + a^i, \quad k^i = \frac{\partial K(P)}{\partial P_i}, \quad i = 1, \dots, n.$$

In questo caso l'energia $E = K(P) = K(b)$ e l'integrazione dell'equazioni associate ad H hanno la forma

$$q^i = q^i(b_1, \dots, b_n, k^1 t + a^1, \dots, k^n t + b^n), \quad i = 1, \dots, n.$$

$$p_i = p_i(b_1, \dots, b_n, k^1 t + a^1, \dots, k^n t + b^n), \quad i = 1, \dots, n.$$

Osserviamo infine che se S è soluzione dell'equazioni (3.11.2) anche $S + a_0$ con a_0 costante arbitraria, è soluzione. L'equazione di Hamilton-Jacobi (3.11.2) ammette un *integrale completo* se la funzione S dipende da n costanti. Una delle costanti appare come grandezza additiva in quanto S è definita a meno di una costante additiva. Riassumiamo le considerazioni fatte finora nel seguente teorema.

Teorema 3.11.1 *Data l'hamiltoniana $H(q, p, t)$, sia $S(q, b, t)$ un integrale completo dell'equazione di Hamilton-Jacobi (3.11.2) dipendente da n costanti $b = (b_1, \dots, b_n)$ e soddisfacente la condizione*

$$\det \left(\frac{\partial^2 S}{\partial q^i \partial b_j} \right) \neq 0. \quad (3.11.3)$$

Allora le curve integrali dell'equazioni di Hamilton per $H(q, p, t)$ sono determinate solo con operazioni di inversione e sostituzione.

Infine combinando la proposizione 3.9.12, e l'osservazione 3.9.13 si può mostrare l'equivalenza fra l'esistenza di n integrali primi in involuzione per un sistema hamiltoniano con n gradi di libertà e l'esistenza di un' integrale completo dell'equazione di Hamilton-Jacobi.

Teorema 3.11.2 (Teorema di Liouville) *Si consideri un sistema hamiltoniano con n gradi di libertà ed hamiltoniana $H(q, p)$. Supponiamo che esso possieda n integrali primi del moto f_i in involuzione*

$$\{f_i, f_j\} = 0, \quad i, j = 1, \dots, n,$$

tali che gli insiemi di livello

$$f_i(q, p) = a_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

definiscono una sottovarietà lagrangiana Λ_a . Inoltre se

$$\det \left(\frac{\partial f_i}{\partial p_k} \right) \neq 0$$

allora esiste, localmente una funzione $S = S(q, a)$ che risulta essere un'integrale completo dell'equazione di Hamilton-Jacobi.

3.12 Metodo di separazione delle variabili

In molti casi importanti si può trovare un integrale completo dell'equazioni di Hamilton-Jacobi mediante la cosiddetta separazione delle variabili.

Definizione 3.12.1 *Una coordinata, che indicheremo con q^1 si dice separabile se*

$$S(q, b) = S_0(q^2, \dots, q^n, b) + W_1(q^1, b)$$

e se la dipendenza da q^1 e $\frac{\partial W_1(q^1, b)}{\partial q^1}$ nell'hamiltoniana, compare solo in una combinazione del tipo $\psi_1(q^1, \frac{\partial W_1(q^1, b)}{\partial q^1})$ che non contiene altre coordinate, cioè

$$H \left(q, \frac{\partial S}{\partial q} \right) = \tilde{H} \left(q^2, \dots, q^n, \frac{\partial S_0}{\partial q}, \psi_1 \left(q^1, \frac{\partial W_1(q^1, b)}{\partial q^1} \right) \right).$$

Un caso particolare in cui la coordinata ad esempio q^1 è separabile è quello in cui la coordinata è ciclica, cioè non entra nell'espressione dell'Hamiltoniana. In questo caso il momento coniugato $p_1 = b_1$ è costante e

$$S(q, b) = S_0(q^2, \dots, q^n, b) + q^1 b_1.$$

L'Hamiltoniana assume la forma

$$H(q^2, \dots, q^n, \frac{\partial S_0}{\partial q^2}, \dots, \frac{\partial S_0}{\partial q^n}, b_1).$$

Un sistema hamiltoniano è *separabile* se tutte le n coordinate sono separabili. In questo caso la funzione S diventa

$$S(q, b) = \sum_{i=1}^n W_i(q^i, b),$$

e l'hamiltoniana assume la forma

$$H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}\right) = \tilde{H}\left(\psi_1(q^1, \frac{\partial W_1(q^1, b)}{\partial q^1}), \dots, \psi_n(q^n, \frac{\partial W_n(q^n, b)}{\partial q^n})\right).$$

Un esempio elementare di sistema separabile è dato da hamiltoniane del tipo

$$H(q, p) = \sum_{i=1}^n h_i(q^i, p_i).$$

Esempio. Si consideri l'oscillatore armonico piano: un punto di massa m che si muove sul piano attratto da una forza elastica centrata in $(0, 0)$. Scegliendo coordinate cartesiane l'hamiltoniana assume la forma

$$H = \frac{1}{2m}(p_{x_1}^2 + p_{x_2}^2) + k(x_1^2 + x_2^2).$$

L'equazione di Hamilton-Jacobi diventa

$$\left(\frac{\partial W_1}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial W_2}{\partial x_2}\right)^2 + 2mk(x_1^2 + x_2^2) = 2mE.$$

L'equazione sopra si spezza in due equazioni

$$\left(\frac{\partial W_i}{\partial x_i}\right)^2 + 2mkx_i^2 = 2mkb_i, \quad i = 1, 2,$$

dove $E = k(b_1 + b_2)$. Tenuto conto che

$$\frac{\partial W_i}{\partial b_i} = \frac{\partial E}{\partial b_i} t + c_i, \quad i = 1, 2,$$

dove c_i sono costanti di integrazione, otteniamo

$$\frac{\partial W_i}{\partial b_i} = \sqrt{\frac{mk}{2}} \arcsin \frac{x}{\sqrt{b_i}} = kt + c_i$$

o

$$x_i = \sqrt{b_i} \sin \left(\sqrt{\frac{2k}{m}} t + c_i \right), \quad i = 1, 2.$$

Consideriamo ora un esempio meno semplice per un punto di massa m nello spazio tridimensionale. L'hamiltoniana in coordinate sferiche assume la forma

$$H = \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\psi^2}{r^2 \sin^2 \theta} \right) + U(r, \theta, \psi),$$

con U potenziale arbitrario. La separazione delle variabili è possibile se

$$U(r, \theta, \psi) = a(r) + \frac{b(\theta)}{r^2} + \frac{c(\psi)}{r^2 \sin^2 \theta}$$

dove $a(r)$, $b(\theta)$ e $c(\psi)$ sono funzioni arbitrarie. Per semplicità scegliamo un potenziale con $c(\psi) = 0$, in questo modo ψ diventa una coordinata ciclica e $p_\psi = \text{cost}$. Le equazioni di Hamilton-Jacobi per la funzione S diventa

$$\left(\frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 + 2ma(r) + \frac{1}{r^2} \left[\left(\frac{\partial S}{\partial \theta} \right)^2 + 2mb(\theta) \right] + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left(\frac{\partial S}{\partial \psi} \right)^2 = 2mE$$

Si cerca una soluzione del tipo

$$S(r, \theta, \psi) = p_\psi \psi + W_1(r) + W_2(\theta)$$

e sostituendo nell'equazione sopra si ottiene

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial W_2}{\partial \theta} \right)^2 + 2mb(\theta) + \frac{p_\psi^2}{\sin^2 \theta} &= \beta \\ \left(\frac{\partial W_1}{\partial r} \right)^2 + 2ma(r) + \frac{\beta}{r^2} &= 2mE. \end{aligned}$$

Integrando si ottiene

$$S = \psi p_\psi + \int dr \sqrt{2m[E - a(r)] - \beta/r^2} + \int d\theta \sqrt{\beta - 2mb(\theta) - p_\psi^2/\sin^2 \theta}$$

La dipendenza di r, θ dal tempo si ottiene invertendo gli integrali

$$\frac{\partial S}{\partial E} = t - t_0, \quad \frac{\partial S}{\partial \beta} = c_1, \quad \frac{\partial S}{\partial \psi} = c_1$$

con c_1 e c_2 costanti arbitrarie. Infine i momenti p_θ e p_r si ricavano dalle equazioni

$$p_r = \frac{\partial S}{\partial r}, \quad p_\theta = \frac{\partial S}{\partial \theta}.$$

Esercizio 3.12.2 *Si dimostri che la trasformazione infinitesima*

$$p = P + 2\epsilon Q(1 + \cos P), \quad q = Q + \epsilon Q^2 \sin P$$

è una trasformazione canonica e determinare il dominio della trasformazione. Calcolare l'Hamiltoniana $K(Q, P)$ associata alla trasformazione.

Si consideri la trasformazione vicino all'identità

$$q = Q + \epsilon Q^2 \sin P + \sum_{j=2}^{\infty} \frac{(2j-1)!!}{(j+1)!} 2^j \epsilon^j (\sin P)^j Q^{j+1}$$

e

$$p = P + 2\epsilon(1 + \cos P)[Q + \epsilon Q^2 \sin P + \sum_{j=2}^{\infty} \frac{(2j-1)!!}{(j+1)!} 2^j \epsilon^j (\sin p)^j Q^{j+1}],$$

e si dimostri che è una trasformazione canonica. Si calcoli la funzione generatrice della trasformazione. Suggestione: si usi lo sviluppo in serie della radice $\sqrt{1-x} = 1 - \frac{x}{2} - \sum_{j=2}^{\infty} \frac{(2j-3)!!}{(j)!2^j} x^j$.

Esercizio 3.12.3 Sia $Q = q^2 + 1/2 \cos q$. Determinare P in funzione di (q, p) in modo tale che la trasformazione di coordinate così ottenuta sia canonica. Determinare la funzione generatrice.

Esercizio 3.12.4 Coordinate paraboliche. Trovare l'integrale completo dell'equazioni di Hamilton Jacobi per una particella in moto in un campo

$$U(r, z, \psi) = \frac{\alpha}{\sqrt{r^2 + z^2}} - Fz,$$

dove (r, z, ψ) sono coordinate cilindriche in \mathbb{R}^3 . Introdurre coordinate paraboliche ξ, η, ψ che si ottengono dalle coordinate cilindriche r, z, ψ dalla relazione

$$z = \frac{1}{2}(\xi - \eta), \quad r = \sqrt{\xi\eta}.$$

Esercizio 3.12.5 Si consideri un punto materiale soggetto all'attrazione gravitazionale di due centri di forza siti in $(d, 0, 0)$ e $(-d, 0, 0)$, dove $d > 0$. Si dimostri che l'equazione di Hamilton-Jacobi è separabile introducendo le coordinate ellissoidali date da

$$x = d \cosh \xi \cos \eta, \quad y = d \sinh \xi \sin \eta \cos \psi, \quad z = d \sinh \xi \sin \eta \sin \psi$$

dove $\xi \in \mathbb{R}^+$, $0 \leq \eta \leq \pi$ e $0 \leq \psi \leq 2\pi$.

Esercizio 3.12.6 Moto geodetico su una superficie Si studi il moto libero di un punto di massa m su una superficie. Se

$$x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = \psi(u),$$

è l'espressione parametrica della superficie con $u \in \mathbb{R}$ e $0 \leq v \leq 2\pi$ determinare i momenti coniugati alle variabili lagrangiane u e v e mostrare la separabilità del corrispondente sistema hamiltoniano.

3.13 Sistemi completamente integrabili. Teorema di Liouville - Arnold

Com'è stato già stabilito, le equazioni del moto di un sistema lagrangiano a un grado di libertà sono integrabili per quadrature. L'integrabilità di un sistema hamiltoniano a un grado di libertà si dimostra ancora più semplicemente: le traiettorie del moto sono le linee di livello di hamiltoniana

$$H(p, q) = E; \quad (3.13.1)$$

la dinamica sulla traiettoria viene determinata integrando il differenziale

$$dt = \frac{dq}{H_p(p, q)} = -\frac{dp}{H_q(p, q)} \quad (3.13.2)$$

sulla curva (3.13.1). Se la curva (3.13.1) è compatta, cioè, il moto è finito, allora il moto è periodico con il periodo

$$T = \oint_{H(p,q)=E} dt. \quad (3.13.3)$$

Se la curva (3.13.1) è liscia, i.e., il gradiente $(H_p(p, q), H_q(p, q))$ è diverso da zero nei punti della curva, allora possiamo utilizzare la seguente parametrizzazione

$$\left. \begin{array}{l} p = p(\phi, E) \\ q = q(\phi, E) \end{array} \right\} \quad \phi = \frac{2\pi}{T} \int_{H(p,q)=E} \frac{dq}{H_p(p, q)} = -\frac{2\pi}{T} \int_{H(p,q)=E} \frac{dp}{H_q(p, q)} \quad (3.13.4)$$

rispetto a cui le funzioni $p(\phi, E)$, $q(\phi, E)$ sono 2π -periodiche in ϕ . (Il punto iniziale nell'integrale (3.13.4) va scelto in modo arbitrario purché si vari in modo liscio con le variazioni di E .) Si ottiene quindi il moto periodico nella forma

$$\left. \begin{array}{l} p = p(\omega t + \phi^0, E) \\ q = q(\omega t + \phi^0, E) \end{array} \right\}$$

dove la frequenza ω viene definita come

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

e la fase ϕ^0 è arbitraria.

Si consideri ora un sistema hamiltoniano a n gradi di libertà con hamiltoniana $H(p, q)$. Supponiamo che il sistema possieda n integrali primi indipendenti in involuzione $H_1(p, q)$, $H_2(p, q)$, \dots , $H_n(p, q)$,

$$\{H_i, H_j\} = 0, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Senza perdere di generalità possiamo assumere che $H_1 = H$. Tale sistema si chiama un *sistema hamiltoniano completamente integrabile*. Sotto questa ipotesi intendiamo dimostrare

che il sistema hamiltoniano è integrabile per quadrature¹⁴. Inoltre, sotto l'ipotesi aggiuntiva di *completezza* della superficie di livello

$$M_E = \{(p, q) \in \mathbb{R}^{2n} \mid H_1(p, q) = E_1, \quad H_2(p, q) = E_2, \quad H_n(p, q) = E_n\} \quad (3.13.5)$$

si dimostra che il moto è quasiperiodico. Più esattamente, dimostriamo il seguente

Teorema 3.13.1 1) *Dato un sistema hamiltoniano completamente integrabile sullo spazio delle fasi \mathbb{R}^{2n} , supponiamo che le funzioni $H_1(p, q), \dots, H_n(p, q)$ sono indipendenti in ogni punto di una superficie di livello M_{E^0} della forma (3.13.5) per un certo $E^0 = (E_1^0, \dots, E_n^0)$. In questo caso le superfici di livello M_E per i valori di $|E - E^0|$ sufficientemente piccoli sono sottovarietà lagrangiane lisce n -dimensionali in \mathbb{R}^{2n} invarianti rispetto al flusso hamiltoniano. Il flusso hamiltoniano su M_E è integrabile per quadrature.*

2) *Se, inoltre, la superficie di livello M_{E^0} è compatta e connessa, allora le superfici M_E per piccoli $|E - E^0|$ sono diffeomorfe al toro*

$$M_E \simeq T^n = \{(\phi_1, \dots, \phi_n) \in \mathbb{R}^n \mid \phi_i \sim \phi_i + 2\pi, i = 1, \dots, n\}. \quad (3.13.6)$$

Il moto sui tori M_E è quasiperiodico, i.e., nelle coordinate ϕ_1, \dots, ϕ_n il moto si scrive nella forma

$$\phi_1(t) = \omega_1(E)t + \phi_1^0, \dots, \phi_n(t) = \omega_n(E)t + \phi_n^0 \quad (3.13.7)$$

dove $\omega_1(E), \dots, \omega_n(E)$ sono costanti che dipendono solo da E , le fasi $\phi_1^0, \dots, \phi_n^0$ sono arbitrarie.

Dimostrazione: Dall'indipendenza delle funzioni $H_1(p, q), \dots, H_n(p, q)$ in ogni punto di M_{E^0} segue la loro indipendenza sulle superfici di livello vicini. Applicando il teorema della funzione implicita si ottiene che le sottovarietà n -dimensionali M_E sono lisce per i piccoli valori di $|E - E^0|$.

Si ricordi che il campo hamiltoniano X_H è tangente alla superficie di livello di un qualsiasi integrale primo $F(x) = \text{cost}$, $\{H, F\} = 0$. Quindi, i campi hamiltoniani X_{H_1}, \dots, X_{H_n} sono *tangenti* alla superficie M_E per ogni valore di $E = (E_1, \dots, E_n)$. Siccome i differenziali dH_1, \dots, dH_n delle hamiltoniane sono linearmente indipendenti in ogni punto della superficie M_E , anche i campi hamiltoniani X_{H_1}, \dots, X_{H_n} sono linearmente indipendenti.

