

LEZIONI DI MECCANICA ANALITICA
e di MECCANICA CELESTE

GIANFAUSTO DELL'ANTONIO

Dipartimento di Matematica, Università Roma I
e
Classe di Matematica, SISSA (Trieste)

Sono raccolti qui appunti per un corso di Lezioni che é stato da me tenuto in tempi diversi presso il dipartimento di Matematica dell'Universitá di Roma, Sapienza.

Questi appunti coprono 20 Lezioni; qualche lezione particolarmente impegnativa puó essere suddivisa in due ore.

Gli argomenti trattati, supplementati da esercizi proposti dal docente, possono essere utilizzate per impostare un corso di Meccanica Analitica con applicazioni alla Meccanica Celeste per la laurea specialistica sia in Matematica che in Fisica .

In queste Lezioni vengono trattati argomenti relativi alla dinamica di un un numero finito di punti material soggetti a forze di natura potenziale di tipo Newtoniano; viene illustrato il formalismo hamiltoniano e vengono illustrate semplici applicazioni a problemi di Meccanica Celeste.

Il formalismo si puó estendere a casi piú generali, ad esempio a forze di natura elettromagnetica e alla dinamica dei fluidi, ma queste generalizzazioni non vengono trattate in questi appunti. . Alcuni argomenti discussi sono "piú leggeri" di altri, e la partizione in singole lezioni che viene qui presentata puó non essere la migliore per tutte le classi e puó essere modificata in funzione della preparazione degli studenti.

In linea di massima il corso é rivolto a studenti che abbiano giá seguito un primo corso di Meccanica e quindi la parte reattiva alla Meccanica Newtoniana si limita a pochi richiami.

INDICE

Lezione 1: Elementi di Dinamica Newtoniana.

Lezione 2: Vincoli e Principio di d'Alembert

Lezione3 : Il formalismo di Lagrange. Principi variazionali

Lezione 4: Il principio variazionale per sistemi vincolati

Lezione 5: Il Metodo di Routh. Principio di Maupertius.

Lezione 6: Trasformazione di Legendre. Equazioni di Hamilton.

Lezione 7: Simmetrie e costanti del moto. Il toerema di E.Noether

Appendice: Prodotto di Lie di campi vettoriali.

Lezione 8: Angoli di Eulero. Dinamica della trottola.

Lezione 9: Trasformazioni canoniche e simplettiche. Strutture algebrica e geometrica della Meccanica Hamiltoniana.

Appendice : trattazione hamiltoniana di una particella in un campo magnetico

Lezione 10: Funzioni generatrici. Metodo di Hamiton-Jacobi

Appendice: Le coordinate di Delunay per il sistema di Keplero.

Lezione 11: Analisi del metodo di Hamilton-Jacobi. Esempi di soluzioni locali.

Appendice: Il metodo di Hamilton-Jacobi: esempi di integrali primi globali

Lezione 12: Variabili d'Azione. Variabili azione-angolo.

Lezione 13: Sistemi completamente integrabili. Teorema di Arnolt'd-Liouville

Appendice: il teorema di rettificazione (scatola di flusso)

Lezione 14: Teoria hamiltoniana delle perturbazioni.

Lezione 15: Il sistema a N-corpi. Configurazioni centrali. Soluzioni di collisione.

Lezione 16: Il problema dei tre corpi ristretto.

Lezione 17: Il metodo di continuazione

Lezione 18: Metodo di continuazione applicato al problema dei tre corpi.

Lezione 19: Teoria della perturbazioni in Meccanica Celeste: precessione degli equinozi.

Lezione 20: Metodi asintotici. Teorema della media. Invarianti adiabatici.

Appendice: il lemma di Gronwall

Lezione 1: ELEMENTI DI DINAMICA NEWTONIANA

In queste note studieremo la dinamica di un numero finito di punti materiali soggetti a forze di natura potenziale di tipo Newtoniano. Il formalismo che svilupperemo si può estendere a casi più generali, ad esempio a forze di natura elettromagnetica e alla dinamica dei fluidi, ma noi non considereremo queste generalizzazioni.

Per descrivere analiticamente il moto occorre scegliere un sistema di riferimento e compiere all'interno di esso una scelta di coordinate; il moto viene così descritto da equazioni differenziali (nel nostro caso, un sistema di equazioni differenziali del second'ordine).

Un' opportuna scelta di sistema di riferimento (e di coordinate) può rendere più semplice la forma delle equazioni e può quindi rendere più agevole la ricerca di soluzioni.

Notiamo infatti che le equazioni di Newton sono del secondo ordine nelle derivate rispetto al tempo; la velocità si trasforma linearmente per un cambiamento di coordinate spaziali mentre l'accelerazione segue una legge di trasformazione più complicata e in generale non-lineare. Questo cambia la forma analitica delle equazioni.

In queste note utilizzeremo le leggi di Newton con le quali viene descritto il moto di N punti materiali nello spazio euclideo tridimensionale *in un sistema di coordinate inerziale*.

Esporremo poi i rudimenti di un formalismo, quello di Lagrange e Hamilton, che semplifica il problema di determinare il moto, rendendo possibile il trovare soluzioni esatte o almeno approssimate.

Applicheremo successivamente questo formalismo per la soluzione di semplici problemi di Meccanica Celeste.

Per enunciare le leggi della dinamica Newtoniana si fa riferimento ad uno spazio euclideo ed a coordinate di un sistema di riferimento *inerziale*.

Convien sottolineare che mentre le equazioni della dinamica possono essere scritte in qualunque sistema di coordinate e in qualunque sistema di riferimento, le equazioni di Newton hanno una forma particolarmente semplice quando sono scritte in un sistema inerziale.

Nota 1.1

La definizione di sistema inerziale, nonostante la sua importanza per la formulazione della legge della dinamica, è una questione molto delicata.

Per descrivere fenomeni locali si può considerare in una prima approssimazione come inerziale il sistema di coordinate cartesiano di un osservatore fermo rispetto alla terra.

Per studiare il sistema solare si può considerare in una prima approssimazione come sistema di riferimento inerziale quello in cui appaiono ferme le stelle più lontane nella nostra galassia.

Una definizione intrinseca di sistema inerziale può essere tentata nel modo seguente: un sistema di riferimento si dice inerziale se, dati tre punti materiali P_i molto lontani tra loro e da qualunque altro sistema materiale il loro moto relativo descritto in un sistema cartesiano soddisfa la seguente proprietà :

Per ogni scelta degli indici $h \neq k$ il moto di P_k rispetto a P_h avviene lungo una linea retta. Inoltre, se la scala del tempo è scelta in modo tale che per definizione il moto di P_2 rispetto a P_1 è descritto in coordinate cartesiane come rettilineo uniforme, anche il moto di P_3 rispetto a P_1 risulta rettilineo uniforme.

Più precisamente si intende affermare che la deviazione da questa proprietà può essere resa piccola quanto si vuole pur di allontanare i tre punti tra loro e da ogni altro sistema materiale. Questa definizione non è di utilità pratica perché sarebbe difficile individuare tre punti materiali che soddisfano le condizioni volute.

Nella pratica si verifica che con buona approssimazione per descrivere i moti all'interno del sistema solare può essere considerato inerziale un sistema di riferimento in cui le *stelle lontane* appaiono ferme.



Dalla definizione segue che, se S é un sistema inerziale, allora é inerziale ogni sistema che si muove rispetto ad S di moto rettilineo uniforme.

Per i sistemi di punti materiali che studieremo il moto soddisfa i tre Principi seguenti (di Newton)

PRIMO PRINCIPIO

Esiste (almeno) un sistema inerziale. In un sistema inerziale il moto di un punto materiale isolato é un moto rettilineo uniforme (principio di inerzia).



SECONDO PRINCIPIO

In un sistema di riferimento inerziale il moto di un insieme di N punti materiali nello spazio euclideo E^{3N} viene descritto da equazioni differenziali del secondo ordine

$$m_n \frac{d^2 x_n}{dt^2} = F_n(X, \dot{X}, t) \quad X = \{x_1, \dots, x_N\} \quad x_n \in R^3 \quad n = 1, \dots, N \quad 1.1$$

dove X sono coordinate cartesiane E^N e per definizione $\dot{X} \equiv \{\frac{dx_n}{dt}, n = 1, \dots, N\}$.

Il campo vettoriale in R^{3N+3N} (un'applicazione da R^{3N+3N} a R^{3N}) definito da

$$F(X; \dot{X}, t) \equiv \{F_n(X; \dot{X}, t)\} \quad n = 1 \dots N \quad F \in R^{3N} \quad 1.2$$

é detto *campo di forze* e caratterizza il sistema dinamico considerato. In generale questo campo di forze dipende dal tempo.

I parametri m_1, \dots, m_M sono detti *masse*. Essi rappresentano per ogni punto materiale il rapporto tra il campo di forze nel punto geometrico occupato e l'accelerazione subita (che sono quindi vettori paralleli).



Conviene notare che se il campo di forze non dipende dalla velocità dei punti materiali esso é un oggetto geometrico. In questo caso l'accelerazioni che subisce ciascun punto materiale dipende dalla geometria dei rimanenti punti.

Nel caso in cui il campo di forze dipenda anche dalle velocità esso può ancora essere riguardato come un oggetto geometrico ma adesso nello spazio tangente TR^{3N} .

Questo spazio, che utilizzeremo frequentemente in seguito, é detto spazio posizioni-velocità; esso é uno spazio fibrato in cui ad ogni punto di coordinate X dello spazio delle configurazione viene assegnata come fibra la classe di equivalenza delle traiettorie differenziabili che passano per X e hanno lo stesso vettore tangente. Quindi questa fibra é identificabile con lo spazio tangente in X e quindi per ciascun valore di X con R^{3N} .

Ne risulta che come insieme lo spazio tangente é identificabile con $R^{3N} \times R^{3N}$ e ha la struttura metrica di R^{6N} .

Chiameremo *forza* che agisce sul punto materiale di coordinate $x_n \in R^3$ il campo vettoriale $F_n(X; t)$.

Nel seguito studieremo solo il caso in cui le forze che agiscono su di un punto materiale sono dovute alla presenza di altri punti materiali (e non, ad esempio, a campi elettromagnetici) e *dipendono solo dalla posizione di questi punti*.

Se $F_n(X)$ dipende anche dalle coordinate x_n diremo che questa dipendenza è dovuta *ad un campo esterno*.

I sistemi che consideriamo soddisfano anche il *terzo principio della dinamica*.

TERZO PRINCIPIO

La forza che agisce su un punto materiale ad opera di un insieme di altri punti materiali è additiva (cioè è la somma delle forze che agirebbero se il punto materiale considerato interagisse separatamente con gli altri punti materiali).

Inoltre la forza esercitata da P_1 su P_2 è uguale in valore assoluto e opposta in verso alla forza che si esercita su P_2 per la presenza di P_1 (principio di azione e reazione)

La loro somma è pertanto nulla quando vengano considerate come applicate allo stesso punto.

Questo significa, in assenza di campi esterni, che esistono in R^3 campi vettoriali

$$F_{k,m}(x_k, x_m, t) \quad k \neq m, k, m = 1, \dots, N \quad 1.3$$

tali che

$$F_k(x_1, \dots, x_N, t) = \sum_{m \neq k} F_{k,m}(x_k, x_m, t) \quad 1.4$$

Inoltre si ha

$$F_{k,m}(x_k, x_m, t) = -F_{m,k}(x_k, x_m, t) \quad 1.5$$

◇

Nota 1.1

Si noti che in (1.5) il vettore $F_{k,m}$ si intende *applicato* in x_k e rappresenta l'azione del punto materiale P^m sul punto materiale P_k , mentre il vettore $F_{m,k}(x_k, x_m, t)$ si intende applicato nel punto di coordinate x_m e rappresenta l'azione del punto materiale P_k sul punto materiale P_m . La scrittura (1.5) è dunque imprecisa poiché si confronta un vettore applicato nel punto di coordinate x_k con un vettore applicato nel punto di coordinate x_m .

Intenderemo sempre che il confronto venga effettuato dopo un *trasporto parallelo*, secondo gli assiomi della geometria Euclidea (trasporto per rette parallele) che sovrapponga i punti di applicazione dei due vettori.

È importante notare che, se lo spazio ambiente fosse curvo o comunque non-Euclideo, il *trasporto parallelo* dovrebbe essere opportunamente precisato.

♣

Diremo che le forze sono *centrali* se il vettore $F_{k,m}(x_k, x_m, t)$ ha modulo che dipende solo da $|x_m - x_k|$ ed è diretto secondo il vettore $x_k - x_m$.

Diremo che le forze $F_n(x_1, \dots, x_N, t)$ sono *di natura potenziale* se esiste una funzione $V(x_1, \dots, x_N)$ (detta *potenziale*) tale che

$$F_k(x_1, \dots, x_N, t) = \nabla_k V(x_1, \dots, x_N, t) \quad 1.6$$

Se è soddisfatto il terzo principio e le forze sono centrali per ogni coppia non ordinata $\{k, h\}$ esisteranno allora funzioni $V_{\{k,h\}}(x_k - x_h)$ tali che

$$F_{k,h}(x_k, x_h, t) = \nabla_h V_{\{k,h\}}(x_k - x_h, t)$$

Nota 1.2

È opportuno distinguere (1.5) dalla relazione

$$F_{k,m}(x_k, x_m, t) = F_{m,k}(x_m, x_k, t) \quad 1.7$$

che riflette solo il fatto che le forze agenti su di un punto materiale non dipendono dalla scelta di indici fatta nell'identificare i diversi punti materiali.



RIDUZIONE DEI MOTI PER FORZE DI NATURA POTENZIALE

La soluzione esatta delle equazioni (1.5) (con dati iniziali posizione e velocità di tutti i punti materiali) presenta difficoltà insormontabili anche per le scelte più semplici di campi di forze.

Solamente in casi eccezionali è possibile costruire esplicitamente una soluzione, e in altri casi, che differiscono di poco dai precedenti, si può addivenire ad una soluzione approssimata con un controllo dell'approssimazione.

Semplificazioni si possono ottenere talora mediante l'uso di coordinate adeguate al problema in esame (i formalismi che svilupperemo in queste Lezioni hanno la funzione di mettere in luce tali sistemi di coordinate) o mediante l'uso di *leggi di conservazione* nel caso in cui le forze considerate ammettano tali leggi.

Come vedremo in seguito, queste leggi di conservazione sono in generale dovute all'invarianza delle equazioni per opportuni gruppi continui di trasformazioni delle coordinate.

Diamo qui un esempio elementare di come possa aver luogo questa semplificazione. Quest'esempio può essere visto come caso particolare di un metodo generale, al quale accenneremo in seguito, di *riduzione* delle equazioni della dinamica sfruttando simmetrie continue e costanti del moto. Dimostriamo che lo studio del moto di un sistema composto da due punti materiali nello spazio euclideo E^3 che interagiscono fra loro mediante una forza centrale può essere ricondotto allo studio di un sistema a un grado di libertà (e quindi si possono costruire in forma abbastanza esplicita le traiettorie del sistema).

Procederemo secondo il seguente schema: (notare che i punti i),ii),iii) sono validi in generale, il caso iv) richiede che le forze siano indipendenti dal tempo).

i)

L'invarianza del sistema per traslazioni e il terzo Principio permettono di separare il problema in due problemi più semplici, entrambi relativi ad un sistema con tre gradi di libertà (moto del baricentro e moto relativo).

Il moto del baricentro è rettilineo uniforme.

ii)

L'invarianza del sistema per rotazioni e il terzo Principio, attraverso la conseguente conservazione del momento angolare, implicano che il moto relativo avviene in un piano (che dipende dai dati iniziali).

Conviene notare che per concludere che il moto relativo è planare basta che per esso si conservi *la direzione* del momento angolare.

È facile verificare che questo avviene anche se oltre alla forza centrale agisce una forza dissipativa diretta secondo la velocità relativa.

iii)

Ancora l'invarianza per rotazioni, adesso attraverso la conservazione del modulo del momento angolare, permette di studiare, per il moto relativo, separatamente il moto radiale (la dipendenza dal tempo della distanza ρ dei due punti materiali) e dedurre successivamente *per quadratura* (cioè svolgendo l'integrale di una funzione conosciuta) la dipendenza dal tempo della coordinata angolare che dà la direzione del segmento che congiunge i due punti.

Vedremo che, se il momento angolare non è nullo, la legge di dipendenza dal tempo della coordinata radiale è equivalente a quella di un punto materiale su R^+ soggetto ad una forza di

natura potenziale il cui potenziale é ottenuto aggiungendo al potenziale che descrive il moto relativo dei due punti materiali un'ulteriore funzione (che rappresenta il potenziale di una forza centrifuga, una forza *apparente* dovuta al fatto che il sistema di riferimento in cui uno dei due corpi é fermo non é un riferimento inerziale).

iv)

L'energia totale del sistema é una costante del moto. Questo é vero per ogni forza di natura potenziale che non dipenda dal tempo; per questo motivo tali forze sono chiamate conservative. Ne segue che esiste una costante del moto per il sistema unidimensionale di cui al punto iii) che ha la forma $\dot{\rho}^2 - U_1(\rho)$ per un'opportuna funzione U_1 (energia potenziale).

Questo provvede un'equazione differenziale del primo ordine in $\rho(t)$ la cui soluzione permette di ricostruire, attraverso i punti i)-iii) descritti sopra, la traiettoria del sistema in corrispondenza ai dati iniziali prefissati.

Bisogna prestare attenzione al fatto che l'equazione $\dot{\rho} = \pm\sqrt{U_1(\rho)}$ non ha soluzione unica nei punti dove U_1 ha uno zero di ordine uno. In questo caso l'unicitá é garantita dalla equazione differenziale di ordine due da cui siamo partiti.

Sviluppiamo ora in dettaglio l'analisi dei punti i) . . . iv).

Iniziamo con lo scrivere in dettaglio le equazioni di moto del sistema in esame.

$$\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 &= \frac{x_2 - x_1}{|x_2 - x_1|} H(|x_2 - x_1|, t) \\ m_2\ddot{x}_2 &= (x_1 - x_2)|x_1 - x_2|^{-1} H(|x_1 - x_2|, t) \end{aligned} \quad 1.8$$

dove x_1 e x_2 sono le due terne di numeri che individuano, in un sistema di coordinate cartesiane prescelto, la posizione dei due punti materiali e H é una funzione che descrive il campo di forze. Notare che nella (1.8) é giá stata utilizzata la struttura euclidea dello spazio delle configurazioni cosí che il vettore $x_1 - x_2$, riguardato come "applicato" in x_1 , é opposto a $x_2 - x_1$ applicato in x_2 .

Assumeremo che la funzione H sia di classe C^1 , tranne eventualmente quando $x_1 = x_2$, cosí che il sistema di equazioni (1.10) ha una soluzione unica per ogni scelta di dati iniziali tali che $x_1(t_0) \neq x_2(t_0)$, e questa soluzione é prolungabile fino a che $x_1(t) \neq x_2(t)$.

i)

Notando che i termini a destra in (1.10) dipendono solo dalla differenza delle coordinate e i termini a sinistra sono lineari nelle accelerazioni, si deduce sottraendo un'equazione dall'altra

$$\frac{d^2(x_1 - x_2)}{dt^2} = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) \frac{x_2 - x_1}{|x_1 - x_2|} H(|x_1 - x_2|, t) \quad 1.9$$

Sommando invece le due equazioni si ha

$$\frac{d^2(m_1x_1 + m_2x_2)}{dt^2} = 0 \quad 1.10$$

Posto $r = x_1 - x_2$ e $R = (m_1x_1 + m_2x_2)(m_1 + m_2)^{-1}$ si vede che il problema in esame é stato *ridotto* a due problemi piú semplici.

Il primo descrive il moto di un punto materiale *fittizio*, di massa $\mu = m_1m_2(m_1 + m_2)^{-1}$ che interagisce con un punto fisso attraverso una forza centrale.

Il secondo descrive il moto di un punto materiale *fittizio* B di massa $M = m_1 + m_2$ e coordinate $(m_1 + m_2)^{-1}(m_1x_1 + m_2x_2)$ non soggetto a forze.

Dunque il moto del punto B é rettilineo uniforme. Ne segue che il riferimento in cui P é fermo é inerziale.

Al punto "fittizio" B si dá il nome di *baricentro* del sistema.

Si sceglie tradizionalmente il sistema di riferimento in cui il baricentro é fermo e rappresenta l'origine delle coordinate.

Notiamo esplicitamente che utilizzando le coordinate relative $y \equiv x_1 - x_2$ le (1.9) hanno la forma

$$\mu \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{y}{|y|} H(|y|, t)$$

Quindi nel sistema di riferimento in cui il punto P_2 é considerato fermo, le equazioni per le coordinate del punto materiale P_1 sono quelle che si otterrebbero se il punto materiale avesse una massa *ridotta*.

Questa differenza é dovuta al fatto che un sistema di riferimento nel quale il punto P_2 é fermo *non é in generale un sistema di riferimento inerziale*.

ii)

Consideriamo ora il moto relativo, e riscriviamo (1.11) nella forma

$$\mu \ddot{r} = \hat{r} H(|r|, t) \quad \hat{r} = r|r|^{-1} \quad \mu = m_1 m_2 (m_1 + m_2)^{-1} \quad 1.11$$

Utilizzando la regola di Leibnitz per la derivazione di un prodotto, e il fatto che $r \wedge \ddot{r} = 0 = \dot{r} \wedge \dot{r} = 0$, si verifica che

$$\frac{d}{dt} (\mu r \wedge \dot{r}) = 0 \quad 1.12$$

Ricordiamo che il simbolo di operazione $a \wedge b$ é definito da $(a \wedge b)_i = \sum_{k,n} \epsilon_{i,k,n} a_k b_n$ dove $\epsilon_{i,k,n}$ é il simbolo di Ricci (che vale zero se due indici sono uguali, uno se gli indici hanno tutti valori diversi e formano una permutazione pari, -1 se formano una permutazione dispari).

Convien notare che, per ottenere (1.12) *non* é necessario che la dipendenza di H dalle coordinate sia solo attraverso $|x_1 - x_2|$; é solo necessario che la direzione delle forze sia secondo la congiungente i due punti.

Per utilizzare (1.12) conviene distinguere due casi:

Caso a)

$$r(t_0) \wedge \dot{r}(t_0) = 0 \quad 1.13$$

Questo significa che $r(t_0)$ e $\dot{r}(t_0)$ sono paralleli o che almeno uno dei due vettori é nullo.

Assumiamo che essi *non* siano entrambi nulli. A questo proposito conviene notare che il campo vettoriale in (1.12) é di classe C^1 (o anche solo Lipschitziano) per $r = 0$ solo se $H(0, t) \equiv 0$.

In questo caso l'origine é una posizione di equilibrio.

Se $r(t_0)$ e $\dot{r}(t_0)$ non sono entrambi nulli e soddisfano (1.13), esiste un versore \hat{k} e due numeri reali a, b tali che

$$r(t_0) = a \hat{k}, \quad \dot{r}(t_0) = b \hat{k} \quad 1.14$$

Dimostriamo che la (1.11) ammette in corrispondenza ai dati iniziali (1.14) una soluzione della forma

$$r(t) = a(t) \hat{k} \quad 1.15$$

Per il teorema di unicitá, questa sará allora *la* soluzione corrispondente ai dati iniziali (1.14).

Per verificare che esiste una soluzione della forma (1.15) sostituiamo (1.14) in (1.11). Otteniamo, utilizzando anche la (1.13)

$$\mu \ddot{a} = H(|a|, t) a(t), \quad a(t_0) = a, \quad \dot{a}(t_0) = b \quad 1.16$$

Sotto le nostre ipotesi di regolarità per H il sistema (1.16) ammette una soluzione unica; l'asserto é dunque dimostrato.

Da (1.14) si vede che in corrispondenza a questi dati iniziali il moto avviene lungo una retta (ed é quindi in particolare un moto piano).

Caso b)

$$\mu(r(t_0) \wedge \dot{r}(t_0)) \equiv l \neq 0 \quad 1.17$$

Poiché per ogni t si ha $l = \mu(r(t) \wedge \dot{r}(t))$ si conclude che $r(t)$ é in ciascun istante perpendicolare al vettore dato l (che dipende dai dati iniziali).

Il moto ha dunque luogo nel piano perpendicolare a l (*questo piano dipende dai dati iniziali*).
Notare che da (1.17) segue che se $l \neq 0$ e se il potenziale é regolare nell'origine, allora

$$|r(t)| \neq 0 \quad \forall t \quad 1.18$$

iii)

Studiamo ora piú in dettaglio il moto piano descritto al punto ii).

Segue da (1.18) che possiamo utilizzare coordinate polari, ponendo $r_1 = \rho \cos\theta$, $r_2 = \rho \sin\theta$, dove r_1, r_2 sono le componenti di r secondo due assi cartesiani scelti nel piano in cui ha luogo il moto.

Anziché scrivere direttamente le (1.13) nelle nuove coordinate, conviene procedere come segue. Questo servirá anche a sottolineare l'importanza delle costanti del moto e le semplificazioni cui porta la loro utilizzazione.

Posto $l(t) = \lambda(t)\hat{l}(t_0)$, $\hat{l} = |l|^{-1}l$, si ottiene $\lambda(t) = \mu \rho^2 \dot{\theta}(t)$.

Dalla conservazione del momento angolare segue allora

$$\mu \dot{\theta}(t) = C \rho^{-2}(t) \quad 1.19$$

dove la costante C é determinata dai dati iniziali ($C \equiv \mu \dot{\theta}(t_0) \rho^2(t_0)$).

Quando sia nota la funzione $\rho(t)$ la funzione $\theta(t)$ si determina dunque *per quadratura* (per integrazione di una funzione nota).

$$\theta(t) = \theta(t_0) + c \int_{t_0}^t \rho^{-2}(s) ds \quad 1.20$$

Il problema é stato cosí ricondotto allo studio di $\rho(t)$.

Questo puó essere effettuato scrivendo la (1.11) in coordinate polari e utilizzando la (1.19) per giungere ad un'equazione del secondo ordine nella sola variabile ρ .

Nel caso in cui il potenziale non dipenda dal tempo é piú conveniente procedere diversamente, utilizzando ancora una volta l'esistenza di una costante del moto.

iv)

Se il potenziale non dipende dal tempo, il sistema ammette come costante del moto l'energia totale $E = T + U$, dove T é l'energia cinetica ed U l'energia potenziale (ricordare che $U \equiv -V$, dove V é il potenziale associato alla forza conservativa F).

Nelle coordinate r, R si ha

$$E = \frac{1}{2} M |\dot{R}|^2 + \frac{1}{2} \mu |\dot{r}|^2 + U(|r|)$$

Poiché siamo nel sistema di riferimento del baricentro, $\dot{R}(t) = 0$ e risulta cosí costante del moto l'espressione $E_{rel} = \frac{1}{2} \mu |\dot{r}|^2 + U(|r|)$.

Nelle coordinate polari del piano su cui ha luogo il moto si ha allora l'identitá:

$$E_{rel} = \frac{1}{2}\mu\dot{\rho}^2 + \frac{1}{2}\mu\rho^2\dot{\theta}^2 + U(\rho) \quad 1.21$$

e quindi, utilizzando la (1.19),

$$E_{rel} = \frac{1}{2}\mu\dot{\rho}^2 + \frac{c^2}{2\mu\rho^2} + U(\rho) \quad 1.22$$

Differenziando rispetto a t

$$0 = \left(\mu\ddot{\rho} - \frac{c^2}{\mu\rho^3} + U'(\rho) \right) \dot{\rho} \quad 1.23$$

e quindi se $\dot{\rho}(t) \neq 0$

$$\mu\ddot{\rho}(t) - \frac{c^2}{\mu\rho^3(t)} + U'(\rho(t)) = 0 \quad 1.24$$

Questa é precisamente l'equazione che si otterrebbe utilizzando in (1.18) le coordinate polari e facendo uso di (1.21).

La (1.24) é anche l'equazione che si ottiene quando il potenziale dipende dal tempo.

Si puó notare che la (1.24) é l'equazione che descrive il moto di un punto materiale di massa μ che si muove *sulla semiretta* R^+ soggetto ad una forza di potenziale $-U(\rho)$ e a una forza *aggiuntiva* di potenziale $-\frac{c^2}{2\mu\rho^2}$.

Si dá il nome di *forza centrifuga* alla forza radiale (di cui $\frac{c^2}{\mu\rho^3}$ rappresenta il modulo) che interviene in questo sistema unidimensionale ausiliario (sistema *ridotto*).

E' una forza *apparente* perché la sua presenza nelle equazioni é dovuta alla scelta del sistema di riferimento utilizzato.

Infatti per definizione il vettore $r(t)$ rappresenta la posizione del punto P_1 *nel sistema di riferimento in cui* P_2 *é fermo* (ed é scelto come origine di una terna di assi cartesiani). Questo sistema di riferimento *non é inerziale* e quindi per *salvare* il secondo principio della dinamica é necessario modificare la definizione di forza, introducendo dei termini correttivi (forze apparenti).

Notiamo che da (1.22) segue che, se $l \neq 0$ si ha $\rho(t) > 0 \forall t$ non solo se $U(\rho)$ é regolare nell'origine, ma anche se ha una singolaritá di ordine ≤ 2 , ad esempio se $U(\rho) = \alpha\rho^{-1}$.

Questo si vede facilmente nel modo seguente: i primi due termini a destra in (1.22) sono positivi e il secondo ha una singolaritá di ordine due; se U ha una singolaritá di ordine minore di due, per ogni $K > 0$ esiste $\epsilon > 0$ tale che il termine a destra eccede K se $\rho < \epsilon$.

Poiché E_{rel} é costante del moto il suo valore non puó eccedere K se non lo eccedeva all'istante iniziale. Da qui la conclusione.

Notare che questa conclusione *non é* vera per quei dati iniziali per i quali il momento angolare é nullo.

In questo caso l'equazione del moto assume la forma, con $r(t) = a(t)\hat{k}$

$$\mu\ddot{a}(t) + U'(|a(t)|) = 0, \quad a(t) \in (-\infty, +\infty) \quad 1.25$$

e la legge di conservazione dell'energia si scrive

$$E_{rel} = \frac{1}{2}\mu\dot{a}^2(t) + U(|a(t)|) \quad 1.26$$

Si noti infine che le (1.25),(1.26) *non sono la restrizione di* (1.28),(1.22) *al caso* $l = 0$.

Infatti si ha $\rho \in R^+$ mentre $a(t) \in R$.

Nel seguito studieremo solo il caso di momento angolare non nullo.

Le (1.22) descrivono curve $\Gamma_{E_{rel}}$ nello spazio $R^+ \times R$ di coordinate $\rho, \dot{\rho}$ parametrizzate da E_{rel} . Per dati iniziali per i quali al tempo t_0 si ha

$$\frac{1}{2}\mu\dot{\rho}^2(t_0) + \frac{c^2}{2\mu\rho^2(t_0)} + U(\rho(t_0)) = E_0$$

il moto del punto rappresentativo si svolge su Γ_{E_0} . Se questa curva é una curva *chiusa, regolare e senza autointersezioni* il moto é periodico se la velocità di percorrenza non é mai nulla.

Notiamo che la (1.22) può essere scritta come

$$\dot{\rho} = \pm \sqrt{\frac{2}{\mu}(E_{rel} + U(\rho) - \frac{c^2}{2\mu\rho^2})}^{\frac{1}{2}} \quad 1.27$$

Da qui si vede che il moto é limitato alla regione in cui il radicando é positivo e che l'equazione é degenera nei punti in cui il radicando é nullo.

Assumiamo che l'energia potenziale si due volte differenziabile e limitata. Se $c_2 \neq 0$ (momento angolare non nullo) esiste una costante ρ_0 (che dipende dal E_{rel}) tale che $\rho(t) \geq \rho_0, \forall t$.

ρ_0 é la piú piccola soluzione di

$$U_c(\rho) \equiv U(\rho) - \frac{c^2}{2\mu\rho^2} = 0. \quad 1.28$$

Sia ρ_0 una soluzione di (1.27). Se la funzione $U_c(\rho)$ ha in ρ_0 uno zero di ordine uno l'equazione (1.27) in un intorno di ρ_0 ha la forma

$$\dot{\rho} = \lambda\sqrt{\rho - \rho_0} + o(\rho - \rho_0) \quad \lambda \neq 0$$

Questa equazione ha infinite soluzioni, corrispondenti a diversi tempi di arresto nel punto ρ_0 (per ogni T_0 la funzione $\rho(t) = \rho_0, t \in [0, T_0]$ é soluzione).

D'altra parte le equazioni differenziali del secondo ordine che descrivono il moto hanno una soluzione unica. Per risolvere questa apparente contraddizione, notiamo che la (1.27) é una *conseguenza* delle equazioni del moto ma non é loro *equivalente*.