Abbiamo stabilito che

$$\text{span}(X_{H_1}, \dots, X_{H_n})|_{x \in M_E} = T_x M_E$$

per i piccoli $|E - E^0|$. Utilizzando la formula ben nota per il valore della forma symplettica sui campi hamiltoniani

$$\omega(X_F, X_H) = \{F, H\}$$

¹⁴Dato un sistema hamiltoniano separabile, allora il sistema è completamente integrabile. Infatti, per un sistema separabile esiste una trasformazione canonica $(q, p) \mapsto (Q, P)$ tale che l'hamiltoniana H nelle coordinate nuove non dipende da Q , $H = H(P)$. Allora, le funzioni P_1, \dots, P_n sono in involuzione e commutano con H .

L'integrabilità per quadrature di sistemi hamiltoniani separabili è stata scoperta da Bour. Liouville ha generalizzato il teorema di Bour alla classe di sistemi hamiltoniani in \mathbb{R}^{2n} con n integrali primi in involuzione. L'idea che il moto in un sistema completamente integrabile può essere rappresentato come un moto sul toro n -dimensionale probabilmente è stata proposta per primo da Einstein (1917) nella sua analisi delle regole di quantizzazione semiclassiche. Nella forma moderna il teorema 3.13.1 è stato dimostrato da Arnold (1967).

si ottiene che

$$\omega(X_{H_i}, X_{H_j}) = 0, \quad i, j = 1, \dots, n,$$

ovvero la sottovarietà M_E è una superficie lagrangiana.

Siccome il rango della matrice $(n \times 2n)$

$$\left(\frac{\partial H_i}{\partial p_j}, \frac{\partial H_i}{\partial q_j} \right)_{M_{E^0}} = n,$$

allora senza perdere la generalità possiamo assumere che, dato un punto $x_0 \in M_{E^0}$, $x_0 = (p_0, q_0)$, allora la matrice di Jacobi è non degenere

$$\left(\frac{\partial H_i}{\partial p_j} \right)_{x_0} \neq 0. \quad (3.13.8)$$

Il punto $x_0(E) = (p(E), q_0) \in M_E$ definito dalle equazioni

$$H_i(p(E), q_0) = E_i, \quad i = 1, \dots, n$$

insieme con la normalizzazione

$$p(E^0) = p_0$$

determina un punto iniziale su ogni superficie M_E che dipende da E in modo liscio per ogni E sufficientemente vicino a E^0 . Grazie a (3.13.8), vicino a $x_0(E)$ la superficie lagrangiana M_E può essere rappresentata nella forma

$$p = p(q, E) = \frac{\partial S(q, E)}{\partial q},$$

sfruttando il teorema della funzione implicita. Inoltre, le variabili $q = (q_1, \dots, q_n)$, $E = (E_1, \dots, E_n)$ possono essere utilizzate come le coordinate locali a un intorno del punto $x_0 = x_0(E^0)$. La funzione generatrice $S = S(q, E)$ può essere scelta come la quadratura

$$S(q, E) = \int_{x_0(E)}^{(p(q, E), q)} p dq \quad (3.13.9)$$

lungo una curva sulla superficie lagrangiana M_E (l'integrale non dipende dalla scelta del cammino di integrazione). Utilizzando la funzione $S(q, E)$ si ottiene una trasformazione canonica

$$(q, p) \mapsto (\psi, E), \quad \psi_i = \frac{\partial S(q, E)}{\partial E_i}, \quad i = 1, \dots, n \quad (3.13.10)$$

$$dp \wedge dq = dE \wedge d\psi.$$

Nelle coordinate canoniche (ψ, E) abbiamo la matrice delle parentesi

$$\{\psi_i, E_j\} = \delta_{ij};$$

l'hamiltoniana $H = H_1(p, q)$ diventa uguale a $H(E, \psi) = E_1$. Allora il flusso hamiltoniano $\dot{x} = \{x, E_1\}$, i.e.,

$$\dot{\psi}_1 = 1, \quad \dot{\psi}_i = 0, \quad i \neq n$$

$$\dot{E}_j = 0, \quad j = 1, \dots, n$$

diventa facilmente integrabile.

Il punto successivo nella dimostrazione della seconda parte del teorema è il seguente risultato geometrico.

Lemma 3.13.2 *Data una varietà compatta connessa n -dimensionale M , si supponga che su M esistono n campi vettoriali lisci X_1, \dots, X_n linearmente indipendenti in ogni punto $x \in M$ e commutativi,*

$$[X_i, X_j] = 0, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Allora, M è diffeomorfa al toro, $M \simeq T^n$.

Dimostrazione: Grazie alla compattezza della varietà M , il gruppo di diffeomorfismi

$$\Phi_t^i : M \rightarrow M, \quad \frac{d}{dt} \Phi_t^i(x)_{t=0} = X_i(x)$$

a un parametro generato dal campo vettoriale X_i esiste per ogni valore $t \in \mathbb{R}$. Dalla commutatività dei campi vettoriali segue la commutatività dei gruppi:

$$\Phi_s^i \Phi_t^j = \Phi_t^j \Phi_s^i \quad \forall s, t \in \mathbb{R}.$$

Si ottiene un'azione del gruppo abeliano \mathbb{R}^n sulla varietà M :

$$\Phi_{\mathbf{t}} := \Phi_{t_1}^1 \dots \Phi_{t_n}^n, \quad \mathbb{R}^n \ni \mathbf{t} = (t_1, \dots, t_n),$$

$$\Phi_{\mathbf{t}+\mathbf{s}} = \Phi_{\mathbf{t}} \Phi_{\mathbf{s}} \quad \forall \mathbf{t}, \mathbf{s} \in \mathbb{R}^n.$$

Esercizio 3.13.3 *Si dimostri che l'azione $\Phi_{\mathbf{t}}$ è transitiva, cioè, per ogni due punti $x \in M$, $y \in M$ esiste $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^n$ tale che*

$$y = \Phi_{\mathbf{t}}(x).$$

Fissando un punto $x_0 \in M$, si costruisce una mappa liscia

$$\mathbb{R}^n \rightarrow M, \quad \mathbf{t} \mapsto \Phi_{\mathbf{t}}(x_0). \tag{3.13.11}$$

L'insieme

$$\Gamma = \{\mathbf{t} \in \mathbb{R}^n \mid \Phi_{\mathbf{t}}(x_0) = x_0\}$$

è un sottogruppo in \mathbb{R}^n .

Esercizio 3.13.4 *Si dimostri che il sottogruppo Γ non dipende da x_0 . Inoltre, il sottogruppo $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ è discreto, ovvero, per ogni $\mathbf{t} \in \Gamma$ esiste un aperto $U \ni \mathbf{t}$ tale che $U \cap \Gamma = \{\mathbf{t}\}$.*

Ora bisogna usare il seguente risultato della teoria dei sottogruppi di \mathbb{R}^n :

Dato un sottogruppo discreto $\Gamma \in \mathbb{R}^n$, allora esistono m vettori $e_1, \dots, e_m \in \mathbb{R}^n$, $0 \leq m \leq n$ linearmente indipendenti tali che Γ è il reticolo

$$\Gamma = \{k_1 e_1 + \dots + k_m e_m \mid (k_1, \dots, k_m) \in \mathbb{Z}^m\}. \quad (3.13.12)$$

Per completare la dimostrazione del lemma basta osservare che la varietà M è diffeomorfa al quoziente

$$M \simeq \mathbb{R}^n / \Gamma$$

(il diffeomorfismo è stabilito dalla mappa (3.13.11)). Per Γ della forma (3.13.12) il quoziente è diffeomorfo al prodotto di un toro m -dimensionale e uno spazio euclideo

$$\mathbb{R}^n / \Gamma \simeq T^m \times \mathbb{R}^{n-m}$$

(basta aggiungere opportuni vettori f_1, \dots, f_{n-m} per ottenere una base $(e_1, \dots, e_m, f_1, \dots, f_{n-m})$ di \mathbb{R}^n). Questo prodotto è compatto se e solo se $m = n$. Scegliendo le coordinate ϕ_1, \dots, ϕ_n in modo tale che ogni punto $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^n$ si scrive nella forma

$$\mathbf{t} = \frac{1}{2\pi} (\phi_1 e_1 + \dots + \phi_n e_n)$$

si identifica il toro \mathbb{R}^n / Γ con il toro standard (3.13.6). □

Sfruttando la base dei campi hamiltoniani commutativi X_{H_1}, \dots, X_{H_n} in ogni punto della superficie di livello M_E compatta e connessa, si dimostra che $M_E \simeq T^n$. Per completare la dimostrazione del teorema bisogna dimostrare che la dinamica delle coordinate angolari (ϕ_1, \dots, ϕ_n) rispetto al sistema hamiltoniano è lineare nelle coordinate ϕ . Infatti, per la definizione della struttura (localmente) lineare su M_E indotta dalla mappa (3.13.11) i flussi hamiltoniani sono le traslazioni lungo certi vettori $h_1(E), \dots, h_n(E)$. Chiamando $(\omega_1(E), \dots, \omega_n(E)) = h_1(E)$ le componenti del vettore $h_1(E)$ rispetto alla base $\frac{1}{2\pi} e_1, \dots, \frac{1}{2\pi} e_n$ arriviamo alla dimostrazione del teorema. □

Esercizio 3.13.5 *Si generalizzi il teorema 3.13.1 ai sistemi completamente integrabili su una varietà simplettica qualsiasi.*

3.14 Le variabili azione - angolo

In questa sezione continuiamo lo studio dei sistemi completamente integrabili in \mathbb{R}^{2n} descritti come n integrali indipendenti in involuzione $H_1(p, q), \dots, H_n(p, q)$,

$$\{H_i, H_j\} = 0, \quad i, j = 1, \dots, n$$

supponendo che le superfici di livello

$$M_E = \{(p, q) \in \mathbb{R}^{2n} \mid H_1(p, q) = E_1, \dots, H_n(p, q) = E_n\}$$

siano compatte e connesse. Data una tale superficie M_{E^0} su cui i differenziali dH_1, \dots, dH_n sono linearmente indipendenti dappertutto, lo scopo è di costruire *globalmente* le coordinate canoniche $(\phi_1, \dots, \phi_n, I_1, \dots, I_n)$ su un certo intorno $\mathcal{U}(M_{E^0}) \subset \mathbb{R}^{2n}$ della varietà M_{E^0} tale che le ϕ sono le coordinate angolari sui tori invarianti M_E per E sufficientemente vicino a E^0 .

Si consideri la varietà simplettica $T^n \times \mathbb{R}^n$ con le coordinate canoniche $(\phi, I) = (\phi_1, \dots, \phi_n, I_1, \dots, I_n)$ e la forma simplettica

$$dI \wedge d\phi = \sum_{i=1}^n dI_i \wedge d\phi_i.$$

Per una palla $U \in \mathbb{R}^n$ con il centro a un certo punto $I^0 = (I_1^0, \dots, I_n^0)$ si ottiene una sottovarietà simplettica $T^n \times U \subset T^n \times \mathbb{R}^n$.

Teorema 3.14.1 *Date n hamiltoniane $H_1(p, q), \dots, H_n(p, q)$ in involuzione in \mathbb{R}^{2n} indipendenti sulla superficie di livello compatta connessa M_{E^0} , allora esiste un intorno $\mathcal{U}(M_{E^0})$ e un simplettomorfismo*

$$T^n \times U \simeq \mathcal{U}(M_{E^0}) \subset \mathbb{R}^{2n} \quad (3.14.1)$$

per una palla $U \in \mathbb{R}^n$ tale che le hamiltoniane diventano funzioni solo delle variabili I ,

$$H_1 = H_1(I), \dots, H_n = H_n(I), \quad I \in U,$$

$$H_i(I^0) = E_i^0, \quad i = 1, \dots, n,$$

e, infine, per un qualsiasi $I \in U$ le variabili ϕ_1, \dots, ϕ_n sono le coordinate angolari sul toro invariante M_E , $E = (H_1(I), \dots, H_n(I))$.

Dimostrazione: Come nella dimostrazione della prima parte del teorema 3.13.1, scegliendo un punto $x_0 = (p_0, q_0) \in M_{E^0}$ tale che il determinante (3.13.8) è non degenere, otteniamo la funzione generatrice $S = S(q, E)$ per la famiglia delle varietà lagrangiane M_E ,

$$p = \frac{\partial S(q, E)}{\partial q}.$$

Localmente, vicino al punto x_0 si ottiene un sistema di coordinate canoniche (E, ψ) ,

$$dp \wedge dq = dE \wedge d\psi$$

ponendo

$$\psi_i = \frac{\partial S(q, E)}{\partial E_i}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Nelle coordinate ψ i flussi hamiltoniani $\Phi_t^1, \dots, \Phi_t^n$ generati dai campi hamiltoniani X_{H_1}, \dots, X_{H_n} sono le traslazioni lungo gli assi delle coordinate rispettivamente ψ_1, \dots, ψ_n . Quindi, le coordinate locali ψ_1, \dots, ψ_n su M_E sono legate con le coordinate angolari *globali* ϕ_1, \dots, ϕ_n sullo stesso toro M_E tramite una trasformazione lineare,

$$\psi_i = \sum_{j=1}^n \rho_{ij}(E) \phi_j, \quad i = 1, \dots, n$$

dove la matrice $(\rho_{ij}(E))_{1 \leq i, j \leq n}$ è non degenere.

Siccome per ogni k lo shift $\phi_k \mapsto \phi_k + 2\pi$ è una mappa identica su ogni M_E , cioè, un'identità su un certo intorno della varietà M_{E^0} , allora la traslazione

$$(\psi_1, \dots, \psi_n, E_1, \dots, E_n) \mapsto (\psi_1 + 2\pi\rho_{1k}(E), \dots, \psi_n + 2\pi\rho_{nk}(E), E_1, \dots, E_n)$$

è una mappa canonica. In particolare, dobbiamo avere le seguenti equazioni

$$\{\psi_i + 2\pi\rho_{ik}(E), \psi_j + 2\pi\rho_{jk}(E)\} = \{\psi_i, \psi_j\} = 0, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Si ottiene che

$$\frac{\partial\rho_{ik}(E)}{\partial E_j} = \frac{\partial\rho_{jk}(E)}{\partial E_i}$$

per ogni i, j, k . Allora, localmente su una piccola palla con il centro a E^0 esistono funzioni $I_1 = I_1(E), \dots, I_n = I_n(E)$ tali che

$$\rho_{ik}(E) = \frac{\partial I_k(E)}{\partial E_i}, \quad i, k = 1, \dots, n.$$

Grazie alla invertibilità della matrice $\rho_{ij}(E)$ il cambio delle coordinate

$$(E_1, \dots, E_n) \mapsto (I_1(E), \dots, I_n(E))$$

è un diffeomorfismo locale. Dimostriamo ora che le funzioni $(\phi_1, \dots, \phi_n, I_1, \dots, I_n)$ sono le coordinate canoniche. Infatti, usando la canonicità delle coordinate (ψ, E) si ottiene che

$$\{\psi_i, I_k\} = \frac{\partial I_k}{\partial E_i} = \rho_{ik}(E).$$

Dall'altra parte, sostituendo $\psi_i = \sum_j \rho_{ij}(E)\phi_j$ si arriva a

$$\{\psi_i, I_k\} = \sum_j \rho_{ij}(E)\{\phi_j, I_k\}.$$

Il confronto delle due ultime equazioni implica che

$$\{\phi_j, I_k\} = \delta_{jk}, \quad j, k = 1, \dots, n.$$

□

Definizione 3.14.2 *Le coordinate canoniche I, ϕ costruite nel teorema per un sistema completamente integrabile sull'intorno di una varietà invariante M_{E^0} compatta connessa si chiamano le variabili azione – angolo.*

Il sistema hamiltoniano completamente integrabile nelle coordinate azione – angolo prende la seguente forma molto semplice:

$$\left. \begin{aligned} \dot{I}_i &= 0 \\ \dot{\phi}_i &= \omega_i(I) \end{aligned} \right\}, \quad i = 1, \dots, n \tag{3.14.2}$$

$$\omega_i(I) = \frac{\partial H(I)}{\partial I_i}$$

dove $H = H(I)$ è l'hamiltoniana che, nelle coordinate azione – angolo diventa una funzione solo delle azioni canoniche. Le equazioni (3.14.2) possono essere facilmente integrate, come sopra, nella forma

$$\phi_i(t) = \omega_i(I)t + \phi_i^0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Si consideri anche la trasformazione canonica inversa

$$\begin{aligned} p &= p(\phi, I) \\ q &= q(\phi, I) \end{aligned} .$$

Queste funzioni lisce sono 2π -periodiche rispetto a ogni variabile ϕ_1, \dots, ϕ_n , e, quindi, possono essere sviluppate in serie di Fourier multiple

$$p = \sum_{(k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^n} A_{k_1 \dots k_n}(I) e^{i(k_1 \phi_1 + \dots + k_n \phi_n)}$$

$$q = \sum_{(k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^n} B_{k_1 \dots k_n}(I) e^{i(k_1 \phi_1 + \dots + k_n \phi_n)}$$

dove i coefficienti delle serie di Fourier dipendono dalle variabili di azione. Allora, la dinamica del sistema hamiltoniano nelle coordinate di partenza si scrive nella forma

$$p(t) = \sum_{(k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^n} A_{k_1 \dots k_n}(I) e^{i[k_1 \omega_1(I) + \dots + k_n \omega_n(I)]t + i(k_1 \phi_1^0 + \dots + k_n \phi_n^0)} \quad (3.14.3)$$

$$q(t) = \sum_{(k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^n} B_{k_1 \dots k_n}(I) e^{i[k_1 \omega_1(I) + \dots + k_n \omega_n(I)]t + i(k_1 \phi_1^0 + \dots + k_n \phi_n^0)}$$

dove i parametri $I = (I_1, \dots, I_n)$, $\phi^0 = (\phi_1^0, \dots, \phi_n^0)$ possono essere considerati come le costanti di integrazione.