Infatti l'equazione del moto del secondo ordine per la variabile ρ é

$$\frac{d\rho}{dt} \left[\mu \frac{d^2\rho}{dt^2} - \frac{c^2}{\mu\rho^2} + U(\rho) \right] = 0$$

da cui si deduce (1.27) se $\frac{d\rho}{dt} \neq 0$.

L'equazione del secondo ordine per ρ ha una soluzione unica che coincide con la soluzione di (1.27) se $\frac{d\rho}{dt} \neq 0$.

Quest'analisi dá anche il criterio per scegliere tra le soluzioni di (1.27): deve essere scelta la soluzione che corrisponde a tempo d'arresto nullo.

Senza entrare nel dettaglio di un'analisi qualitativa, notiamo che i punti dello spazio posizione-velocità nei quali la funzione W definita da

$$W \equiv E_{rel} - U(\rho) + \frac{c^2}{2\mu\rho^2}$$

ha uno zero di ordine due

$$W = a(\rho - \rho_0)^2 + o(\rho - \rho_0)^2$$

sono punti di equilibrio del sistema.

Il punto di equilibrio é stabile se la funzione ha un massimo (teorema di Lagrange); si vede facilmente che in questo caso esiste un intorno nello spazio posizione-velocità che é invariante nel corso del tempo.

Se invece $a < 0$ il punto di equilibrio ρ_0) é instabile: fissato $\delta > 0$ esiste $\epsilon > 0$ ed un dato iniziale con $|\rho(0) - \rho_0| < \epsilon$ $\dot{\rho}(0) = 0$ tale che $\sup_{t>0} |\rho(t) - \rho_0| > \delta$.

Notiamo ancora che se $c \neq 0$ (se il momento angolare l non é nullo) e se il potenziale $U(\rho)$ é regolare la distanza tra i due corpi puntiformi non puó annullarsi (non ci possono essere collisioni).

Questo resta vero se il potenziale presenta all'origine una singolarità $\rho^{-\alpha}$ con $\alpha < 2$ (ad esempio un potenziale Coulombiano attrattivo).

Al contrario, se $l = 0$ vi possono essere delle collisioni.

Nelle Lezioni successive studieremo il problema analogo per il sistema a tre corpi.

Lezione 2. VINCOLI E PRINCIPIO DI D'ALEMBERT

Lo schema descritto nella lezione precedente viene considerato adeguato a trattare il moto di un sistema di N punti materiali nello spazio euclideo, soggetti a forze sia esterne che interne al sistema.

Esso non é però adeguato a trattare casi di sistemi *vincolati*, ad esempio a descrivere il moto di N punti materiali nello spazio vincolati a rimanere a distanza prefissata tra loro.

Questo é il prototipo della descrizione di un *corpo rigido*.

Per descrivere il moto di un tale sistema, occorre introdurre un nuovo principio, il *Principio di d'Alembert* (o dei lavori virtuali)

Nello schema matematico che seguiremo i vincoli sono descritti da relazioni a-priori della forma

$$G_m(x_i, \dot{x}_i, t) \geq 0 \quad m = 1 \dots M, \quad X \in R^N \quad 3N > M \quad 2.1$$

dove $x_{i,k}$, $i = 1, \dots, N$, $k = 1, 2, 3$ sono le coordinate dei punti materiali del sistema in esame. Le relazioni (2.1) descrivono l'effetto di forze di natura che non vogliamo esplicitare (ad esempio forze molecolari) che limitano la dinamica dei sistemi *macroscopici* che noi abbiamo schematizzato con insiemi di punti materiali.

Le relazioni ed equazioni che scriveremo devono essere quindi considerate come relazioni ed equazioni *effettive* che sintetizzano relazioni tra sistemi complessi.

La loro giustificazione risiede in ultima analisi nel fatto che i risultati ottenuti sono conformi al dato sperimentale.

Il Principio di d'Alembert deve essere quindi considerato allo stesso modo delle Equazioni di Stato in Termodinamica o delle Equazioni Costitutive nella formulazione dell'elettromagnetismo nei mezzi materiali.

In alcuni casi una giustificazione almeno parziale può essere ottenuta dimostrando che il formalismo di Newton-d'Alembert si presenta come *limite matematico* di formalismi più elaborati che riferiscono a sistemi più complessi in cui punti materiali interagiscono tra loro mediante opportune forze di natura potenziale che sono tali che *per una gran parte dei dati iniziali* le traiettorie del sistema rimangono *in un intorno* della superficie di vincolo.

Ad esempio il moto di un punto materiale P posto ad uno dei due estremi di un'asta di lunghezza L il cui altro estremo O sia fisso é descritto, come sistema vincolato, da un punto materiale che si può muovere su una sfera di raggio L e centro O .

Questo rappresenta un'idealizzazione di un sistema relativamente complesso in cui un sistema \mathcal{P} di cui non si specifica la natura viene *rappresentato* da un punto materiale.

Sul sistema \mathcal{P} agiscono delle forze (in generale di natura molecolare) che costringono il punto rappresentativo P a rimanere a una distanza trascurabile (su scala macroscopica) da un punto geometrico Q , estremo di un segmento immateriale che *rappresenta* un'asta materiale al cui estremo é *vincolato* il sistema \mathcal{P} .

La dinamica del sistema reale é molto complessa mentre la dinamica del sistema idealizzato é elementare; quindi la modellizzazione che abbiamo introdotto risulta molto conveniente.

D'altra parte dobbiamo garantire che la modellizzazione fatta sia soddisfacente.

Ad esempio dobbiamo garantire che le *forze di vincolo* che introdurremo nel formalismo siano adeguate a descrivere il fenomeno empirico di rottura dei vincoli (un oggetto materiale vincolato a trovarsi all'estremo di una sbarra posta in rotazione veloce tende a staccarsi quando la velocità di rotazione supera una certa soglia, alla quale il modulo della forza centrifuga diventa così grande da superare il valore del modulo delle forze molecolari di attrazione).

Ricordiamo che le leggi della dinamica newtoniana affermano che se la sbarretta viene posta in rapida rotazione, il punto P è soggetto ad una forza centrifuga che tenderebbe a farlo discostare da Q ; la *forza di vincolo* deve allora essere una *forza* che compensa la forza centrifuga.

Analogamente dobbiamo chiedere che le forze che introdurremo siano adeguate alla descrizione della barretta come rigida e di lunghezza L .

Questo fa capire che un formalismo per trattare sistemi vincolati che comprenda anche la determinazione delle *forze di vincolo* è utile dal punto di vista empirico per trovare dei limiti alla validità dell'approssimazione che compiamo e quindi alla validità delle *equazioni effettive* che troveremo.

Questo spiega l'interesse del formalismo di Newton-d'Alembert che descriviamo in questa lezione.

Da un punto di vista assiomatico-astratto utilizzeremo nella Lezione 4 principi variazionali per dedurre le equazioni del moto per sistemi vincolati *senza introdurre forze di vincolo*.

Le forze di vincolo possono essere introdotte successivamente confrontando le equazioni di Newton con quelle di Newton-d'Alembert.

Nota 2.1

Non discuteremo ulteriormente l'interessante e molto delicato problema della possibilità di dedurre le equazioni del moto di un sistema vincolato come limite di equazioni di un sistema in cui il vincolo viene sostituito da opportune forze di natura potenziale il cui effetto è di limitare le configurazioni accessibili al sistema ad un piccolo intorno della varietà di vincolo .

Se la varietà di vincolo ha codimensione uno questo processo di limite ha successo, mentre se ha codimensione maggiore di uno esistono casi in cui le equazioni effettive che si ottengono portano a problemi mal posti, nel senso che diverse condizioni iniziali per il sistema approssimante che convergono allo stesso limite danno traiettorie limite diverse e talune incompatibili con il principio di Newton-d'Alembert.

Per una breve trattazione mediante esempi si può consultare i testi : G.Gallavotti, Meccanica Elementare, Edizione Boringhieri 1988, G.F.Dell'Antonio , Capitoli scelti di Meccanica Analitica, Quaderni dell'Istituto Nazionale di Alta Matematica N 59, 2000



Le relazioni (2.1) assegnate a-priori possono avere la forma di disequaglianze o di eguaglianze. Se tutte le relazioni sono di eguaglianza il vincolo è detto *bilatero*.

Un tipico vincolo *non bilatero* è quello che si utilizza per descrivere il moto di un punto materiale di massa m in R^3 che rimbalza sul piano orizzontale di un tavolo (identificato con un oggetto geometrico, il piano).

Un vincolo è detto *olonomo* se tutte le relazioni fanno intervenire esclusivamente coordinate di posizione (ed eventualmente il tempo).

Un vincolo che non sia olonomo è detto *anolonomo* .

Tipico vincolo anolonomo bilatero è la condizione di *rotolare senza strisciare* definita nel modo seguente.

Al moto di due superfici (liscie) mobili $\Sigma_1(t)$ e $\Sigma_2(t)$ che hanno a ciascun istante un solo punto di contatto $P(t)$ viene posta la condizione che la velocità del punto $P(t)$, riguardato come punto di $\Sigma_1(t)$, coincida con la velocità di $P(t)$ riguardato come punto di $\Sigma_2(t)$.

Dal punto di vista matematico questo richiede in particolare che i piani tangenti in $P(t)$ a $\Sigma_1(t)$ e a $\Sigma_2(t)$ abbiano intersezione di dimensione almeno uno e che il vettore velocità al tempo t si trovi in questa intersezione (in esempi pratici spesso i due piani tangenti coincidono o uno è un sottospazio dell'altro).

Un altro caso di vincolo anolonomo risulta dalla schematizzazione del moto di una slitta, schematizzata con due punti B e G (il baricentro e il manubrio di guida) con il vincolo che la velocità del baricentro sia in ciascun istante diretta secondo la congiungente $G - B$.

Noi studieremo in dettaglio solo il caso di vincoli *olonomi bilateri* e tratteremo solo il caso in cui il sistema possa essere descritto mediante un unico sistema di coordinate (questo é vero in generale solo localmente) .

Consideriamo dunque un sistema di N punti materiali nello spazio euclideo E^3 in un riferimento inerziale e scegliamo un sistema di assi cartesiani.

Indichiamo con x_j^n $n = 1 \dots N$, $j = 1, 2, 3$ le coordinate degli N punti considerati (per motivi di grafica, preferiamo in questa presentazione utilizzare una notazione in cui l'indice in alto é indice di punto materiale e l'indice in basso é indice di componente di un vettore) .

Rappresentiamo il vincolo olonomo bilatero mediante le M identità

$$G_m(X, t) = 0 \quad m = 1 \dots M \quad X \equiv \{x^1, \dots, x^N\}; \quad x^k \in R^3 \quad M < 3N \quad 2.2$$

Le funzioni G_m sono assunte essere di classe C^1 con $\nabla G_k \neq 0$, $k = 1, \dots, M$ in tutti i punti in cui (2.2) é soddisfatta.

Assumiamo inoltre che i vincoli siano *indipendenti* , cioè che in tutti i punti in cui (2.2) é soddisfatta, la relazione $\sum_m c_m \nabla G_m = 0$ implica $c_m = 0 \forall m$.

Sotto queste condizioni la relazione (2.2) individua per ogni tempo t una *varietà* Σ_t di dimensione $d \equiv 3N - M$ immersa in R^{3N} .

Il moto del sistema che studieremo può essere quindi rappresentato dal moto di un punto materiale in R^{3N} vincolato a muoversi su una varietà Σ_t di dimensione d ; questa varietà (ma non la sua dimensione) può dipendere dal tempo.

Studiamo la dinamica di questo sistema.

Le equazioni di Newton sono

$$m_n \ddot{x}^n = F^n(X, t) + F_V^n, \quad n = 1 \dots N \quad 2.3$$

dove $F^n(X, t)$ é la forza applicata all' n^{mo} punto materiale di massa m_n e F_V^n é il campo vettoriale (che chiameremo *forza di vincolo* sull'ennesimo punto materiale) che viene aggiunto *per far sí che le condizioni di vincolo vengano rispettate*.

Con questo si intende che, nella schematizzazione scelta e nell'ambito di una descrizione newtoniana, l'azione dello strumento che garantisce l'esistenza del vincolo (e che non viene ulteriormente descritto) viene riassunta nella forza "effettiva" F_V^n e nella condizione di vincolo (2.2)

Abbiamo fatto l'ipotesi che le forze applicate dipendano solamente dalla posizione dei punti materiali. Il caso di forze che dipendono anche dalle velocità non presenta maggiori difficoltà. Notiamo esplicitamente che le equazioni (2.3) *sono definite solamente se* $X \in \Sigma_t$ perché le forze di vincolo *sono definite solamente sulla varietà di vincolo*.

Dovremo naturalmente dimostrare che é possibile scegliere delle forze (di vincolo) in modo tale che le condizioni di vincolo siano soddisfatte per tutti i tempi.

Vedremo che questo può essere fatto pur di ammettere che queste forze *fittizie* F_V^n dipendano in generale sia dalla posizione del punto rappresentativo in Σ_t che dagli elementi dello spazio tangente $T(\Sigma_t)$ (questo porterá ad introdurre la nozione di *velocità virtuale*).

Nota 2.2.

Notiamo che la dizione *per far sí che il vincolo sia rispettato* é ambigua.

Se si aggiunge a F^V una forza tangente alla superficie di vincolo la condizione di vincolo é ancora rispettata, ma il moto sulla superficie di vincolo é variato.

Bisogna quindi introdurre un criterio di *minimalit * per avere unicit  del moto.

Il principio di D'Alembert rappresenta tale criterio (  questo criterio di minimalit  che pone talora problemi se considerano le forze di vincolo come limite di forze effettivamente agenti sul sistema).



Dovremo dimostrare che il *Principio di D'Alembert* provvede condizioni *sufficienti* sulle F_V^n per rendere ben posto il problema : unicit  della soluzione per ogni dato iniziale (posizione e velocit ) compatibile con il vincolo e continuit  rispetto ai dati iniziali.

Vedremo in seguito che attraverso il Principio di D'Alembert   possibile scrivere le equazioni del moto del sistema vincolato *senza introdurre forze di vincolo*; le forze di vincolo sono univocamente determinate dalla soluzione di tali equazioni.

Nella Lezione 4 vedremo in particolare che le equazioni di Newton-d'Alembert ammettono una formulazione variazionale in cui non appaiono le forze di vincolo.

Ricordiamo ancora che la determinazione delle forze di vincolo   importante dal punto di vista delle applicazioni perch  permette di introdurre nel modello astratto che consideriamo elementi di confronto con i sistemi fisici che vogliamo descrivere.

In particolare la determinazione delle forze di vincolo   essenziale se si vogliono imporre a priori delle limitazioni all'intensit  accettabile per queste forze.

Per enunciare ed utilizzare in forma semplice il Principio di D'Alembert conviene introdurre coordinate y_1, \dots, y_d che parametrizzano sulla variet  Σ_t un intorno della configurazione σ del sistema al tempo t .

Parametrizziamo lo spazio tangente $T\Sigma_t$ in un punto $\sigma \in \Sigma$ mediante coordinate η_1, \dots, η_d .

Questo permette di riscrivere le equazioni (2.3) nella forma

$$m_k \ddot{x}^k = F^k(X(y, t)) + F_V^k(X(y, \eta, t)) \quad X \in \Sigma_t \quad y, \eta \in R^d \quad 2.4$$

o in modo pi  compatto:

$$M\ddot{X}(y(t)) = F(X(y(t), t)) + F_V(X(y(t), \eta(t), t)) \quad X \in \Sigma_t \quad y, \eta \in R^d \quad 2.5$$

dove M   una "matrice di masse" e sia F che F_V sono campi vettoriali definiti su Σ_t ed $\eta(t)$ appartiene a $T_{y(t)}\Sigma_t$.

Notiamo che se la variet  Σ_t dipende dal tempo, il vettore η *non rappresenta in generale* una possibile velocit  del punto rappresentativo che si muove su Σ_t .

Questo porta ad introdurre la definizione di *traiettoria virtuale*.

Definizione 2.1

Si definisce *traiettoria virtuale del punto che rappresenta il sistema all'istante t_0* ogni parametrizzazione

$$(-1, 1) \ni \alpha \Rightarrow y(\alpha, t_0)$$

tale che per ogni α siano soddisfatte le relazioni

$$G_m(X(y(\alpha, t_0)), t_0) = 0, \quad m = 1 \dots M \quad 2.6$$

Le traiettorie virtuali al tempo t_0 sono dunque quelle traiettorie dei punti materiali *che sono compatibili con i vincoli quali essi sono al tempo t_0* .

Se i vincoli sono indipendenti dal tempo,   possibile utilizzare come parametro α il tempo.

In questo caso le traiettorie virtuali coincidono con i moti possibili del sistema.



Con queste notazioni si ha

PRINCIPIO DI D'ALEMBERT

Le forze di vincolo non compiono lavoro lungo le traiettorie virtuali del sistema .

◇

I vincoli per i quali é soddisfatto il Principio di d'Alembert vengono detti *vincoli perfetti* .

Si verifica sperimentalmente che, nel caso di sistemi meccanici, quanto piú le superfici di vincolo sono "levigate", tanto migliore é la descrizione del moto mediante il Principio di d'Alembert. Questo giustifica la dicitura *vincoli perfetti* .

Nota 2.3

Se i vincoli dipendono dal tempo le forze di vincolo compiono in generale lavoro se il sistema segue una traiettoria compatibile con i vincoli.

Questo puó essere interpretato come il lavoro compiuto dai vincoli (da chi provvede a che siano soddisfatti) per far sí che il sistema in esame si adegui alle loro variazioni.

Ne daremo in seguito un' esemplificazione.

♣

Conviene dare un'altra formulazione del Principio di d'Alembert.

Se $\alpha \rightarrow X(\alpha, t_0)$ é una traiettoria virtuale dal Principio di D'Alembert si deduce, per ogni $\alpha_0 > 0$

$$\int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} \left(F_V(X(y), \eta), \frac{dX(\alpha, t_0)}{d\alpha} \right) d\alpha = 0 \tag{2.7}$$

dove é stata esplicitata la dipendenza delle forze di vincolo dalla posizione e dai vettori tangenti alla varietá e si é indicato con (\dots) il prodotto scalare in R^{3N} .

Da (2.7) si deduce che, se $t \rightarrow x(t)$ é una traiettoria del sistema vincolato, deve essere per ogni t_0

$$(F_V(X(y), \eta, t)|_{t=t_0}, \xi) = 0 \tag{2.8}$$

per ogni vettore $\xi \in R^{3N}$ perpendicolare al piano tangente a Σ_{t_0} nel punto di coordinate $y(t_0)$.

Per convincersi di questo basta considerare una traiettoria virtuale descritta in queste coordinate da

$$\alpha \Rightarrow X(y)(\alpha, t_0) \equiv X(y(t_0)) + \alpha\xi \quad \alpha \in [-1, 1]. \tag{2.9}$$

Si ha

$$\left(F_V(X(y), \eta, t), \frac{dx}{d\alpha} \right) = (F_V(x(t_0) + \alpha\xi, \dot{y}(t_0), t_0), \xi) \tag{2.10}$$

Per ipotesi questa espressione é positiva per $\alpha = 0$, e quindi per continuitá resterà strettamente positiva per $\alpha \in (-\alpha_0, \alpha_0)$ se α_0 é scelto sufficientemente piccolo.

Ma allora il suo integrale é un numero strettamente positivo, e questo contraddice l'ipotesi (2.5).

Da (2.5) si deduce un'utile *interpretazione geometrica* del Principio di D'Alembert: in ogni istante t , in ogni punto di Σ_t e per ogni $\eta \in T\Sigma_t$ il vettore $F_V(X(y), \eta)$ é *perpendicolare alla superficie di vincolo*.

E' importante ricordare che questa interpretazione geometrica si riferisce *allo spazio delle configurazioni del sistema* e non ad E^3 .

Nota 2.4

Utilizzando coordinate locali é facile vedere che *l'accelerazione* di un sistema di punti materiali il cui rappresentativo si muove su una varietá Σ ha in generale *una componente ortogonale al vincolo*.

Attraverso il secondo principio della dinamica questa componente dell'accelerazione é tradotta in una collezione di *forze* (fittizie perché non si riferiscono ad una massa ma sono dedotte da un'accelerazione) $\hat{F}^k \in R^3$ che agiscono sui punti del sistema appartenenti alla varietà di vincolo Σ .

Queste forze fittizie sono tali che $\hat{F} \equiv \{\hat{F}^1, \dots, \hat{F}^N\}$ non é *in generale* tangente a Σ in ogni suo punto .

Ne segue che anche se all'istante iniziale la velocità é scelta essere tangente al vincolo il punto rappresentativo per azione di queste forze fittizie *puó uscire dalla varietà di vincolo*.

Affiché il moto su svolga sulla varietà Σ *la componente di queste fore perpendicolare al vincolo* deve essere dunque bilanciata in ogni punto dalla forza di vincolo (che per il Principio di d'Alembert é ortogonale al vincolo).

Il principio di d'Alembert afferma che *solamente questa componente delle forze fittizie* deve essere bilanciata dalla forze dovute al vincolo.

Esso puó essere visto come l'affermazione che nella formulazione mediante varietà di vincolo, le forza di vincolo sono introdotte per garantire che l'equilibrio interno del sitema vincolato non sia alterato; ad esempio la sua energia totale (cinetica piú potenziale) non vari nel caso di vincoli indipendenti dal tempo e forze esterne di natura potenziale.

Ad esempio la forza centripetra puó essere riguardata come forza di vincolo per un punto materiale posto in rotazione attorno ad un punto fisso O e che deve rimanere a distanza fissata da O .

Notiamo che in questo modo il Principio di d'Alembert puó essere considerato *un principio di minimalità*.

Questo rende ragione del fatto che, come vedremo nella Lezione 4, le equazioni di Newton-d'Alembert possono essere dedotte da un principio variazionale.

La loro vera giustificazione risiede nel confronto con il dato sperimentale.



Indichiamo con $Z \equiv \{z_1, \dots, z_{3N-M}\}$ una collezione di coordinate che insieme alle coordinate Y siano adatte a parametrizzare R^{3N} .

La varietà di vincolo é caratterizzata da $z_k = 0 \forall k$.

Il secondo principio della dinamica e il principio di d'Alembert implicano che le leggi del moto per le coordinate Z avranno la forma $\frac{d^2 z_k}{dt^2} = 0 \forall k$.

Poiché per ipotesi i dati iniziali soddisfano

$$z_k(t_0) = 0 \quad \forall k, \quad \frac{dz_k}{dt}(t_0) = 0 \quad 2.11$$

la soluzione é $z_k = 0 \forall t$ (il punto rappresentativo rimane sul vincolo) .

Una semplificazione del sistema (2.4),(2.7) si ottiene notando che la condizione geometrica (2.7) si puó esprimere dicendo che nel punto $X \in \Sigma(t_0)$ il vettore $F_V(X, \eta)$ é contenuto nel sottospazio sotteso da

$$\nabla G_m(X, t_0), \quad m = 1 \dots M \quad 2.12$$

Per ogni scelta di dati iniziali $x(0), \dot{x}(0)$ esistono quindi M funzioni

$$\lambda_1(X(0), \dot{X}(0), t) \dots \lambda_M(X(0), \dot{X}(0), t)$$

tali che, se $t \rightarrow X(t, x(0), \dot{X}(0))$ rappresenta il moto del sistema vincolato, si ha

$$F_V(t) = \sum_1^M \lambda_m(t) \nabla G_m(X(t), t) \quad 2.13$$

In particolare, scegliendo t_0 come istante iniziale, si avrà $\lambda_m(t_0) = \lambda_m(t_0, X(t_0), \dot{X}(t_0))$.

Le funzioni λ_m dipendono quindi in generale sia dalla configurazione dei punti che dalle loro velocità (ed eventualmente dal tempo).

Le funzioni G sono ottenute scrivendo esplicitamente per ogni valore di t e in ciascun punto di Σ_t le coordinate x_i^k , $i = 1, 2, 3$ $k = 1, \dots, N$ come funzione delle coordinate y_m e notando che, per il principio di d'Alembert, il termine a destra nella (2.9) dipende solo dalle coordinate Y e dalle loro derivate temporali.

Non la esplicheremo qui ulteriormente la forma delle equazioni di Newton-d'Alembert, perché nella Lezione 4 descriveremo un modo più intrinseco e più semplice per ottenerle.

Nota 2.5

Sottolineiamo ancora il fatto che il formalismo di Newton- d'Alembert, al contrario del formalismo variazionale, permette anche di dare l'espressione delle forze di vincolo che agiscono su ciascuno dei punti materiali del sistema per far sí che i vincoli siano rispettati.

Questo permette di stabilire un *tempo di rottura dei vincoli* se il valore assoluto della forza che esercitano i vincoli su un punto del sistema supera una soglia predefinita.

Questo risultato, che non è possibile ottenere con metodi astratti quali i sono principi variazionali, ha molta importanza nelle applicazioni



Abbiamo richiamato l'attenzione sul fatto che il Principio di d'Alembert afferma che le forze di vincolo non compiono lavoro *lungo le traiettorie virtuali*.

Se i vincoli dipendono dal tempo, le forze di vincolo compiono in generale lavoro lungo le traiettorie reali del sistema. Questo è naturale dal punto di vista fisico, poiché l'agente esterno il cui effetto è schematizzato dal vincolo mobile compie in generale lavoro per modificare i vincoli.

Un semplice esempio servirà a rendere quantitative queste considerazioni.

Consideriamo due punti materiali di masse m_1 ed m_2 interagenti attraverso forze che soddisfano il 3° principio della dinamica e soggetti inoltre al vincolo di restare su di un piano orizzontale che viene sollevato con una legge di moto prefissata.

Il vincolo è olonomo, bilatero e dipendente dal tempo.

Indichiamo con $\alpha(t)$ la quota a cui si trova il piano all'istante e con x_3 la coordinata relativa all'asse verticale.

Le due condizioni di vincolo si scrivono

$$G_1(x^1, x^2, t) \equiv x_3^1 - \alpha(t) = 0 \quad 2.14$$

$$G_2(x^1, x^2, t) \equiv x_3^2 - \alpha(t) = 0 \quad 2.15$$

Sulla superficie di vincolo sono soddisfatte le relazioni

$$\nabla G_1 = \eta, \quad \nabla G_2 = \zeta, \quad 2.16$$

dove $\eta \equiv (0, 0, 1, 0, 0, 0)$ e $\zeta \equiv (0, 0, 0, 0, 0, 1)$.

E' ovvio che i vettori ζ ed η sono non nulli e linearmente indipendenti.

Poiché le forze applicate soddisfano il terzo principio, il lavoro complessivo che esse compiono lungo una traiettoria reale del sistema è nullo.

Per calcolare il lavoro compiuto dalle forze di vincolo, si noti che dal sistema di equazioni

$$m_1 \ddot{x}^1 = F + F_V^1 \quad m_2 \ddot{x}^2 = -F + F_V^2 \quad 2.17$$

e dal fatto che F_V^1 e F_V^2 , essendo perpendicolari al piano su cui giacciono i due punti, non hanno componenti nel piano (1,2), segue che

$$m_1 \ddot{x}_3^1 = (F_V^1)_3, \quad m_2 \ddot{x}_3^2 = (F_V^2)_3 \quad 2.18$$

dove abbiamo anche usato il fatto che $F_3 = 0$ (questa é una conseguenza del terzo Principio, poiché i due punti materiali sono a ciascun istante alla medesima quota e quindi la forza che ciascuno esercita sull'altro non ha componenti lungo l'asse 3).

Poiché $x_3^1 = x_3^2 = \alpha(t)$ si deduce da (2.17)

$$(F_V^1)_3(t) = m_1 \ddot{\alpha}(t), \quad (F_V^2)_3(t) = m_2 \ddot{\alpha}(t), \quad (F_V^1)_p(t) = (F_V^2)_p(t) = 0, \quad p = 1, 2$$

Il lavoro fatto dalle forze di vincolo nell'intervallo di tempo $[0, T]$ é allora

$$L_V(0, T) = \int_0^T (F_V^1 \cdot \frac{dx^1}{dt}) dt + \int_0^T (F_V^2 \cdot \frac{dx^2}{dt}) dt \quad 2.19$$

Si ottiene infine

$$L_V(0, T) = \int_0^T (m_1 + m_2) \ddot{\alpha}(t) \dot{\alpha}(t) dt = \frac{m_1 + m_2}{2} (\dot{\alpha}(T)^2 - \dot{\alpha}(0)^2) \quad 2.20$$

Questa espressione rappresenta, come ci si poteva aspettare, la differenza tra l'energia del sistema al tempo T e l'energia al tempo 0.

LEGGI DI CONSERVAZIONE PER SISTEMI CON VINCOLI RIGIDI

Vogliamo ora verificare che, in presenza di vincoli rigidi descritti mediante il Principio di D'Alembert, rimangono valide per un sistema di punti materiali in un riferimento inerziale le equazioni

$$\frac{dP}{dt} = F, \quad \frac{dL}{dt} = M \quad 2.21$$

dove F é la risultante delle forze applicate (ad esclusione quindi delle forze di vincolo), M é il loro momento rispetto a un punto Q fermo in un riferimento inerziale, P é la quantità di moto totale del sistema e L é il momento angolare totale rispetto a Q .

Ricordiamo che questa affermazione é il punto di partenza nella descrizione del moto di un corpo rigido mediante le equazioni di Eulero.

Per dimostare l'asserto, é sufficiente dimostrare il principio di d'Alembert implica che sono nulli la risultante delle forze di vincolo e la risultante dei momenti delle forze di vincolo.

Consideriamo un sistema di N punti materiali $P_1 \dots P_N$ in E^3 e indichiamo con x_i^k , $k = 1 \dots N$, $i = 1, 2, 3$ le loro coordinate cartesiane in un sistema di riferimento fissato.

Imponiamo il vincolo (olonomo bilatero) che la distanza tra il punto P_k e il punto P_h sia $l_{h,k}$. Le equazioni di Newton del sistema sono

$$m_k \ddot{x}^k = F^k + F_V^k \quad k = 1 \dots N \quad X \equiv \{x^1, \dots, x^N\} \in \Sigma_t \quad 2.22$$

dove F^k é la forza applicata e F_V^k é la forza dovuta ai vincoli.

Indichiamo con $\alpha \rightarrow \{x^k(\alpha, t)\}_{k=1 \dots N}$ una traiettoria virtuale all'istante t nello spazio delle configurazioni (in E^3 questa é una collezione di N traiettorie, una per ciascun punto materiale).

Questo significa che per ogni α e per ogni t si ha

$$|x^k(\alpha, t) - x^h(\alpha, t)| = l_{h,k} \quad 2.23$$

Il principio di D'Alembert afferma che, per ogni $\delta > 0$

$$\int_0^\delta \left(F_V \cdot \frac{dX}{d\alpha} \right) d\alpha = 0, \quad F_V = \{F_V^n\}, \quad x \equiv \{x^n\} \in R^{3N} \quad 2.24$$

o, equivalentemente, esplicitando il prodotto scalare in R^{3N}

$$\sum_{n=1}^N \int_0^\delta (F_V^n, \frac{dx^n}{d\alpha}) d\alpha = 0 \quad 2.25$$

i prodotti scalari essendo ora in R^3 .

Come conseguenza del vincolo di rigidità il sistema ha sei gradi di libert a e le traiettorie virtuali possono essere parametrizzate con sei parametri.

Tre di questi possono essere fatti corrispondere a traslazioni rigide, che certamente preservano le condizioni di vincolo.

Le forze di vincolo devono quindi soddisfare la relazione

$$\sum_1^N F_V^n = 0 \quad 2.26$$

In questa formula   sottinteso che, per ogni n, il vettore F_V^n sia (trasportato per parallelismo e) applicato in un punto prefissato, ad esempio l'origine.

Un'altra famiglia a tre parametri di traiettorie virtuali   data dalle rotazioni attorno a tre assi passanti per l'origine (o per qualunque altro punto di E^3).

Le rotazioni attorno all'asse 1 sono date da

$$\begin{aligned} x_1^k(\alpha, t) &= x_1^k(0, t) & x_2^k(\alpha, t) &= x_2^k(0, t)\cos\alpha + x_3^k(0, t)\sen\alpha \\ x_3^k(\alpha, t) &= x_3^k(0, t)\cos\alpha - x_2^k(0, t)\sen\alpha \end{aligned} \quad 2.27$$

e analoghe formule valgono per le rotazioni attorno agli assi 2 e 3.

Sostituendo nella (2.12) si ottiene

$$\sum_{n=1}^N F_V^n \wedge x^n = 0 \quad \forall t \quad 2.28$$

Il principio di D'Alembert per un sistema di N punti materiali vincolati a stare a distanze prefissate fra loro   dunque *equivalente* all'affermazione che sono nulle la risultante delle forze di vincolo e la risultante dei loro momenti.

Notiamo che per le forze applicate, l'annullarsi della risultante delle forze e dei loro momenti   conseguenza del terzo Principio della Dinamica e dell'additività delle forze.