Le funzioni $p(t)$, $q(t)$ della forma (3.14.3) sono periodiche in t se le frequenze $\omega_1(I)$, $\omega_n(I)$ hanno la forma

$$\omega_1(I) = r_1 \omega(I), \dots, \omega_n(I) = r_n \omega(I)$$

dove i numeri r_1, \dots, r_n sono tutti interi, $r_i \in \mathbb{Z}$, allora il moto è periodico in t con il periodo $T = 2\pi/\omega(I)$ per qualsiasi valore dei parametri $\phi^0 = (\phi_1^0, \dots, \phi_n^0)$.

Nel caso opposto di frequenze *non risonanti* le traiettorie del moto (3.14.3) sono dense sul toro invariante $M_{E(I)}$. Si ricordi che le frequenze $\omega_1, \dots, \omega_n$ si chiamano non risonanti se l'equazione

$$m_1 \omega_1 + \dots + m_n \omega_n = 0, \quad (m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{Z}^n$$

implica che

$$m_1 = m_2 = \dots = m_n = 0.$$

La densità delle traiettorie rettilinee

$$\phi_i = \omega_i t + \phi_i^0, \quad i = 1, \dots, n$$

con le frequenze $\omega_1, \dots, \omega_n$ non risonanti sul toro

$$T^n = \{(\phi_1, \dots, \phi_n) \in \mathbb{R}^n \mid \phi_i \sim \phi_i + 2\pi\}$$

segue dal seguente teorema di H.Weyl:

Teorema di Weyl. *Data una funzione continua $f = f(\phi)$ sul toro T^n , e n frequenze $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ non risonanti, allora per ogni ϕ^0 esiste il valor medio temporale*

$$\bar{f} := \frac{1}{T} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T f(\omega t + \phi^0) dt,$$

anzi, questo valor medio coincide con il valor medio sul toro,

$$\bar{f} = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{T^n} f(\phi) d\phi_1 \dots d\phi_n.$$

Si osservi che, per una funzione $f(\phi)$ che ammette uno sviluppo in una serie di Fourier multiplo

$$f = \sum_{(k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^n} A_{k_1 \dots k_n} e^{i(k_1 \phi_1 + \dots + k_n \phi_n)}$$

il valor medio sul toro è uguale al termine costante:

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{T^n} f(\phi) d\phi_1 \dots d\phi_n = A_{0 \dots 0}.$$

Per i conti espliciti con le variabili azione – angolo può usare il seguente metodo. Dalla canonicità

$$dp \wedge dq = dI \wedge d\phi$$

segue che la differenza $p dq - I d\phi$ è una 1-forma chiusa sull'intorno $\mathcal{U}(M_{E^0})$, ovvero localmente

$$p dq - I d\phi = dS \tag{3.14.4}$$

per una funzione $S = S(q, \phi)$. Si consideri i cicli $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ sul toro standard T^n della forma

$$\gamma_i = \{(\phi_1, \dots, \phi_n) \in T^n \mid \phi_j = \text{cost}, j \neq i, 0 \leq \phi_i \leq 2\pi\}. \tag{3.14.5}$$

Integrando la 1-forma (3.14.4) sul ciclo γ_i si ottiene la formula

$$I_i = \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma_i} p dq, \quad i = 1, \dots, n. \tag{3.14.6}$$

Questa formula può essere usata per calcolare le azioni canoniche. Per calcolare gli angoli coniugati usiamo la funzione generatrice $\tilde{S} = \tilde{S}(q, I)$ della trasformazione canonica

$$(p, q) \mapsto (I, \phi),$$

cioè, la funzione tale che

$$d\tilde{S} = p dq - \phi dI.$$

Siccome $I = I(E)$, allora restringendo la 1-forma chiusa $d\tilde{S}$ sul toro M_E si scrive come

$$d\tilde{S}_{M_E} = p dq,$$

e, quindi

$$\tilde{S}(q, I) = \int_{x_0(q, E)}^{(p(q, E), q)} p dq, \quad E = E(I),$$

dove l'integrale lungo un cammino sulla varietà M_E localmente non dipende dalla scelta del cammino stesso. Quindi, gli angoli canonici vengono determinati come

$$\phi_i = \frac{\partial}{\partial I_i} \int_{x_0(q, E)}^{(p(q, E), q)} p dq, \quad i = 1, \dots, n.$$

Esempio 1. Si consideri il moto unidimensionale con l'hamiltoniana quadratica

$$H(p, q) = \frac{p^2}{2m} + \frac{k q^2}{2}, \quad k > 0.$$

La curva $H(p, q) = E$ è un'ellisse per $E > 0$; il moto sull'ellisse è periodico con il periodo

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

La variabile d'azione canonica

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint_{H(p, q) = E} p dq$$

è proporzionale all'area dell'ellisse:

$$I = \frac{1}{2\pi} \text{Area} \left(\frac{p^2}{2m} + \frac{k q^2}{2} = E \right) = E \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

L'ultima formula può essere riscritta nella seguente forma:

$$I = \frac{E}{\omega}. \tag{3.14.7}$$

(l'energia divisa per la frequenza). La variabile angolare coniugata a I si introduce secondo le seguente formule

$$\begin{aligned} p &= \rho \sqrt{2I} \sin \phi \\ q &= \rho^{-1} \sqrt{2I} \cos \phi \end{aligned}$$

dove $\rho = (mk)^{1/4} = (m\omega)^{1/2}$.

Esempio 2. Calcoliamo le azioni canoniche per il moto ellittico nel problema di Keplero. In questo caso i tori invarianti sono bidimensionali:

$$p_\phi = m r^2 \dot{\phi} = M$$

$$\frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\phi^2}{2m r^2} - \frac{\alpha}{r} = E$$

(sono state utilizzate le coordinate polari r, ϕ) dove le costanti M, E parametrizzano le tori. Le azioni canoniche sono

$$I_\phi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p_\phi d\phi = M$$

$$I_r = \frac{2}{2\pi} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} p_r dr = \frac{1}{\pi} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \sqrt{2m \left(E + \frac{\alpha}{r}\right) - \frac{M^2}{r^2}} dr = -M + \alpha \sqrt{\frac{m}{2|E|}}.$$

Allora, l'hamiltoniana nelle variabili azione – angolo assume la forma

$$H = -\frac{m\alpha^2}{2(I_r + I_\phi)^2}.$$

Si osservi che le frequenze associate

$$\omega_\phi = \frac{\partial H}{\partial I_\phi}, \quad \omega_r = \frac{\partial H}{\partial I_r}$$

coincidono per ogni (E, M) .

Esercizio 3.14.3 Considerare il sistema hamiltoniano per una particella con moto unidimensionale in un potenziale

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + V_0 \tan^2(q/d),$$

dove V_0 e d sono costanti positive assegnate. Calcolare la variabile d'azione e dimostrare che l'energia E espressa in termini di I vale

$$E = \frac{1}{2m} I/d^2 (J + 2d\sqrt{2mV_0}).$$

Verificare che il periodo dei moti vale

$$T = \frac{2\pi m d^2}{I + 2d\sqrt{2mV_0}},$$

e calcolare la variabile angolo.

3.15 Esercizi

Esercizio 3.15.1 Si considerino due hamiltoniani della forma (3.4.14), ovvero quelle lineari rispetto agli impulsi:

$$H_X = \langle p, X(q) \rangle, \quad H_Y = \langle p, Y(q) \rangle$$

per due campi vettoriali $X(q), Y(q)$ sullo spazio delle configurazioni M . Dimostrare che la parentesi di Poisson delle hamiltoniane è di nuovo una funzione lineare negli impulsi data dalla seguente formula:

$$\{H_X, H_Y\} = -H_{[X, Y]}.$$

In questa formula $[X, Y]$ denota il commutatore di campi vettoriali su M .

Esercizio 3.15.2 Dato un sistema meccanico invariante rispetto alle traslazioni spaziali, si dimostri che le componenti dell'impulso totale

$$\mathbf{P} = (P_x, P_y, P_z) = \sum_a \mathbf{p}_a$$

commutano tra di loro:

$$\{P_x, P_y\} = \{P_x, P_z\} = \{P_y, P_z\} = 0.$$

Esercizio 3.15.3 Dato un sistema meccanico isolato invariante rispetto alle rotazioni spaziali, si dimostri che le componenti del momento angolare

$$\mathbf{M} = (M_x, M_y, M_z) = \sum_a \mathbf{r}_a \times \mathbf{p}_a$$

formano un'algebra di Lie finito dimensionale, ovvero le parentesi di Poisson tra queste funzioni sono combinazioni lineari delle stesse funzioni. Per le parentesi di Poisson delle componenti del momento angolare si derivino le seguenti formule:

$$\{M_x, M_y\} = M_z, \quad \{M_y, M_z\} = M_x, \quad \{M_z, M_x\} = M_y. \quad (3.15.1)$$

Inoltre, dimostrare che la corrispondenza

$$M_x \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_y \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_z \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

stabilisce un isomorfismo tra l'algebra di Lie (3.15.1) e l'algebra di Lie $so(3)$ delle matrici 3×3 antisimmetriche rispetto al commutatore delle matrici,

$$so(3) = \{A = (a_{ij})_{1 \leq i, j, \leq 3} \mid A^T = -A\}, \quad [A, B] := AB - BA.$$

Osservazione 3.15.4 Le formule (3.15.1) per le parentesi di tre componenti del vettore $\mathbf{M} = (M_1, M_2, M_3)$ possono essere scritte nella seguente forma compatta:

$$\{M_i, M_j\} = \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} M_k \quad (3.15.2)$$

dove il simbolo di Levi-Civita ϵ_{ijk} viene definito nel seguente modo

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} \text{segnatura della permutazione } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i & j & k \end{pmatrix}, & \text{tutti gli indici } i, j, k \text{ sono distinti} \\ 0, & \text{almeno due degli indici coincidono} \end{cases} \quad (3.15.3)$$

Esercizio 3.15.5 *Si consideri un sistema meccanico invariante sia rispetto alle traslazioni sia rispetto alle rotazioni spaziali. Si dimostri che gli integrali primi definite dalle componenti dei vettori di impulso totale $\mathbf{P} = (P_1, P_2, P_3)$, e momento angolare $\mathbf{M} = (M_1, M_2, M_3)$ formano un'algebra di Lie finito dimensionale della seguente forma*

$$\{M_i, M_j\} = \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} M_k, \quad \{M_i, P_j\} = \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} P_k, \quad \{P_i, P_j\} = 0. \quad (3.15.4)$$

Inoltre, dimostrare che questa algebra di Lie è isomorfa all'algebra di Lie $e(3)$ del gruppo di Lie delle isometrie dello spazio euclideo \mathbb{R}^3 .

Esercizio 3.15.6 *Si consideri il problema di Keplero, ovvero il sistema hamiltoniano su \mathbb{R}^6 con hamiltoniana*

$$H = \frac{1}{2m} \mathbf{p}^2 - \frac{k}{r}, \quad r = \sqrt{\mathbf{r}^2}.$$

Si ricordi che in questo problema abbiamo tre integrali primi del momento angolare

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = (M_1, M_2, M_3)$$

nonché i tre integrali di Laplace - Runge - Lenz (vedi l'esercizio 2.10.4)

$$\mathbf{L} = \frac{1}{m} \mathbf{p} \times \mathbf{M} - k \frac{\mathbf{r}}{r} = (L_1, L_2, L_3).$$

Si dimostri che le parentesi di Poisson tra questi integrali hanno la seguente forma

$$\{H, M_i\} = \{H, L_i\} = 0$$

$$\{M_i, M_j\} = \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} M_k, \quad \{L_i, M_j\} = \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} L_k, \quad \{L_i, L_j\} = -\frac{2}{m} H \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} M_k.$$

Allora, sulla superficie di livello di hamiltoniana $H = E$ si ottiene un'algebra di Lie chiusa di dimensione 6:

$$\{M_i, M_j\} = \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} M_k, \quad \{L_i, M_j\} = \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} L_k, \quad \{L_i, L_j\} = -\frac{2}{m} E \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} M_k. \quad (3.15.5)$$

Si dimostri che per $E < 0$ (che corrisponde al moto sulle orbite ellittiche) l'algebra di Lie (3.15.5) è isomorfa all'algebra di Lie $so(4)$ delle matrici 4×4 antisimmetriche¹⁵. Per $E = 0$

¹⁵Sorprendentemente nel problema di Keplero tridimensionale abbiamo una simmetria nascosta quadridimensionale! La simmetria $SO(4)$ è stata scoperta prima nella versione quantistica del problema di Keplero (V.Fock, 1935), ovvero nella teoria quantistica dell'atomo di idrogeno.

si ottiene un'algebra di Lie isomorfa all'algebra di Lie (3.15.4) del gruppo di isometrie di \mathbb{R}^3 . Infine, si dimostri che per $E > 0$ l'algebra di Lie (3.15.5) è isomorfa all'algebra di Lie del gruppo di Lorentz $SO(1, 3)$ definito nel seguente modo:

$$SO(1, 3) := \left\{ G = (g_{ij})_{1 \leq i, j \leq 4} \mid G^T J G = J \right\}, \quad J = \text{diag}(1, -1, -1, -1).$$

Hint: usare la seguente base in $so(4)$:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad L_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad L_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Esercizio 3.15.7 Si consideri lo spazio delle fasi $P = \mathbb{R}^{2n}$ dotato della parentesi di Poisson standard

$$\{x^a, x^b\} = \pi^{ab}, \quad a, b = 1, \dots, 2n$$

dove la matrice π^{ab} ha la solita forma (3.2.11). Si dimostri che le funzioni quadratiche

$$f(x) = \frac{1}{2} f_{ab} x^a x^b$$

su \mathbb{R}^{2n} formano un'algebra di Lie chiusa rispetto alla parentesi di Poisson. Inoltre, si dimostri che questa algebra è isomorfa all'algebra di Lie $sp(n)$ del gruppo delle trasformazioni simplettiche, ovvero all'algebra di Lie delle matrici $2n \times 2n$ della seguente forma:

$$sp(n) := \left\{ A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq 2n} \mid A \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} A^T = 0 \right\}. \quad (3.15.6)$$

Esercizio 3.15.8 Si consideri il vettore dell'impulso totale del sistema invariante rispetto alle traslazioni, modificato in presenza di un campo magnetico costante uniforme $\mathbf{B} = (B_1, B_2, B_3)$ (vedi l'esercizio 2.2.3)

$$\tilde{\mathbf{P}} = \mathbf{P} + \frac{e}{c} \mathbf{B} \times \mathbf{R}.$$

Si dimostri che le parentesi di Poisson tra i componenti del vettore $\tilde{\mathbf{P}} = (\tilde{P}_1, \tilde{P}_2, \tilde{P}_3)$ hanno la seguente forma

$$\{\tilde{P}_i, \tilde{P}_j\} = -2 \frac{e}{c} \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} B_k.$$

Esercizio 3.15.9 Data una matrice antisimmetrica (ω_{ij}) di dimensione $2n \times 2n$, si definisca il numero $\text{Pf}(\omega_{ij})$ (il cosiddetto pfaffiano della matrice (ω_{ij})) mediante la seguente equazione

$$\frac{1}{n!} \omega \wedge \dots \wedge \omega = \text{Pf}(\omega_{ij}) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{2n}, \quad (3.15.7)$$

(compaiono n fattori nel prodotto esterno nella parte sinistra) dove la 2-forma ω associata alla matrice antisimmetrica è definita come

$$\omega = \frac{1}{2} \omega_{ij} dx^i \wedge dx^j.$$

a) Si calcoli esplicitamente il pfaffiano di una matrice antisimmetrica 4×4 .

b) Si dimostri che

$$[\text{Pf}(\omega_{ij})]^2 = \det(\omega_{ij}).$$

Esercizio 3.15.10 Dato un numero positivo $p > 0$, si consideri la foglia simplettica particolare della varietà di Poisson (3.6.28):

$$\sum_i P_i^2 = p^2, \quad \sum_i M_i P_i = 0. \quad (3.15.8)$$

Si dimostri che questa foglia simplettica è equivalente, come varietà di Poisson, al fibrato cotangente T^*S^2 della sfera del raggio p in \mathbb{R}^3 .

Hint: il vettore $\mathbf{P} = (P_1, P_2, P_3)$ appartiene alla sfera; il vettore $\mathbf{M} = (M_1, M_2, M_3)$ è ortogonale a \mathbf{P} , e, quindi, è un vettore tangente alla sfera. Per stabilire la corrispondenza tra la parentesi sulla foglia simplettica e la parentesi canonica sul fibrato cotangente della sfera conviene introdurre le coordinate locali $(\theta, \phi, p_\theta, p_\phi)$ sulla foglia, per $P_3 \neq 0$, secondo le seguente formule

$$P_1 = p \cos \theta \cos \phi, \quad P_2 = p \cos \theta \sin \phi, \quad P_3 = p \sin \theta$$

$$M_1 = p_\theta \sin \phi - p_\phi \tan \theta \cos \phi, \quad M_2 = -p_\theta \cos \phi - p_\phi \tan \theta \sin \phi, \quad M_3 = p_\phi.$$

In queste coordinate la parentesi (3.6.28) sulla foglia simplettica (3.15.8) assume la forma canonica:

$$\{\theta, p_\theta\} = \{\phi, p_\phi\} = 1$$

$$\{\theta, \phi\} = \{p_\theta, p_\phi\} = 0, \quad \{\theta, p_\phi\} = \{\phi, p_\theta\} = 0.$$

Esercizio 3.15.11 Si consideri ora la foglia simplettica generale della varietà di Poisson (3.6.28):

$$\sum_i P_i^2 = p^2, \quad \sum_i P_i M_i = p s$$

dove $p > 0$ e s è un parametro arbitrario. Si dimostri che la trasformazione $(P_i, M_j) \mapsto (P_i, \tilde{M}_j)$ definita dalle seguente formule

$$\tilde{M}_i = M_i - \frac{s}{p} P_i, \quad i = 1, 2, 3$$

anche in questo caso stabilisce una corrispondenza tra la foglia simplettica e lo spazio del fibrato cotangente T^*S^2 della sfera, ma con la parentesi non canonica. Infatti, si dimostri che la sostituzione analoga a quella dell'esercizio precedente

$$P_1 = p \cos \theta \cos \phi, \quad P_2 = p \cos \theta \sin \phi, \quad P_3 = p \sin \theta$$

$$\tilde{M}_1 = p_\theta \sin \phi - p_\phi \tan \theta \cos \phi, \quad \tilde{M}_2 = -p_\theta \cos \phi - p_\phi \tan \theta \sin \phi, \quad \tilde{M}_3 = p_\phi.$$

riduce la parentesi sulla foglia simplettica alla forma (3.6.22) con la 2-forma Ω sulla sfera proporzionale alla forma di area:

$$\Omega = s \cos \theta d\theta \wedge d\phi,$$

cioè, rispetto alle formule dell'esercizio precedente c'è solo una modifica:

$$\{p_\phi, p_\theta\} = s \cos \theta.$$

Si osservi che per $s \neq 0$ l'integrale $\int_{S^2} \Omega \neq 0$, e, quindi, la 2-forma Ω non è una forma esatta, perciò la parentesi sulla foglia simplettica non può essere ridotta *globalmente* alla forma canonica.

Negli esercizi successivi sarà utilizzata la *forma invariante* su un'algebra di Lie. Si ricordi che, data un'algebra di Lie \mathfrak{g} , e una forma simmetrica bilineare non degenera $\langle \cdot, \cdot \rangle$ su \mathfrak{g} , si dice che la forma bilineare è invariante se la seguente equazione è valida per qualsiasi tre elementi $a, b, c \in \mathfrak{g}$:

$$\langle [a, b], c \rangle = -\langle b, [a, c] \rangle. \quad (3.15.9)$$

Sia G il gruppo di Lie connesso associato a \mathfrak{g} , allora gli operatori della rappresentazione aggiunta agiscono come trasformazioni ortogonali rispetto a una forma invariante, cioè, per ogni due elementi a, b dell'algebra di Lie e ogni $g \in G$ è valida la seguente identità:

$$\langle \text{Ad}(g)a, \text{Ad}(g)b \rangle = \langle a, b \rangle. \quad (3.15.10)$$

Ad esempio, per l'algebra di Lie $gl(n)$ di matrici quadrate $n \times n$ la forma bilineare

$$\langle a, b \rangle = \text{tr } a^T \cdot b \quad (3.15.11)$$

è invariante. Per l'algebra di Lie $so(n)$ la forma bilineare

$$\langle a, b \rangle = -\text{tr } a \cdot b \quad (3.15.12)$$

è invariante e anche definita positiva. Altri esempi:

- l'algebra di Lie $so(3)$ può essere realizzata come lo spazio euclideo \mathbb{R}^3 con il commutatore definito tramite il prodotto vettoriale:

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \mathbf{a} \times \mathbf{b}.$$

La forma invariante coincide con il prodotto scalare euclideo:

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle := (\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sum_{i=1}^3 a_i b_i.$$

- l'algebra di Lie $e(3)$ del gruppo di isometrie dello spazio euclideo \mathbb{R}^3 può essere realizzata come il quadrato cartesiano dello spazio euclideo \mathbb{R}^3 con il commutatore definito nel seguente modo:

$$[(\mathbf{a}, \mathbf{x}), (\mathbf{b}, \mathbf{y})] := (\mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{y} - \mathbf{b} \times \mathbf{x}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3.$$

La forma invariante si scrive come

$$\langle (\mathbf{a}, \mathbf{x}), (\mathbf{b}, \mathbf{y}) \rangle := (\mathbf{a}, \mathbf{b}) + (\mathbf{a}, \mathbf{y}) + (\mathbf{b}, \mathbf{x}).$$

L'esistenza di una forma invariante non è garantita su un'algebra di Lie qualsiasi. Per la classe di algebre di Lie semisemplici la forma invariante esiste sempre; si può utilizzare, ad esempio, la forma di Killing:

$$\langle a, b \rangle := \text{tr} (\text{ad}(a) \cdot \text{ad}(b))$$

dove

$$\text{ad}(a) x := [a, x], \quad a, x \in \mathfrak{g}.$$

Si osservi che gli operatori della forma $\text{ad}(a)$ sono antisimmetrici rispetto alla forma invariante:

$$\langle \text{ad}(a) x, y \rangle = -\langle x, \text{ad}(a) y \rangle.$$

Esercizio 3.15.12 *Sia data un'algebra di Lie \mathfrak{g} provvista di una forma invariante $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Sfruttando la forma non degenera, si stabilisca l'isomorfismo*

$$\mathfrak{g}^* \simeq \mathfrak{g}. \quad (3.15.13)$$

Utilizzando questo isomorfismo, ogni sistema hamiltoniano su \mathfrak{g}^ rispetto alla parentesi di Lie - Poisson può essere considerato come un sistema dinamico sullo spazio \mathfrak{g} . Si dimostri che questo sistema su \mathfrak{g} si scrive nel seguente modo:*

$$\dot{a} = [\nabla H, a] \quad (3.15.14)$$

per un'hamiltoniana $H = H(a)$ qualsiasi.

Esercizio 3.15.13 *Si consideri l'algebra di Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n)$ di matrici quadrate. Si identifichi lo spazio duale \mathfrak{g}^* con \mathfrak{g} usando la forma invariante (3.15.11). Allora, si dimostri che i coefficienti del polinomio caratteristico*

$$\det(a - \lambda \cdot 1) = (-\lambda)^n + c_1(a)(-\lambda)^{n-1} + \dots + c_n(a), \quad a \in \mathfrak{gl}(n)$$

considerati come funzioni su $\mathfrak{gl}(n) \simeq \mathfrak{g}^$ sono tutti casimiri della parentesi di Lie - Poisson associata a \mathfrak{g}^* . (NB che, esplicitamente, $c_1(a) = \text{tr} a$, $c_n(a) = \det a$.) Infine, si dimostri che un casimir qualsiasi della parentesi di Lie - Poisson è una funzione della forma $r(a) = f(c_1(a), \dots, c_n(a))$.*

Esercizio 3.15.14 *Si consideri l'algebra di Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(n)$ di matrici $n \times n$ antisimmetriche. Si identifichi lo spazio duale \mathfrak{g}^* con \mathfrak{g} usando la forma invariante (3.15.12). Si dimostri che, data una matrice $a \in \mathfrak{g}$ arbitraria, allora*

a) per $n = 2m$ il polinomio caratteristico della matrice dipende solo da λ^2 :

$$\det(a - \lambda \cdot 1) = \lambda^{2m} + c_1(a)\lambda^{2m-2} + \dots + c_{m-1}(a)\lambda^2 + c_m^2(a) \quad (3.15.15)$$

dove $c_m(a) = \text{Pf}(a)$ è il pfaffiano della matrice antisimmetrica (vedi l'esercizio 3.15.9).

b) per $n = 2m + 1$ il polinomio caratteristico della matrice a ha la seguente forma

$$\det(a - \lambda \cdot 1) = -\lambda [\lambda^{2m} + c_1(a)\lambda^{2m-2} + \dots + c_{m-1}(a)\lambda^2 + c_m(a)]. \quad (3.15.16)$$

In queste formule i coefficienti $c_1(a), \dots, c_m(a)$ sono certe funzioni polinomiali dalla matrice a . Inoltre, in entrambi i casi si dimostri che un casimir qualsiasi della parentesi di Lie - Poisson su $\mathfrak{g}^* \simeq \mathfrak{so}(n)$ è una funzione della forma $r(a) = f(c_1(a), \dots, c_m(a))$.

Esercizio 3.15.15 Nella situazione dell'esercizio 3.15.12, si consideri una foglia simplettica della parentesi di Lie - Poisson su $\mathfrak{g}^* \simeq \mathfrak{g}$, considerata come una sottovarietà $\mathfrak{g}_{r_0} \subset \mathfrak{g}$.

1) Dati due vettori $\delta_1 a, \delta_2 a \in T_a \mathfrak{g}_{r_0}$, tangenti alla foglia simplettica nel punto $a \in \mathfrak{g}_{r_0}$, si dimostri che esistono due elementi $\delta_1 \tilde{a}, \delta_2 \tilde{a}$ dell'algebra di Lie tali che

$$\delta_1 a = [a, \delta_1 \tilde{a}], \quad \delta_2 a = [a, \delta_2 \tilde{a}].$$

2) Si dimostri che la forma simplettica indotta sulle foglie simplettiche \mathfrak{g}_{r_0} si calcola in base alla seguente formula

$$\omega(\delta_1 a, \delta_2 a) = \langle \delta_1 \tilde{a}, [a, \delta_2 \tilde{a}] \rangle.$$

4 Introduzione alla teoria moderna di sistemi integrabili

4.1 Integrali primi associati a una coppia di Lax

Il metodo più noto di costruzione degli integrali primi nella meccanica classica è basato sui legami tra gli integrali primi e le simmetrie. In questa sezione spiegheremo brevemente un'altro metodo, sviluppato nella teoria moderna dei sistemi integrabili.

Dato un sistema dinamico

$$\dot{x} = f(x), \quad x = (x^1, \dots, x^N) \quad (4.1)$$

e due $m \times m$ matrici $L = (L_{ij}(x))$, $A = (A_{ij}(x))$, si dice che le matrici costituiscono una *coppia di Lax* per il sistema dinamico se per ogni soluzione $x = x(t)$ del sistema (4.1) le matrici $L = (L_{ij}(x(t)))$ e $A = (A_{ij}(x(t)))$ soddisfano l'equazione

$$\dot{L} = [A, L] \quad (4.2)$$

e, inoltre, la validità dell'equazione (4.2) per $L = L(x)$, $A = A(x)$ implica le equazioni (4.1).

Teorema 4.1 Data una coppia di Lax per un sistema dinamico (4.1), allora gli autovalori $\lambda_1(x), \dots, \lambda_m(x)$ della matrice $L(x)$ sono gli integrali primi del sistema dinamico.

Dimostrazione: Prima dimostriamo il seguente

Lemma 4.2 Le funzioni

$$\text{tr } L^k, \quad k = 1, 2, \dots \quad (4.3)$$

sono tutti gli integrali primi del sistema dinamico.

Dimostrazione: Per $k = 1$ abbiamo

$$\frac{d}{dt} \operatorname{tr} L = \operatorname{tr} \dot{L} = \operatorname{tr}(A L - L A) = 0$$

(sfruttando la proprietà $\operatorname{tr} AB = \operatorname{tr} BA$ della traccia). Più in generale, applicando la regola di Leibnitz per la derivata del prodotto matriciale,

$$\frac{d}{dt} (A B) = \dot{A} B + A \dot{B},$$

la derivata della matrice L^k viene calcolata nel seguente modo:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} L^k &= \dot{L} L^{k-1} + L \dot{L} L^{k-2} + \dots + L^{k-2} \dot{L} L + L^{k-1} \dot{L} \\ &= A L^k - L A L^{k-1} + L A L^{k-1} - L^2 A L^{k-2} + \dots + L^{k-2} A L^2 - L^{k-1} A L + L^{k-1} A L - L^k A \\ &= [A, L^k]. \end{aligned}$$

Quindi,

$$\frac{d}{dt} \operatorname{tr} L^k = \operatorname{tr} \frac{d}{dt} L^k = \operatorname{tr}(A L^k - L^k A) = 0.$$

□

Corollario 4.3 *I coefficienti $a_1(x), \dots, a_m(x)$ del polinomio caratteristico*

$$\det(L - \lambda I) = (-1)^m [\lambda^m - a_1(x) \lambda^{m-1} + \dots + (-1)^m a_m(x)] \quad (4.4)$$

della matrice $L = L(x)$ sono gli integrali primi del sistema dinamico (4.1).

Dimostrazione: Infatti, i coefficienti del polinomio caratteristico sono polinomi in $\operatorname{tr} L, \operatorname{tr} L^2, \dots, \operatorname{tr} L^m$:

$$a_1 = \operatorname{tr} L, \quad a_2 = \frac{1}{2} [\operatorname{tr} L^2 - (\operatorname{tr} L)^2], \dots$$

□

Il corollario implica la validità del teorema, siccome gli autovalori sono le radici del polinomio caratteristico. □

Un'altra dimostrazione del teorema può essere fatta osservando che la soluzione $L = L(t)$ dell'equazione $\dot{L} = [A, L]$ con una qualsiasi matrice $A = A(t)$ si rappresenta nella forma

$$L(t) = U(t) L(t_0) U^{-1}(t) \quad (4.5)$$

dove la matrice $U = U(t)$ viene determinata dall'equazione matriciale lineare

$$\dot{U} = A(t) U \quad (4.6)$$

con il dato iniziale

$$U(t_0) = 1.$$

Infatti, i polinomi caratteristici delle matrici $L(t_0)$ e $U(t) L(t_0) U^{-1}(t)$ coincidono.

Esercizio 4.4 Dato un sistema dinamico con una coppia di Lax (4.2), e un autovettore ψ della matrice $L = L(x)$ con un autovalore λ , si dimostri che il vettore

$$\tilde{\psi} := \dot{\psi} + A\psi$$

è un autovettore di L con lo stesso autovalore λ .