Nel caso delle forze di vincolo rigido, questa conclusione non   possibile; in generale le forze di vincolo rigido *non sono additive*.

Non   possibile scrivere in modo univoco la forza di vincolo F_V^n che si esercita sul punto P_n a causa della condizione di vincolo rigido, come somma di $N - 1$ forze $F_V^{n,m}$, ciascuna dipendente dalla posizione e dalla velocit a dei punti P_n e P_m e sostitutiva del vincolo rigido tra i punti P_n e P_m .

Questo deriva dal fatto che, se il vincolo rigido riguarda $N \geq 3$ punti *non   possibile costruire traiettorie virtuali nelle quali venga variata solo la posizione di due dei punti materiali*.

Poste le condizioni di vincolo

$$0 = G_{i,j}(x, t) \equiv |x^i - x^j|^2 - l_{i,j}(t), \quad i \neq j \quad 2.29$$

le forze di vincolo possono essere scritte nella forma

$$F_V = \sum_{i \neq j} \lambda_{i,j} \nabla G_{i,j} \quad 2.30$$

Per $N > 3$ i vettori $\nabla G_{i,j}$ non sono linearmente indipendenti e i coefficienti $\lambda_{i,j}$ in (2.30) non sono determinati univocamente.

In questo senso l'additivit  delle forze di vincolo in (2.30)   formale: la decomposizione *non   unica* e per qualunque decomposizione ciascun coefficiente $\lambda_{i,j}$ dipende anche dalla posizione e dalla velocit  di punti P_k per $k \neq i, j$.

E' tuttavia vero che, comunque sia effettuata la decomposizione, il termine $\lambda_{i,j} \nabla G_{i,j}$ descrive una forza diretta lungo la congiungente i punti P_i e P_j .

Questo   dovuto al fatto che $\lambda_{i,j}$   un coefficiente scalare e $\nabla G_{i,j}$   diretto secondo la congiungente i due punti, poich  $G_{i,j}$ dipende solamente da $|x^i - x^j|$.

Lezione 3. IL FORMALISMO DI LAGRANGE. PRINCIPI VARIAZIONALI

Solamente per sistemi molto semplici le equazioni di Newton o di Newton-D'Alembert possono essere risolte, anche in modo approssimato, e si può dare una descrizione almeno qualitativa delle traiettorie. Spesso la soluzione è facilitata dalla scelta di un opportuno sistema di coordinate.

È quindi di grande interesse avere un formalismo generale che permetta di scrivere queste equazioni in un sistema di coordinate qualsiasi.

In molti casi questo può portare all'individuazione di un sistema di coordinate che rende più agevole la soluzione.

Questo formalismo è stato introdotto da Lagrange, e nella forma generale in cui sono poste le equazioni di Newton-D'Alembert portano il nome di equazioni di Lagrange.

In questa Lezione descriveremo il formalismo di Lagrange nel caso di un sistema di punti materiali non soggetti a vincoli.

Nella Lezione successiva descriveremo il caso in cui siano presenti vincoli olonomi bilateri.

Le equazioni di Newton per un sistema di N punti materiali in R^3 soggetti a forze conservative descritte da un potenziale V si possono scrivere nella forma

$$m_k \frac{d^2 x^k}{dt^2} = \nabla_k V(x^1, \dots, x^N, t), \quad x^k \in R^3 \quad k = 1 \dots N \quad 3.1$$

dove x_i^k , $i = 1, 2, 3$ sono le coordinate cartesiane del k^{mo} punto in un sistema inerziale, m_k è sua massa e $\nabla_k V$ è la forza che si esercita su di esso quando gli N punti siano nella configurazione x^1, \dots, x^N .

Qui e in seguito utilizziamo la notazione

$$(\nabla_k V)^i \equiv \frac{\partial V}{\partial x_i^k} \quad i = 1, 2, 3,$$

Con semplici manipolazioni le equazioni (3.1) possono essere poste sotto la forma

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i^k} \right] = \frac{\partial L}{\partial x_i^k} \quad 3.2$$

dove abbiamo introdotto la funzione, definita sullo spazio posizione-velocità

$$L(\dot{X}, X, t) \equiv T(\dot{X}) + V(X, t) \quad 3.3$$

con T energia cinetica

$$T \equiv \frac{1}{2} \sum_k m_k |\dot{x}^k|^2$$

La funzione L è detta *Lagrangiana* del sistema.

Ricordiamo che per il sistema descritto dal sistema di equazioni (3.1) se V non dipende dal tempo è conservato lungo le traiettorie il valore della funzione $T + U$ dove $U(X) = -V(X)$.

Per questo motivo la funzione $U(x)$ è detta *energia potenziale*.

Con calcoli concettualmente semplici ma formalmente complicati Lagrange dimostrò che la forma (3.2) del sistema di equazioni è *indipendente dal sistema di coordinate scelte*.

Un tale proprietà non può essere frutto di una coincidenza casuale.

Anziché seguire i calcoli di Lagrange, verifichiamo che in qualunque sistema di coordinate le soluzioni delle equazioni (3.2) individuano quella traiettoria che rende estrema un funzionale, detto *Funzionale d'Azione*, che associa a ciascuna traiettoria l'integrale della funzione lagrangiana lungo la traiettoria data.

Questo *principio variazionale* (detto per motivi storici *primo principio variazionale di Hamilton*) ha avuto un'importanza fondamentale nello sviluppo della Meccanica Analitica.

Nel seguito di queste Lezioni vedremo che il formalismo di Lagrange permette di scrivere *in una forma indipendente dalle coordinate scelte* le equazioni del moto di un sistema composto da punti materiali e corpi rigidi soggetti a forze conservative e a vincoli olonomi bilateri.

Il formalismo di Lagrange, e i principi variazionali che ne sono alla base, hanno assunto un ruolo centrale nella trattazione dei sistemi conservativi, anche perché ammettono un'estensione piuttosto naturale (ma non banale) a sistemi di punti materiali in interazione con il campo elettromagnetico.

Per questa sua importanza introdurremo il formalismo lagrangiano in modo assiomatico.

Dimostreremo successivamente che, nel caso di un sistema di N punti materiali soggetti a vincoli olonomi bilateri, le equazioni così ottenute coincidono con quelle che si ottengono dalle leggi di Newton supplementate dal Principio di d'Alembert.

Nella sua forma assiomatica il metodo di Lagrange appare come caso particolare del metodo variazionale di Eulero, e le equazioni di Lagrange per sistemi meccanici sono le equazioni di Eulero per questo caso particolare.

Cominceremo quindi con una breve descrizione del metodo variazionale e delle corrispondenti equazioni di Eulero, e studieremo poi in modo più dettagliato il caso lagrangiano.

IL METODO VARIAZIONALE

Il metodo variazionale individua la traiettoria cercata (o la soluzione periodica, o la superficie, o la curva, ...) come quel punto di un *opportuno* spazio Σ di traiettorie (o di funzioni periodiche, di superfici, di curve, ...) in corrispondenza al quale un *opportuno* funzionale Φ raggiunge il suo valore minimo o comunque è stazionario.

Nota 3.1

Per funzionale intendiamo un'applicazione $X \rightarrow R$ dove X è uno spazio topologico (in generale uno spazio di Banach). Se $X = R^N$ si usa parlare invece di funzione.



Se lo spazio X su cui è definito il funzionale Φ è uno spazio metrico separabile completo, il differenziale di Φ è definito come nel caso di funzioni su R^N .

In uno spazio X affine per ogni elemento $x_0 \in X$ la relazione $x = x_0 + y$ pone una corrispondenza biunivoca continua tra X e uno spazio vettoriale Y .

Il funzionale Φ sullo spazio affine X è differenziabile in un aperto $\Omega \subset X$ se esiste un funzionale su $\Omega \times Y$ a valori in R , indicato con $\{x, y\} \rightarrow D\Phi_x(y)$ e detto *differenziale* di Φ nel punto $x \in X$, che dipende in modo continuo da x e linearmente da y ed è tale che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\Phi(x + y_n) - \Phi(x) - D\Phi_x(y_n)|}{|y_n|} = 0 \quad 3.5$$

per ogni successione $\{y_n\}$ per la quale $\lim_{n \rightarrow \infty} |y_n| = 0$.

Il funzionale Φ è di classe C^1 in un intorno di $x_0 \in X$ se il suo differenziale esiste ed è continuo (come funzione di x) nell'intorno considerato.

Se non viene precisato un intorno Ω , si intende che Φ è differenziabile in ogni aperto.

Definizione 3.1

Se Φ è di classe C^1 , il punto $x_0 \in X$ è un *punto di stazionarietà* per Φ (o anche *punto critico*) se il differenziale di Φ è nullo in x_0

$$D\Phi_{x_0} = 0 \quad (\text{i.e. } D\Phi_{x_0}(y) = 0 \forall y \in Y) \quad 3.6$$

In particolare se Φ é differenziabile i minimi e i massimi di Φ nell'aperto Ω sono punti di stazionarietá.

◇

Nota 3.2

Se M é uno spazio affine allora DF_x é una funzione lineare da Y ad \mathbb{R} . In generale DF_x é una funzione a valori reali definita sullo spazio X e a valori nello spazio tangente..

♣

Il metodo variazionale ha un'ampia gamma di applicazioni.

Alcuni esempi sono:

a)

Se lo spazio X é lo spazio delle curve che si trovano su di una varietá riemanniana Σ e congiungono due punti P_1, P_2 prefissati, e il funzionale é la lunghezza della curva, gli elementi che rendono stazionario il funzionale sono le geodetiche che congiungono P_1 e P_2 .

b)

Se il funzionale é l'energia potenziale gravitazionale e X é l'insieme delle curve materiali continue, di densitá costante e massa totale prefissata, che congiungono due punti $P_1, P_2 \in E^3$, i minimi del funzionale danno le configurazioni di equilibrio sotto la forza peso di una corda omogenea (o di una catena) che sia fissata agli estremi in P_1 e P_2 (questa curva si chiama *catenaria*).

c)

Se X é lo spazio delle superfici riemanniane in \mathbb{R}^3 che hanno un bordo determinato Σ e il funzionale é l'area della superficie, i punti di minimo sono le superfici che hanno Σ come bordo e hanno *area minima*.

d)

Se lo spazio X é quello delle funzioni T-periodiche a valori in \mathbb{R}^d e il funzionale é l'Azione lagrangiana, i punti critici sono le soluzioni T-periodiche dell'equazione di Newton.

Noi tratteremo solo quegli aspetti del metodo variazionale che sono direttamente pertinenti alla descrizione del moto di N punti materiali o di corpi rigidi.

La generalizzazione o estensione ad altri problemi é spesso molto semplice dal punto di vista formale, ma la dimostrazione rigorosa dell'esistenza di punti stazionari (detti anche punti critici) in casi piú complessi presenta spesso delle notevoli difficoltá matematiche.

Esse sono in generale connesse con la difficoltá di verificare la compattezza degli "intorni" del putativo punto critico, cosí da garantire la convergenza di successioni approssimanti.

IL PROBLEMA VARIAZIONALE IN \mathbb{R}^d

Cominciamo con un breve richiamo al problema variazionale in \mathbb{R}^d .

Sia $F(x)$, $x \in \mathbb{R}^d$, una funzione a valori reali continua, sia $F^0 \equiv \inf_{x \in \mathbb{R}^d} F(x)$.

Supponiamo che per $c > F^0$ l'insieme $K_c \in \mathbb{R}^N$ definito da

$$K_c \equiv \{x \in \mathbb{R}^N | F(x) \leq c\}$$

sia un insieme compatto (a K_c si dá spesso il nome di "sottoinsieme di livello" della funzione F).

Notiamo che, se la funzione F ha un minimo in K_c , questo deve appartenere all'interno di K_c poiché F é continua e $F^0 < c$.

Per dimostrare che l'estremo inferiore di F in K_c viene raggiunto in (almeno) un punto, si può procedere secondo lo schema seguente.

Sia $\{x_i, i = 1, 2, \dots\}$ una successione "minimizzante", cioè tale che per ogni intero n si abbia $F(x_n) - F^0 \leq 1/n$ (una tale successione esiste sempre poiché F è continua).

Poiché K_c è compatto, è possibile estrarre una sottosuccessione convergente, che indicheremo con $\{x'_n\}$.

Sia x_∞ il punto limite. Poiché F è continua, sarà

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(x'_n) = F(x_\infty)$$

Dunque $F^0 = F(x_\infty)$ e quindi x_∞ è un punto di minimo.

Nota 3.3

È importante notare il ruolo giocato dalla compattezza del sottoinsieme di livello.

Come controesempio per il caso in cui l'insieme considerato non è compatto, si può considerare la funzione $F(x) = x^{-1}$ definita per $x > 0$.

Per ogni $c > 0$ il sottoinsieme di livello $F(x) \leq c$ non è compatto.

La funzione ha zero come estremo inferiore ma non vi è alcun punto in cui questo estremo inferiore viene raggiunto.

Quindi la funzione x^{-1} non ha punti di minimo nell'insieme considerato.



Sia ora F di classe C^1 e assumiamo che siano soddisfatte le condizioni che garantiscono l'esistenza di un minimo o comunque di un punto in cui F è stazionaria.

Vogliamo caratterizzare analiticamente i punti critici per $F(x)$, cioè i punti nei quali $DF_x = 0$.

Il nostro scopo è di generalizzare la (3.6) al caso in cui il punto stazionario sia cercato in uno spazio \mathcal{M} di funzioni anziché in R^d .

Poiché DF_x è una funzione lineare di y , (3.6) è equivalente a

$$DF_{x_0}(\hat{\xi}_i) = 0, \quad i = 1, \dots, d \tag{3.7}$$

dove $\hat{\xi}_i$ è una base di vettori di lunghezza unitaria in R^d .

Per definizione, la derivata parziale di F nella direzione $\hat{\xi}_i$ è

$$\frac{\partial F}{\partial z_i}(x_0) \equiv \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{F(x + \lambda \hat{\xi}_i) - F(x)}{\lambda} \tag{3.8}$$

dove z_i sono le coordinate associate alla base scelta (così che all'elemento x vengono attribuite le coordinate $\{z_i\}$ se $x = \sum_1^d z_i \hat{\xi}_i$).

Se F è di classe C^1 si ha allora

$$\frac{\partial F}{\partial z_i}|_{x_0} = DF_{x_0}(\hat{\xi}_i)$$

Dunque, se F è di classe C^1 , (3.7) è equivalente a

$$\frac{\partial F}{\partial z_i}(x_0) = 0, \quad i = 1, \dots, N. \tag{3.9}$$

L'esistenza delle derivate parziali in ogni punto di Ω non è sufficiente a garantire che F sia di classe C^1 .

Infatti può esistere per ogni direzione $\hat{\xi}$ il limite $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{F(x_0 + \lambda \hat{\xi}) - F(x_0)}{\lambda}$ (derivata parziale nel punto x_0 di F nella direzione $\hat{\xi}$) ma non esistere il limite $\lim_{|y_n| \rightarrow 0} \frac{F(x + y_n) - F(x)}{|y_n|}$ per una generica successione y_n .

Ad esempio può non esistere il limite quando $y_n = \frac{1}{n}(\{\cos n\alpha\pi, \sin n\alpha\pi, 0\} \quad \alpha \in R$.
 Condizione *sufficiente* per l'esistenza del differenziale é che le derivate parziali siano funzioni continue di x_0 .

Un'altra forma equivalente di (3.6), utile per la generalizzazione al caso in cui M non é affine, é la seguente.

Per ogni traiettoria differenziabile $(-1, 1) \ni \alpha \rightarrow x(\alpha) \in R^d$, $x(0) = x_0$ deve essere

$$\frac{dF(x(\alpha))}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0} = 0 \quad 3.10$$

Infatti, se F é di classe C^1 in un intorno di x_0 , si ha

$$\frac{dF(x(\alpha))}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0} = \sum_1^d \frac{\partial F}{\partial z_n} \frac{dz_n}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0}$$

dove $\{z_n(\alpha)\}$ sono le coordinate di $x(\alpha)$ nella base scelta.

PRINCIPIO VARIAZIONALE SU SPAZI DI TRAIETTORIE.

Dopo queste considerazioni preliminari nel caso di dimensione finita, consideriamo ora un sistema meccanico il cui spazio delle configurazioni possa essere descritto *globalmente* mediante coordinate $q \equiv \{q_1, \dots, q_d\}$.

Poniamo, per $t \in (t_1, t_2)$, $x, \eta \in R^d$

$$L(x, \eta, t) \equiv T(x, \eta, t) - U(x, t) \quad \eta_k = \frac{dx_k}{dt} \quad 3.11$$

In (3.11),(3.12) T é l'energia cinetica e U é l'energia potenziale. La funzione L definita nello spazio posizione-velocità é chiamata *Lagrangiana* del sistema.

Faremo l'ipotesi che $U(x, t)$ sia di classe C^1 nella sua dipendenza da tutte le variabili, che T sia di classe C^2 nella dipendenza dalle η e di classe C^1 nella dipendenza dalle x e da t .

Faremo anche l'ipotesi che la matrice i cui elementi sono

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \eta_k \partial \eta_h}$$

sia invertibile (quest'ultima condizione serve a garantire che le equazioni che caratterizzano i punti critici possano essere scritte in forma normale).

Siano P_1 e P_2 due punti *nello spazio delle configurazioni* e siano

$$q^1 \equiv \{q_k^1, k = 1, \dots, d\}, \quad q^2 \equiv \{q_k^2, k = 1, \dots, d\}$$

le loro coordinate.

Siano $t_2 > t_1$ due tempi prefissati e siano $q^1, q^2 \in R^N$ due punti scelti arbitrariamente.

Sia

$$\mathcal{M}(q^1, t_1, q^2; t_2)$$

l'insieme delle traiettorie $(t_1, t_2) \ni t \rightarrow q(t)$ che sono continue in $[t_1, t_2]$, soddisfano le condizioni "al bordo"

$$q(t_1) = q^1 \quad q(t_2) = q^2$$

e hanno derivata prima a quadrato integrabile.

Definiamo su $\mathcal{M}(q^1, t_1, q^2; t_2)$ il funzionale

$$I(\gamma) \equiv \int_{t_1}^{t_2} L(q(t), \dot{q}(t), t) dt \quad 3.12$$

Definizione 3.2

Il funzionale $I(\gamma)$ definito in (3.12) é detto *Funzionale d'Azione* associato alla lagrangiana L e relativo alla scelta $q^1, q^2; t_1, t_2$.

◇

Nel seguito, ometteremo spesso di indicare esplicitamente la dipendenza dell'insieme \mathcal{M} dalla scelta dei tempi t_1, t_2 e dei punti q^1 e q^2 .

L'insieme \mathcal{M} é uno spazio affine. Infatti, se $q(\cdot)$ e $q'(\cdot)$ appartengono ad \mathcal{M} , si ha

$$q(t_1) - q'(t_1) = 0 = q(t_2) - q'(t_2)$$

e quindi $q(\cdot) - q'(\cdot) \in \mathcal{M}_0$, lo spazio *vettoriale* delle traiettorie $\eta(\cdot)$ regolari quanto gli elementi di \mathcal{M} e tali che $\eta(t_1) = 0 = \eta(t_2)$.

L'addizione in \mathcal{M}_0 é definita da $(\eta_1(\cdot) + \eta_2(\cdot))(t) = \eta_1(t) + \eta_2(t)$.

Nota 3.4

I sotto-livelli (l'insieme degli elementi nel dominio tali che $I(\gamma) \leq C$ per un prefissato C) del funzionale d'azione *non sono compatti* per una generica scelta di t_1 e t_2 .

Ma se il potenziale é regolare e se si scelgono t_2 e t_1 *sufficientemente vicini tra di loro* (quanto vicini dipende dalle proprietá di regolaritá del potenziale) il teorema di Ascoli-Arzelá relativo alle funzioni assolutamente continue assicura compattezza dei sotto-livelli perché il termine di energia cinetica che é strettamente convesso domina il termine di energia potenziale, come si vede mediante il teorema fondamentale del calcolo.

Quindi se l'energia cinetica é una funzione strettamente convessa e il potenziale é regolare e se $t_2 - t_1$ é abbastanza piccolo, il minimo del funzionale d'azione *esiste ed é unico*.

Dimostriamo che si tratta di una traiettoria che soddisfa le equazioni di Newton.

♣

Per valori maggiori di $t_2 - t_1$ il minimo puó non esistere oppure puó non essere unico anche se il potenziale é regolare .

Un esempio semplice ma istruttivo é fornito dall'oscillatore armonico.

Tutte le traiettorie dell'oscillatore armonico

$$\ddot{x} = -x, \quad x \in R^N$$

(ad eccezione di quella con dati iniziali $x(t_0) = \dot{x}(t_0) = 0$) sono periodiche con periodo 2π .

Dunque il problema ai limiti

$$x(0) = a, \quad x(\tau) = a$$

non puó avere soluzioni per $a \neq 0$ se $\tau \neq 2m\pi$ $m \in Z$, e il problema ai limiti

$$x(0) = a, \quad x(2\pi) = a$$

ha infinite soluzioni (che corrispondono alle possibili scelte di $\dot{x}(0)$).

Nota 3.5

Notiamo esplicitamente che le traiettorie così ottenute sono soluzioni di un problema *ai limiti* per un sistema di equazioni differenziali, soluzioni cioè di un problema in cui vengono prescritti i valori delle $q_k(t)$ a due estremi di un intervallo di tempo.

Questo é un problema *diverso* dal *problema di Cauchy* per lo stesso sistema di equazioni: nel problema di Cauchy la soluzione é cercata dando ad un istante iniziale t_0 *'posizione e velocità* (cioé prescrivendo $q_k(t_0), \dot{q}_k(t_0)$).

In generale non ci si deve dunque aspettare che per un problema variazionale valgano i teoremi di esistenza e unicità noti per il problema di Cauchy.

Naturalmente ogni soluzione del problema ai limiti é soluzione del problema di Cauchy *per qualche dato iniziale*, e analogamente ogni soluzione del problema di Cauchy é soluzione di un problema ai limiti *per qualche scelta della posizione finale*.

Possono tuttavia esistere problemi ai limiti che non hanno soluzione (il funzionale d'Azione corrispondente non ha punti stazionari) e problemi ai limiti che hanno un continuo di soluzioni (i punti critici del funzionale costituiscono una varietà di dimensione ≥ 1).

L'esistenza di punti focali in ottica geometrica (cioé di piú traiettorie che hanno gli stessi punti iniziali e finali), pur riferendosi ad un problema diverso, é un esempio che conviene tenere presente.

Infatti anche l'ottica geometrica é descrivibile mediante un principio variazionale, il principio di minimo del cammino ottico, che come vedremo non differisce molto nella sua formulazione dal principio di Maupertius, a sua volta equivalente al principio di minima Azione.



Vogliamo determinare la relazione che caratterizza i punti di $\mathcal{M}(q^1, q^2; t_1, t_2)$ in corrispondenza ai quali il funzionale I é stazionario.

Questa relazione apparirá come un sistema di equazioni differenziali del secondo ordine, di cui dimostreremo in seguito l'equivalenza nel caso di un sistema di N corpi con le equazioni di Newton-D'Alembert.

Dobbiamo innanzitutto dimostrare che il funzionale I^L é di classe C^1 .

Per questo é necessario introdurre in \mathcal{M}_0 una norma.

Faremo la seguente scelta: per $h \in \mathcal{M}_0$ poniamo

$$\|h\| \equiv \max\{\max_{t_1 \leq t \leq t_2} |h(t)|, \sup_{t_1 \leq t \leq t_2} |\dot{h}_+(t)|\} \quad 3.13$$

dove con $|\dot{h}_+|$ indichiamo il modulo della derivata nei punti in cui la traiettoria é differenziabile e il massimo tra i moduli della derivata destra e sinistra nei punti in cui le due derivate destra e sinistra non coincidono.

E' facile verificare che $\|h\|$ soddisfa le proprietá di una norma.

Dimostriamo ora che, sotto le ipotesi fatte su $T(x, y, t)$ e $U(x, t)$, il funzionale I é differenziabile in ogni punto di \mathcal{M} .

Si ha infatti, se $\xi, \eta \in R^d$,

$$\begin{aligned} |T(x + \xi, y + \eta, t) - T(x, y, t) - \sum_k \frac{\partial T}{\partial x_k} \xi_k - \sum_k \frac{\partial T}{\partial y_k} \eta_k| &\leq (|\xi| + |\eta|) R_1(\xi, \eta, t) \\ |U(x + \xi) - U(x) - \sum_k \frac{\partial U}{\partial x_k} \xi_k| &\leq |\xi| R_2(\xi, t) \end{aligned} \quad 3.14$$

dove R_1, R_2 sono positive ed infinitesime uniformemente in $[t_1, t_2]$.

Infatti per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\delta(\epsilon) > 0$ tale che, se $|\xi| + |\eta| < \delta(\epsilon)$ per ogni $t_1 \leq t \leq t_2$ vale $R_1(\xi, \eta, t) + R_2(\xi, t) < \epsilon$.

Se $h \in \mathcal{M}_0$ si avrà, per ogni $\gamma \in \mathcal{M}$

$$\begin{aligned}
& |I(\gamma + h) - I(\gamma) - \int_{t_1}^{t_2} \sum_k \left(\frac{\partial L}{\partial x_k}(q(t), \dot{q}(t), t) h_k(t) + \frac{\partial L}{\partial y_k}(q(t), \dot{q}(t), t) \dot{h}_k(t) \right) dt| \\
& \leq \int_{t_1}^{t_2} (|h(t)| + |\dot{h}(t)|) \left(R_1(h(t), \dot{h}(t), t) + R_2(h(t), t) \right) \\
& \leq (t_2 - t_1) \sup_{t_1 \leq t \leq t_2} (|h(t)| + |\dot{h}(t)|) \sup_{t_1 \leq t \leq t_2} \left(R_1(h(t), \dot{h}(t), t) + R_2(h(t), t) \right) \quad 3.15
\end{aligned}$$

Se $\|h\| \leq \delta(\epsilon)$, si ha

$$|h(t)| + |\dot{h}(t)| \leq \delta(\epsilon) \quad \forall t \in [t_1, t_2]$$

e quindi $R_1 + R_2 \leq \epsilon \quad \forall t \in [t_1, t_2]$.

Dunque, se $\|h\| < \delta(\epsilon)$, si ha

$$\|h\|^{-1} |I^L(\gamma + h) - I(\gamma) - \int_{t_1}^{t_2} \sum_k \left(\frac{\partial L}{\partial x_k} h_k(t) + \frac{\partial L}{\partial y_k} \dot{h}_k(t) \right) dt| \leq \epsilon(t_2 - t_1) \quad 3.16$$

Pertanto I é di classe C^1 nel "punto" $\gamma \in \mathcal{M}$ e il suo differenziale DI_γ é per definizione la funzione lineare $\mathcal{M} \Rightarrow R$ data da

$$DI_\gamma^L(h) = \int_{t_1}^{t_2} \sum_k \left(\frac{\partial L}{\partial x_k}(q(t), \dot{q}(t), t) h_k(t) + \frac{\partial L}{\partial y_k}(q(t), \dot{q}(t), t) \dot{h}_k(t) \right) dt \quad 3.17$$

I punti di \mathcal{M} in corrispondenza ai quali I é stazionario sono quelli per i quali $DI_\gamma^L = 0$.

Per le ipotesi fatte

$$\frac{\partial L}{\partial \eta_k}(x, \eta, t)$$

é differenziabile nelle sue variabili.

Ne segue che, se $\dot{q}(t)$ é differenziabile in t (quindi se $q(t)$ é due volte differenziabile in t) per il teorema delle funzioni composte la funzione

$$\frac{\partial L}{\partial \eta_k}(x, \eta, t)|_{x=q(t), \eta=\dot{q}(t)}$$

é differenziabile in t .

Integrando per parti il termine lineare in \dot{h} e ricordando che $h(t_1) = h(t_2) = 0$, si ottiene

$$0 = DI_\gamma^L(h) = \int_{t_1}^{t_2} \sum_k \left[\frac{\partial L}{\partial x_k}(q(t), \dot{q}(t), t) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \eta_k} \right)(q(t), \dot{q}(t), t) \right] h_k(t) dt \quad 3.18$$

Poiché $h(t)$ é un elemento arbitrario di \mathcal{M}_0 , la condizione (3.17) implica, per ogni $t_1 \leq t \leq t_2$

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \eta_k}(x, y, t) \right]_{x=q(t), \eta=\dot{q}(t)} = \left[\frac{\partial L}{\partial x_k}(x, \eta, t) \right]_{x=q(t), \eta=\dot{q}(t)} \quad k = 1 \dots d \quad 3.19$$

Vale infatti il seguente Lemma

Lemma 7.1

Se una funzione $\zeta(t)$ é continua in $[t_1, t_2]$ e se per ogni funzione $g(t)$ di classe C^1 in (t_1, t_2) , con $g(t_1) = g(t_2) = 0$, vale la relazione

$$\int \zeta(t)g(t)dt = 0 \quad 3.20$$

allora $\zeta(t) \equiv 0$.

◇

Dimostrazione

Supponiamo che esista $t_0, t_1 < t_0 < t_2$, tale che $\zeta(t_0) \neq 0$.

Senza perdita di generalitá assumiamo $\zeta(t_0) > 0$ (in caso contrario considerare la funzione $-\zeta$).

Per continuitá esisterá un intervallo Δ che contiene t_0 ed é strettamente contenuto in (t_1, t_2) , ed é tale che $\zeta(t) > \frac{1}{2}\zeta(t_0)$ in Δ .

Scegliendo una funzione $h(t)$ positiva, di classe C^1 , non identicamente nulla e a supporto strettamente contenuto in Δ si ha

$$\int_{t_1}^{t_2} \zeta(t)h(t)dt \geq \frac{1}{2}\zeta(t_0) \int_{t_1}^{t_2} h(t)dt > 0$$

Questo contraddice (3.19). Quindi $\zeta(t)$ é nulla nell'aperto (t_1, t_2) . Per continuitá é nulla in $[t_1, t_2]$.

♡

Notiamo che spesso le equazioni (3.19) vengono scritte nella forma abbreviata

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q, \dot{q}, t) = \frac{\partial L}{\partial q_k}(q, \dot{q}, t) \quad 3.21$$

Le (3.19) (o (3.21)) sono le *equazioni di Lagrange* .

Le equazioni di Lagrange costituiscono un sistema di d equazioni differenziali del secondo ordine.

Se la matrice delle derivate parziali seconde di $T(x, \eta, t)$ rispetto a η , i cui elementi sono $\frac{\partial^2 T}{\partial \eta_k \partial \eta_h}$ é invertibile, il sistema puó essere posto in forma normale.

Questo é in generale vero per i sistemi meccanici, poiché l'energia cinetica é quadratica nelle velocitá e definita positiva.

Con l'analisi che abbiamo svolto abbiamo dunque dimostrato la seguente

Proposizione 3.2 (Primo principio variazionale di Hamilton)

Se $t \rightarrow q(t)$ é (la rappresentazione in coordinate q di) una traiettoria in corrispondenza alla quale il Funzionale d'Azione I é stazionario, se $q(t)$ é di classe C^2 e se le derivate parziali seconde $\frac{\partial^2 T}{\partial \eta_k \partial \eta_h}$ esistono e sono continue, allora $q(t)$ soddisfa le equazioni di Lagrange e le condizioni prefissate $q(t_1) = q_1, q(t_2) = q_2$

Reciprocamente, sotto le stesse ipotesi di regolaritá per T , se $q(t)$ soddisfa le equazioni di Lagrange (e quindi in particolare le $q_k(t)$ sono di classe C^2), esse corrispondono ad una traiettoria γ che rende stazionario il Funzionale d'Azione (considerato come funzionale sulle traiettorie che coincidono ai tempi t_1 e t_2 con la traiettoria considerata) .

◇

Da questa Proposizione segue immediatamente che le equazioni di Lagrange *sono invarianti per trasformazioni di coordinate*.

Notiamo che le equazioni di Lagrange sono definite globalmente su una varietà Σ se la Lagrangiana è definita globalmente sul fibrato tangente a Σ .

Conviene infine notare che in generale lo stesso simbolo L viene utilizzato per indicare la lagrangiana in diversi sistemi di coordinate.

In questo modo la lagrangiana L viene riguardata come funzione definita sul fibrato tangente allo spazio delle configurazioni; la dipendenza funzionale dalle coordinate in ciascun intorno e dalle loro derivate rispetto al tempo è invece specifica del sistema di coordinate scelto.

Nota 3.6

Le condizioni di regolarità che abbiamo utilizzato per dedurre le equazioni di Lagrange da un principio variazionale, in particolare la condizione che i punti critici trovati corrispondano a traiettorie due volte differenziabili, sono soddisfatte per la maggior parte dei sistemi fisici di interesse in meccanica.