4.2 Sistema di Toda

Si consideri un sistema di n punti q_1, q_2, \dots, q_n sulla retta con l'iterazione descritta dal potenziale

$$U(q_1, \dots, q_n) = \sum_{i=1}^{n-1} e^{q_i - q_{i+1}}$$

(il cosiddetto *reticolo di Toda*). Dimostriamo, utilizzando il metodo delle coppie di Lax, che l'hamiltoniana del sistema a n gradi di libertà

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n p_i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} e^{q_i - q_{i+1}} \quad (4.1)$$

è completamente integrabile. Si considerino le seguenti matrici tridiagonali $n \times n$:

$$L = \begin{pmatrix} b_1 & a_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_1 & b_2 & a_2 & & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & b_3 & & & 0 \\ \dots & & & \dots & & \dots \\ 0 & & & & b_{n-1} & a_{n-1} \\ 0 & & & & a_{n-1} & b_n \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -a_1 & 0 & a_2 & & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & 0 & & & 0 \\ \dots & & & \dots & & \dots \\ 0 & & & & 0 & a_{n-1} \\ 0 & & & & -a_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

dove

$$a_k = \frac{1}{2} e^{\frac{q_k - q_{k+1}}{2}}, \quad k = 1, \dots, n-1$$

$$b_k = -\frac{1}{2} p_k, \quad k = 1, \dots, n.$$

Un semplice conto stabilisce il seguente risultato:

Lemma 4.1 *La matrice $\dot{L} - [A, L]$ ha la seguente forma:*

$$\dot{L} - [A, L] = -\frac{1}{2}D + \frac{1}{4}C$$

dove D è una matrice diagonale costituita dalla seconda metà delle equazioni del moto

$$D_{kk} = \dot{p}_k + \frac{\partial H}{\partial q_k},$$

ovvero

$$D_{11} = \dot{p}_1 + e^{q_1 - q_2}$$

$$D_{nn} = \dot{p}_n - e^{q_{n-1} - q_n}$$

$$D_{kk} = \dot{q}_k + e^{q_k - q_{k+1}} - e^{q_{k-1} - q_k}, \quad k = 2, \dots, n-1;$$

gli elementi matriciali non nulli della matrice C sono

$$C_{k,k+1} = C_{k+1,k} = e^{\frac{q_k - q_{k+1}}{2}} [(\dot{q}_k - \dot{q}_{k+1}) - (p_k - p_{k+1})], \quad k = 1, \dots, n-1.$$

Quindi, le equazioni del moto del sistema di Toda

$$\begin{aligned} \dot{q}_k &= \frac{\partial H}{\partial p_k} = p_k \\ \dot{p}_k &= -\frac{\partial H}{\partial q_k} \end{aligned}$$

implicano

$$\dot{L} = [A, L].$$

Viceversa, dall'equazione di Lax seguono le equazioni

$$\begin{aligned} \dot{q}_k &= p_k + a \\ \dot{p}_k &= -\frac{\partial H}{\partial q_k} \end{aligned}$$

dove a è una nuova variabile. Aggiungendo il vincolo

$$\sum_k p_k = \sum_k \dot{q}_k$$

si ottiene $a = 0$, cioè, si deriva le equazioni di Hamilton per il sistema di Toda dalle equazioni di Lax.

Secondo il risultato principale della sezione precedente si ottengono n integrali $H_i = H_i(p, q)$ del sistema di Toda:

$$\det[L - \lambda I] = (-1)^n \left[\lambda^n + \frac{1}{2}H_1\lambda^{n-1} + \frac{1}{4}H_2\lambda^{n-2} + \dots + \frac{1}{2^n}H_n \right].$$

Il primo integrale è l'impulso totale

$$H_1 = \sum p_k;$$

l'hamiltoniana si ottiene dalla combinazione

$$H = H_1^2 - 2H_2;$$

altri integrali primi non sono ovvi.

Per dimostrare l'indipendenza degli integrali H_1, \dots, H_n consideriamo le ristrezioni

$$H_i^0(p) := H_i(p, a = 0), \quad i = 1, \dots, n,$$

cioè, considerando il limite.

È facile vedere, usando che la matrice $L = L(a = 0, b)$ è diagonale, che la funzione $H_i^0(p)$ coincide con la i -esima funzione simmetrica elementare delle variabili p_1, \dots, p_n e, quindi, queste funzioni sono indipendenti.

Il conto più impegnativo serve per dimostrare l'involuntività degli integrali primi. Il primo passo sarebbe di costruire flussi commutativi generati dalle hamiltoniane H_k . Presentiamo questa costruzione usando una famiglia equivalente delle hamiltoniane:

$$\tilde{H}_k = \frac{4}{k+1} \text{tr} L^{k+1}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Si osservi che \tilde{H}_1 coincide con l'hamiltoniana del sistema di Toda.

Utilizziamo le seguente notazioni: per una matrice quadrata X chiamiamo X_+ la matrice triangolare superiore con gli stessi elementi matriciali sopra la diagonale:

$$(X_+)_{ij} = \begin{cases} X_{ij}, & i \leq j \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

In modo simile definiamo la matrice X_- :

$$(X_-)_{ij} = \begin{cases} X_{ij}, & i \geq j \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

Definiamo le matrici A_k come

$$A_k = \left(L^k\right)_+ - \left(L^k\right)_-, \quad k = 1, 2, \dots \quad (4.3)$$

Si osservi che $A_1 = A$ della coppia di Lax per il sistema di Toda.

Esercizio 4.2 1) Per ogni $k \geq 1$ il commutatore $[A_k, L]$ è una matrice tridiagonale.

Hint: utilizzando la commutatività $[L^k, L] = 0$ si dimostri che

$$[A_k, L] = 2 \left[\left(L^k\right)_+, L \right] = -2 \left[\left(L^k\right)_-, L \right].$$

Si sfruttino le proprietà del commutatore di una matrice triangolare superiore/inferiore con una matrice tridiagonale.

Si definiscano i flussi sullo spazio delle fasi del retticolo di Toda ponendo

$$\frac{\partial L}{\partial t_k} := [A_k, L], \quad k = 1, \dots \quad (4.4)$$

In particolare, per $k = 1$ si ottiene il flusso del sistema di Toda. Le hamiltoniane $\tilde{H}_1, \dots, \tilde{H}_n$ (oppure, le hamiltoniane equivalenti H_1, \dots, H_n) sono integrali primi per tutti questi flussi.

Esercizio 4.3 *Si dimostri che le equazioni hamiltoniane*

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial q_i}{\partial t_k} &= \frac{\partial H_k}{\partial p_i} \\ \frac{\partial p_i}{\partial t_k} &= -\frac{\partial H_k}{\partial q_i} \end{aligned} \right\}, \quad i = 1, \dots, n$$

sono equivalenti a (4.4).

Esercizio 4.4 *Si dimostri che i flussi (4.4) commutano:*

$$\frac{\partial}{\partial t_k} \frac{\partial}{\partial t_l} L = \frac{\partial}{\partial t_l} \frac{\partial}{\partial t_k} L.$$

Hint: si dimostri che le matrici A_k soddisfano le equazioni

$$\frac{\partial A_k}{\partial t_l} - \frac{\partial A_l}{\partial t_k} = [A_k, A_l]. \quad (4.5)$$

Dalla commutatività dei flussi segue che le parentesi $\{\tilde{H}_k, \tilde{H}_l\} =: c_{kl}$ sono tutte costanti. Usando il limite $a_i \rightarrow 0$ è facile a vedere che tutte $c_{kl} = 0$.

Non è difficile vedere che le superficie di livello degli integrali primi del sistema di Toda non sono mai compatte. Si può costruire un'altro esempio di un sistema completamente integrabile considerando il retticolo di Toda *periodico*, ovvero, un sistema di n punti sulla circonferenza con l'interazione esponenziale dei punti vicini. Formalmente possiamo usare l'hamiltoniana della forma (4.1)

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n p_i^2 + \sum_{i=1}^n e^{q_i - q_{i+1}} \quad (4.6)$$

aggiungendo la condizione al bordo

$$x_{n+1} = x_1.$$

In questo caso è possibile costruire una *famiglia* delle coppie di Lax che dipende da un

parametro ausiliare μ :

$$L(\mu) = \begin{pmatrix} b_1 & a_1 & 0 & \dots & 0 & \mu a_n \\ a_1 & b_2 & a_2 & & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & b_3 & & & 0 \\ \dots & & & \dots & & \dots \\ 0 & & & & b_{n-1} & a_{n-1} \\ \mu^{-1} a_n & & & & a_{n-1} & b_n \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

$$A(\mu) = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & \dots & 0 & -\mu a_n \\ -a_1 & 0 & a_2 & & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & 0 & & & 0 \\ \dots & & & \dots & & \dots \\ 0 & & & & 0 & a_{n-1} \\ \mu^{-1} a_n & & & & -a_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

dove

$$a_k = \frac{1}{2} e^{\frac{q_k - q_{k+1}}{2}}, \quad k = 1, \dots, n$$

$$b_k = -\frac{1}{2} p_k, \quad k = 1, \dots, n.$$

Il polinomio caratteristico della matrice $L(\mu)$ ha la seguente forma:

$$R(\mu, \lambda) := \det [L(\lambda) - \lambda I] = (-1)^n \left[P_n(\lambda) - \frac{1}{2^n} \left(\mu + \frac{1}{\mu} \right) \right]; \quad (4.8)$$

i coefficienti del polinomio

$$P_n(\lambda) = \lambda^n + \frac{1}{2} H_1(p, q) \lambda^{n-1} + \dots + \frac{1}{2^n} H_n(p, q)$$

sono gli integrali primi del sistema di Toda periodico.

L'indipendenza degli integrali primi si dimostra come prima. Anche la dimostrazione della commutatività è simile a quella fatta sopra. L'integrazione esplicita del sistema di Toda periodico è però molto più complicata. In questo caso bisogna utilizzare la geometria algebrica della curva complessa definita dall'equazione

$$R(\mu, \lambda) = 0 \quad (4.9)$$

(la cosiddetta *curva iperellittica*). Se i dati iniziali del sistema di Toda sono tali che le radici dell'equazione $R(\mu, \lambda) = 0$ sono tutte distinte, allora la curva complessa definisce una superficie di Riemann del genere $n - 1$. Gli autovettori $\psi = \psi(\mu, \lambda; p, q)$

$$[L(\mu) - \lambda I] \psi = 0 \quad (4.10)$$

della matrice $L(\mu)$ definiscono un fibrato in linea sulla curva iperellittica. Il punto centrale della teoria del sistema di Toda periodico è che la dipendenza dal tempo del fibrato in linea determinata dalle equazioni di Lax $\dot{L}(\mu) = [A(\mu), L(\mu)]$ diventa il flusso rettilineo sullo spazio dei moduli dei fibrati in linea (quel ultimo si identifica con la varietà di Jacobi della curva iperellittica (4.9)). Queste costruzioni sono comunque fuori dallo scopo del presente corso.

4.3 Sistema di Calogero - Moser

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n p_i^2 - \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \frac{1}{(q_i - q_j)^2} \quad (4.1)$$

Coppia di Lax¹⁶: $L = (L_{ij})$, $A = (A_{ij})$,

$$L_{ii} = p_i, \quad L_{ij} = -\frac{1}{q_i - q_j} \text{ for } i \neq j \quad (4.2)$$

$$A_{ii} = \sum_{j \neq i} \frac{1}{(q_i - q_j)^2}, \quad A_{ij} = -\frac{1}{(q_i - q_j)^2} \text{ for } i \neq j.$$

Per ogni polinomio $f(z)$ si consideri l'hamiltoniana

$$H_f(p, q) := \text{tr } f(L). \quad (4.3)$$

Tutte le funzioni $H_f(p, q)$ sono integrali primi del sistema di Calogero - Moser. La rappresentazione di Lax del flusso hamiltoniano generato da $H_f(p, q)$ ha la forma

$$\dot{L} = [A_f, L]$$

dove la matrice A_f è definita dalle seguente formule¹⁷:

$$(A_f)_{ij} = \frac{f'(L)_{ij}}{q_i - q_j}, \quad i \neq j \quad (4.4)$$

$$(A_f)_{ii} = -\sum_{j \neq i} (A_f)_{ij}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Lascio come un esercizio la dimostrazione di questa formula, e anche l'involutività degli integrali della forma H_f .

4.4 Equazioni di Eulero del moto di corpo rigido in dimensione arbitraria

Le equazioni (3.7.18) di Eulero - Poincaré del moto libero del corpo rigido nella dimensione qualsiasi n sono state già scritte nella forma di Lax

$$\dot{m} = [\omega, m], \quad m, \omega \in so(n), \quad m = I(\omega) = q\omega + \omega q. \quad (4.1)$$

¹⁶Calogero e Marchioro hanno studiato la versione quantistica dell'hamiltoniana (4.1). L'integrabilità del sistema meccanico classico per ogni n è stata dimostrata da Moser (1975)

¹⁷Adler (1977)

Purtroppo, gli integrali primi costruiti secondo lo schema generale, ovvero i coefficienti del polinomio caratteristico della matrice m , sono già noti. Infatti, questi integrali sono i casimiri della parentesi di Lie – Poisson sull'algebra di Lie $so(n)$.

Per costruire altri integrali utilizziamo una coppia di Lax per le equazioni (4.1) che dipende da un parametro¹⁸ ausiliare μ :

$$L(\mu) = m + \mu q^2, \quad A(\mu) = \omega + \mu q, \quad m, \omega \in so(n). \quad (4.2)$$

Teorema 4.1 *Data una matrice simmetrica costante q con gli autovalori distinti, allora l'equazione di Lax*

$$\dot{L}(\mu) = [A(\mu), L(\mu)]$$

sono equivalenti alle equazioni (4.1).

Dimostrazione: Senza perdere in generalità possiamo scegliere la matrice q nella forma diagonale:

$$q = \text{diag}(q_1, \dots, q_n), \quad q_i \neq q_j \quad \text{per } i \neq j.$$

Allora, l'equazione di Lax

$$\dot{m} = [\omega + \mu q, m + \mu q^2]$$

che deve essere valida identicamente in μ implica

$$\begin{aligned} \dot{m} &= [\omega, m] \\ [q^2, \omega] &= [q, m]. \end{aligned}$$

Dalla seconda equazione per $i \neq j$ per gli elementi matriciali delle matrici m e ω si ottiene

$$(q_i^2 - q_j^2) \omega_{ij} = (q_i - q_j) m_{ij},$$

ovvero

$$m_{ij} = (q_i + q_j) \omega_{ij} = (q \omega + \omega q)_{ij}.$$

□

Dal teorema si ottiene che tutti i coefficienti $r_{ij}(m)$ del polinomio caratteristico

$$R(\mu, \lambda) := \det(m + \mu q^2 - \lambda I) = \sum_{i,j} r_{ij}(m) \lambda^i \mu^j \quad (4.3)$$

sono gli integrali primi delle equazioni di Eulero.

Esempio 1. Per $n = 3$ gli integrali estratti dal polinomio caratteristico (4.3) si riducono al casimir

$$C = -\frac{1}{2} \text{tr } m^2$$

e l'hamiltoniana

$$H = -\frac{1}{4} \text{tr } \omega m,$$

¹⁸Manakov (1974)

$$R(\mu, \lambda) = (\mu q_1^2 - \lambda)(\mu q_2^2 - \lambda)(\mu q_3^2 - \lambda) - \lambda C + \mu [-\sigma_2 C + 2(-\sigma_3 + \sigma_1 \sigma_2)H]$$

dove $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ sono le funzioni simmetriche elementari delle variabili q_1, q_2, q_3 :

$$(z - q_1)(z - q_2)(z - q_3) = z^3 - \sigma_1 z^2 + \sigma_2 z - \sigma_3.$$

Esempio 2. Per $n = 4$ il polinomio caratteristico (4.3) ha la seguente forma

$$R(\mu, \lambda) = \prod_{i=1}^4 (\mu q_i^2 - \lambda) + C_1 \lambda^2 + C_2^2 + \mu^2 H_1 + \mu \lambda H_2$$

dove C_1, C_2 sono i casimiri della parentesi di Lie – Poisson su $so(4)$, i.e., i coefficienti del polinomio

$$\det(m - \lambda I) = \lambda^4 + C_1 \lambda^2 + C_2^2, \quad C_1 = -\frac{1}{2} \text{tr } m^2, \quad C_2 = \text{Pf}(m)$$

e $H_1 = H_1(m), H_2 = H_2(m)$ sono i due integrali indipendenti in involuzione delle equazioni di Eulero. In questo caso particolare sia i casimiri sia entrambi gli integrali sono funzioni quadratiche su $so(4)$.

5 Oscillazioni. Introduzione alle tecniche perturbative

5.1 Piccole oscillazioni vicino al punto di equilibrio

Data un'hamiltoniana $H = H(p, q)$, $(p, q) \in \mathbb{R}^{2n}$, si dice che il punto (p_0, q_0) è un *punto d'equilibrio* se

$$H_p(p_0, q_0) = H_q(p_0, q_0) = 0.$$

In questo caso la soluzione costante

$$\begin{aligned} p &= p_0 \\ q &= q_0 \end{aligned}$$

è una soluzione particolare delle equazioni del moto.