Nei casi in cui i punti critici non corrispondono a soluzioni due volte differenziabili la traiettoria $q(t)$ è detta *soluzione debole* delle Equazioni di Lagrange se è soddisfatta (3.16) per ogni $h \in M_0$. Un caso importante di questa situazione è dato dai sistemi fisici descritti da potenziali *singolari* (cioè che come funzioni hanno delle singolarità), ad esempio il potenziale Newtoniano.

In questo caso le traiettorie ottenute con il principio variazionale e che sono tali che esiste un tempo t_0 per cui $\lim_{t \rightarrow t_0^+} [x_k(t) - x_h(t)] = 0$ per una coppia di punti P_k, P_h (di cui le x_k, x_h sono coordinate), sono soluzioni *deboli* (dette anche *di collisione*).

Notare che l'energia cinetica è integrabile anche per una soluzione di collisione.



Nota 3.7

Il metodo variazionale è particolarmente utile per determinare l'esistenza di soluzioni *periodiche* di periodo prefissato di un sistema Lagrangiano.

Se τ è il periodo prefissato, si potrà applicare il principio variazionale nel caso particolare $t_2 = t_1 + \tau$, $q(t_1) = q(t_2)$, cioè trovare i punti critici del Funzionale d'Azione definito sullo spazio delle funzioni τ -periodiche a valori nello spazio delle configurazioni.

La ricerca diretta (cioè risolvendo il corrispondente problema di Cauchy) delle soluzioni periodiche mediante le equazioni di Lagrange è invece in generale molto difficile, poiché la soluzione esplicita delle equazioni del moto non è in generale conosciuta.

Naturalmente, nel caso di potenziali singolari, le soluzioni che si ottengono con il metodo variazionale potrebbero essere di collisione.



Nota 3.8

Il problema di dimostrare l'*esistenza* di punti stazionari per un funzionale I è spesso complesso, soprattutto, come menzionato all'inizio di questo capitolo, per la difficoltà di dimostrare che è compatto l'insieme delle traiettorie γ per le quali $I(\gamma) < c$.

Si può tuttavia dimostrare che nel caso di sistemi meccanici, se U è sufficientemente regolare (ad esempio di classe C^1) e se $|t_2 - t_1|$ e $|q(t_1) - q(t_2)|$ sono *sufficientemente piccoli* (dipendentemente dalla regolarità del gradiente del potenziale), allora il funzionale d'Azione ha un *minimo* in $\mathcal{M}(q(t_1), q(t_2), t_1, t_2)$.

Quindi il problema ai limiti ha almeno una soluzione (l'esempio dell'oscillatore armonico mostra che la condizione che $|t_1 - t_2|$ sia sufficientemente piccolo non può in generale essere trascurata). Si utilizza per questo il fatto che le funzioni la cui derivata prima è a quadrato integrabile sono assolutamente continue e si fa uso del Lemma di Ascoli-Arzelá e della convessità dell'energia cinetica come funzione delle velocità per dimostrare la compattezza dell'insieme delle traiettorie per le quali $I(\gamma) < c$ per un opportuna costante reale c .

La convessità dell'energia cinetica T e la limitatezza e regolarità di U garantiscono anche che esiste un punto di minimo.

Per questo motivo il principio variazionale di Eulero-Lagrange é detto spesso, con abuso di linguaggio, *Principio di Minima Azione* .



A conclusione di questa Lezione vogliamo ora dimostrare

Proposizione 3.3

Per un sistema di N punti materiali in E^3 che interagiscono attraverso forze conservative, le equazioni di Lagrange sono equivalenti alle equazioni di Newton.



Dimostrazione

Notiamo che lo spazio delle configurazioni é rappresentabile mediante un unico sistema di coordinate, che scegliamo essere le coordinate cartesiane dei singoli punti materiali rispetto ad una terna di assi cartesiani prefissati in E^3 .

In queste coordinate si ha

$$2T = \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^3 m_n (\dot{x}_k^n)^2 \quad U = U(\{x_k^n\}, t)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k^n} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_k^n} = m_n \dot{x}_k^n, \quad \frac{\partial L}{\partial x_k^n} = \frac{-\partial U}{\partial x_k^n} = F_k^n$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k^n} - \frac{\partial L}{\partial x_k^n} = m_n \ddot{x}_k^n - F_k^n \tag{3.21}$$

da cui segue l'asserto.



Si puó verificare direttamente da (3.21) che, se la Lagrangiana é invariante per traslazione, allora le forze soddisfano il terzo principio della dinamica.

Ritourneremo su questo fatto in seguito, quando tratteremo la relazione tra simmetrie di un sistema lagrangiano e costanti del moto.

Lezione 4. PRINCIPIO VARIAZIONALE PER SISTEMI VINCOLATI

Uno dei vantaggi del principio variazionale é quello di avere una facile applicazione alla trattazione di sistemi vincolati con vincoli olonomi bilateri.

Le equazioni che si ottengono hanno una forma che non dipende dal sistema di coordinate utilizzato.

Abbiamo visto nella Lezione 2 come estendere le equazioni di Newton ai sistemi soggetti a vincoli olonomi bilateri, anche dipendenti dal tempo, mediante il principio di d'Alembert.

In questa Lezione vedremo come ottenere in modo intrinseco le equazioni di Newton-d'Alembert per sistemi vincolati mediante il formalismo di Lagrange e metodi variazionali.

Ricordiamo che per sistemi meccanici non soggetti a vincoli un ruolo importante é giocato dal Funzionale d'Azione, che associa a ciascuna traiettoria tra i tempi t_1 e t_2 l'integrale della lagrangiana lungo la traiettoria.

La lagrangiana L in ogni punto della traiettoria é una funzione della posizione del punto e della sua velocità lungo la traiettoria stessa.

Vogliamo estendere il formalismo di Lagrange al caso di N punti materiali soggetti a forze conservative e a vincoli olonomi bilateri.

Conviene introdurre una nuova struttura *geometrica*.

Data una varietà liscia Σ di dimensione d (che può essere R^d) ed un suo punto $P \in \Sigma$ consideriamo la classe di equivalenza di tutte le curve differenziabili che giacciono in Σ , passano per P e hanno in P la stessa tangente η . Questa collezione é dunque parametrizzata assegnando ad ogni punto di Σ un vettore basato in P e quindi associando a Σ un campo vettoriale.

Chiamiamo questo campo vettoriale su Σ *fibrato tangente di Σ* e lo indichiamo con $T\Sigma$.

Poiché ogni intorno di Σ é diffeomorfo ad un aperto di R^d ed ogni intorno di η é diffeomorfo ad un aperto di R^d e le funzioni di transizione sono regolari, ogni intorno di un punto in $z \in T\Sigma$ é diffeomorfo ad un aperto di R^{2d} .

In ogni punto di $T\Sigma$ possiamo scegliere allora coordinate locali $q_1 \dots q_d, \eta_1, \dots \eta_d$.

Nel caso Σ sia una superficie di vincolo per un sistema di N punti materiali in R^3 le q_k parametrizzano le posizioni dei punti e le η_k parametrizzano le derivate delle curve su Σ (quindi le possibili *velocità virtuali*; virtuali poiché il parametro che viene usato *non é il tempo*).

Naturalmente se la varietà in esame Σ é immersa in R^M , $M > d$ e non dipende dal tempo, si può scegliere il tempo come parametro e quindi si possono considerare le η_k come possibili coordinate della velocità di spostamenti di un punto su Σ .

Se invece Σ_t é una varietà immersa che dipende dal tempo, in generale le velocità virtuali *non coincidono* con le velocità di un generico punto su Σ_t . La differenza rappresenta il *trascinamento* dovuto al moto della varietà.

Per il sistema di N punti materiali che abbiamo trattato nella Lezione precedente abbiamo introdotto la Lagrangiana L , che nel linguaggio dei fibrati tangenti possiamo descrivere come la funzione su TR^{3N} data da

$$L(X, Y, t) \equiv T(X.Y) - U(X, t) \quad \eta_k^m = \frac{dx_k^m}{dt} \quad Y = \{\eta^m\} \quad m = 1, \dots, N, \quad k = 1, 2, 3$$

Possiamo utilizzare le coordinate x_k^m dei punti materiali per descrivere lo spazio delle configurazioni del sistema e in ciascun punto di R^{3N} abbiamo utilizzato le coordinate η_k^m per descrivere i punti della fibra. Ma le equazioni di Lagrange valgono per qualunque altra scelta di coordinate in TR^{3N} .

Notiamo che in questa formulazione la Lagrangiana é un oggetto *geometrico* definito sul fibrato tangente. Le soluzioni delle equazioni del moto (in forma lagrangiana) si ottengono mediante il

primo principio variazionale di Hamilton come estremali dell'integrale della lagrangiana lungo traiettorie in TR^{3N} che hanno *nelle variabili posizione* estremi fissati

Notare che é questa scelta di quali siano le coordinate di posizione che distingue TR^{3N} da R^{6N} . Poiché i principi variazionali valgono per qualsiasi sistema di coordinate possiamo utilizzare il primo principio variazionale di Hamilton scrivendo L in qualunque sistema di coordinate \tilde{X} in cui venga descritto il fibrato tangente.

E' naturale chiedersi se é possibile utilizzare i principi variazionali anche nel caso di sistemi vincolati in modo tale da poter utilizzare il sistema di coordinate piú conveniente.

In questa Lezione dimostreremo che questo é possibile per i sistemi vincolati con vincoli olonomi bilateri anche dipendenti dal tempo.

Otterremo quindi per questi sistemi le equazioni in forma lagrangiana.

Se i vincoli dipendono dal tempo, le Lagrangiana dipenderá in generale dal tempo in e di questo bisognerà tenere conto nello scrivere le equazioni del moto.

Anche nel caso di sistemi vincolati per i quali il punto rappresentativo del sistema appartiene alla varietà Σ_t introdurremo una funzione definita su $T\Sigma_t$ che chiameremo Lagrangiana del sistema vincolato e indicheremo con il simbolo L_{vinc} ; dimostreremo che le soluzioni delle equazioni di Newton-d'Alembert sono precisamente le soluzioni di un naturale principio variazionale costruito a partire da L_{vinc} .

Questo renderá plausibile l'utilizzazione dei principi variazionali come base per la determinazione delle equazioni del moto per una larga classe di sistemi fisici.

Prima di enunciare il Principio variazionale per sistemi vincolati con vincoli olonomi bilateri e dimostrare che le soluzioni che si ottengono coincidono con quelle ottenute mediante il principio di d'Alembert facciamo alcune considerazioni preliminari.

a)

Consideriamo inizialmente il caso in cui i vincoli non dipendono dal tempo e quindi possono essere descritti da una superficie di vincolo Σ non dipende dal tempo. Indichiamo con d la sua dimensione possiamo e utilizziamo coordinate $q \equiv \{q_1, \dots, q_d\}$ per parametrizzare un intorno \mathcal{N} sufficientemente piccolo di un punto $q^0 \in \Sigma$.

Parametrizzero con le coordinate $\eta \equiv \eta_1, \dots, \eta_d$ le fibre del fibrato tangente con base \mathcal{N} .

In questo caso definiamo Lagrangiana del sistema vincolato L_{vinc} la restrizione a $T\Sigma$ della Lagrangiana del sistema in assenza di vincoli.

Le coordinate η sulle fibre di $T\Sigma$ sono le componenti di un vettore che dá la velocità di spostamento su Σ . Poiché il vincolo non dipende dal tempo, potremo prendere il parametro tempo per parametrizzare le traiettorie e quindi η può indicare la velocità del punto rappresentativo sul vincolo .

Analogamente definiremo azione $I_{vinc}^L(\gamma)$ relativamente e al cammino $\gamma \in \Sigma$ l'integrale della lagrangiana L_{vinc} sul cammino γ

$$I_{vinc}^L(\gamma) = \int_{\gamma} L_{vinc}(q(s), \eta(s)) ds \quad 4.2$$

Se il cammino non é tutto contenuto in \mathcal{N} utilizziamo la proprietà di additività degli integrali e le leggi di trasformazione di coordinate da un intorno all'altro.

b)

Se i vincoli *dipendono dal tempo*, la definizione di azione é leggermente piú elaborata e tiene conto della differenza tra velocità virtuali e velocità reali.

In questo caso, la variazione nel tempo delle coordinate di un punto di un punto ha due componenti; una rappresenta lo spostamento del punto sul vincolo e l'altra rappresenta lo

spostamento del vincolo; la prima componente rappresenta lo spostamento *virtuale* e la loro somma vettoriale rappresenta lo *spostamento reale*.

Per precisare questa decomposizione scegliamo in $T\Sigma_{t_0}$ un intorno \mathcal{N} del dato iniziale (al tempo t_0) di coordinate $q_k, \eta_k, k = 1 \dots d$.

Notiamo che se i vincoli vengono modificati nel corso del tempo in modo regolare, la varietà Σ_t é diffeomorfa a Σ_{t_0} .

Se indichiamo con Φ_{t,t_0} la trasformazione di coordinate che realizza questo diffeomorfismo la velocità di un punto rappresentativo su Σ_{t_0} avrà quindi due componenti: la prima é la trasformazione dovuta a $D\Phi_{t,t_0}$ della coordinata che rappresenta la velocità del punto rappresentativo sul vincolo considerato fisso e la seconda é la velocità *di trascinamento* $v(q, t)$ dovuta al movimento dei vincoli.

La seconda componente é descritta al tempo t_0 da un vettore che dipende dalle coordinate q ed eventualmente dal tempo.

Poiché la composizione delle velocità é espressa dalla loro somma vettoriale la velocità nel sistema di riferimento del vincolo é la somma vettoriale della velocità del punto rappresentativo sul vincolo e della velocità di trascinamento.

La prima componente sará descritta al tempo t_0 dalle coordinate η_k nella fibra;

Il fatto che nell'espressione della Lagrangiana appaiano solo coordinate di posizione e velocità *ma non di accelerazione* rende naturale la seguente *definizione*

Definizione 4.1

La Lagrangiana del sistema vincolato é

$$L_{vinc}(q, \eta, t) = \tilde{L}(q, \eta + v(q, t), t) \quad 4.3$$

dove \tilde{L} é la restrizione a $T\Sigma$ della lagrangiana L .

◇

Definiamo come prima il funzionale d'azione $I_{vinc}^L(\gamma)$ sulle traiettorie γ del sistema.

Definizione 4.2

Il funzionale d'Azione I_{vinc}^L per un sistema vincolato con vincoli olonomi bilateri é l'integrale lungo γ della Lagrangiana L_{vinc} .

◇

Con queste definizioni di L_{vinc} e I_{vinc}^L le soluzioni delle equazioni del moto del sistema vincolato con vincoli olonomi bilateri (che possono dipendere dal tempo) sono descritte dal seguente principio variazionale

Principio variazionale per vincoli olonomi bilateri

Le traiettorie del sistema sono i punti critici del funzionale I_{vinc}^L valutato su traiettorie di cui siano fissate le coordinate di posizione a due tempi t_1, t_2 .

Le equazioni del moto sulla varietà di vincolo sono le equazioni di Lagrange con Lagrangiana L_{vinc}

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L_{vinc}}{\partial \eta_k} \right]_{\eta_k = \dot{q}_k} = \frac{\partial L_{vinc}}{\partial q_k} \quad 4.4$$

◇

Proposizione 4.2

Per un sistema di N punti materiali soggetti a forze conservative e a vincoli olonomi bilateri le equazioni di Lagrange con Lagrangiana L_{vinc} sono equivalenti alle equazioni di Newton supplementate dal Principio di d'Alembert.

◇

Nota 4.1

Poiché un corpo rigido é, dal punto di vista della dinamica, equivalente ad un sistema di punti materiali tra loro rigidamente vincolati, la Proposizione 4.2 vale anche per un sistema composto da punti materiali e da corpi rigidi, che interagiscono fra loro o con l'ambiente attraverso forze conservative, e sono soggetti a vincoli olonomi bilateri.



Dimostrazione della Proposizione 4.2

Supponiamo che γ sia un punto stazionario di I_{vinc} ; dunque $(DI_{vinc})_\gamma = 0$.

Se la traiettoria γ é descritta da $q(t)$ e γ' é descritta da $q(t) + h(t)$, $h \in M_0$, γ' sará descritta in coordinate naturali da $x_k^n(q(t) + h(t), t)$.

Poniamo

$$\delta_k^n(h)(t) \equiv x_k^n(q(t) + h(t), t) - x_k^n(q(t), t) \quad 4.3$$

Per costruzione $\delta_k^n(h)$ é infinitesima di ordine $\|h\|$ nella topologia scelta su M_0 , e inoltre esiste una funzione a valori vettoriali di componenti $\zeta_k^n(t)$, tangente a Σ_t (il vincolo puó dipendere dal tempo) nel punto di coordinate $q(t)$, e tale che

$$\delta_k^n(h)(t) = |h(t)|\zeta_k^n(t) + o(\|h\|) \quad 4.4$$

Reciprocamente, per ogni funzione $\zeta(t)$ a valori vettoriali, di componenti ζ_k^n , che per ogni t é tangente a Σ_t nel punto $q(t)$, é possibile scegliere h in M_0 in modo tale che (4.4) sia soddisfatta. Calcoliamo $I_{vinc}(\gamma') - I_{vinc}(\gamma)$ considerando L_{vinc} come funzione delle coordinate x_k^n , \dot{x}_k^n e utilizzando (4.3) e (4.4). Otteniamo

$$| I_{vinc}(\gamma') - I_{vinc}(\gamma) - \int_{t_1}^{t_2} \sum_{k=1,2,3} \sum_{n=1,\dots,N} \left(\frac{\partial L_{vinc}}{\partial x_k^n} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L_{vinc}}{\partial \dot{x}_k^n} \right) h_k(t) \zeta_k^n dt | = o(\|h\|) \quad 4.5$$

Ogni funzione $\zeta(t)$ a valori vettoriali puó essere scelta in (4.5).

Dall'ipotesi $(DI_{vinc}^L)(\gamma) = 0$ si deduce allora che la funzione $F^{V,\gamma}$ a valori vettoriali, di componenti definite da

$$F_k^{V,\gamma} \equiv \left(\frac{\partial L_{vinc}}{\partial x_k^n} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L_{vinc}}{\partial \dot{x}_k^n} \right)_{x_k^n=x_k^n(t), y_k^n=y_k^n(t)} \quad 4.6$$

(dove γ é la traiettoria $x_k^n(t) \equiv x_k^n(q(t), t)$, $y_k^n(t) \equiv y_k^n(q(t), \dot{q}(t), t)$) rappresenta per ogni $t_1 \leq t \leq t_2$ un vettore in R^{3N} perpendicolare a Σ_t nel punto di coordinate naturali $x_k^n(t)$.

La forza di vincolo $F^{V,\gamma}(t)$ cosí definita dipende dalla traiettoria γ e quindi per ogni t_1 dai dati "iniziali" $q(t_1), \dot{q}(t_1)$, e quindi in particolare da $q(t), \dot{q}(t)$.

Ne concludiamo che le forze di vincolo cosí ottenute *non dipendono solo dalla configurazione del sistema soggetto a vincoli* e quindi *non esiste in generale un campo di forze $F(x, t)$ tale che si ha che si abbia $F^{V,\gamma}(x, t) = F^V(x, t)$.*

Utilizzando (4.1) si ha allora, per definizione di $F^{V,\gamma}$

$$m_n \ddot{x}^n(t) = F_n(t) + F_n^{V,\gamma}(t) \quad t_1 \leq t \leq t_2 \quad 4.7$$

e inoltre $F^{V,\gamma}(t)$ é per ogni t perpendicolare a $\Sigma(t)$ $t, t_1 \leq t \leq t_2$

Dunque la traiettoria considerata dá una soluzione delle equazioni di Newton supplementate dal principio di d'Alembert.

Sotto naturali condizioni di regolaritá le equazioni di Newton-d'Alembert hanno una soluzione unica per ogni scelta di dati iniziali compatibili con il vincolo.

Ne segue che la traiettoria considerata é la soluzione del sistema di equazioni di Newton-d'Alembert con dati iniziali

$$x(t_1) = x(q(t_1), t_0), \quad \dot{x}(t_1) = \dot{x}(q(t), \dot{q}(t), t)|_{t=t_1} \quad 4.8$$

(questi dati sono compatibili con il vincolo poiché per costruzione $\dot{x}(t_1)$ é tangente in $x(t_1)$ a $\Sigma(t_1)$).

Reciprocamente, supponiamo che $\{x_n(t), F_n^{V,\gamma}(t)\}$ siano una soluzione del problema di Cauchy per le equazioni di Newton - d'Alembert, con dati iniziali $x_0(t_1), \dot{x}_0(t_1)$.

Notare che questo problema di Cauchy porta sia alla determinazione della traiettoria che delle forze di vincolo in ogni punto della traiettoria.

Dunque vale (4.7) per un'opportuna funzione a valori vettoriali $F_n^{V,\gamma}$ che per ogni t e per ogni γ individua un vettore in R^{3N} il quale é perpendicolare alla superficie di vincolo nel punto di coordinate $x_k^n(t)$ (Principio di d'Alembert).

Da (4.7) si deduce allora che, per ogni $t_1 \leq t \leq t_2$ il vettore $m_n \ddot{x}_k^n(t) - F_k^n(t)$ é perpendicolare a $\Sigma(t)$ nel punto di coordinate $x_k^n(t)$.

Ne consegue, attraverso (4.7), che se sulle funzioni a valore in R^N che soddisfano

$$x(t_1) = x_0(t_1) \quad x(t_2) = x_0(t_2) \quad x(t) \in \Sigma(t) \quad \forall t \quad 4.9$$

si definisce il funzionale d'Azione I_{vinc} come in (4.5), si ha

$$|I_{vinc}^L(\gamma') - I_{vinc}^L(\gamma)| = o(\|h\|) \quad 4.10$$

Infatti per ogni $h \in \mathcal{M}_0$ esiste una funzione a valori vettoriali di componenti $\zeta_k^n(t)$, tangente a $\Sigma(t)$ nel punto di coordinate $x_k^n(t)$ e che soddisfa (4.8).

Dunque (4.10) vale per ogni $h \in M_0$, e quindi $(DI_{vinc}^L)_\gamma = 0$.

Questo conclude la dimostrazione della Proposizione 4.1.

♡

Nota 4.2

Conviene notare esplicitamente che lo spostamento *virtuale* $\delta_k^n(h)(t_0)$ all'istante t_0 entra in modo naturale nella formulazione in coordinate locali del principio variazionale di Eulero-Lagrange per sistemi soggetti a vincoli olonomi bilateri.

♣

Nota 4.3

E' importante notare che attraverso il formalismo di Lagrange e i Principi Variazionali abbiamo anche dedotto la forma *esplicita* (4.6) delle forze di vincolo. Questo é utile nelle applicazioni perché permette di valutare l'applicabilità del formalismo.

Ad esempio nel caso in cui il sistema rappresenti un punto materiale di massa m non soggetto a forze ma vincolato a muoversi su una circonferenza di raggio $R(t)$ la lagrangiana vincolata scritta in coordinate polari é, indicando con η un vettore tangente alla circonferenza di raggio $R(t)$, con θ la coordinata sulla circonferenza e con $\zeta(\theta)$ la normale alla circonferenza diretta verso l'esterno

$$L_{vinc}(\theta, \eta) = \frac{1}{2}m[\eta + \dot{R}(t)\zeta]^2 = \frac{1}{2}m\eta^2 + \frac{1}{2}\dot{R}(t)^2$$

Il punto rappresentativo si muove quindi liberamente sulla circonferenza (l' unica forza present é la forza di vincolo che é perpendicolare al vincolo).

Il moto del punto rappresentativo é descritto da

$$x_1(t) = R(t)\cos(\omega_0 t) \quad x_2(t) = R(t)\sen(\omega_0 t) \quad 4.11$$

La forza di vincolo é in questo caso il vettore di componenti cartesiane $F_1^V(t), F_2^V(t)$ date da

$$F_k^V(t) = m \frac{d^2 x_k}{dt^2} \quad 4.12$$

dove $x_k(t)$ é data da (4.11).

La forza di vincolo dipende dunque sia dalla posizione del punto rappresentativo che dalla sua velocità sul vincolo.



COSTANTI DEL MOTO COME VINCOLI ANOLONOMI

Supponiamo che, quando si descriva una lagrangiana L in coordinate q_1, \dots, q_N risulti che L non dipende da una delle coordinate, che senza perdita di generalità assumiamo essere q_N .

In questo caso diremo che la coordinata q_N é *ciclica* (per la lagrangiana considerata).

Si ha allora per definizione

$$\frac{\partial L}{\partial q_N} = 0 \quad 4.13$$

e si deduce dalle equazioni di Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_N} = 0 \quad 4.14$$

e quindi

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_N} = C_N = \text{costante} \quad 4.15$$

Ad ogni variabile ciclica corrisponde dunque una costante del moto.

Discuteremo in generale questa corrispondenza nella Lezione 5. In quel contesto chiameremo *momento coniugato a q_N* la funzione $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_N}$.

La (4.15) si traduce quindi nell'affermazione che i momenti coniugati a variabili cicliche sono costanti del moto.

Notiamo che la (4.15) é una relazione a-priori che la scelta del dato iniziale determina tra coordinate e velocità. Si tratta pertanto di un vincolo che é *anolonomo* (bilatero) poiché il termine a sinistra nella (4.15) dipende da posizione e velocità.

In particolare se l'energia cinetica é quadratica nelle velocità la legge di conservazione assume la forma

$$\dot{q}_N = F(C_N, q_1, \dots, q_{N-1}, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_{N-1}) \quad 4.16$$

Risulta quindi naturale considerare il sistema di equazioni che si ottiene utilizzando la (4.15) nelle equazioni di Lagrange per il sistema da cui siamo partiti .

La difficoltà che si incontra é che il sistema così ottenuto é lagrangiano in generale *ma la sua lagrangiana non si ottiene dalla lagrangiana di partenza utilizzando* (4.16) .

Descriveremo nella Lezione 5 un metodo, dovuto a Routh, mediante il quale é possibile utilizzare la costante del moto (4.15) per ricondurre il problema allo studio di un sistema *lagrangiano* che ha un grado di libertà in meno.

Conviene quindi notare esplicitamente che per un vincolo anolonomo *non si può procedere come nel caso di vincoli olonomi* per dedurre le equazioni di Lagrange per il sistema vincolato.

Per vedere questo, supponiamo che sia possibile invertire la (4.15) e scrivere esplicitamente

$$\dot{q}_N = \dot{q}_N(q_1, \dots, q_{N-1}, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_{N-1}, t) \quad 4.16$$

La sostituzione di (4.16) nella Lagrangiana produce una funzione delle $q_1, \dots, \dot{q}_{N-1}$ e del tempo *che non rappresenta* la Lagrangiana L_{vinc} del sistema vincolato.

Questo é dovuto al fatto che le derivate parziali rispetto alle q_k e rispetto alle η_k entrano in modo diverso nelle equazioni di Lagrange.

Un semplice esempio farà luce sull'errore che si commette sostituendo direttamente (4.15) nella lagrangiana e procedendo come nel caso di vincoli olonomi.

Per il moto di un punto fisso di massa 1 in un piano, sottoposto ad una forza centrale di energia potenziale $U(|x|)$ la lagrangiana, scritta in coordinate cilindriche, ha la forma

$$L(\rho, \theta, \dot{\rho}, \dot{\theta}) = \frac{1}{2} [\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\theta}^2] - U(\rho) \quad 4.17$$

La coordinata θ é ciclica, dunque si conserva la quantità (momento angolare)

$$l \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \rho^2 \dot{\theta} \quad 4.18$$

La sostituzione di questa espressione di l nella lagrangiana darebbe la funzione

$$L' = \frac{1}{2} [\dot{\rho}^2 + l^2 \rho^{-2}] - U(\rho) \quad 4.19$$

D'altra parte sappiamo che la legge di conservazione dell'energia, unitamente alla conservazione del momento angolare, implica che viene conservata la funzione energia:

$$E = \frac{1}{2} [\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\theta}^2] + U(\rho) = \frac{1}{2} [\dot{\rho}^2 + \rho^{-2} l^2] + U(\rho)$$

e questa é la legge di conservazione dell'energia per il moto descritto dalla Lagrangiana

$$L'' \equiv \frac{1}{2} [\dot{\rho}^2 - l^2 \rho^{-2}] - U(\rho) \quad 4.20$$

Confrontando L'' con L' si vede che le identità corrispondenti ai vincoli anolonomi *non possono essere utilizzate direttamente nella lagrangiana*.

Lezione 5. METODO DI ROUTH. PRINCIPIO DI MAUPERTUIS

Consideriamo un sistema dinamico con N gradi di libertà descritto da una lagrangiana L indipendente dal tempo definita su una varietà $T\Sigma$.

In questa Lezione ci limiteremo a considerare il caso $\Sigma \equiv R^N$. Tutti i risultati valgono, in generale solo localmente, per una varietà qualunque .

Supponiamo che quando si utilizzano le coordinate $q_1, \dots, q_N, \eta_1 \dots \eta_N$ risulti che L non dipende da una delle coordinate *nello spazio delle configurazioni*, che senza perdita di generalità assumiamo essere q_N .

In questo caso diremo che la coordinata q_N è *ciclica* .

Si ha allora per costruzione

$$\frac{\partial L}{\partial q_N} = 0 \quad 5.1$$

e si deduce dalle equazioni di Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_N} = 0 \quad 5.2$$

e quindi definendo

$$p_N(q_1, \dots, q_{N-1}, \eta_1, \dots, \eta_N) \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_N} \quad 5.3$$

risulta che la funzione p_N assume valore costante lungo le traiettorie del sistema. In breve, diremo che è una costante del moto.

Ad ogni variabile ciclica corrisponde dunque una costante del moto (solo locale se le equazioni sono scritte in coordinate locali).

Discuteremo in generale questa corrispondenza tra variabili cicliche e costanti del moto nella prossima Lezione.

Vogliamo notare qui che $p_N = \text{cost} = C$ è una relazione a-priori che *la scelta del dato iniziale* induce tra le coordinate $q_1, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N$.

Si tratta di un vincolo *anolonomo*, poiché la funzione p_N dipende da posizione e velocità.

Abbiamo visto alla fine della Lezione precedente che nel caso di vincoli anolonomi la riduzione dei gradi di libertà *non può essere fatta* seguendo il procedimento adottato nel caso di vincoli olonomi.

Nel caso particolare in cui questa costante del moto ha origine dal fatto che una variabile è ciclica nelle lagrangiana , è possibile utilizzare la costante del moto (5.3) per ricondurre il problema allo studio di un sistema *lagrangiano* che ha *un grado di libertà in meno* mediante un procedimento che è stato descritto da Routh.

IL METODO DI ROUTH

Questo è un procedimento che permette di ridurre lo studio di un sistema lagrangiano in cui sia presente una coordinata ciclica allo studio di un altro sistema lagrangiano con un grado di libertà in meno.

Risulterà evidente dalla costruzione che faremo che il metodo si applica anche quando alcune delle equazioni di Lagrange hanno la forma

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = F_k(q) \quad 5.4$$

dove F_k è la k^{ma} componente di una forza che dipende solo dalle coordinate di posizione.

Supponiamo che la variabile q_N sia ciclica per il sistema descritto nelle coordinate q_1, \dots, q_N dalla lagrangiana $L(q_1, \dots, q_{N-1}, \eta_1, \dots, \eta_N)$.

In questo caso $p_N \equiv \frac{\partial L}{\partial \eta_N}$ é una funzione che assume valore costante lungo il moto del sistema del moto quando si ponga $\eta_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$.

Se, come avviene nel caso di sistemi newtoniani, $\frac{\partial^2 L}{\partial \eta_N^2} \neq 0$, si puó esprimere (almeno localmente) η_N in funzione di p_N e delle rimanenti variabili

$$\eta_N = F(q_1, \dots, q_{N-1}, \eta_1, \dots, \eta_{N-1}; p_N) \quad 5.5$$

per oportuna funzione F .

Abbiamo già notato che *si commetterebbe un errore* sostituendo questa espressione al posto di η_N nella lagrangiana del sistema e considerando l'espressione risultante come lagrangiana del sistema ridotto.

La lagrangiana del sistema ridotto si ottiene invece con il seguente procedimento.

Per le traiettorie del sistema lagrangiano con lagrangiana L tali che su di esse la funzione F assuma il valore C poniamo

$$L_C(q_1, \dots, q_{N-1}, \eta_1, \dots, \eta_{N-1}) \equiv [L(q_1, \dots, \eta_N) - C\eta_N] \quad 5.6$$

dove η_N é definita da (5.5) con $p_N = C$.

Notiamo che la lagrangiana *ridotta* L_C dipende da $q_k, \eta_k, k = 1 \dots N - 1$ ed *esplicitamente* dal valore C della funzione F .

Dalle equazioni di Lagrange segue che la (5.6) provvede la corretta dipendenza dal tempo di \dot{q}_N purché la variazione nel tempo delle altre coordinate sia descritta dalla Lagrangiana L_C .

Nel verificare quest'affermazione *bisogna notare che la definizione di derivata parziale* $\frac{\partial}{\partial q_k}$ nella scrittura delle equazioni di Lagrange nel caso della Lagrangiana L risulta *diversa* dal caso della Lagrangiana L_C .

Con il simbolo $\frac{\partial L}{\partial q_1}$ si intende il limite del rapporto incrementale ottenuto *senza alterare il valore numerico di* $q_2, \dots, q_{N-1}, \eta_1, \dots, \eta_N$.

Mentre con $\frac{\partial L_C}{\partial q_1}$ indichiamo il limite del rapporto incrementale ottenuto *senza alterare il valore numerico di* $q_2, \dots, q_{N-1}; \eta_1, \dots, \eta_{N-1}, p_N$.

Poiché p_N dipende in generale esplicitamente dalle q_k , le due operazioni *non coincidono in generale*.

Nel calcolare la derivata parziale rispetto a q_1 per p_N costante sarà quindi necessario tener conto della dipendenza di η_N da q_k quando p_N sia tenuto costante.

Si ha allora, da (5.6) utilizzando la regola di derivazione di funzione composta, per $k = 1, \dots, N - 1$

$$\frac{\partial L_C}{\partial q_k} = -p_N \frac{\partial f}{\partial q_k} + \frac{\partial L}{\partial \eta_N} \frac{\partial f}{\partial q_k} + \frac{\partial L}{\partial q_k} = \frac{\partial L}{\partial q_k} \quad 5.7$$

Nell'ultima identità abbiamo utilizzato la definizione di p_N .

Analogamente avremo per $k = 1, \dots, N - 1$

$$\frac{\partial L_C}{\partial \eta_k} = -p_N \frac{\partial f}{\partial \eta_k} + \frac{\partial L}{\partial \eta_N} \cdot \frac{\partial f}{\partial \eta_k} + \frac{\partial L}{\partial \eta_k} = \frac{\partial L}{\partial \eta_k} \quad 5.8$$

Per ipotesi le traiettorie del sistema verificano

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \eta_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0, \quad k = 1, \dots, N - 1, \quad \eta_k = \frac{dq}{dt} \quad 5.9$$

e si avrà dunque identicamente

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L_C}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L_C}{\partial q_k} = 0, \quad k = 1, \dots, N - 1 \quad 5.10$$

che sono precisamente le equazioni di Lagrange per la lagrangiana

$$L_C(q_1, \dots, q_{N-1}, \eta_1, \dots, \eta_{N-1}) \quad 5.11$$

Nota 5.1

La lagrangiana $L_C(q_1, \dots, q_{N-1}; \eta_1, \dots, \eta_{N-1})$ descrive correttamente il moto solo per i dati iniziali in corrispondenza ai quali funzione $\frac{\partial L}{\partial \eta_N}$ (che é costante lungo il moto se si pone $\eta = \dot{q}_N$) assume il valore C .



Nota 5.2

Dalla dimostrazione data sopra risulta evidente che, ponendo

$$L_1 \equiv L(q_1, \dots, \eta_N, t)_{\eta_N=f(q_1, \dots, p_N)} \quad 5.12$$

(cioé omettendo in (5.6) il secondo termine) le traiettorie del sistema *non sono soluzione delle equazioni di Lagrange con lagrangiana L_1* .



IL PRINCIPIO DI MAUPERTIUS

Abbiamo visto che nel formalismo lagrangiano se una variabile é ciclica il sistema puó essere descritto da una famiglia di lagrangiane che descrivono sistemi che hanno un grado di libertá in meno del sistema di partenza.

Possiamo porci il problema se un risultato analogo si possa dedurre se si assume che la lagrangiana non dipenda dal tempo. Il tempo essendo un parametro e non una coordinata lagrangiana, la risposta é ovviamente negativa.

Si puó invece cercare di sviluppare in formalismo i cui il tempo possa essere trattato come coordinata, e ammetta una coordinata *duale* nel senso in cui i momenti $p_k = \frac{\partial L}{\partial q_k}$ sono duali alle coordinate nel formalismo lagrangiano.

Discuteremo brevemente il principio di Maupertius, che ha avuto un ruolo storicamente importante (é attraverso questo principio che Lagrange ha ottenuto le equazioni che portano il suo nome).

Il principio variazionale da cui abbiamo dedotto le equazioni di Lagrange é stato introdotto successivamente da Hamilton.

Il principio di Maupertius é un principio variazionale per un funzionale sullo spazio delle traiettorie a energia costante e come tale viene ad esempio utilizzato per studiare l'esistenza di soluzioni periodiche su superfici di energia costante.

Inoltre il principio di Maupertius provvede una formulazione dei principi variazionali della meccanica classica che presenta delle similitudini con il principio di Fermat dell'ottica geometrica (la luce segue il cammino di minima lunghezza ottica).

Anche questo ha avuto importanza dal punto di vista storico, poiché Hamilton ha sviluppato la teoria delle trasformazioni canoniche partendo dalle proprietá dei cammini di luce in ottica geometrica.

Dedurremo il principio di Maupertius a partire dal principio di Hamilton; storicamente, é avvenuto l'inverso.

Considereremo solo sistemi meccanici, cosí che la lagrangiana é la differenza tra energia cinetica (quadratica nelle velocitá) ed energia potenziale.

Consideriamo una lagrangiana L che non dipende dal tempo.

Il corrispondente sistema dinamico é dunque conservativo ed é costante del moto l'energia.

Calcolando la derivata della lagrangiana lungo la traiettoria e utilizzando le equazioni di Lagrange

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \sum_n \frac{\partial L}{\partial q_n} \dot{q}_n + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} \ddot{q}_n = \\ &= \sum_n \dot{q}_n \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} \ddot{q}_n = \frac{d}{dt} \left[\sum_n \dot{q}_n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} \right] \end{aligned} \quad 5.13$$

Ne segue

$$\frac{d}{dt} \left[\sum_n \dot{q}_n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} - L \right] = 0 \quad 5.14$$

Per una generica lagrangiana L indipendente dal tempo é quindi costante lungo il moto la quantitá

$$E(q, \dot{q}) = \sum_{n=1}^N \dot{q}_n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} - L \quad 5.15$$

a cui si dá il nome di *energia totale del sistema*.

Nel caso particolare in cui la Lagrangiana é data da $L = T - U$ dove T é quadratico omogeneo nelle velocitá e U dipende solo dalle variabili q , per il teorema di Eulero sulle funzioni si ha

$$\sum_n \dot{q}_n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} = 2T$$

e quindi l'energia totale del sistema é $T + U$.

Si puó notare che la conservazione dell'energia é conseguenza del fatto che il parametro t non appare nella lagrangiana. E che la conservazione dell'energia induce una relazione a priori tra le coordinate e le velocitá, quindi *un vincolo bilatero anolonomo*.

Tuttavia t non é una coordinata e quindi il metodo di Routh non é direttamente applicabile. Per poterlo applicare, introduciamo invece del tempo un parametro τ che parametrizza le traiettorie (in ottica geometria é il cammino ottico).

In seguito t verrá interpretato come coordinata (che non appare nella lagrangiana) e il suo momento coniugato sará l'energia (che é quindi conservata).

In questo procedimento t viene riguardato come funzione di τ (notiamo che in generale la dipendenza esplicita é diversa per traiettorie che corrispondono a soluzioni diverse delle equazioni di Lagrange).

Il parametro τ sará scelto come funzione di $x_1 \dots x_N, t$ in modo tale da formulare il principio di minima azione lagrangiana come principio di minima azione relativamente ad una nuova azione lagrangiana in cui l'integrale viene effettuato rispetto al parametro τ tra estremi fissati. Le traiettorie cosí costruite risultano essere traiettorie ad energia costante.

Ponendo

$$q'_k \equiv \frac{dq_k}{d\tau}, \quad t' \equiv \frac{dt}{d\tau} \quad 5.16$$

la lagrangiana ha la forma

$$L \left(q_1, \dots, q_N, \frac{q'_1}{t'}, \dots, \frac{q'_N}{t'} \right) \equiv \tilde{L}(q, q', t') \quad 5.17$$

Il funzionale d'Azione sará dunque dato da

$$I(\gamma) = \int_{\tau_1}^{\tau_2} L'(q_1(\tau), \dots, q_N(\tau), q'_1(\tau) \dots q'_N(\tau), t'(\tau)) d\tau, \quad L' = \tilde{L} \frac{dt}{d\tau} \quad 5.18$$

Notiamo che nella lagrangiana L' appare la variabile t (che può essere riguardata come una coordinata) attraverso la sua derivata $t' \equiv \frac{dt}{d\tau}$ ma non il parametro τ .

Il momento lagrangiano coniugato alla coordinata t' è

$$p_{t'} \equiv \frac{\partial L'}{\partial t'} = L - \sum_n \dot{q}_n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} = E \quad 5.19$$

Scegliendo il parametro τ in modo che valga l'identità

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial t'} = 0 \quad 5.20$$

possiamo applicare il metodo di Routh e scrivere una lagrangiana \bar{L} che dipende solo dalle q , dalle q' e dall'energia E .

Si ottiene

$$\bar{L} \equiv L' - t' p_{t'} = (L - p_{t'}) t' = L - \sum_n \dot{q}_n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} = t' \sum_n \dot{q}_n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} \quad 5.21$$

Il principio variazionale relativo a questa lagrangiana farà riferimento alla nuova azione

$$\bar{A} \equiv \int_{\tau_1}^{\tau_2} L' d\tau = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sum_k p_k \dot{q}_k t' d\tau \quad 5.22$$

Nel caso in cui la Lagrangiana ha la forma $L = T - U$ dove U non dipende dalle velocità e T è quadratica omogenea nelle velocità, il funzionale di Maupertius \bar{A} ha la forma

$$\bar{A} = 2 \int_{\tau_1}^{\tau_2} T t' d\tau \quad 5.23$$

Con queste notazioni il Principio di Maupertius è:

PRINCIPIO DI MAUPERTIUS

Tra tutte le traiettorie considerate, le soluzioni di energia E delle equazioni di Newton sono quelle che rendono \bar{A} stazionario.

◇

Dimostreremo questo principio dimostrando che esso è equivalente al principio variazionale di Hamilton. Notare che in (5.23) non si può sostituire $t' d\tau$ con dt poiché t non è una variabile indipendente.

La sua relazione con τ è condizionata dal fatto che, per applicare il metodo di Routh, abbiamo assunto che l'energia abbia valore costante.

In particolare, nel principio variazionale relativo alla lagrangiana \bar{L} le variazioni devono essere fatte su una classe di traiettorie per le quali le variabili q assumono gli stessi valori agli estremi del dominio di integrazione, e quindi in corrispondenza ai valori τ_1 e τ_2 del parametro τ .

Il valore che su ciascuna traiettoria assume la variabile t in corrispondenza a questi valori dei parametri è determinato dalla condizione che l'energia assuma valore costante.

Nota 5.3

È importante sottolineare che la condizione che l'energia abbia valore costante su tutte le traiettorie considerate non è una limitazione sulle traiettorie ma solo sulla dipendenza della variabile t dal parametro τ , e in particolare sul valore della variabile t in corrispondenza agli estremi τ_1 e τ_2 .

♣

Per mettere in evidenza l'analogia con il principio di Fermat dell'ottica geometrica (in ogni mezzo materiale la luce segue il cammino di minima lunghezza ottica) consideriamo il caso in cui $L = T - U$ e scriviamo l'energia cinetica T nella forma

$$T = \frac{1}{2} \left(\frac{\bar{d}s}{dt} \right)^2 \equiv \frac{1}{2} \sum_k \left(\frac{dq_k}{dt} \right)^2 \quad 5.24$$

Abbiamo posto una barra su ds per ricordare che non si tratta in generale del differenziale di una funzione ma solo di un simbolo.

Notiamo ora che

$$\left(\frac{\bar{d}s}{dt} \right)^2 = \left(\frac{\bar{d}s}{d\tau} \right)^2 \frac{1}{(t')^2}$$

così che

$$t' = \frac{1}{2\sqrt{E-U}} \frac{\bar{d}s}{d\tau}$$

da cui si deduce

$$\bar{A} = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sqrt{2(E-U)} \frac{\bar{d}s}{d\tau} d\tau = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sqrt{2(E-U)} \bar{d}s \quad 5.25$$

Per un punto materiale ($N = 3$) il principio di Maupertius ha dunque una notevole somiglianza con il principio di Fermat, quando si consideri $\sqrt{2(E-U)}$ come indice di rifrazione del mezzo e si consideri τ come lunghezza ottica (conviene sottolineare che nel principio di Maupertius il parametro τ non è il tempo).

Si ha

Proposizione 5.2

Il Principio variazionale di Maupertius è equivalente al Principio variazionale di Hamilton.

◇

Dalla derivazione del funzionale \bar{A} mediante il metodo di Routh segue che i punti critici del funzionale d'Azione sono anche punti critici del funzionale di Maupertius \bar{A} .

La dimostrazione del converso è più laboriosa e richiede l'utilizzo di tecniche di punti critici condizionati.

Non la daremo qui.

Lezione 6. TRASFORMAZIONE DI LEGENDRE, EQUAZIONI DI HAMILTON,

Se $L(q, \eta, t)$ é la Lagrangiana di un sistema con N gradi di libert , ponendo

$$p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \eta_i} \quad i = 1, \dots, N$$

le equazioni di Lagrange assumono la forma

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad \dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad i = 1 \dots N \quad 6.1$$

Per definizione p_i é il *momento* coniugato alla coordinata q_i (rispetto alla lagrangiana L .)
Per un sistema di n punti materiali in R^3 di massa m_k soggetti a forze potenzial con potenziale $V(X, t)$ la Lagrangiana ha la forma

$$L = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k |\dot{x}_k|^2 + V(X, t)$$

e quindi $p^k = m_k \dot{x}^k$, $x^k \in R^3$. In questo caso il *momento* coincide con la *quantit  di moto*.
Ma la definizione di *momento* come variabile lagrangiana vale in generale.

E' ovvio che il sistema di equazioni (6.1) *non é simmetrico* nelle variabili q e p .

Per ottenere una formulazione pi  simmetrica, conviene procedere scrivendo le relazioni tra momenti e velocit  nella forma $\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}$ per un'opportuna funzione H .

Serve a questo scopo la *trasformazione di Legendre* che ora descriviamo.

Se questa trasformazione viene effettuata indipendentemente in ciascun punto dello spazio delle configurazioni *viene meno la relazione cinematica* tra q e p

Vedremo che questo permette di formulare la dinamica come descritta da equazioni differenziali *del prim'ordine nel tempo* tra le variabili $q_1 \dots q_N, p_1, \dots p_N$.

La struttura che viene cos  composta (equazioni di Hamilton) é definita in un spazio di dimensioni $2N$ *che non é il fibrato tangente* e pertanto le trasformazioni di coordinate che si possono eseguire in questo spazio differiscono da quelle finora viste nel formalismo lagrangiano.

Vedremo che questa struttura ha un'interessante interpretazioni geometrica (geometria симплекtica)

E' interessante notare che la trasformazione di Legendre é anche quella trasformazione che connette le diverse forme delle equazioni di stato in termodinamica, facendo passare da un potenziale termodinamico all'altro.

Per comprendere la struttura della trasformazione di Legendre consideriamo inizialmente il caso di una funzione *convessa* $F(x)$ della variabile reale x .

Assumiamo che F sia due volte derivabile con derivata seconda continua. Poniamo

$$y(x) \equiv \frac{dF}{dx} \quad 6.2$$

Poich  F é convessa, sar  $\frac{d}{dx} \left(\frac{dF}{dx} \right) > 0$ e quindi é applicabile il teorema della funzione implicita, in modo da ottenere x come funzione di y (indicheremo questo con la notazione $x(y)$).

Definiamo la seguente funzione di variabile reale

$$G(y) \equiv yx(y) - F(x(y)) \quad 6.3$$

Vogliamo dimostrare che la relazione (6.2) é equivalente a

$$x(y) = \frac{dG}{dy} \quad 6.4$$

Per dimostrare che vale questa relazione di dualitá introduciamo una nuova variabile indipendente z e consideriamo x (e quindi y) come funzione differenziabile di z .

La (6.3) é allora scritta

$$G(y(z)) = y(z) \cdot x(z) - F(x(z))$$

da cui, differenziando rispetto a z

$$\left(\frac{dG}{dy} - x\right) \frac{dy}{dz} = \left(\frac{dF}{dx} - y\right) \frac{dx}{dz} \quad 6.5$$

Scegliendo in ciascun punto la parametrizzazione in modo che

$$\frac{dx}{dz} \neq 0 \neq \frac{dy}{dz} \quad 6.6$$

segue da (6.5) che (6.2) e (6.4) sono equivalenti.

Da (6.5) si deduce anche

$$\frac{dx}{dy} \neq 0 \neq \frac{dy}{dx}$$

e da (6.2) e (6.4) si ha

$$\frac{d^2 f}{dx^2} \neq 0 \neq \frac{d^2 g}{dy^2}$$

Queste considerazioni possono essere estese senza difficoltá al caso di funzioni convesse su R^N a valori reali, di classe C^2 .

Se F é strettamente convessa e di classe C^2 , posto

$$y_k \equiv \frac{\partial F}{\partial x_k}, \quad k = 1 \dots N \quad 6.7$$

definiamo G nel seguente modo

$$G(y) \equiv \sum_{k=1}^N y_k \cdot x_k(y) - F(x(y)) \quad 6.8$$

dove $x(y)$ é l'espressione di x in funzione di y che si ottiene invertendo (6.7).

Si ha allora

$$x_k = \frac{\partial G}{\partial y_k} \quad 6.9$$

In questa definizione l'ipotesi di convessitá é stata utilizzata per garantire che (6.7) sia invertibile per ogni valore di x .

Infatti se F é strettamente convessa la matrice $\frac{\partial^2 F}{\partial x_k \partial x_h}$ é definita positiva, e quindi invertibile, e si puó far uso del teorema della funzione implicita (questa volta per funzioni a valore in R^N).

La funzione G é detta *trasformata di Legendre* della funzione F .

Notare che in questo modo la trasformazione di Legendre é definita solo per funzioni per cui $\frac{\partial^2 F}{\partial x_k \partial x_h}$ é invertibile ovunque.

Noi considereremo solo il caso in cui F é convessa.

Poiché (6.8) é simmetrica per lo scambio $x \leftrightarrow y$, $F \leftrightarrow G$ si vede che F é la trasformata di Legendre di G .

Dunque la trasformazione di Lagrange stabilisce una *dualità* tra le funzioni F e G .

Si può notare che per ogni $y \in R^N$ la funzione G definita in (6.8) é convessa se F é convessa.

Infatti la matrice

$$\frac{\partial^2 G}{\partial y_m \partial y_k}(y) \quad m, k = 1 \dots N$$

é l'inversa della matrice

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_k \partial x_m}(x(y)) \quad m, k = 1 \dots N$$

La definizione di trasformazione di Legendre può essere generalizzata nel caso la funzione F sia convessa ma non necessariamente continua, e abbia valori in $(-\infty, +\infty]$.

La definizione che riportiamo qui di seguito, e che é quella che si trova in generale nei testi di analisi, é equivalente a quella data qui sopra nel caso di funzioni di classe C^2 su R^N .

Essa vale anche se la funzione é definita su spazi metrici separabili di dimensione infinita, in particolare su spazi di funzioni.

Inoltre sottolinea meglio il carattere geometrico della trasformazione di Legendre e il ruolo giocato dalla convessità.

Nota 6.1

Una funzione su R^N é detta essere *convessa* se in ciascun punto x il grafico della funzione giace da una stessa parte di un iperpiano passante per x .

E' *strettamente convessa* se per ogni x non vi sono altri punti di contatto con l'iperpiano e il grafico non é asintotico ad alcuna retta.

Ad esempio, per ogni $a \in R^N$ il prodotto scalare (a, x) é una funzione convessa ma non strettamente convessa.

La nozione di convessità di una funzione può essere estesa a funzioni su qualunque varietà Σ stabilendo che una funzione di classe C^2 é convessa se la sua matrice hessiana $H(x)$, $x \in \Sigma$ é non negativa in ogni punto x , ed é strettamente convessa se esiste una costante positiva c tale che $H(x) > cI$, $\forall x$.

La matrice hessiana definisce una forma quadratica sul fibrato tangente; é pertanto possibile definire in ogni punto P della varietà una trasformazione di Legendre da funzioni definite in P sullo spazio tangente a funzioni definite in P su uno spazio duale che verrà chiamato *spazio cotangente*.

La collezione di questi spazi, ciascuno assegnato ad un punto della varietà e incollati insieme in modo (localmente) differenziabile, prende il nome di *fibrato cotangente*.

La trasformazione di Legendre é conseguentemente in questo caso un'applicazione dalle funzioni sul fibrato tangente alle funzioni sul fibrato cotangente che lascia invariante la base (i punti sulla varietà Σ).

Riprenderemo questo argomento quando tratteremo il formalismo di Hamilton.



Generalizziamo ora la definizione di trasformata di Legendre

Ad ogni funzione $F(x)$ convessa, non necessamente continua o differenziabile, a valori in $(-\infty, +\infty]$ associamo una funzione $G(y)$ su R^N , a valori nello stesso insieme, mediante la definizione

$$G(y) \equiv \sup_{x \in R^N} [(y, x) - F(x)] \quad 6.10$$

dove (y, x) é il prodotto scalare in R^N .

Questa definizione ha la seguente interpretazione geometrica.

Si consideri il grafico di $F(x)$ e, per ogni $y \in R^N$ si costruisca l'iperpiano π_y che é il grafico della funzione lineare $l_y(x) \equiv (y, x)$ (se $N=1$ si tratta della retta di coefficiente angolare y). Allora $G(y)$ definita in (6.10) é la distanza massima (con segno) tra π_y e il grafico di $F(x)$.

Nota 6.2

Se la funzione $F(x)$ é di classe C^2 la definizione (6.10) coincide con la (6.8).

Basta notare che, se F é convessa e regolare, il punto $x(y)$ in cui l'iperpiano π_y raggiunge la distanza massima dal grafico di F é quello in cui l'iperpiano tangente al grafico di F é parallelo a π_y , cosí che

$$y = (\nabla F(x))_{x(y)} \quad 6.11$$

♣

Verifichiamo che la (6.8) definisce un'involuzione.

Poiché (y, x) é lineare e $F(x)$ é convessa, la funzione $G(y)$ é convessa; la sua trasformata di Legendre $\hat{F}(x)$ puó dunque essere definita e si ottiene

$$\begin{aligned} \hat{F}(x) &= \sup_{y \in R^N} [(x, y) - G(y)] = \sup_{y \in R^N} [(x, y) - \sup_{z \in R^N} [(y, z) - F(z)]] = \\ &= \sup_{y \in R^N} (\inf_{z \in R^N} [(x, y) - (y, z) + F(z)]) \\ &= \inf_{z \in R^N} (\sup_{y \in R^N} [(x, y) - (y, z) + F(z)]) = \inf_{z \in R^N} (\sup_{y \in R^N} [(x, y) - (y, z)]) + F(z) \end{aligned} \quad 6.12$$

Se $z \neq x$ si ha che $\sup_{y \in R^N} [(x, y) - (y, z)] = +\infty$: dunque l'estremo inferiore in (6.12) deve corrispondere al valore x per la variabile z .

Quando $z = x$, il termine da rendere massimo come funzione di y é indipendente da y .

Dunque se F é continua nel punto x_0 l'estremo inferiore é raggiunto per $z = x_0$ e si ha $\hat{F}(x_0) = F(x_0)$.

Nota 6.3

Abbiamo notato che la trasformazione di Legendre puó essere definita anche per funzioni convesse ma non strettamente convesse.

In generale la corrispondente funzione trasformata assume valore $+\infty$ in in qualche punto.

Ad esempio la funzione convessa (ma non strettamente convessa)

$$F(x) \equiv (a, x), \quad a \in R^N$$

ha, come trasformata di Legendre, la funzione $G(y)$ definita da

$$G(y) = +\infty, \quad y \neq a, \quad G(a) = 0$$

♣

Utilizziamo ora la trasformazione di Legendre per scrivere in forma piú simmetrica le equazioni di Lagrange e per introdurre il formalismo di Hamilton. .

Nelle operazioni che compiremo le coordinate che rappresentano i punti dello spazio delle configurazioni giocano il ruolo di parametri mentre il ruolo delle x é tenuto da coordinate η che descrivono le velocità (le coordinate η sono dunque coordinate nel piano tangente a ciascun punto dello spazio delle configurazioni).

Non vi é allora perdita di generalitá nell'assumere che lo spazio delle configurazioni sia rappresentato localmente da R^N e lo spazio tangente in ogni punto (dell'intorno dato) sia rappresentato da R^N con coordinate η_i .

Sia dunque $L(q, \eta t)$, $q \in R^N$, $\eta \in R^N$ l'espressione della lagrangiana del sistema nelle coordinate scelte.

Abbiamo indicato con $\eta \equiv \{\eta_1, \dots, \eta_N\}$ le coordinate che entrano nella definizione di Lagrangiana per indicare esplicitamente che nel fare la trasformazione di Legendre trascureremo l'aspetto *cinematico* che ci porterebbe ad identificare η_i con \dot{q}_i .

Assumiamo che per ogni valore della coordinata q la funzione L sia convessa nelle variabili η . Questa condizione é soddisfatta in particolare per i sistemi meccanici poiché la dipendenza dalle η é solo attraverso l'energia cinetica e quindi quadratica .

Posto

$$p_k \equiv \frac{\partial L(q, \eta, t)}{\partial \eta_k} \quad 6.13$$

con inverso $\eta = \eta(q, p)$ (le variabili q giocano qui il ruolo di parametri) definiamo

$$H(q, p, t) \equiv \sum_k p_k \eta_k(q, p) - L(q, \eta(q, p), t) \quad 6.14$$

Si avrà allora

$$\eta_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}$$

(tutte le derivate parziali sono effettuate mantenendo costanti i valori dei parametri q).

Notiamo che le funzioni $L(q, \eta; t)$ e $H(q, p; t)$ come funzioni rispettivamente di η e p sono *funzioni duali nel senso della trasformata di Legendre* e che, attraverso (6.13), le p_k giocano il ruolo di coordinate nello spazio cotangente ad ogni punto della varietà Σ .

Sia $L = T - U$, dove T é quadratica omogenea nelle coordinate di velocità

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k,m} T_{k,m}(q) \eta_k \eta_m$$

(sia U che la matrice $T_{k,m}$ possono essere funzioni del tempo).

Abbiamo notato che *in questo caso* la coordinata η rappresenta la quantità di moto.

Se T dipende solo dalle velocità e U é indipendente dal tempo si ha

$$H(q, p) = \frac{1}{2} \sum_{k,m} (T^{-1})_{k,m} p_k p_m + U(q)$$

Nota 6.5

In ogni caso, $H(q, p(q, \dot{q}))$ é l'energia $E(q, \dot{q})$ del sistema, cioè la quantità che si conserva se la lagrangiana non dipende esplicitamente dal tempo.



Ponendo per ogni traiettoria $t \rightarrow q(t)$ in R^n

$$p_k(t) \equiv \left(\frac{\partial L}{\partial \eta_k} \right)_{q=q(t), \eta=\dot{q}(t)} \quad 6.15$$

si ha l'identità, *valida in ogni punto di ciascuna traiettoria*,

$$\dot{q}_k(t) = \frac{\partial H}{\partial p_k}((q(t), p(t))) \quad 6.16$$

Notare che la forma esplicita della (6.15) dipende dalla lagrangiana usata.

Dimostriamo ora che, se $q(t)$ soddisfa le Equazioni di Lagrange, allora vale in ciascun punto della traiettoria l'identità

$$\dot{p}_k(t) = -\frac{\partial H}{\partial q_k}((q(t), p(t))) \quad 6.17$$

Conviene sottolineare che la (6.17) non discende direttamente con un calcolo formale dalle (6.14) e dalle equazioni di Lagrange, poiché nelle equazioni di Lagrange la derivata parziale rispetto alle variabili q_k viene effettuata mantenendo costanti le \dot{q}_h , mentre in (6.17) la derivata parziale è effettuata mantenendo costanti le p_h .

Le due operazioni di derivata parziale dunque non coincidono, poiché le (6.15) devono rimanere delle identità in entrambi i casi.

Dobbiamo dunque verificare che

$$\frac{\partial H}{\partial q_k}_{p=cost} = -\frac{\partial L}{\partial q_k}_{\dot{q}=cost} \quad 6.18$$

La verifica si fa direttamente (una analogo verifica è già stata fatta nel corso dell'analisi del metodo di Routh):

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial H}{\partial q_m}\right)_{p=cost} &= \sum_k p_k \left(\frac{\partial \eta_k(q, p)}{\partial q_m}\right)_{p=cost} - \left(\frac{\partial L}{\partial q_m}\right)_{\dot{q}=cost} - \sum_k \left(\frac{\partial L}{\partial \eta_k}\right)_{p=cost} \left(\frac{\partial \eta_k}{\partial q_m}\right)_{\dot{q}=cost} = \\ &= -\left(\frac{\partial L}{\partial q_m}\right)_{\dot{q}=cost} \end{aligned} \quad 6.19$$

dove abbiamo utilizzato la definizione di p_k .

Definizione 6.1

La funzione $H(q, p; t)$ considerata come funzione delle q, p (ed eventualmente dal tempo, se L dipende dal tempo in modo esplicito) è detta *hamiltoniana* del sistema.

◇

Se $p(t)$ è definita da (6.13) (cioè per le traiettorie $\gamma \equiv (q(t), p(t))$ per le quali (6.13) è soddisfatta) la funzione $E(\gamma) = H(q(t), p(t), t)$ è invece detta *energia*; essa è conservata se la lagrangiana non dipende dal tempo.

Nota 6.5

Si può notare che il metodo di Routh può essere visto come una trasformazione di Lagrange parziale, fatta solamente rispetto a η_N se q_N è una variabile ciclica.

♣

EQUAZIONI DI HAMILTON

Notiamo che le (6.16), (6.17) sono delle identità soddisfatte precisamente lungo le traiettorie che sono soluzioni delle equazioni di Lagrange.

Se interpretiamo queste relazioni come equazioni, queste equazioni esse possono essere utilizzate per determinare le soluzioni delle equazioni di Lagrange e quindi il moto del sistema.

Le (6.16), (6.17) interpretate come equazioni per un sistema con N gradi di libertà

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k} \quad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k} \quad k = 1 \dots N \quad (6.20)$$

sono dette *equazioni di Hamilton*

Se esse hanno una sola soluzione (per una data scelta di dati iniziali) questa *coinciderá* dunque con la soluzione dell'equazione di Lagrange che corrisponde agli stessi dati iniziali.

La soluzione di (6.20) é una traiettoria $q(t), p(t)$ in R^{2N} la cui componente $q(t)$ é soluzione delle equazioni di Lagrange.

E' importante notare che le (6.20) sono un sistema di equazioni *del primo ordine* in $2N$ variabili.

Nello spazio in cui sono coordinate le $\{q_k, p_h\}$, $h, k = 1 \dots N$ la dinamica é dunque introdotta mediante l'assegnazione di un campo vettoriale che determina la *velocitá* lungo la traiettoria. Diamo a questo spazio (di dimensione $2N$) il nome di *spazio delle fasi*; vedremo piú avanti la sua interpretazione geometrica.

Per meglio comprendere la novitá di questa struttura, conviene notare che quando si scrive il sistema di N equazioni differenziali del secondo ordine $\ddot{x} = f(x)$ nella forma (di un sistema di $2N$ equazioni differenziali del primo ordine)

$$\dot{x} = y \quad \dot{y} = f(x) \quad 6.21$$

non si é fatta un'introduzione della dinamica mediante un campo vettoriale (cioé a livello di cinematica).

Infatti lungo ogni traiettoria deve valere $y(t) = \dot{x}(t)$ e quindi *indipendentemente dalla forma del campo vettoriale f* la traiettoria é completamente determinata dalla conoscenza della sua componente $x(t)$.

In altre parole, la traiettoria nello spazio di dimensioni $2N$ é ottenuta *sollevando* la traiettoria data nella spazio (delle configurazioni) di dimensioni N .

Nello spazio delle fasi invece, *ogni* traiettoria rappresenta un moto possibile per una opportuna scelta della dinamica.

La scelta di una specifica hamiltoniana (e dei dati iniziali) determina poi quale dei moti possibili venga effettivamente realizzato.

Per sottolineare questo punto importante poniamo $N=1$ e descriviamo in dettaglio la corrispondenza tra le descrizioni nello spazio delle fasi e nello spazio posizione-velocitá.