Senza perdere in generalità possiamo assumere che $p_0 = q_0 = 0$. Per studiare il comportamento delle soluzioni del sistema hamiltoniano

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{aligned}$$

vicino al punto d'equilibrio consideriamo prima il *sistema linearizzato*. A questo scopo, supponendo che la funzione $H(p, q)$ sia analitica nel punto $(0, 0)$, rappresentiamo l'hamiltoniana nella forma

$$H(p, q) = H_0 + H_2(p, q) + H_3(p, q) + \dots \quad (5.1.1)$$

dove $H_k(p, q)$ è un polinomio omogeneo del grado k . Il termine costante H_0 non contribuisce alle equazioni del moto, allora poniamo $H_0 = 0$.

Il sistema hamiltoniano

$$\begin{aligned}\dot{q}_i &= \frac{\partial H_2}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H_2}{\partial q_i}\end{aligned}\tag{5.1.2}$$

si chiama la *linearizzazione* del sistema di partenza sulla soluzione $p \equiv 0, q \equiv 0$. È facile vedere che la parte destra del sistema (5.1.2) dipende linearmente dalle coordinate (p, q) , cioè, il sistema può essere riscritto nella forma

$$\dot{x} = Bx, \quad x = (q, p)$$

dove B è una matrice $2n \times 2n$ costante. Si ricordi che la soluzione del sistema lineare con il dato iniziale $x(0) = x_0$ si scrive usando l'esponenziale matriciale

$$x(t) = e^{Bt}x_0, \quad e^{Bt} = 1 + \frac{t}{1!}B + \frac{t^2}{2!}B^2 + \frac{t^3}{3!}B^3 + \dots\tag{5.1.3}$$

Se il polinomio quadratico $H_2 = H_2(x)$ è scritto nella forma

$$H_2(x) = \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle$$

con una matrice simmetrica A , allora

$$B = JA, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.\tag{5.1.4}$$

Il comportamento delle soluzioni del sistema linearizzato viene determinato dagli autovalori della matrice B .

Lemma 5.1.1 *Il polinomio caratteristico della matrice $B = JA$ ha la forma*

$$\det(B - \lambda I) = P_n(\lambda^2)\tag{5.1.5}$$

dove $P_n(z)$ è un certo polinomio del grado n .

Dimostrazione: Utilizzando $\det J = 1, J^2 = -1$ riscriviamo il polinomio caratteristico della matrice $B = JA$ nella forma

$$\det(B - \lambda I) = \det(A - \lambda J).$$

Siccome i polinomi caratteristici delle matrici X e X^T coincidono, abbiamo

$$\det(A - \lambda J) = \det(A^T - \lambda J^T) = \det(A + \lambda J).$$

Abbiamo dimostrato che il polinomio caratteristico della matrice B è una funzione pari e, quindi, è un polinomio in λ^2 . \square

Si consideri solo il caso *generico*, assumendo che tutte le radici del polinomio $P_n(z)$ siano distinte. In questa situazione è valido il seguente teorema:

Teorema 5.1.2 *Data un'hamiltoniana quadratica $H_2(x) = \frac{1}{2}\langle Ax, x \rangle$ generica, allora la soluzione $p \equiv 0, q \equiv 0$ del sistema hamiltoniano lineare (5.1.2) è stabile se e solo se tutte le radici del polinomio $P_n(z)$ sono reali e negative.*

Per le considerazioni successive sarà utile di ridurre il sistema hamiltoniano lineare ad una forma più semplice utilizzando le trasformazioni canoniche *lineari*

$$x \mapsto Qx, \quad QJQ^T = J. \quad (5.1.6)$$

Dopo la trasformazione la matrice $B = JA$ del sistema hamiltoniano diventa

$$B \mapsto Q^{-1}BQ = JQ^T A Q.$$

Allora, il problema di classificazione dei sistemi hamiltoniani lineari rispetto alle trasformazioni canoniche

$$B \mapsto Q^{-1}BQ, \quad QJQ^T = J$$

è equivalente al problema di classificazione delle matrici simmetriche rispetto alle trasformazioni

$$A \mapsto Q^T A Q.$$

Il seguente risultato¹⁹ descrive la *forma normale* delle hamiltoniane quadratiche generiche stabili rispetto alle trasformazioni canoniche.

Teorema 5.1.3 *Data un'hamiltoniana quadratica in \mathbb{R}^{2n}*

$$H(x) = \frac{1}{2}\langle Ax, x \rangle, \quad x = (q, p), \quad A^T = A$$

tale che il polinomio caratteristico ha la forma

$$\det(A - \lambda J) = \prod_{i=1}^n (\lambda + \omega_i^2), \quad \omega_1, \dots, \omega_n \in \mathbb{R}_{>0}, \quad \omega_i \neq \omega_j,$$

allora esiste una trasformazione canonica lineare

$$\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \tilde{q} \\ \tilde{p} \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}, \quad QJQ^T = J$$

che riduce l'hamiltoniana alla seguente forma normale:

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \omega_i (\tilde{p}_i^2 + \tilde{q}_i^2). \quad (5.1.7)$$

Esempio. Si consideri un sistema lagrangiano a n gradi di libertà

$$L(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n g_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j - U(x)$$

¹⁹Williamson (1936)

dove la matrice simmetrica costante $g = (g_{ij})$ è definita positiva. Se l'origine $x = 0$ è il punto critico del potenziale $U(x)$, i.e., $\nabla U(x)|_{x=0} = 0$, allora $x = 0$ è il punto d'equilibrio del sistema meccanico. Per studiare la stabilità dell'equilibrio si consideri l'hessiano del potenziale nel punto $x = 0$:

$$h = (h_{ij}), \quad h_{ij} = \frac{\partial^2 U(x)}{\partial x_i \partial x_j} \Big|_{x=0}.$$

La linearizzazione del sistema meccanico vicino al punto d'equilibrio viene determinata dalla lagrangiana quadratica

$$L_0(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n g_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n h_{ij} x_i x_j$$

(abbiamo trascurato i termini del grado ≥ 3 dello sviluppo di Taylor del potenziale). Per ridurre il sistema alla forma normale utilizziamo il seguente risultato di algebra lineare: date due matrici simmetriche g, h con la matrice g definita positiva, esiste una matrice invertibile C tale che

$$C^T g C = I, \quad C^T h C = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

Si ricordi che i numeri reali $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sono le radici del polinomio caratteristico

$$\det(h - \lambda g) = 0.$$

Nelle nuove coordinate $x = C y$ la lagrangiana L_0 assume la seguente forma

$$L_0(y, \dot{y}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\dot{y}_i^2 - \lambda_i y_i^2),$$

mentre le equazioni del moto si scrivono come

$$\ddot{y}_i + \lambda_i y_i = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

La soluzione $y(t) \equiv 0$ è stabile se e solo se tutti gli autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sono positivi,

$$\lambda_i = \omega_i^2, \quad \omega_i > 0.$$

L'hamiltoniana associata alla lagrangiana

$$L_0(y, \dot{y}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\dot{y}_i^2 - \omega_i^2 y_i^2)$$

si scrive come

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\dot{p}_i^2 + \omega_i^2 q_i^2), \quad q_i = y_i, \quad p_i = \dot{y}_i.$$

Facendo ancora una trasformazione canonica

$$p_i \mapsto \omega_i^{1/2} p_i, \quad q_i \mapsto \omega_i^{-1/2} q_i, \quad i = 1, \dots, n$$

si arriva alla forma normale (5.1.7).

Le soluzioni del sistema hamiltoniano con l'hamiltoniana (5.1.7) possono essere espresse tramite le funzioni elementari:

$$\left. \begin{aligned} q_k &= \rho_k \sin(\omega_k t + \phi_k^0) \\ p_k &= \rho_k \cos(\omega_k t + \phi_k^0) \end{aligned} \right\}, \quad k = 1, \dots, n \quad (5.1.8)$$

dove i parametri $\rho_k \geq 0$, ϕ_k^0 sono le costanti di integrazione. Questo è un'esempio più semplice di un sistema completamente integrabile: i tori invarianti T^n sono definite dalle equazioni

$$p_k^2 + q_k^2 = \rho_k^2, \quad k = 1, \dots, n, \quad (5.1.9)$$

le azioni canoniche sono

$$I_k = \frac{1}{2} \rho_k^2, \quad (5.1.10)$$

e le coordinate angolari vengono introdotte come

$$\left. \begin{aligned} q_k &= \sqrt{2I_k} \sin \phi_k \\ p_k &= \sqrt{2I_k} \cos \phi_k \end{aligned} \right\}, \quad k = 1, \dots, n. \quad (5.1.11)$$

L'hamiltoniana H_2 è una funzione lineare delle azioni

$$H_2 = \sum_{k=1}^n \omega_k I_k.$$

5.2 Oscillazioni forzate. Risonanze

5.3 Oscillazioni anarmoniche. Le forme normali di Birkhoff

Si consideri ora il contributo dei termini superiori H_3 , H_4 , ecc. dell'hamiltoniana

$$H = H_2 + H_3 + H_4 + \dots,$$

nel comportamento delle soluzioni, assumendo che l'hamiltoniana quadratica H_2 sia generica è stabile. Supponiamo che le ampiezze delle oscillazioni (5.1.9) siano piccole. In questo caso è naturale considerare H_2 come il termine principale, e trattare i termini successivi H_3 , H_4 , ... come *piccole perturbazioni*. Tecnicamente conviene fare un rescaling

$$p \mapsto \epsilon p, \quad q \mapsto \epsilon q, \quad H \mapsto \epsilon^{-2} H,$$

dove ϵ è un piccolo parametro, per riscrivere l'hamiltoniana nella forma di una serie perturbativa

$$H = H_2 + \epsilon H_3 + \epsilon^2 H_4 + \dots \quad (5.3.1)$$

Per determinare il comportamento delle soluzioni del sistema hamiltoniano perturbato proviamo applicare il metodo delle trasformazioni canoniche nella forma suggerita da Birkhoff (1927).

Cerchiamo una trasformazione canonica

$$x = (q, p) \mapsto \tilde{x} = (\tilde{q}, \tilde{p}) = x + \epsilon \Delta_1 x + \epsilon^2 \Delta_2 x + \dots$$

in una forma di una *serie formale* in ϵ in modo tale da cancellare il primo termine cubico della perturbazione. Sapendo che le trasformazioni canoniche infinitesimali hanno la forma

$$x \mapsto x + \epsilon \{x, F\} + O(\epsilon^2), \quad (5.3.2)$$

cioè, lo shift per il tempo ϵ rispetto al flusso hamiltoniano generato dall'hamiltoniana $F = F(x)$, dopo la trasformazione la nuova hamiltoniana diventa uguale a

$$H \mapsto H - \epsilon \{H, F\} + O(\epsilon^2) = H_2 + \epsilon [H_3 - \{H_2, F\}] + O(\epsilon^2).$$

Per eliminare il termine cubico bisogna quindi trovare la funzione F dall'equazione

$$\{H_2, F\} = H_3. \quad (5.3.3)$$

Avendo l'hamiltoniana H_2 quadratica, e H_3 cubica, è chiaro che bisogna cercare la funzione F nella classe delle funzioni cubiche.

L'hamiltoniana quadratica H_2 determina una mappa dello spazio dei polinomi di terzo grado in se stesso:

$$F \mapsto \{H_2, F\}. \quad (5.3.4)$$

Per risolvere l'equazione (5.3.3) bisogna invertire questa mappa. Prima di formulare il risultato di Birkhoff, consideriamo un esempio particolare.

Esempio. Per il caso di sistemi a un grado di libertà per eliminare i termini cubici dall'hamiltoniana

$$H = \frac{1}{2}\omega(p^2 + q^2) + \epsilon(c_1p^3 + c_2p^2q + c_3pq^2 + c_4q^3) + O(\epsilon^2)$$

con $\omega \neq 0$ scegliamo

$$F = \frac{1}{\omega} \left[\frac{1}{6}(c_2 + 2c_4)p^3 - \frac{1}{2}c_1p^2q + \frac{1}{2}c_4pq^2 - \frac{1}{6}(c_3 + 2c_1)q^3 \right].$$

Ricalcolando i termini quartici, possiamo provare applicare la stessa procedura per cancellare i termini quartici dall'hamiltoniana

$$H = \frac{1}{2}\omega(p^2 + q^2) + \epsilon^2 H_4 + O(\epsilon^3)$$

cercando la trasformazione canonica infinitesimale nella forma

$$x \mapsto x + \epsilon^2 \{x, F\} + O(\epsilon^3)$$

dove $F = F(x)$ è un polinomio di quarto grado. Questo tentativo però fallisce! Non è difficile capire la ragione del fallimento: la mappa lineare (5.3.4) sullo spazio dei polinomi di quarto grado ha nucleo. Infatti, il polinomio $(p^2 + q^2)^2$ commuta con $H_2 = \frac{1}{2}\omega(p^2 + q^2)$ e, quindi, appartiene al nucleo della mappa (5.3.4).

La situazione dei sistemi a un grado di libertà può essere descritta nel seguente modo.

Esercizio 5.3.1 *Data un'hamiltoniana*

$$H(p, q; \epsilon) = \frac{1}{2}\omega(p^2 + q^2) + \sum_{k \geq 3} \epsilon^k H_k(q, p),$$

dove $H_k(q, p)$ è un polinomio omogeneo di grado k , $\omega \neq 0$, si dimostri l'esistenza di una serie formale

$$F = \sum_{k \geq 3} \epsilon^{k-3} F_k(q, p),$$

dove, come prima, $F_k(q, p)$ è un polinomio omogeneo di grado k , tale che la trasformazione canonica

$$x = (q, p) \mapsto \tilde{x} = (\tilde{q}, \tilde{p}) = x + \epsilon\{x, F\} + \frac{\epsilon^2}{2!}\{\{x, F\}, F\} + \frac{\epsilon^3}{3!}\{\{\{x, F\}, F\}, F\} + \dots \quad (5.3.5)$$

trasforma l'hamiltoniana H in

$$H = \frac{1}{2}\omega(\tilde{p}^2 + \tilde{q}^2) + \sum_{k \geq 2} \epsilon^{2k-2} c_k(\epsilon)(\tilde{p}^2 + \tilde{q}^2)^k \quad (5.3.6)$$

dove i coefficienti $c_2(\epsilon)$, $c_3(\epsilon)$, \dots sono serie formali in ϵ .

La formula (5.3.6) si chiama la *forma normale* dell'hamiltoniana perturbata a un grado di libertà. Quest forma può essere riscritta anche nel seguente modo:

$$H = h(\tilde{p}^2 + \tilde{q}^2; \epsilon), \quad \text{dove} \quad h(z; \epsilon) = \frac{1}{2}\omega z + \sum_{k \geq 2} \epsilon^{2k-2} c_k(\epsilon) z^k. \quad (5.3.7)$$

Le traiettorie del sistema perturbato sono le circonferenze

$$h(\tilde{p}^2 + \tilde{q}^2; \epsilon) = E;$$

il moto sulle circonferenze è il moto uniforme ,

$$\phi = \tilde{\omega}(E; \epsilon) t + \phi_0$$

dove

$$\tilde{\omega}(E; \epsilon) = 2h_z(z; \epsilon), \quad h(z; \epsilon) = E.$$

La situazione nella teoria delle forme normali di Birkhoff a $n > 1$ gradi di libertà è più complicata. Discutiamo brevemente solo il caso *non risonante*. Si ricordi che le frequenze $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ si chiamano *risonanti* se esistono numeri interi m_1, \dots, m_n , non tutti simultaneamente nulli, tali che

$$m_1\omega_1 + m_2\omega_2 + \dots + m_n\omega_n = 0.$$

Se tali numeri interi non esistono, allora si dice che le frequenze sono non risonanti. Per $n = 1$ la non risonanza significa che $\omega \neq 0$.

Teorema di Birkhoff. *Data un'hamiltoniana*

$$H(p, q; \epsilon) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \omega_i (p_i^2 + q_i^2) + \sum_{k \geq 3} \epsilon^k H_k(q, p), \quad (5.3.8)$$

dove $H_k(q, p)$ è un polinomio omogeneo di grado k in $(q, p) = (q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$, con le frequenze $\omega_1, \dots, \omega_n$ non risonanti, allora esiste una trasformazione canonica della forma (5.3.5) che trasforma l'hamiltoniana nella seguente forma normale:

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \omega_i (\tilde{p}_i^2 + \tilde{q}_i^2) + \sum_{k \geq 2} \epsilon^{2k-2} h_k(z_1, \dots, z_n; \epsilon), \quad z_i = \tilde{p}_i^2 + \tilde{q}_i^2, \quad i = 1, \dots, n \quad (5.3.9)$$

dove $h_k(z_1, \dots, z_n; \epsilon)$ è un polinomio omogeneo del grado k in z_1, \dots, z_n .