Data una lagrangiana L , con $\frac{\partial^2 L}{\partial \eta^2} \neq 0$, poniamo una corrispondenza biunivoca tra punti di due spazi mediante

$$(x, \eta) \rightarrow (x, p) \quad p \equiv \frac{\partial L}{\partial \eta} \quad 6.22$$

Denotiamo con ϕ_L la corrispondenza (6.22).

La relazione inversa é data da

$$(x, p) \rightarrow (x, \eta) \quad \eta \equiv \frac{\partial H}{\partial p} \quad 6.23$$

Nello spazio posizione-velocitá *le sole traiettorie* $t \rightarrow (q(t), \eta(t))$ *possibili* sono quelle per le quali vale l'identitá $\eta(t) = \frac{dq(t)}{dt}$.

La loro immagine per (6.22) nello spazio delle fasi é costituito dall'insieme di quelle traiettorie per le quali vale in ciascun punto l'identitá $p(t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(t)$.

A questo insieme appartengono tra l'altro *tutte le soluzioni dell'equazione di Lagrange per la lagrangiana L utilizzata per costruire la corrispondenza (6.22)*.

Tuttavia nello spazio delle fasi vi sono traiettorie che *non* sono immagine per (6.22) di traiettorie nello spazio posizione-velocitá.

Un esempio sono le traiettorie che sono soluzioni delle equazioni di Lagrange *per un lagrangiana L' diversa da quella utilizzata per la corrispondenza (6.22)* (e in generale non quadratica nelle velocità).

SECONDO PRINCIPIO VARIAZIONALE DI HAMILTON

Dimostriamo ora che anche le equazioni di Hamilton, come quelle di Lagrange, sono deducibili da un principio variazionale a partire da un funzionale definito su di uno spazio Ω di traiettorie nello spazio delle fasi.

Questo spazio, composto da traiettorie nello spazio delle fasi, é molto piú grande dello spazio \mathcal{M} delle traiettorie nello spazio delle configurazioni, utilizzato nel caso delle equazioni di Lagrange.

Infatti \mathcal{M} é il sottospazio di Ω composto da quelle traiettorie che ad ogni tempo ed in ogni punto soddisfano la condizione $p_i(t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$.

Nello spazio delle fasi Ω , descritto mediante coordinate

$$(q, p) \quad q \equiv \{q_1 \dots q_N\}, p \equiv \{p_1 \dots p_N\}$$

consideriamo il sottospazio affine $\Omega_{Q^1, P^1; Q^2, P^2}^{t_1, t_2}$ delle traiettorie di classe C^1 tali che

$$q(t_1) = Q^1, p(t_1) = P^1, q(t_2) = Q^2, p(t_2) = P^2 \quad Q^i, P^k \in R^N \quad k, i = 1, 2$$

Questo sottospazio dipende dalla scelta dei tempi t_1, t_2 e dei dati iniziali e finali).

Verifichiamo che $\Omega_{Q^1, P^1; Q^2, P^2}^{t_1, t_2}$ é uno spazio affine.

Infatti, se γ_1, γ_2 sono elementi di $\Omega_{Q^1, P^1; Q^2, P^2}$, allora $\gamma_1 - \gamma_2$ é un elemento dello spazio vettoriale $\Omega_{0,0;0,0}$ (spazio tangente).

Definiamo in \mathcal{H} il funzionale (Azione)

$$\mathcal{A}^H(\gamma) \equiv \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_k p_k(t) \dot{q}_k(t) - H(q(t), p(t), t) \right) dt \quad q, p \in R^N \quad 6.24$$

Notiamo che questo funzionale *ristretto allo spazio \mathcal{M} coincide su ciascuna traiettoria con il funzionale d'azione lagrangiano I^L espresso in coordinate diverse.*

Prima di enunciare il secondo principio variazionale di Hamilton, introduciamo un'utile notazione.

Nello spazio delle fasi, che ricordiamo ha dimensione $2N$, utilizziamo coordinate $z_k, k = 1 \dots 2N$ cosí definite

$$z_k = q_k, \quad z_{k+N} = p_k \quad k = 1 \dots N$$

Con queste notazioni le equazioni di Hamilton assumono la forma

$$\dot{Z} = J \nabla H(Z) \quad Z = z_1, \dots, z_{2n} \quad 6.26$$

dove la matrice J é definita da

$$J_{i, i+N} = -J_{i+N, i} = 1, \quad i = 1, \dots, N \quad J_{m, k} = 0 \text{ altrimenti} \quad 6.27$$

Come nel caso lagrangiano, utilizzando la stessa topologia, si dimostra che il funzionale \mathcal{A}^H é differenziabile se la hamiltoniana H é di classe C^1 nelle variabili Z .

SECONDO PRINCIPIO VARIAZIONE DI HAMILTON

I punti critici del funzionale di Azione hamiltoniano \mathcal{A}^H ristretto alle traiettorie nello spazio delle fasi Ω che al tempo t_1 hanno coordinate Z_1 e al tempo t_2 hanno coordinante Z_2 sono le soluzioni delle equazioni di Hamilton.

◇

Dimostrazione

Se $\zeta \in \mathcal{H}_0, \gamma \in \mathcal{H}$ si ha

$$D\mathcal{A}_\gamma^H(\zeta) = \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_k (p_k(t)\dot{u}_k(t) + v_k(t)\dot{q}_k(t)) - \sum_k \left(\frac{\partial H}{\partial q_k} u_k(t) + \frac{\partial H}{\partial p_k} v_k(t) \right) \right] dt \quad 6.27$$

se γ é descritto da $\{q_k(t), p_k(t)\}$ e ζ da $\{u_k(t), v_k(t)\}$.

Si vede allora, dopo un'integrazione per parti *nel primo addendo*, che

$$D\mathcal{A}_\gamma^H = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \dot{q}_k(t) = \frac{\partial H}{\partial p_k(t)} \quad \dot{p}_k(t) = -\frac{\partial H}{\partial q_k(t)} \quad 6.28$$

I punti stazionari di \mathcal{A}^H , *se esistono*, sono dunque le soluzioni delle equazioni di Hamilton con i dati iniziali e finali utilizzati per la costruzione di \mathcal{A}^H .

Si puó notare che le equazioni di Hamilton sono in forma normale *indipendentemente dalla struttura di H* .

Per confronto, ricordiamo che nel formalismo lagrangiano le equazioni di Lagrange possono essere messe in forma normale solo se la matrice di elementi $\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_k \partial \dot{q}_h}$ é invertibile.

Nel formalismo hamiltoniano, questa condizione é necessaria solo se si vuole dimostrare l'equivalenza con equazioni di Lagrange e costruire la corrispondente lagrangiana.

Segue da questo principio che una trasformazione nello spazio delle fasi che lascia invariato l'integrale d'azione hamiltoniano \mathcal{A}^H tra tempi t_1 e t_2 calcolato su traiettorie che hanno dati fissati (nello spazio delle fasi) sia al tempo t_1 che al tempo t_2 lascia anche invariante l'insieme delle soluzioni dell'equazione di Hamilton corrispondente.

Questo costituirá la base da cui partire per formulare la teoria delle *trasformazioni canoniche*.

♡

Nota 6.6

Non puó sorprendere che i punti critici (in cui le derivate direzionali si annullano) di I_L siano anche punti critici di \mathcal{A}^H (quindi ogni soluzione delle equazioni di Lagrange sia soluzione delle equazioni di Hamilton).

Infatti il funzionale d'azione Lagrangiano é la restrizione del funzionale d'azione Hamiltoniano e lo spazio di variazione (spazio tangente) del funzionale d'azione Lagrangiano I_H é piú grande dello spazio di variazione del funzionale d'azione Hamiltoniano \mathcal{A}^H .

Quello che é interessante notare é che *non ci sono punti critici di \mathcal{A}^H* che non siano punti critici di I^L , quindi che le derivate direzionali nelle N direzioni in piú si annullano automaticamente nei punti critici di \mathcal{A}^H .

Questo puó essere verificato con un'analisi simile a quella che ci ha portato a dimostrare la (6.18)

♣

Va osservato che il funzionale \mathcal{A}^H *non é convesso* e in particolare non ha minimi.

Questo rende il funzionale \mathcal{A}^H poco adatto alla ricerca di punti critici

Il funzionale \mathcal{A}^H o meglio il suo *duale* $\tilde{\mathcal{A}}_E^H$ *ottenuto facendo una trasformazione di Legendre sia rispetto alle variabili η che rispetto alle variabili q* e restringendosi a traiettorie di energia fissata (notiamo che $\tilde{\mathcal{A}}_E^H$ é utilizzato solamente nel caso di Hamiltoniane indipendenti dal

tempo) é invece convesso, almeno per energie piccole e i suoi punti critici sono le soluzioni delle equazioni di Hamilton che hanno energia fissata E .

Nota 6.7

Lo spazio $\Omega_{Q^1, P^1; Q^2, P^2}$ é contenuto, per ogni scelta della lagrangiana L , nello spazio delle traiettorie nello spazio delle fasi ottenute mediante (6.20) da una traiettoria σ appartenente a $\phi_L(\mathcal{M})$ per la quale $q(t_1) = Q^1, q(t_2) = Q^2$.

Se H si ottiene da L per trasformazione di Legendre, allora *la restrizione di \mathcal{A}^H a $\phi_L(\mathcal{M})$ coincide con il funzionale d'azione I^L definito nel caso Lagrangiano con Lagrangiana L* come si vede ricordando che *su queste traiettorie*

$$H(q(t), p(t), t) = \sum_k p_k(t) \dot{q}_k(t) - L(q(t), \dot{q}(t), t)$$

Se $\gamma = \phi_L(\sigma)$ per una traiettoria $\sigma \in \mathcal{M}$ e se γ é un punto stazionario di \mathcal{A}^H , allora σ é un punto stazionario di I^L .

Per verificare questo basta considerare solo variazioni in \mathcal{H} della forma $\phi_L(\zeta)$, $\zeta \in \mathcal{M}_0$.

Ne consegue che se $\hat{\gamma} \equiv \{q(t), p(t)\}$ soddisfa le equazioni di Hamilton con Hamiltoniana H , e se $\hat{\gamma}$ é della forma $\hat{\gamma} = \phi_L(\gamma)$ allora le $q(t)$ soddisfano le equazioni di Lagrange con lagrangiana L .



L'analisi fatta qui sopra mediante le trasformazioni di Legendre mostra che anche il reciproco é vero (una cosa non banale!),

Se $\gamma^0 \in \mathcal{M}$ é un punto stazionario di I^L , allora $\phi_L(\gamma^0)$ é un punto stazionario di \mathcal{A}^H , purché si scelgano le seguenti condizioni al bordo

$$p_k^1(t_1) = \left(\frac{\partial L}{\partial \eta_k} \right)_{q(t_2)=q^2; \dot{q}(t_1)=c_1} \quad p_k^2(t_1) = \left(\frac{\partial L}{\partial \eta_k} \right)_{q(t_2)=q^2; \dot{q}(t_1)=c_2} \quad 6.22$$

dove abbiamo posto

$$c_1 \equiv \left. \frac{dq^0}{dt} \right|_{t=t_1} \quad c_2 \equiv \left. \frac{dq^0}{dt} \right|_{t=t_2} \quad \gamma^0 \equiv \{q^0(t)\} \quad 6.23$$

L'affermazione non é banale poiché essa stabilisce che se \mathcal{A}^H é stazionario nel "punto" $\phi_L(\gamma^0)$ quando si considerino solo variazioni del tipo $\phi_L(\zeta)$, allora esso é stazionario *per qualunque tipo di variazione* (nella classe di regolarità descritta sopra).

Notare che il piano tangente del caso contiene hamiltoniano contiene il piano tangente relativo al caso lagrangiano *ma non coincide con esso* e quindi ci si potrebbe a priori aspettare che la derivata direzionale nel piano complementare non si annulli.

Nota 6.8

Dal punto di vista variazionale, vi é una *notevole differenza tra il caso lagrangiano e quello hamiltoniano*.

Abbiamo notato che, per sistemi meccanici e se $t_2 - t_1$ e $|q^2 - q^1|$ sono sufficientemente piccoli, la traiettoria γ^0 é un punto di *minimo* per I^L .

Invece, indipendentemente dalla scelta delle condizioni agli estremi, la traiettoria $\phi \cdot \gamma^0$ é un punto stazionario per $J\mathcal{A}^H$, *ma non un minimo*.

Infatti \mathcal{A}^H dipende in modo lineare dalle \dot{q}_k e quindi é un funzionale indefinito e non ha minimi. Il secondo termine in \mathcal{A}^H non é rilevante per questa analisi, poiché si possono considerare traiettorie per le quali $|q(t)| \leq 1, \forall t$ e $|\dot{q}(t)|$ é arbitrariamente grande.

Questo rende piú difficile l'utilizzazione del secondo principio variazionale per *dimostrare* l'esistenza di soluzioni (ad esempio periodiche) delle equazioni di Hamilton.



Nota 6.9

In generale (cioé per una generica scelta delle condizioni agli estremi) *il funzionale \mathcal{A}^H non ha punti stazionari*.

Infatti le equazioni di Hamilton costituiscono un sistema di equazioni differenziali del primo ordine, e le loro soluzioni sono determinate dalla scelta dei dati iniziali.

Pertanto, scelti i dati $\{q_k^1, p_k^1\}$ all'istante t_1 , la soluzione é determinata in modo unico, e non é quindi possibile scegliere anche i dati ad un istante successivo t_2 .

In generale quindi non vi saranno traiettorie che soddisfano le equazioni di Hamilton e siano compatibili sia con i dati iniziali che con i dati finali scelti.



Conviene dunque ricordare che il secondo Principio Variazionale di Hamilton afferma che *se \mathcal{A}^H ha punti stazionari, allora questi rappresentano soluzioni delle equazioni di Hamilton*.

Sotto opportune condizioni di regolaritá per l'hamiltoniana é possibile formulare il secondo Principio Variazionale in modo che il funzionale \mathcal{A}^H che si analizza abbia almeno un punto stazionario,

Basta per questo definire gli spazi \mathcal{H} ed \mathcal{H}_0 ponendo agli istanti t_1 e t_2 solo condizioni sulle variabili q , o ponendo condizioni sulle variabili q all'istante t_1 e condizioni sulle variabili p all'istante t_2 (quest' ultima possibilitá é molto utilizzata nella teoria del controllo).

Tuttavia queste formulazioni portano a difficoltá quando si vogliono studiare trasformazioni di coordinate $\{q, p\} \rightarrow \{Q, P\}$ che lasciano invarianti le equazioni di Hamilton ma non sono tali che le Q siano funzioni solo delle q (o le P funzioni solo delle p).

Queste trasformazioni di coordinate giocano un ruolo centrale nello studio dell'equazioni di Hamilton, ma lo studio della loro relazione con il secondo Principio Variazionale é piú complicato se le condizioni iniziali e finali non sono le stesse nei due sistemi di coordinate.

Notiamo infine che la dinamica nello spazio delle fasi *determina la Hamiltoniana a meno di una costante additiva*.

Infatti, se coincidono i due campi vettoriali che individuano il moto per H ed H' dovrá essere

$$\frac{\partial(H - H')}{\partial q_k} = 0 = \frac{\partial(H - H')}{\partial p_k} \quad k = 1, \dots, N$$

e quindi $H - H' = \text{costante}$ (almeno se lo spazio delle fasi é connesso).

Questo *non accadeva* nel formalismo lagrangiano; infatti due lagrangiane che differiscono tra loro localmente per una derivata totale danno luogo ad equazioni di Lagrange che hanno le stesse soluzioni.

Questa pluralitá di scelta per una stessa dinamica appare nel formalismo di Hamilton nella seguente forma.

Puó accadere che due hamiltoniane H_1 e H_2 diano luogo a dinamiche che, pur essendo diverse nello spazio delle fasi, *hanno uguale restrizione allo spazio delle configurazioni*, nel senso che per gli stessi dati iniziali le due soluzioni hanno la forma $\{q_k(t), p_k(t)\}, \{q_k(t), p'_k(t)\}$.

In questo caso la differenza nelle descrizioni mediante H_1 o H_2 consiste *in una diversa definizione delle coordinate p_k , cioé dei momenti*.

Nella prossima Lezione, in cui trattiamo il Teorema di Noether, vedremo che ad ogni campo vettoriale che descrive una simmetria del sistema é associato un momento.

Questa corrispondenza *dipende dalla Lagrangiana che descrive il sistema* , poiché $p_k \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$.

Lezione 7. SIMMETRIE E COSTANTI DEL MOTO. TEOREMA DI NOETHER

Appendice: Prodotto di lie di campi vettoriali

In questa Lezione analizziamo la relazione tra gruppi continui di simmetria e costanti del moto per un sistema Lagrangiano.

Nella prima Lezione abbiamo notato come l'esistenza di costanti del moto permetta di ridurre lo studio di un sistema dinamico a quello di sistemi piú semplici. La relazione che studieremo tra simmetrie e costanti del moto rende quindi importante lo studio delle simmetrie continue dei sistemi lagrangiani.

Il punto centrale di questa Lezione é il teorema di Emmy Noether; si tratta di uno dei risultati che ha avuto piú importanza nello sviluppo della Meccanica Analitica

Supponiamo che il sistema in esame sia di tipo lagrangiano e che la lagrangiana L sia "invariante" (in un senso che renderemo preciso nel seguito) per un gruppo a un parametro di diffeomorfismi che agisce nello spazio delle configurazioni ed é differenziabile nel parametro $\alpha \in R$.

Indichiamo con G tale gruppo, con $g(\alpha)$, $\alpha \in R$ i suoi elementi, con legge di composizione $g(\beta) \cdot g(\alpha) = g(\alpha + \beta)$.

Nel seguito, per semplicitá di presentazione, assumeremo che lo spazio delle configurazioni sia identificabile con R^N mediante un'opportuna scelta di coordinate cartesiane, cosí che ciascun elemento $g(\alpha)$ risulti essere una trasformazione di coordinate, differenziabile e con inverso differenziabile, che indicheremo con

$$q \rightarrow Q(q; \alpha), \quad \alpha \in R, \quad q, Q \in R^N \quad 7.1$$

Questa ipotesi non é restrittiva, poiché tutta l'analisi che faremo é *locale* (nel senso che fará riferimento solo a quantitá definite in un intorno di un punto generico nello spazio delle configurazioni) ; per ottenere una costante del moto *globale* si deve richiedere che la Lagrangiana sia invariante *come funzione sul fibrato tangente*.

Questo richiederá estendere al fibrato tangente il gruppo di trasformazioni, inizialmente definito solo sullo spazio delle configurazioni .

Se il gruppo di simmetria é locale la costante del moto sará solo locale.

Come vedremo in seguito (teorema di rettificazione, Appendice alla Lezione 9) ogni sistema dinamico é rettificabile in un intorno di ogni punto che non sia di equilibrio.

Siamo quindi interessati solamente al caso in cui il gruppo di simmetria sia definito *globalmente*.

Notiamo che al gruppo G di trasformazioni é associato in modo biunivoco un campo vettoriale in R^N .

Infatti, per le proprietá di gruppo sará

$$Q(q; \alpha + \beta) = Q(Q(q; \alpha); \beta) \quad 7.2$$

e quindi la derivata

$$\frac{dQ}{d\alpha} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^{-1} [Q(Q(q; \alpha); \epsilon) - Q(q; \alpha)] \equiv F(Q)$$

dipende da q solo attraverso la funzione $Q(q; \alpha)$.

La (7.1) é dunque il flusso di

$$\frac{dq}{d\alpha} = F(q) \quad 7.3$$

Nel seguito faremo sempre l'ipotesi che la trasformazione descritta in (7.1) sia congiuntamente differenziabile in q e α e inoltre che F sia differenziabile come funzione di q .

Viceversa, dato un campo vettoriale F su R^N , che assumiamo differenziabile e uniformemente limitato, indichiamo con $Q(q, \alpha)$ la soluzione dell'equazione

$$\frac{dQ}{d\alpha} = F(Q), \quad Q(q; 0) = q \quad q \in R^N \quad 7.4$$

Per le ipotesi fatte su F , la soluzione di (7.4) esiste ed é unica per ogni α ed ogni $q \in R^N$. Inoltre, poiché (7.4) é un sistema autonomo (il campo vettoriale dipende da Q ma non esplicitamente da α), la soluzione $Q(q; \alpha)$ soddisfa (7.2) per ogni q , e quindi le trasformazioni definite da

$$g(\alpha) : q \rightarrow Q(q; \alpha) \quad 7.5$$

formano gruppo, con legge di composizione $g(\alpha) \cdot g(\beta) = g(\alpha + \beta)$.

Nel seguito, diremo che F é il campo vettoriale *associato* al gruppo di trasformazioni $G \equiv \{g(\alpha)\}$ e che G é il gruppo di trasformazioni *associato* al campo vettoriale F .

Per un sistema meccanico il cui spazio delle configurazioni é una varietà Σ la lagrangiana é una funzione definita su $T\Sigma$ (in coordinate, é una funzione di posizione e di velocità).

Per discutere dell' *azione del gruppo G di diffeomorfismi di Σ* sulla lagrangiana L é dunque necessario innanzitutto definire l'azione di G sul fibrato tangente $T\Sigma$.

Questo *sollevamento* viene fatto in modo naturale ricordando che un elemento di $T_q\Sigma$ (lo spazio tangente a Σ nel punto q) puó essere identificato con il vettore tangente in q ad una curva γ su Σ .

Il sollevato del vettore tangente é *per definizione il vettore tangente alla curva immagine* di γ . In coordinate, se la trasformazione indotta dal gruppo é espressa da $q \rightarrow Q(q; \alpha)$ l'estensione dell'azione di G é data da

$$\frac{dq}{d\tau} \rightarrow J(q, Q(q, \alpha)) \frac{dQ}{d\tau} \quad 7.6$$

dove $J(x, y)$ é lo Jacobiano della trasformazione $x \rightarrow y$ e τ é il parametro utilizzato per parametrizzare la curva γ .

Nel seguito, indicheremo con $g(\alpha)$ la legge di trasformazione (7.6).

Convien notare che il campo vettoriale nella (7.5) é indipendente dal parametro τ ; é anche importante mettere in evidenza che il fatto che il parametro τ gioca un ruolo diverso da quello del parametro α introdotto precedentemente.

In particolare, τ *non é associato a un campo vettoriale*; infatti per ogni $\sigma \in \Sigma$ qualunque elemento di $T_\sigma\Sigma$ individua la velocità di un moto *possibile* (per un'opportuna scelta di forze applicate).

Nota 7.1

Comunemente il parametro τ é identificato con il tempo, almeno se Σ é la superficie di vincolo per un sistema meccanico, con vincoli olonomi bilateri indipendenti dal tempo.

Piú in generale, τ é connesso alla definizione di *moto virtuale*, e anche alle *variazioni sincrone* nella formulazione dei principi variazionali.



Riprendendo ora l'analisi dei sistemi Lagrangiani, notiamo che lo spazio delle configurazioni puó essere localmente identificato con R^N , con coordinate cartesiane $q_1 \dots q_N$.

Se una di queste coordinate (ad esempio q_N) é ciclica, la Lagrangiana risulta per costruzione invariante per il gruppo di trasformazioni G che si ottiene *sollevando* (nel senso descritto sopra) i diffeomorfismi definiti per ciascun α da

$$Q_i(q, \alpha) = q_i, \quad i = 1 \dots N - 1, \quad Q_N(q, \alpha) = q_N + \alpha \quad 7.7$$

(notare che $\frac{dQ_k(q,\alpha)}{d\alpha} = \frac{dq_k}{d\alpha} \quad \forall k$).

D'altra parte, abbiamo visto che se una variabile é ciclica lo studio del sistema puó essere ricondotto a quello di un sistema lagrangiano che ha un grado di libertá in meno (sistema ridotto).

Data l'importanza di questo processo di riduzione, é naturalmente interessante sapere sotto quali condizioni é possibile utilizzarlo anche quando il sistema ammette un gruppo continuo di simmetrie ma *nessuna delle coordinate utilizzate é ciclica* e lo spazio delle configurazioni é una generica varietá (e non é quindi possibile utilizzare un solo sistema di coordinate).

Il teorema di Noether andrà in questa direzione, affermando che la riduzione é possibile se la Lagrangiana L ammette un gruppo ad un parametro (differenziabile) di simmetrie, cioè esiste un gruppo di diffeomorfismi dello spazio delle configurazioni che (opportunamente sollevato) lascia L invariante in forma.

Naturalmente se il gruppo di simmetria agisce solo localmente la costante del moto sarà in generale sono locale. In questo caso il risultato puó non avere rilevanza: infatti vedremo in seguito che *localmente per un sistema lagrangiano con N gradi di libertá é sempre possibile trovare $(2N - 1)$ integrali primi*.

Nel seguito di questa Lezione consideremo sempre gruppi di simmetria globale.

Sará allora naturale porsi il seguente problema: se la Lagrangiana L di un sistema con N gradi di libertá ammette un gruppo di simmetrie G che contiene M sottogruppi a un parametro G_i differenziabili e con generatori linearmente indipendenti, é possibile ridursi allo studio di un sistema (lagrangiano) che ha $N-M$ gradi di libertá?

Vedremo che la risposta é in generale *negativa*.

Affinché la riduzione sia possibile sarà necessario che valga la relazione

$$g_i(\alpha) \cdot g_k(\beta) = g_k(\beta) \cdot g_i(\alpha) \quad \forall i, k, \alpha, \beta \quad 7.8$$

La corrispondente proprietá dei campi vettoriali associati ai sottogruppi sarà una proprietá di *commutativitá* che descriveremo nel seguito di questa Lezione.

Se questa proprietá (o equivalentemente la (7.8)) é soddisfatta, diremo che é soddisfatto il Teorema di Noether in forma generalizzata.

Anche se la (7.8) non é soddisfatta, in molti casi si puó dimostrare che esistono *non meno* di M costanti del moto, tra loro funzionalmente indipendenti.

Questo permetterà di considerare un sistema *ridotto*, ottenuto restringendo il sistema in esame alla superficie di codimensione M nello spazio delle fasi (*non delle configurazioni!*) ottenuta fissando (mediante i dati iniziali) il valore numerico delle M costanti del moto.

Se il sistema é autonomo, la conservazione dell'energia permette un'ulteriore riduzione ad una varietá di codimensione $M+1$.

Questa riduzione puó rivelarsi utile in casi relativamente semplici, e portare ad una soluzione completa delle equazioni di Lagrange.

Tuttavia é importante notare che il sistema ridotto che si ottiene *non é in generale lagrangiano* e *non descrive* in generale un sistema con un numero minore di gradi di libertá.

Nota 7.2

Un esempio notevole in cui (7.8) non é soddisfatta ma la riduzione porta a risultati molto interessanti, si trova nella descrizione del moto di un corpo rigido con un punto fisso, in assenza di forze esterne.

Il sistema in esame ha tre gradi di libertá, cosí che lo spazio delle fasi ha dimensione 6.

Sono costanti del moto l'energia e le componenti del momento angolare secondo tre direzioni distinte.

Poiché il gruppo delle rotazioni (che lascia la Lagrangiana invariante in forma) *non contiene due sottogruppi ad un parametro che soddisfino (7.8)*, non é possibile applicare direttamente il teorema di Noether e ridursi cosí ad un sistema lagrangiano ad un grado di libert a.

Questo é possibile attraverso un procedimento essenzialmente diverso, che utilizza come coordinate gli angoli di Eulero, che *non sono coordinate di rotazione attorno ad assi fissi*.

Discuteremo gli angoli di Eulero nella prossima Lezione.

D'altra parte, essendo presenti quattro costanti del moto, che risultano essere funzionalmente indipendenti (almeno genericamente), per ogni dato iniziale il moto del sistema pu  essere ricondotto ad un moto che ha luogo su una variet  di dimensione due.

Per una generica scelta dei dati iniziali questa variet  é un toro (poich  ammette un campo vettoriale che non si annulla mai) e quindi il moto pu  essere descritto mediante due angoli ed é in generale multiperiodico.

Tuttavia le equazioni corrispondenti *non sono lagrangiane* (la descrizione cosí ottenuta corrisponde a quella geometrica che utilizza la poloide e l'erpoloide).



Prima di enunciare il teorema di Noether, conviene sviluppare brevemente un formalismo che render  pi  facile la presentazione.

Ricordiamo che un campo vettoriale ξ su di una variet  Σ é una legge che fa corrispondere ad ogni punto σ di Σ un elemento ξ_σ di $T_\sigma\Sigma$.

L'applicazione

$$\sigma \rightarrow \{\sigma, \xi_\sigma\} \quad 7.9$$

  dunque una funzione da Σ a $T\Sigma$

Considerando il grafico della funzione $\sigma \rightarrow \xi_\sigma$ si pu  anche dire che un campo vettoriale é una sezione del fibrato tangente $T\Sigma$.

Il campo vettoriale ξ viene spesso identificato con una *derivazione* ∂_ξ definita sulle funzioni differenziabili su Σ .

Ricordiamo che una derivazione é un'operazione lineare che soddisfa la regola di Leibnitz per il prodotto.

Se $q_1 \dots q_N$ sono coordinate utilizzate in un intorno \mathcal{N} di σ , il campo ξ é individuato in \mathcal{N} da N funzioni $f_k(q)$, $k = 1 \dots N$ e l'operazione di derivazione associata é, per ogni funzione differenziabile $A(q)$,

$$\partial_\xi A(q) = \sum_{k=1}^N f_k(q) \frac{\partial A}{\partial q_k} \quad 7.10$$

Si noti che

$$\partial_\xi A(q) = \left(\frac{dA(Q(q, \alpha))}{d\alpha} \right)_{\alpha=0}$$

dove $q \rightarrow Q(q, \alpha)$ é il gruppo ad un parametro di trasformazioni associato a ξ .

Da questa osservazione segue che l'operazione ∂_ξ *non dipende dal sistema di coordinate scelto* (ne dipende naturalmente *la forma esplicita* di ξ).

Se $\{y_k\}$ é un altro sistema di coordinate, ξ é anche rappresentato dalla n-pla di funzioni $\{f'_k(y)\}$, $k = 1 \dots N$

$$f'_k(y) = \sum_{h=1}^N J_{k,h}(q(y)) f_h(q(y)), \quad J_{k,h} = \frac{\partial y_k}{\partial y_h} \quad 7.11$$

(J é la matrice Jacobiana della trasformazione).

Da (7.10) segue infine che per definizione di differenziale si ha

$$dA(\xi) = \partial_\xi A \quad 7.12$$

Nota 7.3

La derivazione associata al campo vettoriale ξ é spesso indicata con il simbolo X_ξ anziché ∂_ξ .



MOMENTI ASSOCIATI A CAMPI VETTORIALI (APPLICAZIONE MOMENTO)

Introduciamo ora la definizione di *momento* associato ad un campo vettoriale (*attraverso una Lagrangiana L*).

Ricordiamo che L é una funzione definita su $T\Sigma$.

Se τ é un punto di $T\Sigma$, in un intorno di τ utilizziamo coordinate $q_1 \dots q_N, \eta_1 \dots \eta_N$.

Le coordinate q_1, \dots, q_N sono coordinate cartesiane che descrivono un intorno di un punto Q su Σ e $\eta_1 \dots \eta_N$ sono coordinate cartesiane in $T\Sigma$ sulla fibra associata a Q .

In altre parole, le q_k sono coordinate *di posizione* e le η_k sono coordinate *di velocità*.

Per definizione il momento associato dalla lagrangiana L al campo vettoriale $\xi \equiv \{f_k\}$ é la funzione su $T\Sigma$ definita (localmente) da

$$\pi_\xi^L(q, \eta) \equiv \sum_{k=1}^N f_k(q) \frac{\partial L}{\partial \eta_k}(q, \eta) = D_2 L(\xi) \quad 7.13$$

dove abbiamo indicato con $D_2 L$ il differenziale di L considerata come funzione del secondo insieme di coordinate, cioè delle η .

Se ξ é un campo vettoriale, indicheremo con π_ξ^L o anche p_ξ^L il corrispondente momento (l'apice L verrà spesso sottinteso).

In ogni punto σ dello spazio delle configurazioni la (7.13) definisce una funzione lineare sullo spazio tangente, dunque un elemento del duale di $T_\sigma \Sigma$.

Questo spazio vettoriale viene indicato con il simbolo $T_\sigma^* \Sigma$; lo spazio ottenuto fibrando Σ con gli spazi vettoriali $T_\sigma^* \Sigma$ viene indicato con il simbolo $T\Sigma^*$ ed é detto fibrato cotangente.

I suoi elementi sono le forme differenziali.

Definizione 7.1 : Applicazione Momento (Momentum Map)

L'operazione π^L da $T\Sigma$ a $T^*\Sigma$ che associa al campo vettoriale ξ la forma differenziale. π_ξ^L é detta *Applicazione Momento* (in inglese, *Momentum Map*).