La condizione di avere le frequenze non risonanti è indispensabile per l'esistenza della trasformazione di Birkhoff anche nella classe delle serie formali. Infatti, nel caso risonante la mappa lineare $F \mapsto \{H_0, F\}$ sullo spazio dei polinomi $F = F(p, q)$ ha un nucleo non banale, come diventa chiaro dal seguente esercizio, e, quindi, non può essere invertibile.

Esercizio 5.3.2 Data un'hamiltoniana

$$H_0 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \omega_i (p_i^2 + q_i^2)$$

con le frequenze risonanti,

$$\sum_{i=1}^n m_i \omega_i = 0, \quad (m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{Z}^n, \quad \sum_{i=1}^n m_i^2 \neq 0,$$

si dimostri che la mappa $F \mapsto \{H_0, F\}$ sullo spazio dei polinomi $F = F(p, q)$ di grado $|m_1| + \dots + |m_n|$ contiene i seguenti polinomi F_R, F_I nel nucleo:

$$\begin{aligned} F_R &= \operatorname{Re} F, \quad F_I = \operatorname{Im} F, \\ F &= z_1^{|m_1|} z_2^{|m_2|} \dots z_n^{|m_n|}, \quad z_k = \begin{cases} p_k + i q_k, & m_k \geq 0 \\ p_k - i q_k, & m_k < 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (5.3.10)$$

Le forme normali delle perturbazioni dei sistemi risonanti sono state classificate da Moser (1958).

Se tutte le serie fossero convergenti, allora il sistema hamiltoniano sarebbe stato facilmente integrato. Infatti, utilizzando le coordinate canoniche \tilde{p}_i, \tilde{q}_i si osservi che i tori di Liouville sono definiti dal sistema di equazioni

$$\tilde{p}_1^2 + \tilde{q}_1^2 = 2 I_1, \dots, \tilde{p}_n^2 + \tilde{q}_n^2 = 2 I_n$$

dove I_1, \dots, I_n sono le azioni canoniche. Il moto sui tori è quasiperiodico,

$$\phi_i = \tilde{\omega}_i(I; \epsilon) t + \phi_i^0$$

dove

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_i(I; \epsilon) &= 2 \frac{\partial h(z; \epsilon)}{\partial z_i} \Big|_{z_k=2I_k}, \quad i = 1, \dots, n, \\ h(z; \epsilon) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \omega_i z_i + \sum_{k \geq 2} \epsilon^{2k-2} h_k(z_1, \dots, z_n; \epsilon). \end{aligned}$$

Il problema di *convergenza* delle serie (5.3.5) che riducono l'hamiltoniana perturbata alla forma normale per $n > 1$ è assai delicato. La convergenza delle serie di Birkhoff è legata all'esistenza degli integrali primi del sistema hamiltoniano analitici nel punto $p = q = 0$. Prima di tutto dimostriamo il seguente semplice risultato:

Teorema 5.3.3 *Data un'hamiltoniana $H(q, p)$ della forma (5.3.8) analitica nel punto $(0, 0, 0)$, si supponga che la trasformazione canonica (5.3.5) sia analitica vicino a questo punto. Allora il sistema hamiltoniano possiede n integrali primi in involuzione analitici all'origine.*

Dimostrazione: Infatti, le funzioni

$$H_i = \tilde{p}_i^2 + \tilde{q}_i^2, \quad i = 1, \dots, n$$

sono analitiche, commutano tra di loro e anche commutano con H . □

Questo semplice risultato può essere invertito per il caso dei sistemi a due gradi di libertà. Data un'hamiltoniana

$$H = \frac{1}{2}\omega_1(p_1^2 + q_1^2) + \frac{1}{2}\omega_2(p_2^2 + q_2^2) + H_3 + H_4 + \dots \quad (5.3.11)$$

analitica all'origine, supponiamo che esista un integrale primo della forma simile

$$F = \frac{1}{2}\omega'_1(p_1^2 + q_1^2) + \frac{1}{2}\omega'_2(p_2^2 + q_2^2) + F_3 + F_4 + \dots$$

sempre analitico all'origine. Inoltre, supponiamo che le parti quadratiche non sono proporzionali, i.e.,

$$\omega_1\omega'_2 - \omega_2\omega'_1 \neq 0 \quad (5.3.12)$$

Sotto queste condizioni è valida l'inversione del teorema precedente dovuta a Rüssman (1964):

Teorema 5.3.4 *La trasformazione canonica di Birkhoff per l'hamiltoniana perturbata (5.3.11) converge.*

Per finire questo capitolo descrivo brevemente un'altra versione del metodo perturbativo che presenta la soluzione del sistema perturbato (5.3.8) direttamente nelle coordinate di partenza. Partiamo dalla soluzione del sistema non perturbato scritte nella forma ovvia

$$q_k = \alpha_k \sin \phi_k, \quad p_k = \alpha_k \cos \phi_k, \quad \phi_k = \omega_k t + \phi_k^0, \quad k = 1, \dots, n. \quad (5.3.13)$$

Supponiamo che le ampiezze α_k siano piccole,

$$\alpha_k = O(\epsilon).$$

In questo caso la soluzione $x(t; \epsilon) = (q(t; \epsilon), p(t; \epsilon))$ del sistema perturbato può essere trovata nella forma di una serie di Fourier multipla con i coefficienti che sono le serie formali in ϵ

nella seguente forma (le cosiddette *serie di Lindstedt*):

$$\begin{aligned}
x(t) &= \epsilon^2 \mathbf{A}_{0\dots 0}(\epsilon) + \epsilon \left[a_1 e^{i\phi_1} \mathbf{f}_1 + \bar{a}_1 e^{-i\phi_1} \bar{\mathbf{f}}_1 + \dots + a_n e^{i\phi_n} \mathbf{f}_n + \bar{a}_n e^{-i\phi_n} \bar{\mathbf{f}}_n \right] \\
&+ \sum_{|k_1|+\dots+|k_n|>1} \epsilon^{|k_1|+\dots+|k_n|} \mathbf{A}_{k_1\dots k_n}(\epsilon) e^{i(k_1\phi_1+\dots+k_n\phi_n)}, \\
\phi_k &= \tilde{\omega}_k(\epsilon)t + \phi_k^0 \\
\tilde{\omega}_k(\epsilon) &= \omega_k + \sum_{m \geq 1} \epsilon^m \omega_k^{(m)}, \quad k = 1, \dots, n.
\end{aligned} \tag{5.3.14}$$

In questa formula \mathbf{f}_k è l'autovettore della matrice

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & \hat{\omega} \\ -\hat{\omega} & 0 \end{pmatrix}$$

con l'autovalore $i\omega_k$,

$$\Omega \mathbf{f}_k = i\omega_k \mathbf{f}_k, \quad k = 1, \dots, n,$$

i parametri a_k sono arbitrari, tutti gli altri coefficienti vettoriali $\mathbf{A}_{k_1\dots k_n}(\epsilon)$ e anche le frequenze $\tilde{\omega}_k(\epsilon)$ sono serie formali in ϵ determinate univocamente come funzioni di a_1, \dots, a_n e $\omega_1, \dots, \omega_n$ dalla sostituzione nelle equazioni perturbate. Questo metodo, ovviamente equivalente al metodo di Birkhoff, funziona anche per lo studio delle perturbazioni dei tori di piccola dimensione. Il metodo può essere usato anche per lo studio delle soluzioni periodiche e quasiperiodiche per le equazioni alle derivate parziali (il cosiddetto *metodo di Stokes*).

Esempio. Si consideri un sistema meccanico a un grado di libertà con hamiltoniana

$$H = \frac{p^2}{2} + \frac{\omega^2 q^2}{2} + \frac{\alpha q^3}{3} + \frac{\beta q^4}{4} + \dots$$

(l'oscillatore anarmonico). Per le oscillazioni di piccola ampiezza ϵ si ottiene la seguente formula approssimata, trascurando i termini di ordine $O(\epsilon^5)$ nello sviluppo di q e di ordine $O(\epsilon^4)$ nello sviluppo di $\tilde{\omega}$:

$$\begin{aligned}
q &\simeq \epsilon \cos \phi - \frac{\alpha}{2\omega^2} \epsilon^2 - \frac{19\alpha^3}{72\omega^6} \epsilon^4 + \frac{5\alpha\beta}{8\omega^4} \epsilon^4 \\
&+ \frac{\epsilon^2}{\omega^2} \left(\frac{\alpha}{6} + \frac{59\alpha^3}{432\omega^4} \epsilon^2 - \frac{31\alpha\beta}{96\omega^2} \epsilon^2 \right) \cos 2\phi \\
&+ \frac{\epsilon^3}{\omega^2} \left(\frac{\alpha^2}{48\omega^2} + \frac{\beta}{32} \right) \cos 3\phi + \frac{\epsilon^4}{\omega^4} \left(\frac{\alpha^3}{432\omega^2} + \frac{\alpha\beta}{96} \right) \cos 4\phi \\
\phi &= \tilde{\omega} t + \phi_0, \quad \tilde{\omega} \simeq \omega + \frac{\epsilon^2}{\omega} \left(\frac{3}{8}\beta - \frac{5\alpha^2}{12\omega^2} \right).
\end{aligned}$$

5.4 Invarianti adiabatici

5.5 Cenni della teoria KAM. Teorema di Nekhoroshev

Ogni sistema hamiltoniano a un grado di libertà è integrabile per quadrature. In particolare, se per un certo valore di energia E_0 la curva $H(p, q) = E_0$ è compatta e liscia, allora la soluzione $(p(t), q(t))$ dell'equazione del moto con il dato iniziale sulla curva stessa,

$$p|_{t=0} = p_0, \quad q|_{t=0} = q_0, \quad H(p_0, q_0) = E_0$$

è periodica. Variando il punto iniziale, oppure il livello di energia, non cambia il carattere periodico del moto.

Per i sistemi hamiltoniani a $n > 1$ gradi di libertà il comportamento delle traiettorie del moto può essere molto più complicato. Il caso relativamente semplice corrisponde ai sistemi completamente integrabili (vedi sezioni 3.13, 3.14). Sotto l'ipotesi aggiuntiva di compattezza delle superficie di livello degli integrali primi è stato dimostrato che il moto nel sistema completamente integrabile è il moto periodico o quasi periodico sui tori di Liouville. Anzi, sono state costruite le coordinate canoniche di azione - angolo $I_1, \dots, I_n, \phi_1, \dots, \phi_n$ su un piccolo intorno di un toro di Liouville tale che le superficie definite dalle equazioni

$$I_1 = I_1^0, \dots, I_n = I_n^0$$

sono i tori di Liouville con le coordinate angolari standard su di loro:

$$T^n = \{(\phi_1, \dots, \phi_n) \in \mathbb{R}^n \mid \phi_k \sim \phi_k + 2\pi\}.$$

Nelle coordinate (I, ϕ) l'hamiltoniana del sistema assume la forma particolarmente semplice

$$H = H(I_1, \dots, I_n);$$

le equazioni del moto

$$\left. \begin{aligned} \dot{\phi}_k &= \frac{\partial H(I)}{\partial I_k} \\ \dot{I}_k &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad k = 1, \dots, n$$

sono facilmente risolvibili:

$$\phi_k = \omega_k(I) t + \phi_k^0, \quad \omega_k(I) = \frac{\partial H(I)}{\partial I_k}.$$

Nel caso generale le frequenze $\omega_1(I), \dots, \omega_n(I)$ dipendono dal toro di Liouville. Il moto è periodico con il periodo T se queste frequenze sono proporzionali con i coefficienti intere al numero $2\pi/T$; nel caso opposto delle frequenze non risonanti la traiettoria del moto è densa sul toro.

Purtroppo, il tipico sistema hamiltoniano a $n > 1$ non è completamente integrabile. Anzi, un'hamiltoniana analitica generica $H = H(p, q)$ non ammette gli integrali primi analitici indipendenti da H . L'esempio il più noto è il problema di tre corpi in \mathbb{R}^3 con il potenziale newtoniano:

$$H = \frac{1}{2m_1} \mathbf{p}_1^2 + \frac{1}{2m_2} \mathbf{p}_2^2 + \frac{1}{2m_3} \mathbf{p}_3^2 - k \left[\frac{m_1 m_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} + \frac{m_2 m_3}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3|} + \frac{m_3 m_1}{|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1|} \right].$$

In questo caso abbiamo tre integrali di impulso totale nonché tre integrali del momento angolare. Come è stato dimostrato da Poincaré e Bruns, il problema di tre corpi non ammette altri integrali primi analitici.

Il caso più studiato è quello dei sistemi *vicini* ai sistemi completamente integrabili. Questi sistemi possono essere considerati come piccole perturbazioni di un sistema completamente integrabile. La formulazione matematica di tali sistemi viene descritta dalle hamiltoniane della forma

$$H = H_0(I) + \epsilon H_{\text{pert}}(I, \phi). \quad (5.5.1)$$

In questa formula $H_0(I)$ è l'hamiltoniana di un sistema completamente integrabile scritta nelle coordinate azione - angolo (come sappiamo già l'hamiltoniana H_0 non dipende dalle coordinate angolari ϕ), la perturbazione viene caratterizzata dall'hamiltoniana $H_{\text{pert}}(I, \phi)$ definita sul prodotto cartesiano

$$(I, \phi) \in \mathcal{I} \times T^n \quad (5.5.2)$$

di un certo dominio $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}^n$ per il toro T^n ; ϵ è il piccolo parametro della perturbazione. Per $\epsilon = 0$ il moto del sistema hamiltoniano è periodico/quasiperiodico sui tori di Liouville. Il problema principale²⁰ quindi è di descrivere il carattere del moto per i valori sufficientemente piccoli del parametro ϵ .

Fissando un toro particolare

$$I_1 = I_1^0, \dots, I_n = I_n^0 \quad (5.5.3)$$

del sistema non perturbato si può provare ad applicare la tecnica delle trasformazioni di Birkhoff

$$(\phi, I) \mapsto (\tilde{\phi}, \tilde{I})$$

all'hamiltoniana H rappresentata nella forma

$$H = H_0 + \sum_{i=1}^n \omega_i^0 \bar{I}_i + \Delta H_0(\bar{I}) + \epsilon H_{\text{pert}}(I, \phi)$$

dove

$$H_0 = H(I_0), \quad \bar{I}_i = I_i - I_i^0, \quad \omega_i^0 = \left. \frac{\partial H_0(I)}{\partial I_i} \right|_{I=I^0}, \quad \Delta H_0(\bar{I}) = O(|\bar{I}|^2)$$

(è stato utilizzato lo sviluppo di Taylor per $H_0(I)$), eliminando tutti i termini perturbativi, cioè, riducendo l'hamiltoniana alla forma normale

$$H = H(\tilde{I}; \epsilon).$$

Se tale trasformazione esiste, allora il sistema deformato ha un toro invariante ottenuto per una deformazione del toro (5.5.3).

Come abbiamo visto nella sezione 5.3, la trasformazione non esiste nemmeno nella classe delle serie formali in ϵ se le frequenze $\omega_1^0, \dots, \omega_n^0$ sono risonanti. In realtà questo non è solamente un problema del metodo di Birkhoff; anzi, com'è stato dimostrato da Poincaré, i tori con le frequenze risonanti vengono distrutti dalla perturbazione per i valori arbitrariamente piccoli del parametro ϵ della perturbazione generica.

²⁰considerato da Poincaré come il problema principale della meccanica analitica

Ma nemmeno nel caso delle frequenze nonrisonanti non è chiaro che il toro invariante sopravviva dopo la deformazione, causa il problema con la convergenza della trasformazione di Birkhoff. Nella prima metà del novecento è stata anche formulata l'ipotesi ergodica secondo la quale le traiettorie del moto del sistema perturbato si comportano in modo chaotico sulla superficie di livello di energia per una perturbazione generica.

Il colpo di scena nella storia con il problema di sopravvivenza dei tori invarianti è stato fatto fatto con la scoperta di Kolmogorov (1954). Secondo Kolmogorov la *maggior parte dei tori invarianti sopravvive* dopo una perturbazione qualsiasi sufficientemente piccola. La caratterizzazione dei tori che non vengono distrutti ma solamente subiscono una piccola deformazione può essere formulata nei termini delle condizioni diophantine per le frequenze. Le idee di Kolmogorov sono state rigorosamente giustificate da Arnold (per il caso delle hamiltoniane analitiche) e Moser (per le hamiltoniane sufficientemente lisce). Il seguente teorema, di solito chiamato il *teorema KAM* (da Kolmogorov, Arnold e Moser) dà la formulazione precisa di questi risultati.

Per formulare il teorema KAM descriviamo prima le condizioni diophantine per le frequenze nonrisonanti $\omega_1, \dots, \omega_n$. Fissando due numeri positivi α, τ , si dice che le frequenze soddisfano la condizione diophantina (α, τ) se

$$\left| \sum_{i=1}^n m_i \omega_i \right| \geq \frac{\alpha}{|m|^\tau} \quad \text{per tutti } m = (m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{Z}^n, \quad (5.5.4)$$

dove $|m| = |m_1| + \dots + |m_n|$. Denotando $\Delta_\alpha^\tau \subset \mathbb{R}^n$ l'insieme di tutti i vettori ω che soddisfano (5.5.4) per i valori fissati dei numeri positivi α, τ , si osservi che questo insieme non è vuoto, se $\tau > n - 1$. Infatti, il sottoinsieme complementare può essere rappresentato come l'unione degli aperti $R_{\alpha, m}^\tau$ di forma

$$R_{\alpha, m}^\tau = \left\{ \omega \in \mathbb{R}^n \mid \left| \sum_i m_i \omega_i \right| < \frac{\alpha}{|m|^\tau} \right\}, \quad m \in \mathbb{Z}^n, \quad m \neq 0. \quad (5.5.5)$$

Ovviamente, per ogni sottoinsieme limitato $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ la misura di Lebesgue dell'intersezione di $R_{\alpha, m}^\tau$ con Ω viene stimata come

$$\text{mes} (R_{\alpha, m}^\tau \cap \Omega) = O \left(\frac{\alpha}{|m|^{\tau+1}} \right)$$

e, quindi, l'intersezione

$$\bigcap_{\alpha > 0} R_\alpha^\tau, \quad R_\alpha^\tau = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}^n \setminus 0} R_{\alpha, m}^\tau$$

è un insieme della misura zero, e allora

$$\text{mes} [(\mathbb{R}^n \setminus \Delta_\alpha^\tau) \cap \Omega] \leq \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \text{mes} (R_{\alpha, m}^\tau \cap \Omega) = O(\alpha)$$

se $\tau + 1 > n$. Inoltre, dalla costruzione del complemento segue che, per questi valori di τ , l'insieme $\Delta_\alpha^\tau \subset \mathbb{R}^n$ è un *insieme di Cantor*, cioè, un sottoinsieme chiuso, perfetto e "nowhere" denso.

Allora, per ogni $\tau > n - 1$ l'insieme

$$\Delta^\tau = \bigcup_{\alpha > 0} \Delta_\alpha^\tau$$

è un sottoinsieme in \mathbb{R}^n della misura piena. In altre parole, fissando $\tau > n - 1$, risulta che quasi ogni²¹ vettore $\omega \in \mathbb{R}^n$ soddisfa la condizione (5.5.4) per un certo valore di $\alpha > 0$. Il numero $\tau > n - 1$ sarà fissato nelle considerazioni successive; denotiamo quindi $\Delta_\alpha := \Delta_\alpha^\tau$ per il valore selezionato di τ .

Tornando ai sistemi hamiltoniani, stiamo per formulare una condizione importante per l'hamiltoniana non perturbata $H_0(I)$. Si dice che l'hamiltoniana $H_0(I)$ è *non degenera* se la matrice delle derivate seconde ha il determinante non nullo:

$$\det \left(\frac{\partial^2 H_0(I)}{\partial I_i \partial I_j} \right) \neq 0 \quad (5.5.6)$$

per ogni $I = (I_1, \dots, I_n) \in \mathcal{I} \subset \mathbb{R}^n$. Per un'hamiltoniana non degenera la mappa

$$I \mapsto \omega(I) = \frac{\partial H_0(I)}{\partial I} \quad (5.5.7)$$

è un diffeomorfismo locale (cf. la condizione simile nella teoria della trasformazione di Legendre; vedi esp. l'esercizio 3.1.6). Restringendo se necessario il dominio \mathcal{I} della definizione delle azioni possiamo assumere che la mappa (5.5.7) è un diffeomorfismo di \mathcal{I} su un certo dominio $\Omega \in \mathbb{R}^n$. (Supponiamo inoltre che il bordo del dominio Ω è liscio a tratti.) In altre parole, data un'hamiltoniana non degenera, possiamo *parametrizzare dalle frequenze* $\omega \in \Omega$ i tori invarianti del sistema non perturbato. Fissando $\alpha > 0$, denotiamo $\Omega_\alpha \subset \Omega$ il sottoinsieme delle frequenze ω che appartengono a Δ_α e, inoltre, di cui distanza dal bordo di Ω non è minore di α . Chiaramente, Ω_α , come anche Δ_α , è un insieme di Cantor. Si osservi però che la misura di Ω_α è grande, siccome la misura del complemento può essere stimata come

$$\text{mes}(\Omega \setminus \Omega_\alpha) = O(\alpha).$$

Ora siamo pronti di formulare il teorema KAM.

²¹L'insieme complementare può essere descritto nei termini della teoria delle approssimazioni diophantine. Infatti, per il primo caso non banale $n = 2$ le frequenze (ω_1, ω_2) sono non risonanti se il rapporto

$$x = \frac{\omega_2}{\omega_1}$$

è un numero irrazionale. La condizione diophantina (5.5.4) viene violata per quelli numeri irrazionali che possono essere approssimati dai numeri razionali con la precisione anomala. Questo succede, ad esempio, per i cosiddetti *numeri di Liouville*. Si dice che il numero irrazionale x è il numero di Liouville se per ogni numero intero positivo N esistono due numeri interi $p, q > 1$ tali che

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^N}.$$

L'esempio di tale numero costruito da Liouville stesso è definito come la somma della seguente serie:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} 10^{-n!};$$

l'approssimazione razionale anomala ($p = p(N), q = q(N)$) viene costruita per ogni $N > 0$ come

$$p = \sum_{n=1}^N 10^{N!-n!}, \quad q = 10^{N!}.$$

Tutti i numeri di Liouville sono noti di essere trascendenti, ma non tutti numeri trascendenti sono i numeri di Liouville; ad esempio, i numeri e e π sono trascendenti ma non sono i numeri di Liouville.

Teorema 5.5.1 *Data un'hamiltoniana non degenera $H_0(I)$, $I \in \mathcal{I} \subset \mathbb{R}^n$, tale che la mappa delle*

$$\mathcal{I} \rightarrow \Omega \subset \mathbb{R}^n, \quad I \mapsto \omega(I) = \frac{\partial H_0(I)}{\partial I}$$

è un diffeomorfismo. Si supponga inoltre che l'hamiltoniana perturbata $H_0(I) + \epsilon H_{\text{pert}}(I, \phi)$ è una funzione analitica su $\bar{\mathcal{I}} \times T^n$. Allora, esiste un numero positivo δ tale che per ogni ϵ e tale che

$$|\epsilon| < \delta \alpha^2$$

tutti i tori invarianti del sistema non perturbato con le frequenze $\omega \in \Omega_\alpha$ persistono come i tori lagrangiani per il sistema perturbato subendo una piccola deformazione. Inoltre, questi tori dipendono nel modo Lipschitz-continuo da $\omega \in \Omega_\alpha$; infine, questi tori "fill" tutto lo spazio $\mathcal{I} \times T^n$ a meno di un sottoinsieme della misura $O(\alpha)$.

Dal teorema KAM segue che per le piccole perturbazioni dei sistemi completamente integrabili non degeneri l'ipotesi ergodica è sbagliata: i KAM tori formano un sottoinsieme invariante di una misura positiva ma diversa da quella piena. Si osservi però che questo sottoinsieme invariante come l'insieme di Cantor non contiene i punti interiori. In altre parole, dato un punto iniziale dello spazio delle fasi, non è possibile dire con precisione se la traiettoria di questo punto rimane sul toro invariante oppure gira nei buchi tra i tori. Si può soltanto dire, interpretando il teorema KAM nel modo probabilistico, che una traiettoria del sistema perturbato scelta nel modo random rimane sul toro invariante con la probabilità $1 - O(\alpha)$.

La dimostrazione del teorema KAM può essere trovata, e.g., in [7].

Alla fine di questa sezione discutiamo brevemente un altro approccio allo studio delle perturbazioni dei sistemi hamiltoniani completamente integrabili iniziato da Nekhoroshev (1977-79). A differenza dal teorema KAM il metodo di Nekhoroshev non garantisce che certe traiettorie del sistema perturbato rimangono sui tori invarianti per sempre. Invece, il teorema di Nekhoroshev stabilisce che *tutte le traiettorie* rimangono vicine ai tori invarianti del sistema non perturbato *per i tempi esponenzialmente lunghi*, $|t| < T(\epsilon)$ dove

$$T(\epsilon) \sim e^{\frac{1}{\epsilon}}.$$

Il punto di partenza del teorema di Nekhoroshev, come prima, è un'hamiltoniana analitica della forma

$$H_\epsilon = H_0(I) + \epsilon H_{\text{pert}}(I, \phi), \quad (I, \phi) \in \mathcal{I} \times T^n, \quad n > 1, \quad (5.5.8)$$

per un aperto limitato $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}^n$. Si supponga che l'hamiltoniana non perturbata è una funzione *uniformemente convessa*, cioè, esiste una costante positiva $\lambda > 0$ tale che

$$\left| \sum_{i,j} \frac{\partial^2 H_0(I)}{\partial I_i \partial I_j} X_i X_j \right| \geq \lambda \sum_i X_i^2 \quad \forall (X_1, \dots, X_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \forall I \in \mathcal{I}. \quad (5.5.9)$$

Ovviamente, la convessità implica che l'hamiltoniana $H_0(I)$ è non degenera, ma non viceversa.

Per formulare il teorema introduciamo la seguente notazione: dato un numero positivo δ denotiamo con $\mathcal{I}_\delta \subset \mathcal{I}$ il sottoinsieme dei punti contenuti nel \mathcal{I} con una palla del raggio δ .

Ora siamo pronti per formulare il teorema di Nekhoroshev.

Teorema 5.5.2 *Data un'hamiltoniana H_ϵ della forma (5.5.8), (5.5.9), allora esistono i numeri positivi $a, b, \alpha, \beta, \epsilon_0$ tali che per ogni $|\epsilon| < \epsilon_0$ e per ogni soluzione $(I(t), \phi(t))$ delle equazioni di Hamilton*

$$\dot{\phi} = \frac{\partial H_\epsilon}{\partial I}$$

$$\dot{I} = -\frac{\partial H_\epsilon}{\partial \phi}$$

con il dato iniziale $(I(0), \phi(0))$ che soddisfa

$$I(0) \in \mathcal{I}_\delta \quad \text{per} \quad \delta = \alpha |\epsilon|^a$$

e per ogni t tale che

$$|t| \leq \beta \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\epsilon}} \exp\left(\frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right)^b$$

è valida la seguente stima:

$$|I(t) - I(0)| < \alpha |\epsilon|^a.$$

Bisogna sottolineare che il teorema di Nekhoroshev non esclude la possibilità del moto caotico delle variabili I . Comunque sia, la variazione di questi variabili rimane piccola per i tempi che possono anche superare il tempo di vita del sistema fisico stesso.

La dimostrazione del teorema di Nekhoroshev può essere trovata, e.g., in [2].

6 Risposte agli esercizi

Esercizio 1.9.1.

$$U(x) = \frac{2m\pi^2 x^2}{T^2}.$$

Esercizio 1.9.2.

a)

$$L(s, \dot{s}) = \frac{1}{2} [x'^2(s) + y'^2(s)] \dot{s}^2 - g y(s).$$

b) Cicloide

$$\left. \begin{aligned} x &= a (\tau + \sin \tau) \\ y &= a (1 - \cos \tau) \end{aligned} \right\}$$
$$a = \frac{gT^2}{8\pi^2}.$$

Esercizio 1.9.3.

$$L = \frac{(m_1 + m_2)l_1^2}{2} \dot{\phi}_1^2 + \frac{m_2 l_2^2}{2} \dot{\phi}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \cos(\phi_1 - \phi_2) \dot{\phi}_1 \dot{\phi}_2 + (m_1 + m_2)g l_1 \cos \phi_1 + m_2 g l_2 \cos \phi_2.$$

Esercizio 1.9.4.

$$L = \frac{m_1 + m_2}{2} \dot{x}^2 + \frac{m_2}{2} [l^2 \dot{\phi}^2 + 2l \cos \phi \dot{x} \dot{\phi}] + m_2 g l \cos \phi.$$

Esercizio 1.9.5.

a)

$$L = \frac{m l^2}{2} \dot{\phi}^2 + m \omega^2 a l \sin(\phi - \omega t) + m g l \cos \phi.$$

b)

$$L = \frac{m l^2}{2} \dot{\phi}^2 + m \omega^2 a l \cos \omega t \sin \phi + m g l \cos \phi.$$

c)

$$L = L = \frac{m l^2}{2} \dot{\phi}^2 + m \omega^2 a l \cos \omega t \cos \phi + m g l \cos \phi.$$

Esercizio 1.9.6.

$$L = a^2 (m_1 + 2m_2 \omega^2 \sin^2 \theta) \dot{\theta}^2 + m_1 \omega^2 a^2 \sin^2 \theta + 2(m_1 + m_2) g a \cos \theta.$$

Esercizio 2.10.5.

$$\delta \phi = -\frac{2\pi \epsilon}{k p}.$$

Esercizio 2.10.1.

$$t = \int \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2}{ml^2} [E - U_{\text{eff}}(\theta)]}}$$

$$\phi = \frac{M_z}{l\sqrt{2m}} \int \frac{d\theta}{\sin^2 \theta \sqrt{E - U_{\text{eff}}(\theta)}}$$

$$U_{\text{eff}}(\theta) := \frac{M_z^2}{2ml^2 \sin^2 \theta} - mgl \cos \theta.$$

Esercizio 2.10.2. La traiettoria del punto m_2 è un arco di un'ellisse con il semiasse orizzontale $lm_1/(m_1 + m_2)$ e quello verticale l ,

$$t = l \sqrt{\frac{m_2}{2(m_1 + m_2)}} \int \sqrt{\frac{m_1 + m_2 \sin^2 \phi}{E + m_2gl \cos \phi}} d\phi.$$

Esercizio 2.10.8.

$$R_C = P \frac{l}{4h} \sin 2\alpha, \quad R_B = P \left(1 - \frac{l}{4h} \sin 2\alpha \sin \alpha \right), \quad T = P \frac{l}{4h} \sin 2\alpha \cos \alpha.$$

Esercizio 2.10.9.

$$R_A = \frac{1}{2}P \cot \alpha \sin \beta, \quad R_B = P$$

$$T_A = \frac{1}{2}P \cot \alpha \cos \beta, \quad T_B = \frac{1}{2}P \cot \alpha.$$

Esercizio 2.10.10.

$$R_A = \frac{3}{4}F, \quad R_B = \frac{1}{4}F, \quad R_C = \frac{1}{4 \sin \alpha}F, \quad T = \frac{1}{4}F \cot \alpha$$

dove α è l'angolo CAB .

Esercizio 2.10.11. Lo spostamento verso est (per l'emisfero di nord) di

$$\Delta \simeq \frac{1}{3} \left(\frac{2h}{g} \right)^{3/2} g \Omega \cos \theta.$$

Esercizio 2.10.12. La rotazione uniforme del piano delle oscillazioni con velocità angolare $\Omega \sin \theta$ dove θ è la latitudine della posizione del pendolo.

Esercizio 3.15.9. Il pfaffiano di una matrice 4×4 antisimmetrica $a = (a_{ij})$ è uguale a

$$\text{Pf}(a) = a_{14}a_{23} - a_{13}a_{24} + a_{12}a_{34}. \quad (6.1)$$

Per preparare i presenti appunti sono stati usati i seguenti libri e articoli.

References

- [1] V.Arnold, Mathematical methods of classical mechanics
- [2] G.Benettin, L.Galgani, A.Giorgilli, A proof of Nekhoroshev's theorem for the stability times in nearly integrable Hamiltonian systems, *Celestial Mechanics* **37** (1985) 1-25.
- [3] B.Dubrovin, A.Fomenko, S.Novikov, Modern geometry
- [4] B.Dubrovin, I.Krichever, S.Novikov, Integrable systems (Springer Encyclopedia, Vol. 4)
- [5] A.Fasano, S.Marmi, *Meccanica analitica*
- [6] L.Landau, E.Lifschitz, *Meccanica*
- [7] J.Pöschel, A lecture on the classical KAM theorem, *Proc. Symp. Pure Math.* **69** (2001) 707-732.