Se $D_2 L$ é invertibile, cioè se

$$\det \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \eta_k \partial \eta_h} \right) \neq 0 \quad 7.14$$

la (7.13) determina ξ univocamente se é nota la funzione π^L .

In questo caso, dato un momento π indicheremo con ξ_π^L il campo vettoriale così individuato.

Se (7.14) é verificata, π^L é un diffeomorfismo e il suo inverso é l'applicazione

$$\xi^L : \pi \Rightarrow \xi_\pi^L \quad 7.15$$

E' importante notare che la funzione π_ξ^L sullo spazio delle fasi definita in (7.11) dipende dalla lagrangiana L e dal campo vettoriale ξ ma *non dal sistema di coordinate scelto*.

Per verificare questo, sia $\{q', \eta'\}$ un altro sistema di coordinate. Si ha

$$\frac{\partial L}{\partial \eta'_k} = \sum_h \frac{\partial L}{\partial \eta_h} \frac{\partial \eta_h}{\partial \eta'_k}$$

cosí che

$$\sum_k f'_k(q') \frac{\partial L}{\partial \eta'_k} = \sum_k \sum_h \sum_s f_h(q) \frac{\partial q'_k}{\partial q_h} \frac{\partial \eta_s}{\partial \eta'_k} \frac{\partial L}{\partial \eta_s}$$

Le coordinate $\{\eta\}$ si trasformano come le \dot{q} , quindi

$$\frac{\partial \eta_s}{\partial \eta'_k} = \frac{\partial q_s}{\partial q'_k}$$

e dunque

$$\sum_k \frac{\partial q'_k}{\partial q_h} \frac{\partial \eta_s}{\partial \eta'_k} = \delta_{h,s}$$

da cui segue l'asserto.

Nota 7.4

Se L é quadratica omogenea nelle velocità, allora la funzione π_ξ^L dipende linearmente dalle η_k e quindi *in questo caso i momenti sono funzioni lineari delle velocità*.

Tuttavia questo non é vero in generale; ad esempio non é vero per le lagrangiane dei sistemi relativistici.



Nota 7.5

Il fatto che l'applicazione $\xi \rightarrow \pi_\xi$ sia ben definita può anche essere espressa dicendo che la legge di trasformazione della n^{pla} di funzioni f_k in (7.13) per trasformazioni di coordinate coincide con la legge di trasformazione delle componenti di un campo vettoriale.



ESEMPI di corrispondenza

Casi particolari ma significativi di questa corrispondenza tra momenti e campi vettoriali (cioé tra spazio tangente e spazio cotangente in ciascun punto dello spazio delle configurazioni) sono i seguenti:

i)

Se $\xi_k, k = 1, 2, 3$ é il campo vettoriale associato alla traslazione rigida di E^3 nella direzione \hat{k} (secondo una terna cartesiana prefissata) il momento corrispondente $\pi_{\xi_k}^L$ é la componente k^{ma} della quantità di moto del sistema descritto dalla Lagrangiana L .

ii)

Se ξ_ζ é il campo vettoriale associato alla rotazione attorno all'asse ζ , il momento corrispondente $\pi_{\xi_\zeta}^L$ é il momento angolare del sistema.

Queste affermazioni si verificano facilmente per sistemi di N punti materiali, relativistici e non. Per le traslazioni rigide, conviene utilizzare coordinate cartesiane e notare che il campo ξ_k é associato al gruppo ad un parametro di trasformazioni

$$x_h^i \rightarrow x_h^i, \quad k \neq h, \quad x_k^i \rightarrow x_k^i + \alpha \quad \forall i = 1 \dots N$$

Per le rotazioni, conviene utilizzare coordinate cilindriche ponendo l'asse del cilindro nella direzione dell'asse ζ e notare che in queste coordinate il gruppo di trasformazioni associato a ξ_ζ é dato da

$$\rho^i \rightarrow \rho^i \quad z^i \rightarrow z^i \quad \theta^i \rightarrow \theta^i + \alpha \quad \forall i$$

Definizione 7.2

Si dá il nome di *Momento coniugato alla variabile q_k* al momento che corrisponde al campo vettoriale $\partial_{q_k} \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$.

◇

TEOREMA DI NOETHER

Con le notazioni fin qui sviluppate, possiamo ora enunciare il Teorema di Noether

Teorema 7.1 (Noether)

Per ogni sistema lagrangiano e per ogni intorno di un punto dello spazio delle configurazioni le seguenti tre affermazioni sono tra loro equivalenti:

a)

E' possibile scegliere le coordinate in modo che una di esse sia ciclica.

b)

Esiste un momento conservato; il campo vettoriale associato é continuo.

c)

La Lagrangiana é invariante per il sollevamento di un gruppo ad un parametro di trasformazioni di coordinate che dipendono in modo differenziabile dal parametro.

Inoltre, se una di queste affermazioni é vera, il campo vettoriale associato al gruppo di simmetrie coincide con il campo vettoriale associato al momento conservato.

◇

Dimostrazione

Dimostreremo le implicazioni $(a) \rightarrow (b) \rightarrow (c) \rightarrow (a)$.

$(a) \rightarrow (b)$

Sia $\{q_k, k = 1 \dots N\}$ un sistema di coordinate tali che q_n sia ciclica per la lagrangiana L. Dalle equazioni di Lagrange segue allora

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_N} = 0$$

ed é quindi conservato il momento $\pi_{\xi_N}^L$, dove abbiamo indicato con ξ_N il campo vettoriale associato alle traslazioni rigide nella direzione corrispondente alla coordinata q_N .

$(b) \rightarrow (c)$

Sia P il momento conservato, ξ il campo vettoriale ad esso associato, cosi' che $P = \pi_\xi^L$. Indichiamo con $\{f_k(q)\}$ le funzioni che descrivono il campo vettoriale ξ nelle coordinate q. Consideriamo il sistema di equazioni

$$\frac{dq_k}{d\alpha} = f_k(q) \quad k = 1 \dots n \tag{7.16}$$

e sia $\phi(q, \alpha)$ la soluzione di (7.16) tale che $\phi(q, 0) = q$. Tale soluzione é unica per le ipotesi fatte su ξ .

Se $t \rightarrow q(t)$ é una soluzione dell'equazione di Lagrange (non indichiamo esplicitamente la dipendenza dal dato iniziale) si ha, essendo per ipotesi P un momento conservato

$$0 = \frac{d}{dt} \left(\sum_{k=1}^N f_k(q(t)) \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}(q(t), \dot{q}(t)) \right)_{\alpha=0} = \frac{d}{dt} \left(\sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial \phi_k(q(t), \alpha)}{\partial \alpha} \right)_{\alpha=0} =$$

(usando le equazioni di Lagrange e il fatto che α e t sono parametri indipendenti)

$$= \sum_k \frac{\partial L}{\partial q_k} \frac{\partial \phi_k(q(t), \alpha)}{\partial \alpha} + \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial \phi_k(q(t), \alpha)}{\partial t} \right)_{\alpha=0} =$$

$$\frac{dL}{d\alpha}(\phi(q(t), \alpha), \phi'(q(t), \alpha))_{\alpha=0}$$

Dunque $\frac{dL}{d\alpha}(q, \eta) = 0$ nei punti dello spazio delle fasi in cui il momento P é conservato.

(c) \rightarrow (a)

Siano $\{f_k\}$ le funzioni che rappresentano nelle coordinate q il campo vettoriale associato al gruppo di trasformazioni considerato.

Per costruzione, le trasformazioni $q \rightarrow \phi(q, \alpha)$ sono la soluzione di

$$\frac{dq_k}{d\alpha} = f_k(q), \quad k = 1 \dots N \quad q_k(0) = q_k \quad 7.17$$

Si possono scegliere, in un intorno del punto σ dello spazio delle configurazioni considerato, delle coordinate $y_1 \dots y_N$ tali che il sistema (7.14) prenda la forma

$$\frac{dy_k}{d\alpha} = 0, \quad k = 1 \dots N - 1, \quad \frac{dy_N}{d\alpha} = 1$$

le cui soluzioni sono

$$y_k(\alpha) = y_k(0), \quad k \neq N, \quad y_N(\alpha) = y_N(0) + \alpha \quad 7.18$$

In (7.18) α assume valori in un intorno \mathcal{I} dell'origine in \mathbb{R} tale che per ogni $\alpha \in \mathcal{I}$ il punto di coordinate $\{y_\alpha\}$ si trova nell'intorno in cui é applicabile il Teorema dell' intorno tubolare (vedi Lezione 18).

Poiché per ipotesi vale $\frac{dL}{d\alpha} = 0$, segue da (7.15) che $\frac{\partial L}{\partial y_N} = 0$.

Dunque y_N é una coordinata ciclica.

Questo termina la dimostrazione del Teorema di Noether.

♡

ESEMPI

A titolo di esempio, discutiamo esplicitamente un caso della corrispondenza (b) \rightarrow (c).

Siano $\{x_i\}$, $i=1,2,3$, le coordinate cartesiane di un punto di massa m soggetto ad una forza di energia potenziale $U(x)$.

Si ha

$$p_k \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k} = m\dot{x}_k \quad 7.19$$

Supponiamo che sia conservato il vettore *momento della quantita' di moto*, $l = mx \wedge \dot{x}$.

In componenti

$$l_k = m \sum_{i,j} \epsilon_{kij} x_i \dot{x}_j = \sum_{i,j} \epsilon_{kij} x_i p_j$$

Il campo vettoriale associato al *momento* l_k é dunque descritto nelle coordinate x_k dalle tre funzioni

$$f_i^k(x) \equiv \epsilon_{kij}x_j$$

dove ϵ_{kij} é il simbolo di Ricci.

In questo caso

$$f_j^k(x) = (A^k x)_j \tag{7.20}$$

dove le matrici A^k sono date da $A_{ij}^k = \epsilon_{kij}$.

Il gruppo ad un parametro associato a l_k si ottiene risolvendo l'equazione

$$\frac{dx}{d\alpha} = A^k x \tag{7.21}$$

E' facile verificare che la soluzione di (7.21) rappresenta le rotazioni nel piano perpendicolare al k^{mo} asse coordinato.

Dall'implicazione (b) \rightarrow (c) del Teorema di Noether segue dunque che se le tre componenti del momento della quantitá di moto sono conservate, allora la Lagrangiana é invariante sotto il gruppo delle rotazioni.

Poiché l'energia cinetica é invariante per rotazioni (piú precisamente per il sollevamento delle rotazioni allo spazio tangente) ne deduciamo che $U(x)$ é invariante per rotazioni, e quindi dipende solo da $|x|$.

Le forze cui é soggetto il punto materiale sono dunque in questo caso delle forze centrali.

ESERCIZIO

Dimostrare che, se in un sistema di N punti materiali in E^3 soggetti a forze conservative, la quantitá si moto é conservata, allora il potenziale $V(x_1 \dots x_N)$ dipende solo dai vettori $x^i - x^j \in R^3$, $i, j = 1 \dots N$.

Nota 7.6

Se A_1, A_2 , funzioni sullo spazio delle fasi, sono costanti del moto per un sistema lagrangiano, anche ogni loro funzione é costante del moto.

In generale tuttavia *non tutte le costanti del moto sono funzioni dei momenti conservati*.

Vi sono dunque delle costanti del moto *non riconducibili a simmetrie della Lagrangiana*.

Ad esempio, per un sistema meccanico autonomo é costante del moto l'energia $E = T + U$, che *non é funzione dei momenti se $U \neq 0$* .

Quindi on tutte le costanti del moto sono una conseguenza del teorema di Noether.

Ad esempio la conservazione dell'energia é conseguenza dell'invarianza della lagrangiana per la trasformazione $t \rightarrow t + \alpha$.

Per poter riguardare la conservazione dell'energia come caso particolare del teorema di Noether é dunque necessario considerare uno spazio delle configurazioni "esteso", dato da $\Sigma \times R$, dove Σ é lo spazio delle configurazioni ed R é l'asse dei tempi.

La struttura risultante é detta *di contatto*; noi l'abbiamo brevemente discussa quando abbiamo dedotto il principio di Maupertius da quello di Hamilton.

Nel corso di quell'analisi abbiamo anche notato che *in questo contesto* l'energia puó essere considerata come il momento che é conservato a causa dell'invarianza per traslazioni temporali di una nuova lagrangiana in cui il tempo appare come coordinata (e non come parametro).



GENERALIZZAZIONI DEL TEOREMA DI NOETHER

Alcune parti del Teorema di Noether possono essere generalizzate in vari modi.

Indichiamo solo una di queste generalizzazioni, che trova utilizzazione frequente.

Essa si basa sul fatto che esistono trasformazioni che *non lasciano invariante la lagrangiana* ma lasciano invariante *l'insieme delle soluzioni* delle equazioni di Lagrange.

Ricordando che le soluzioni delle equazioni di Lagrange sono i punti critici del funzionale d'Azione I^L , si vede che affinché l'insieme delle soluzioni sia invariante *é sufficiente* che la variazione della Lagrangiana L risulti essere la derivata totale di una funzione che dipende solo dalle coordinate q e dal tempo.

Infatti in questo caso, per il teorema fondamentale del calcolo, l'Azione I^L varierá come funzione delle coordinate q agli istanti estremi t_1 e t_2 e non vi sará variazione nel suo differenziale (che *é* calcolato solo per variazioni delle traiettorie a estremi fissati).

L'invarianza della lagrangiana a meno di una derivata totale permette allora di dedurre l'esistenza di una costante del moto (ma non dá luogo a una diminuzione nel numero di gradi di libertá).

Daremo alcuni esempi di applicazione di queste considerazioni.

Tratteremo anche un caso in cui la variazione della lagrangiana risulta essere la derivata totale di una funzione di posizione e velocitá.

In questo caso dunque l'Azione non viene variata solo se si considerano variazioni delle traiettorie in cui vengano fissate sia le posizioni che le velocitá agli istanti estremi.

Le soluzioni delle equazioni di Lagrange sono punti critici anche per queste variazioni, ma a priori vi potrebbero essere punti critici "spuri", che non rimangono tali quando si varino anche le velocitá agli istanti estremi.

Dimostreremo quindi l'esistenza di una costante del moto utilizzando direttamente le equazioni di Lagrange.

Proposizione 7.2

Supponiamo che in un aperto di $T\Sigma$ che ammette coordinate $\{q, \eta\}$, per una famiglia di trasformazioni

$$q \rightarrow \phi(q, \eta, \alpha, t), \quad \eta \rightarrow \frac{d}{dt}\phi(q, \dot{q}, \alpha, t)_{\dot{q}=\eta, \ddot{q}=\dot{\eta}} \quad 7.22$$

si abbia,

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0} = \frac{dF(q(t), \eta(t), t)}{dt} \quad 7.23$$

dove abbiamo posto

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha} \equiv \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(L(\phi(q(t), \alpha, t), \dot{\phi}(q(t), \alpha, t), t) \right) \quad 7.24$$

(la lagrangiana puó dipendere esplicitamente dal tempo).

Allora l'espressione

$$B(q, \eta, t)|_{\eta=\dot{q}} \equiv F(q, \eta, t) - \left(\sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{dq_k}{d\alpha} \right)_{\alpha=0}$$

é una costante del moto.

◇

Dimostrazione

La dimostrazione *é* immediata e si effettua calcolando esplicitamente la variazione della funzione B lungo le traiettorie del sistema, facendo uso delle equazioni di Lagrange e della (7.23)

♡

Nota 7.7

Questo risultato generalizza la relazione di implicazione (c) \rightarrow (b) del Teorema di Noether. Si noti che la (7.23) implica

$$\left(\frac{dI}{d\alpha}\right)_{\alpha=0} = G(q(t_1), q(t_2), \dot{q}(t_1), \dot{q}(t_2))$$

per un'opportuna funzione G .



E' anche importante notare che nella (7.23) compare la derivata di L rispetto al parametro α , *calcolata per il valore zero del parametro*.

Questa restrizione (che non é presente nel teorema di Noether) é dovuta al fatto che la famiglia di trasformazioni considerate dipende dal tempo e quindi il campo vettoriale che la genera non commuta con le traslazioni nel tempo.

ESEMPI

a)

Consideriamo un sistema di N punti materiali in R^3 descritta dalla lagrangiana

$$L(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N m_n (\dot{x}^n)^2 - \sum_{n,m=1}^N U_{n,m}(x^n - x^m)$$

(sistema con forze centrali che soddisfano in terzo principio della dinamica).

Consideriamo la trasformazione di Galileo

$$x^n \rightarrow x^n + vt, \quad v \in R^3 \quad n = 1 \dots N \quad 7.25$$

(questa trasformazione di coordinate corrisponde alla scelta di un riferimento inerziale in moto rettilineo uniforme con velocità v)

Sostituendo la (7.24) nella lagrangiana si ha

$$L(x, \dot{x}) \rightarrow L(x, \dot{x}) + \frac{dF}{dt}, \quad F(x, t) \equiv v \cdot P + \frac{1}{2} M v^2 t \quad 7.26$$

dove P é la quantità di moto del sistema e M é la massa totale.

Dunque per ogni componente v_i del vettore v

$$\left(\frac{\partial L}{\partial v_i}\right)_{v=0} = P_i = M \frac{dx_i^B}{dt}, \quad i = 1, 2, 3$$

dove x_i^B é la i^{ma} coordinata del baricentro.

Si ha anche

$$\sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^3 \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i^n} \frac{dx_i^n}{dv_j} = \sum_n \sum_i m_n t \dot{x}_j^n = P_j t$$

cosí che la quantità che viene affermata essere costante del moto é *la posizione iniziale del baricentro*

$$x_j^B(t) - \frac{P}{M} t \equiv x_j^B(0) \quad 7.27$$

(il baricentro si muove di moto rettilineo uniforme con velocità $\frac{P}{M}$).

Questa puó apparire una conclusione non significativa, poiché tutti i dati iniziali sono *per definizione* costanti del moto (hanno lo stesso valore in corrispondenza ai punti di ciascuna traiettoria).

Si può tuttavia notare che la (7.27) può essere scritta

$$x^B(t) - t\dot{x}^B(t) = C, \quad C \in R^3$$

e questa identità, letta come equazione, ha come soluzione

$$x^B(t) = C(1 + C^1 t)$$

dove C^1 è un vettore costante.

Dunque la (7.27) descrive completamente il moto del baricentro.

b)

Come secondo esempio, consideriamo la lagrangiana dell'oscillatore armonico

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}kq^2 \quad 7.28$$

e la trasformazione di coordinate

$$q \rightarrow q_\epsilon \equiv q + \epsilon \text{sen}\omega t, \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Si può notare che, essendo ogni soluzione delle equazioni di Lagrange della forma

$$A \cos \omega t + B \text{sen} \omega t$$

la trasformazione data trasforma soluzioni in soluzioni.

Per sostituzione diretta si ottiene

$$L_\epsilon(q, \dot{q}, t) \equiv L(q_\epsilon, \dot{q}_\epsilon) = \frac{1}{2}m(\dot{q} + \epsilon \omega \cos \omega t)^2 - \frac{1}{2}k(q + \epsilon \text{sen} \omega t)^2 \quad 7.29$$

così che

$$\left(\frac{\partial L_\epsilon}{\partial \epsilon} \right)_{\epsilon=0} = m\omega \dot{q} \cos \omega t - kq \text{sen} \omega t \equiv \frac{dG}{dt}$$

dove abbiamo posto

$$G \equiv m\omega q \cos \omega t$$

E' dunque conservata la quantità

$$F(q, \dot{q}, t) \equiv G - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{\partial q_\epsilon}{\partial \epsilon} = m\omega q \cos \omega t - m\dot{q} \text{sen} \omega t \quad 7.30$$

Anche in questo caso, questa può essere letta come un'equazione differenziale per il logaritmo della funzione $q(t)$ (nei punti in cui $q(t)$ non si annulla).

Le soluzioni sono precisamente le soluzioni dell'equazione dell'oscillatore armonico.

Vi sono due costanti di integrazione poiché l'equazione ottenuta è del primo ordine ma omogenea in q e \dot{q} , così che le soluzioni sono determinate a meno di una costante moltiplicativa.

c)

Consideriamo la lagrangiana che descrive il moto in R^3 di un punto materiale di massa m che viene attratto da un punto fisso (l'origine) con una forza inversamente proporzionale al quadrato della distanza (potenziale Kepleriano)

$$L(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{km}{|x|} \quad 7.31$$

Consideriamo, per ciascun valore dell'indice n , $n = 1, 2, 3$ la trasformazione

$$x_k \rightarrow x_k(\epsilon, n) \equiv x_k - \epsilon m [2x_n \dot{x}_k - x_k \dot{x}_n - (x, \dot{x}) \delta_{n,k}], \quad k = 1, 2, 3$$

dove abbiamo indicato con (x, y) il prodotto scalare dei vettori x e y .

Per sostituzione diretta si ha

$$L_{\epsilon, n} = L - \epsilon m^2 [2(\dot{x}, \ddot{x})x_n - (x, \dot{x})\ddot{x}_n - (x, \ddot{x})\dot{x}_n] + \epsilon mk \frac{(x, \dot{x})x_n - (x, x)\dot{x}_n}{|x|^3} + O(\epsilon^2)$$

così che

$$\left(\frac{\partial L_{\epsilon, n}}{\partial \epsilon} \right)_{\epsilon=0} = \frac{dG_n}{dt} \quad G_n \equiv -m^2 [(\dot{x}, \dot{x})x_n - (\dot{x}, x)\dot{x}_n] - mk \frac{x_n}{|x|} \quad 7.32$$

Ne deduciamo che è conservato il vettore A di componenti

$$A_n \equiv G_n - m\dot{x}_n \frac{\partial x_{\epsilon, n}}{\partial \epsilon} = m(\dot{x}, \dot{x})x_n - m^2(\dot{x}, x)\dot{x}_n - mk \frac{x_n}{|x|}$$

Questo vettore, detto *vettore di Runge-Lenz*, si può scrivere nella forma

$$A = p \wedge L - km \frac{x}{|x|} \quad 7.33$$

dove p è la quantità di moto ed L è il momento angolare.

Se $L = 0$ segue dalla conservazione di A che il moto si svolge interamente sulla retta diretta come A .

Se $L \neq 0$, si verifica che A è perpendicolare a L , e quindi giace nel piano del moto.

Prendendo il prodotto scalare con x e indicando con θ l'angolo tra le direzioni di x e di A si ottiene

$$|x||A|\cos\theta = (x, A) = L^2 - mk|x| \quad 7.34$$

che implica

$$|x| = L^2 [mk(1 + e\cos\theta)]^{-1}, \quad e \equiv \frac{|A|}{mk} \quad 7.35$$

Se $|A| < mk$ (cioè se l'energia corrispondente al dato iniziale scelto è negativa) la (7.35) è l'equazione parametrica di un'ellisse di eccentricità e , con fuoco nell'origine e semiasse maggiore diretto secondo A .

APPENDICE alla Lezione 7: GRUPPI DI SIMMETRIA CHE DIPENDONO DA PIU' PARAMETRI; PRODOTTO DI LIE DI CAMPI VETTORIALI.

Ci poniamo ora il seguente problema.

Supponiamo che il gruppo G di trasformazioni che lascia invariante in forma la lagrangiana contenga più sottogruppi a un parametro tra loro distinti, ciascuno dipendente in modo differenziabile dal suo parametro.

In che misura è possibile estendere il Teorema di Noether ?

Ovviamente la parte (b) \leftrightarrow (c) del Teorema implica che esistono tanti momenti conservati, localmente indipendenti, quanti sono i sottogruppi ad un parametro indipendenti contenuti in G (due sottogruppi sono indipendenti se, in ogni punto dello spazio delle configurazioni i corrispondenti campi vettoriali sono linearmente indipendenti).

Vogliamo ora determinare sotto quali ipotesi sia possibile generalizzare l'implicazione (c) \rightarrow (a).

Vogliamo ad esempio determinare le condizioni sotto le quali l'invarianza della lagrangiana sotto *due* diversi gruppi ad un parametro di trasformazioni implica che é possibile scegliere un sistema di coordinate tale che *due* di esse siano cicliche.

Vedremo che questo *non é sempre possibile*. Ad esempio, se la lagrangiana L é invariante per il gruppo delle rotazioni in R^3 , essa é invariante per tre gruppi a un parametro di simmetrie (ad esempio le rotazioni attorno a tre assi prefissati e distinti fra loro) ma in generale una sola delle coordinate associate é ciclica.

Ad esempio, se si utilizzano coordinate sferiche, la latitudine non é una variabile ciclica, perché appare nel termine di energia cinetica).

Si ha

Proposizione 7A.1

Consideriamo due gruppi ad un parametro G^1 e G^2 di diffeomorfismi dello spazio delle configurazioni; un sistema di coordinate tale che due di esse siano cicliche per ogni Lagrangiana L che sia lasciata invariante in forma sia da G^1 che da G^2 può essere trovato *se e solo se* é soddisfatta la relazione

$$\phi^1(\alpha) \cdot \phi^2(\beta) = \phi^2(\beta) \cdot \phi^1(\alpha) \quad \forall \alpha, \beta \quad 7A.1$$

dove $\phi^1(\alpha)$ e $\phi^2(\beta)$ sono gli elementi di G^1 e G^2 rispettivamente.

Se vale (7A.1) i parametri α e β possono essere utilizzati come coordinate.

◇

La Proposizione 7A.1 é un caso particolare (per due campi vettoriali) di un teorema di Frobenius, che enunceremo e analizzeremo in seguito.

A questo scopo sará utile introdurre una struttura di algebra per i campi vettoriali sufficientemente regolari.

Ricordiamo che un campo vettoriale ξ può essere identificato con una derivazione ∂_ξ sulle funzioni differenziabili sulla varietà Σ (spazio delle configurazioni).

Se la varietà Σ ha dimensione N e se in un sistema di coordinate il campo vettoriale é identificato in un intorno \mathcal{N} di $\sigma \in \Sigma$ dalla N^{pla} di funzioni $\{f_k(q)\}$, allora in quel sistema di coordinate la derivazione ∂_ξ é rappresentata dalla operazione

$$\sum_{k=1}^N f_k(q) \frac{\partial}{\partial q_k}$$

Dati due campi vettoriali ξ, ζ consideriamo l'operazione

$$\partial_\xi \partial_\zeta - \partial_\zeta \partial_\xi \quad 7A.2$$

definita su funzioni due volte differenziabili, e verifichiamo che si tratta di una derivazione.

Naturalmente (7A.2) é ben definita solo se le funzioni $\{f_k\}$, $\{g_k\}$ che rappresentano i due campi vettoriali sono differenziabili.

L'operazione (7A.2) é ovviamente lineare. Per verificare che essa rappresenta una derivazione, basta dunque verificare che soddisfa la regola di Leibnitz.

Per due funzioni due volte differenziabili A e B e per due campi vettoriali differenziabili ξ e ζ valutiamo $(\partial_\xi \partial_\zeta - \partial_\zeta \partial_\xi)(AB)$;

Si ha

$$\partial_\xi (\partial_\zeta (AB)) = \partial_\xi (B \partial_\zeta A + A \partial_\zeta B) = (\partial_\xi B) (\partial_\zeta A) + B \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \zeta} A + (A \leftrightarrow B)$$

Sottraendo l'espressione che si ottiene scambiando tra loro ∂_ξ e ∂_ζ i termini che contengono derivate seconde si elidono e si ottiene

$$(\partial_\xi \partial_\zeta - \partial_\zeta \partial_\xi)(AB) = A(\partial_\xi \partial_\zeta - \partial_\zeta \partial_\xi)B + B(\partial_\xi \partial_\zeta - \partial_\zeta \partial_\xi)A \quad 7A.3$$

Questo dimostra che (7A.2) definisce una derivazione.

Al campo vettoriale cosí definito si dá il nome *prodotto di Lie* dei due campi ξ e ζ .

Diamo ora l'espressione esplicita, nelle coordinate q che parametrizzano la varietà Σ , del prodotto di Lie di due campi vettoriali che, nelle coordinate q , siano rappresentati dalle funzioni $\{f_k\}$ e $\{g_k\}$, $k = 1 \dots N$.

Se A é una funzione due volte differenziabile delle coordinate q_k scelte, si ha

$$\partial_\xi(\partial_\zeta A) \equiv \sum_k f_k(q) \frac{\partial}{\partial q_k}(\partial_\zeta A) = \sum_k f_k(q) \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\sum_h g_h(q) \frac{\partial A}{\partial q_h} \right).$$

Pertanto, svolgendo le derivate del prodotto, si ha

$$\partial_\xi \cdot \partial_\zeta A - \partial_\zeta \cdot \partial_\xi A = \partial_{[\xi, \zeta]} A \quad 7A.4$$

dove il campo vettoriale $[\xi, \zeta]$ é rappresentato nelle coordinate q dalla N-pla di funzioni

$$\sum_h \left(f_h \frac{\partial g_k}{\partial q_h} - g_h \frac{\partial f_k}{\partial q_h} \right), \quad k = 1 \dots n \quad 7A.5$$

Si puó notare che $[\xi, \zeta]$ risulta definito, attraverso la (7A.4), come derivazione sulle funzioni di classe C^1 , sebbene nella sua definizione siano state utilizzate solo funzioni di classe C^2 .

Notiamo che se, in un sistema di coordinate q , i campi vettoriali ξ e ζ sono rappresentati in un intorno \mathcal{N} di un punto $\sigma \in \Sigma$ da funzioni che assumono valori costanti in \mathcal{N} , allora $[\xi, \zeta] = 0$ in \mathcal{N} .

Questo dimostra la parte *necessaria* del seguente Teorema

Teorema 7A.2 (Frobenius)

Sia data una varietà Σ di dimensione N e un intorno Ω di un punto $\sigma \in \Sigma$.

Indichiamo con ξ^i , $i = 1 \dots M$ M campi vettoriali, dove l'intero M é non maggiore della dimensione di Σ .

La condizione $[\xi^i, \xi^j] = 0$ $i, j = 1 \dots M$ é condizione *necessaria e sufficiente* affinché sia possibile scegliere in un intorno Ω' di σ (eventualmente piú piccolo di Ω) coordinate $q_1 \dots q_M$ tali che per $i = 1 \dots M$ il campo vettoriale ξ^i sia rappresentato in Ω' da $\frac{\partial}{\partial q_i}$.

◇

Dimostrazione

La condizione é necessaria.

Infatti, se esiste un sistema di coordinate con le proprietà descritte, in queste coordinate si ha $\xi^k = \frac{\partial}{\partial q_k}$.

Dunque in queste coordinate si ha $[\xi^k, \xi^i] = 0 \forall k, i$; d'altra parte la definizione di prodotto di Lie é indipendente dal sistema di coordinate scelto.

Non daremo invece i dettagli della dimostrazione della sufficienza, limitandoci a darne una traccia attraverso le considerazioni che seguono.

Si noti che la conclusione sulla rappresentabilità dei campi vettoriali ξ^i é equivalente all'affermazione che per ogni valore dell'indice i il gruppo di trasformazioni associato al campo ξ^i é dato da

$$q_i \rightarrow q_i + \alpha \quad q_k \rightarrow q_k \text{ se } k \neq i \quad 7A.6$$

La dimostrazione del fatto che la condizione nel Teorema di Frobenius é sufficiente si ottiene, come nella dimostrazione del Teorema dell'intorno tubolare (vedere Appendice alla Lezione 9), dal Teorema della Funzione Inversa, applicato ora a funzioni da Σ ad R^N (anziché R^1).

Questo permette di dimostrare che i parametri dei sottogruppi associati ai campi vettoriali ξ^i possono essere utilizzati come coordinate indipendenti, almeno in un intorno abbastanza piccolo del punto σ considerato.

♡

Dimostriamo ora un risultato che é utile per costruire, a partire da momenti conservati, altre costanti del moto.

Proposizione 7A.3

Se i campi vettoriali ξ^1 e ξ^2 corrispondono a gruppi di simmetria di una lagrangiana L, anche il campo vettoriale $[\xi^1, \xi^2]$ corrisponde a un gruppo di simmetria di L.

◇

Dimostrazione

Abbiamo già notato che per studiare la trasformazione di L per un gruppo di trasformazioni G associato ad un campo vettoriale ξ sulla varietà Σ (spazio delle configurazioni) é necessario innanzitutto costruire il *sollevamento* \hat{G} di questo gruppo a $T\Sigma$ (spazio delle posizioni e velocità).

Al gruppo di trasformazioni \hat{G} corrisponderá allora un campo vettoriale $\hat{\xi}$ sulla varietà $T\Sigma$ (quindi un elemento di $T(T\Sigma)$, che chiameremo *sollevato di ξ*).

Se $\{f_k(q)\}$ é la N-pla che rappresenta il campo vettoriale ξ quando si utilizzano le coordinate q , e se $\{q_k, \eta_k\}$ sono le coordinate utilizzate per descrivere $T\Sigma$ (almeno in intorno del punto considerato), allora $\hat{\xi}$ é rappresentato dalla n-pla di funzioni

$$\{f_k(q), \sum_{h=1}^N \frac{\partial f_k(q)}{\partial q_h} \cdot \eta_h\} \quad 7A.7$$

Notare che la dipendenza dalle coordinate η_k é lineare.

La (7A.7) può essere verificata facilmente nel modo seguente.

Sia $Q(q, \alpha)$ la soluzione (locale) del sistema di equazioni

$$\frac{dq_k}{d\alpha} = f_k(q) \quad 7A.8$$

Per una generica funzione differenziabile F su $T\Sigma$, utilizzando il teorema di derivazione di funzioni composte, si ha

$$\frac{dF}{d\alpha} = \sum_k f_k \frac{\partial F}{\partial q_k} + \sum_k \frac{\partial F}{\partial \eta_k} \frac{d\eta_k}{d\alpha} = \sum_k f_k \frac{\partial F}{\partial q_k} + \sum_{k,m} \frac{\partial F}{\partial \eta_k} \frac{\partial f_k}{\partial q_m} \eta_m \equiv \partial_{T\xi} F \quad 7A.9$$

da cui si ottiene (7A.7).

Se ξ, ζ sono due campi vettoriali su Σ , si può costruire il prodotto di Lie dei corrispondenti campi *sollevati* $\hat{\xi}, \hat{\zeta}$.

Sarà utile conoscere la relazione tra questi due prodotti di Lie.

Se ξ, ζ sono due campi vettoriali, descritti dalle funzioni $\{f_k\}, \{g_k\}$ rispettivamente, se α, β sono i parametri dei corrispondenti gruppi di trasformazione e se F é una funzione due volte differenziabile su $T\Sigma$, sviluppando esplicitamente, utilizzando (7A.9) il calcolo di

$$\frac{d}{d\beta} \left(\frac{dF}{d\alpha} \right) - \frac{d}{d\alpha} \left(\frac{dF}{d\beta} \right)$$

si verifica facilmente la seguente importante relazione:

$$[\hat{\xi}, \hat{\zeta}] = [\xi, \zeta] \quad 7A.10$$

Dalla (7A.10) segue subito che

$$[\xi, \zeta] = 0 \Leftrightarrow [\hat{\xi}, \hat{\zeta}] = 0 \quad 7A.11$$

Possiamo ora dimostrare la Proposizione 7A.3; se L é invariante per l'azione dei gruppi di simmetria che corrispondono ai campi vettoriali ξ_1 e ξ_2 , si ha per definizione $\partial_{\xi_k} L = 0$, $k = 1, 2$. Dunque, ricordando la definizione di prodotto di Lie,

$$\partial_{[\hat{\xi}_1, \hat{\xi}_2]} L = 0 \quad 7A.12$$

Da (7A.12) segue allora $\partial_{[\xi_1, \xi_2]} L = 0$ e questo conclude la dimostrazione della Proposizione 7A.3.

♡

Diamo ora alcuni esempi di prodotti di Lie per classi speciali di campi vettoriali.

ESEMPIO 1

Supponiamo che le funzioni f_k^1, f_k^2 che rappresentano i campi vettoriali ξ^1 e ξ^2 nelle variabili q siano lineari, e quindi corrispondano a matrici A^1, A^2 :

$$f_k^i = \sum_{m=1}^n A_{k,m}^i x_m \quad i = 1, 2, \quad k = 1 \dots n \quad 7A.13$$

Dalla definizione di $[\xi_1, \xi_2]$ segue che anche questo campo vettoriale é rappresentato nelle variabili q da funzioni lineari, e la matrice corrispondente é

$$[A^1, A^2] \equiv (A^1 A^2 - A^2 A^1)$$

Questa identitá giustifica l'uso dello stesso simbolo per denotare il prodotto di Lie di due campi vettoriali e il "commutatore" di due matrici.

In particolare se ξ^1, ξ^2 corrispondono a rotazioni attorno a due assi cartesiani tra loro ortogonali \hat{x}^1 e \hat{x}^2 , si ottiene $[\xi^1, \xi^2] = \xi^3$, dove ξ^3 corrisponde a rotazioni attorno all'asse $\hat{x}_3 \equiv \hat{x}_1 \wedge \hat{x}_2$.

Dal teorema di Noether segue allora che, per un sistema lagrangiano, la conservazione di due componenti del momento della quantitá di moto implica la conservazione della terza componente.

ESEMPIO 2

Sia $N=3$ e supponiamo che i campi vettoriali ξ e ζ siano descritti nelle coordinate q dalle funzioni $f_k(q) \equiv (r \wedge q)_k$ e $g_k(q) \equiv (s \wedge q)_k$ dove r ed s sono due vettori preassegnati.

Dalle definizioni segue che $[\xi, \zeta]$ é rappresentato dalle funzioni $((r \wedge s) \wedge q)$.

Questo giustifica l'uso che viene spesso fatto della notazione $[r, s]$ anziché $r \wedge s$ per individuare il prodotto esterno dei due vettori $r, s \in R^3$.

ESEMPIO 3

Consideriamo per un sistema composto da punti materiali le tre componenti P_k del momento associato dalla lagrangiana L alle coordinate del baricentro del sistema

Se il sistema é isolato l'invarianza per traslazioni spaziali assicura le P_k sono costanti del moto.

In un sistema meccanico composto da N punti in R^3 si ha

$$P_k = \sum_{i=1}^N m_i \dot{x}_k^i = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k^i} \quad k = 1, 2, 3. \quad 7A.14$$

Si può notare da questo esempio, poiché $[\xi^k, \xi^h] = 0$, che la conservazione di due componenti della quantità di moto *non* implica che anche la terza componente sia conservata.

Nota 7A.1

Si può verificare, dalla sua definizione, che il prodotto di Lie gode delle seguenti proprietà:

i)

ANTISIMMETRIA

$$[\xi^1, \xi^2] = -[\xi^2, \xi^1]$$

ii)

IDENTITA' DI JACOBI

$$[\xi^1, [\xi^2, \xi^3]] + [\xi^2, [\xi^3, \xi^1]] + [\xi^3, [\xi^1, \xi^2]] = 0$$

iii)

LINEARITA'

$$[(\xi^1 + \xi^2), \xi^3] = [\xi^1, \xi^3] + [\xi^2, \xi^3]$$



Ricordiamo che i campi vettoriali formano uno spazio lineare; il campo vettoriale $\alpha\xi^1 + \xi^2$, $\alpha \in R$, è definito dalla relazione $\partial_{\alpha\xi^1 + \xi^2} \equiv \alpha^{-1}\partial_{\xi^1} + \partial_{\xi^2}$.

Dagli esempi 1 e 2 dati sopra si deduce che questa è la stessa struttura algebrica che hanno le matrici quando per operazione "prodotto" si prende il commutatore, e i vettori quando per operazione "prodotto" si prende il prodotto esterno (prodotto vettoriale).

Definizione 7A.1

Un insieme di campi vettoriali (su di una superficie Σ) che è chiuso per l'operazione *prodotto di Lie* è indicato con il nome di *algebra di Lie* (di campi vettoriali su Σ).



Abbiamo dunque dimostrato che l'insieme dei campi vettoriali cui sono associati gruppi di simmetria di una Lagrangiana L forma un'algebra di Lie.

PROBLEMA

Dimostrare che, per un punto materiale di massa m in R^3 , se sono conservate due componenti del momento della quantità di moto ed una componente della quantità di moto, allora sono conservati sia la quantità di moto che il momento della quantità di moto.

Lezione 7. SIMMETRIE E COSTANTI DEL MOTO. TEOREMA DI NOETHER

Appendice: Prodotto di lie di campi vettoriali

In questa Lezione analizziamo la relazione tra gruppi continui di simmetria e costanti del moto per un sistema Lagrangiano.

Nella prima Lezione abbiamo notato come l'esistenza di costanti del moto permetta di ridurre lo studio di un sistema dinamico a quello di sistemi piú semplici. La relazione che studieremo tra simmetrie e costanti del moto rende quindi importante lo studio delle simmetrie continue dei sistemi lagrangiani.

Il punto centrale di questa Lezione é il teorema di Emmy Noether; si tratta di uno dei risultati che ha avuto piú importanza nello sviluppo della Meccanica Analitica

Supponiamo che il sistema in esame sia di tipo lagrangiano e che la lagrangiana L sia "invariante" (in un senso che renderemo preciso nel seguito) per un gruppo a un parametro di diffeomorfismi che agisce nello spazio delle configurazioni ed é differenziabile nel parametro $\alpha \in R$.

Indichiamo con G tale gruppo, con $g(\alpha)$, $\alpha \in R$ i suoi elementi, con legge di composizione $g(\beta) \cdot g(\alpha) = g(\alpha + \beta)$.

Nel seguito, per semplicitá di presentazione, assumeremo che lo spazio delle configurazioni sia identificabile con R^N mediante un'opportuna scelta di coordinate cartesiane, cosí che ciascun elemento $g(\alpha)$ risulti essere una trasformazione di coordinate, differenziabile e con inverso differenziabile, che indicheremo con

$$q \rightarrow Q(q; \alpha), \quad \alpha \in R, \quad q, Q \in R^N \quad 7.1$$

Questa ipotesi non é restrittiva, poiché tutta l'analisi che faremo é *locale* (nel senso che fará riferimento solo a quantitá definite in un intorno di un punto generico nello spazio delle configurazioni) ; per ottenere una costante del moto *globale* si deve richiedere che la Lagrangiana sia invariante *come funzione sul fibrato tangente*.

Questo richiederá estendere al fibrato tangente il gruppo di trasformazioni, inizialmente definito solo sullo spazio delle configurazioni .

Se il gruppo di simmetria é locale la costante del moto sará solo locale.

Come vedremo in seguito (teorema di rettificazione, Appendice alla Lezione 9) ogni sistema dinamico é rettificabile in un intorno di ogni punto che non sia di equilibrio.

Siamo quindi interessati solamente al caso in cui il gruppo di simmetria sia definito *globalmente*.

Notiamo che al gruppo G di trasformazioni é associato in modo biunivoco un campo vettoriale in R^N .

Infatti, per le proprietá di gruppo sará

$$Q(q; \alpha + \beta) = Q(Q(q; \alpha); \beta) \quad 7.2$$

e quindi la derivata

$$\frac{dQ}{d\alpha} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^{-1} [Q(Q(q; \alpha); \epsilon) - Q(q; \alpha)] \equiv F(Q)$$

dipende da q solo attraverso la funzione $Q(q; \alpha)$.

La (7.1) é dunque il flusso di

$$\frac{dq}{d\alpha} = F(q) \quad 7.3$$

Nel seguito faremo sempre l'ipotesi che la trasformazione descritta in (7.1) sia congiuntamente differenziabile in q e α e inoltre che F sia differenziabile come funzione di q .

Viceversa, dato un campo vettoriale F su R^N , che assumiamo differenziabile e uniformemente limitato, indichiamo con $Q(q, \alpha)$ la soluzione dell'equazione

$$\frac{dQ}{d\alpha} = F(Q), \quad Q(q; 0) = q \quad q \in R^N \quad 7.4$$

Per le ipotesi fatte su F , la soluzione di (7.4) esiste ed é unica per ogni α ed ogni $q \in R^N$. Inoltre, poiché (7.4) é un sistema autonomo (il campo vettoriale dipende da Q ma non esplicitamente da α), la soluzione $Q(q; \alpha)$ soddisfa (7.2) per ogni q , e quindi le trasformazioni definite da

$$g(\alpha) : q \rightarrow Q(q; \alpha) \quad 7.5$$

formano gruppo, con legge di composizione $g(\alpha) \cdot g(\beta) = g(\alpha + \beta)$.

Nel seguito, diremo che F é il campo vettoriale *associato* al gruppo di trasformazioni $G \equiv \{g(\alpha)\}$ e che G é il gruppo di trasformazioni *associato* al campo vettoriale F .

Per un sistema meccanico il cui spazio delle configurazioni é una varietà Σ la lagrangiana é una funzione definita su $T\Sigma$ (in coordinate, é una funzione di posizione e di velocità).

Per discutere dell' *azione del gruppo G di diffeomorfismi di Σ* sulla lagrangiana L é dunque necessario innanzitutto definire l'azione di G sul fibrato tangente $T\Sigma$.

Questo *sollevamento* viene fatto in modo naturale ricordando che un elemento di $T_q\Sigma$ (lo spazio tangente a Σ nel punto q) puó essere identificato con il vettore tangente in q ad una curva γ su Σ .

Il sollevato del vettore tangente é *per definizione il vettore tangente alla curva immagine* di γ . In coordinate, se la trasformazione indotta dal gruppo é espressa da $q \rightarrow Q(q; \alpha)$ l'estensione dell'azione di G é data da

$$\frac{dq}{d\tau} \rightarrow J(q, Q(q, \alpha)) \frac{dQ}{d\tau} \quad 7.6$$

dove $J(x, y)$ é lo Jacobiano della trasformazione $x \rightarrow y$ e τ é il parametro utilizzato per parametrizzare la curva γ .

Nel seguito, indicheremo con $g(\alpha)$ la legge di trasformazione (7.6).

Convien notare che il campo vettoriale nella (7.5) é indipendente dal parametro τ ; é anche importante mettere in evidenza che il fatto che il parametro τ gioca un ruolo diverso da quello del parametro α introdotto precedentemente.

In particolare, τ *non é associato a un campo vettoriale*; infatti per ogni $\sigma \in \Sigma$ qualunque elemento di $T_\sigma\Sigma$ individua la velocità di un moto *possibile* (per un'opportuna scelta di forze applicate).

Nota 7.1

Comunemente il parametro τ é identificato con il tempo, almeno se Σ é la superficie di vincolo per un sistema meccanico, con vincoli olonomi bilateri indipendenti dal tempo.

Piú in generale, τ é connesso alla definizione di *moto virtuale*, e anche alle *variazioni sincrone* nella formulazione dei principi variazionali.



Riprendendo ora l'analisi dei sistemi Lagrangiani, notiamo che lo spazio delle configurazioni puó essere localmente identificato con R^N , con coordinate cartesiane $q_1 \dots q_N$.

Se una di queste coordinate (ad esempio q_N) é ciclica, la Lagrangiana risulta per costruzione invariante per il gruppo di trasformazioni G che si ottiene *sollevando* (nel senso descritto sopra) i diffeomorfismi definiti per ciascun α da

$$Q_i(q, \alpha) = q_i, \quad i = 1 \dots N - 1, \quad Q_N(q, \alpha) = q_N + \alpha \quad 7.7$$

(notare che $\frac{dQ_k(q,\alpha)}{d\alpha} = \frac{dq_k}{d\alpha} \quad \forall k$).

D'altra parte, abbiamo visto che se una variabile é ciclica lo studio del sistema puó essere ricondotto a quello di un sistema lagrangiano che ha un grado di libertá in meno (sistema ridotto).

Data l'importanza di questo processo di riduzione, é naturalmente interessante sapere sotto quali condizioni é possibile utilizzarlo anche quando il sistema ammette un gruppo continuo di simmetrie ma *nessuna delle coordinate utilizzate é ciclica* e lo spazio delle configurazioni é una generica varietá (e non é quindi possibile utilizzare un solo sistema di coordinate).

Il teorema di Noether andrà in questa direzione, affermando che la riduzione é possibile se la Lagrangiana L ammette un gruppo ad un parametro (differenziabile) di simmetrie, cioè esiste un gruppo di diffeomorfismi dello spazio delle configurazioni che (opportunamente sollevato) lascia L invariante in forma.

Naturalmente se il gruppo di simmetria agisce solo localmente la costante del moto sarà in generale sono locale. In questo caso il risultato puó non avere rilevanza: infatti vedremo in seguito che *localmente per un sistema lagrangiano con N gradi di libertá é sempre possibile trovare $(2N - 1)$ integrali primi*.

Nel seguito di questa Lezione consideremo sempre gruppi di simmetria globale.

Sará allora naturale porsi il seguente problema: se la Lagrangiana L di un sistema con N gradi di libertá ammette un gruppo di simmetrie G che contiene M sottogruppi a un parametro G_i differenziabili e con generatori linearmente indipendenti, é possibile ridursi allo studio di un sistema (lagrangiano) che ha $N-M$ gradi di libertá?

Vedremo che la risposta é in generale *negativa*.

Affinché la riduzione sia possibile sarà necessario che valga la relazione

$$g_i(\alpha) \cdot g_k(\beta) = g_k(\beta) \cdot g_i(\alpha) \quad \forall i, k, \alpha, \beta \quad 7.8$$

La corrispondente proprietá dei campi vettoriali associati ai sottogruppi sarà una proprietá di *commutativitá* che descriveremo nel seguito di questa Lezione.

Se questa proprietá (o equivalentemente la (7.8)) é soddisfatta, diremo che é soddisfatto il Teorema di Noether in forma generalizzata.

Anche se la (7.8) non é soddisfatta, in molti casi si puó dimostrare che esistono *non meno* di M costanti del moto, tra loro funzionalmente indipendenti.

Questo permetterà di considerare un sistema *ridotto*, ottenuto restringendo il sistema in esame alla superficie di codimensione M nello spazio delle fasi (*non delle configurazioni!*) ottenuta fissando (mediante i dati iniziali) il valore numerico delle M costanti del moto.

Se il sistema é autonomo, la conservazione dell'energia permette un'ulteriore riduzione ad una varietá di codimensione $M+1$.

Questa riduzione puó rivelarsi utile in casi relativamente semplici, e portare ad una soluzione completa delle equazioni di Lagrange.

Tuttavia é importante notare che il sistema ridotto che si ottiene *non é in generale lagrangiano* e *non descrive* in generale un sistema con un numero minore di gradi di libertá.

Nota 7.2

Un esempio notevole in cui (7.8) non é soddisfatta ma la riduzione porta a risultati molto interessanti, si trova nella descrizione del moto di un corpo rigido con un punto fisso, in assenza di forze esterne.

Il sistema in esame ha tre gradi di libertá, cosí che lo spazio delle fasi ha dimensione 6.

Sono costanti del moto l'energia e le componenti del momento angolare secondo tre direzioni distinte.

Poiché il gruppo delle rotazioni (che lascia la Lagrangiana invariante in forma) *non contiene due sottogruppi ad un parametro che soddisfino (7.8)*, non é possibile applicare direttamente il teorema di Noether e ridursi cosí ad un sistema lagrangiano ad un grado di libert a.

Questo é possibile attraverso un procedimento essenzialmente diverso, che utilizza come coordinate gli angoli di Eulero, che *non sono coordinate di rotazione attorno ad assi fissi*.

Discuteremo gli angoli di Eulero nella prossima Lezione.

D'altra parte, essendo presenti quattro costanti del moto, che risultano essere funzionalmente indipendenti (almeno genericamente), per ogni dato iniziale il moto del sistema pu  essere ricondotto ad un moto che ha luogo su una variet  di dimensione due.

Per una generica scelta dei dati iniziali questa variet  é un toro (poich  ammette un campo vettoriale che non si annulla mai) e quindi il moto pu  essere descritto mediante due angoli ed é in generale multiperiodico.

Tuttavia le equazioni corrispondenti *non sono lagrangiane* (la descrizione cosí ottenuta corrisponde a quella geometrica che utilizza la poloide e l'erpoloide).



Prima di enunciare il teorema di Noether, conviene sviluppare brevemente un formalismo che render  pi  facile la presentazione.

Ricordiamo che un campo vettoriale ξ su di una variet  Σ é una legge che fa corrispondere ad ogni punto σ di Σ un elemento ξ_σ di $T_\sigma\Sigma$.

L'applicazione

$$\sigma \rightarrow \{\sigma, \xi_\sigma\} \quad 7.9$$

  dunque una funzione da Σ a $T\Sigma$

Considerando il grafico della funzione $\sigma \rightarrow \xi_\sigma$ si pu  anche dire che un campo vettoriale é una sezione del fibrato tangente $T\Sigma$.

Il campo vettoriale ξ viene spesso identificato con una *derivazione* ∂_ξ definita sulle funzioni differenziabili su Σ .

Ricordiamo che una derivazione é un'operazione lineare che soddisfa la regola di Leibnitz per il prodotto.

Se $q_1 \dots q_N$ sono coordinate utilizzate in un intorno \mathcal{N} di σ , il campo ξ é individuato in \mathcal{N} da N funzioni $f_k(q)$, $k = 1 \dots N$ e l'operazione di derivazione associata é, per ogni funzione differenziabile $A(q)$,

$$\partial_\xi A(q) = \sum_{k=1}^N f_k(q) \frac{\partial A}{\partial q_k} \quad 7.10$$

Si noti che

$$\partial_\xi A(q) = \left(\frac{dA(Q(q, \alpha))}{d\alpha} \right)_{\alpha=0}$$

dove $q \rightarrow Q(q, \alpha)$ é il gruppo ad un parametro di trasformazioni associato a ξ .

Da questa osservazione segue che l'operazione ∂_ξ *non dipende dal sistema di coordinate scelto* (ne dipende naturalmente *la forma esplicita* di ξ).

Se $\{y_k\}$ é un altro sistema di coordinate, ξ é anche rappresentato dalla n-pla di funzioni $\{f'_k(y)\}$, $k = 1 \dots N$

$$f'_k(y) = \sum_{h=1}^N J_{k,h}(q(y)) f_h(q(y)), \quad J_{k,h} = \frac{\partial y_k}{\partial y_h} \quad 7.11$$

(J é la matrice Jacobiana della trasformazione).

Da (7.10) segue infine che per definizione di differenziale si ha

$$dA(\xi) = \partial_\xi A \quad 7.12$$

Nota 7.3

La derivazione associata al campo vettoriale ξ é spesso indicata con il simbolo X_ξ anziché ∂_ξ .



MOMENTI ASSOCIATI A CAMPI VETTORIALI (APPLICAZIONE MOMENTO)

Introduciamo ora la definizione di *momento* associato ad un campo vettoriale (*attraverso una Lagrangiana L*).

Ricordiamo che L é una funzione definita su $T\Sigma$.

Se τ é un punto di $T\Sigma$, in un intorno di τ utilizziamo coordinate $q_1 \dots q_N, \eta_1 \dots \eta_N$.

Le coordinate q_1, \dots, q_N sono coordinate cartesiane che descrivono un intorno di un punto Q su Σ e $\eta_1 \dots \eta_N$ sono coordinate cartesiane in $T\Sigma$ sulla fibra associata a Q .

In altre parole, le q_k sono coordinate *di posizione* e le η_k sono coordinate *di velocità*.

Per definizione il momento associato dalla lagrangiana L al campo vettoriale $\xi \equiv \{f_k\}$ é la funzione su $T\Sigma$ definita (localmente) da

$$\pi_\xi^L(q, \eta) \equiv \sum_{k=1}^N f_k(q) \frac{\partial L}{\partial \eta_k}(q, \eta) = D_2 L(\xi) \quad 7.13$$

dove abbiamo indicato con $D_2 L$ il differenziale di L considerata come funzione del secondo insieme di coordinate, cioè delle η .

Se ξ é un campo vettoriale, indicheremo con π_ξ^L o anche p_ξ^L il corrispondente momento (l'apice L verrà spesso sottinteso).

In ogni punto σ dello spazio delle configurazioni la (7.13) definisce una funzione lineare sullo spazio tangente, dunque un elemento del duale di $T_\sigma \Sigma$.

Questo spazio vettoriale viene indicato con il simbolo $T_\sigma^* \Sigma$; lo spazio ottenuto fibrando Σ con gli spazi vettoriali $T_\sigma^* \Sigma$ viene indicato con il simbolo $T\Sigma^*$ ed é detto fibrato cotangente.

I suoi elementi sono le forme differenziali.

Definizione 7.1 : Applicazione Momento (Momentum Map)

L'operazione π^L da $T\Sigma$ a $T^* \Sigma$ che associa al campo vettoriale ξ la forma differenziale. π_ξ^L é detta *Applicazione Momento* (in inglese, *Momentum Map*).



Se $D_2 L$ é invertibile, cioè se

$$\det \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \eta_k \partial \eta_h} \right) \neq 0 \quad 7.14$$

la (7.13) determina ξ univocamente se é nota la funzione π^L .

In questo caso, dato un momento π indicheremo con ξ_π^L il campo vettoriale così individuato.

Se (7.14) é verificata, π^L é un diffeomorfismo e il suo inverso é l'applicazione

$$\xi^L : \pi \Rightarrow \xi_\pi^L \quad 7.15$$

E' importante notare che la funzione π_ξ^L sullo spazio delle fasi definita in (7.11) dipende dalla lagrangiana L e dal campo vettoriale ξ ma *non dal sistema di coordinate scelto*.

Per verificare questo, sia $\{q', \eta'\}$ un altro sistema di coordinate. Si ha

$$\frac{\partial L}{\partial \eta'_k} = \sum_h \frac{\partial L}{\partial \eta_h} \frac{\partial \eta_h}{\partial \eta'_k}$$

cosí che

$$\sum_k f'_k(q') \frac{\partial L}{\partial \eta'_k} = \sum_k \sum_h \sum_s f_h(q) \frac{\partial q'_k}{\partial q_h} \frac{\partial \eta_s}{\partial \eta'_k} \frac{\partial L}{\partial \eta_s}$$

Le coordinate $\{\eta\}$ si trasformano come le \dot{q} , quindi

$$\frac{\partial \eta_s}{\partial \eta'_k} = \frac{\partial q_s}{\partial q'_k}$$

e dunque

$$\sum_k \frac{\partial q'_k}{\partial q_h} \frac{\partial \eta_s}{\partial \eta'_k} = \delta_{h,s}$$

da cui segue l'asserto.

Nota 7.4

Se L é quadratica omogenea nelle velocità, allora la funzione π_ξ^L dipende linearmente dalle η_k e quindi *in questo caso i momenti sono funzioni lineari delle velocità*.

Tuttavia questo non é vero in generale; ad esempio non é vero per le lagrangiane dei sistemi relativistici.



Nota 7.5

Il fatto che l'applicazione $\xi \rightarrow \pi_\xi$ sia ben definita può anche essere espressa dicendo che la legge di trasformazione della n^{pla} di funzioni f_k in (7.13) per trasformazioni di coordinate coincide con la legge di trasformazione delle componenti di un campo vettoriale.



ESEMPI di corrispondenza

Casi particolari ma significativi di questa corrispondenza tra momenti e campi vettoriali (cioé tra spazio tangente e spazio cotangente in ciascun punto dello spazio delle configurazioni) sono i seguenti:

i)

Se $\xi_k, k = 1, 2, 3$ é il campo vettoriale associato alla traslazione rigida di E^3 nella direzione \hat{k} (secondo una terna cartesiana prefissata) il momento corrispondente $\pi_{\xi_k}^L$ é la componente k^{ma} della quantità di moto del sistema descritto dalla Lagrangiana L .

ii)

Se ξ_ζ é il campo vettoriale associato alla rotazione attorno all'asse ζ , il momento corrispondente $\pi_{\xi_\zeta}^L$ é il momento angolare del sistema.

Queste affermazioni si verificano facilmente per sistemi di N punti materiali, relativistici e non. Per le traslazioni rigide, conviene utilizzare coordinate cartesiane e notare che il campo ξ_k é associato al gruppo ad un parametro di trasformazioni

$$x_h^i \rightarrow x_h^i, \quad k \neq h, \quad x_k^i \rightarrow x_k^i + \alpha \quad \forall i = 1 \dots N$$

Per le rotazioni, conviene utilizzare coordinate cilindriche ponendo l'asse del cilindro nella direzione dell'asse ζ e notare che in queste coordinate il gruppo di trasformazioni associato a ξ_ζ é dato da

$$\rho^i \rightarrow \rho^i \quad z^i \rightarrow z^i \quad \theta^i \rightarrow \theta^i + \alpha \quad \forall i$$

Definizione 7.2

Si dá il nome di *Momento coniugato alla variabile q_k* al momento che corrisponde al campo vettoriale $\partial_{q_k} \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$.

◇

TEOREMA DI NOETHER

Con le notazioni fin qui sviluppate, possiamo ora enunciare il Teorema di Noether

Teorema 7.1 (Noether)

Per ogni sistema lagrangiano e per ogni intorno di un punto dello spazio delle configurazioni le seguenti tre affermazioni sono tra loro equivalenti:

a)

E' possibile scegliere le coordinate in modo che una di esse sia ciclica.

b)

Esiste un momento conservato; il campo vettoriale associato é continuo.

c)

La Lagrangiana é invariante per il sollevamento di un gruppo ad un parametro di trasformazioni di coordinate che dipendono in modo differenziabile dal parametro.

Inoltre, se una di queste affermazioni é vera, il campo vettoriale associato al gruppo di simmetrie coincide con il campo vettoriale associato al momento conservato.

◇

Dimostrazione

Dimostreremo le implicazioni $(a) \rightarrow (b) \rightarrow (c) \rightarrow (a)$.

$(a) \rightarrow (b)$

Sia $\{q_k, k = 1 \dots N\}$ un sistema di coordinate tali che q_n sia ciclica per la lagrangiana L. Dalle equazioni di Lagrange segue allora

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_N} = 0$$

ed é quindi conservato il momento $\pi_{\xi_N}^L$, dove abbiamo indicato con ξ_N il campo vettoriale associato alle traslazioni rigide nella direzione corrispondente alla coordinata q_N .

$(b) \rightarrow (c)$

Sia P il momento conservato, ξ il campo vettoriale ad esso associato, cosi' che $P = \pi_\xi^L$. Indichiamo con $\{f_k(q)\}$ le funzioni che descrivono il campo vettoriale ξ nelle coordinate q. Consideriamo il sistema di equazioni

$$\frac{dq_k}{d\alpha} = f_k(q) \quad k = 1 \dots n \tag{7.16}$$

e sia $\phi(q, \alpha)$ la soluzione di (7.16) tale che $\phi(q, 0) = q$. Tale soluzione é unica per le ipotesi fatte su ξ .

Se $t \rightarrow q(t)$ é una soluzione dell'equazione di Lagrange (non indichiamo esplicitamente la dipendenza dal dato iniziale) si ha, essendo per ipotesi P un momento conservato

$$0 = \frac{d}{dt} \left(\sum_{k=1}^N f_k(q(t)) \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}(q(t), \dot{q}(t)) \right)_{\alpha=0} = \frac{d}{dt} \left(\sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial \phi_k(q(t), \alpha)}{\partial \alpha} \right)_{\alpha=0} =$$

(usando le equazioni di Lagrange e il fatto che α e t sono parametri indipendenti)

$$= \sum_k \frac{\partial L}{\partial q_k} \frac{\partial \phi_k(q(t), \alpha)}{\partial \alpha} + \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial \phi_k(q(t), \alpha)}{\partial t} \right)_{\alpha=0} =$$

$$\frac{dL}{d\alpha}(\phi(q(t), \alpha), \phi'(q(t), \alpha))_{\alpha=0}$$

Dunque $\frac{dL}{d\alpha}(q, \eta) = 0$ nei punti dello spazio delle fasi in cui il momento P é conservato.

(c) \rightarrow (a)

Siano $\{f_k\}$ le funzioni che rappresentano nelle coordinate q il campo vettoriale associato al gruppo di trasformazioni considerato.

Per costruzione, le trasformazioni $q \rightarrow \phi(q, \alpha)$ sono la soluzione di

$$\frac{dq_k}{d\alpha} = f_k(q), \quad k = 1 \dots N \quad q_k(0) = q_k \quad 7.17$$

Si possono scegliere, in un intorno del punto σ dello spazio delle configurazioni considerato, delle coordinate $y_1 \dots y_N$ tali che il sistema (7.14) prenda la forma

$$\frac{dy_k}{d\alpha} = 0, \quad k = 1 \dots N - 1, \quad \frac{dy_N}{d\alpha} = 1$$

le cui soluzioni sono

$$y_k(\alpha) = y_k(0), \quad k \neq N, \quad y_N(\alpha) = y_N(0) + \alpha \quad 7.18$$

In (7.18) α assume valori in un intorno \mathcal{I} dell'origine in \mathbb{R} tale che per ogni $\alpha \in \mathcal{I}$ il punto di coordinate $\{y_\alpha\}$ si trova nell'intorno in cui é applicabile il Teorema dell' intorno tubolare (vedi Lezione 18).

Poiché per ipotesi vale $\frac{dL}{d\alpha} = 0$, segue da (7.15) che $\frac{\partial L}{\partial y_N} = 0$.

Dunque y_N é una coordinata ciclica.

Questo termina la dimostrazione del Teorema di Noether.

♡

ESEMPI

A titolo di esempio, discutiamo esplicitamente un caso della corrispondenza (b) \rightarrow (c).

Siano $\{x_i\}$, $i=1,2,3$, le coordinate cartesiane di un punto di massa m soggetto ad una forza di energia potenziale $U(x)$.

Si ha

$$p_k \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k} = m\dot{x}_k \quad 7.19$$

Supponiamo che sia conservato il vettore *momento della quantita' di moto*, $l = mx \wedge \dot{x}$.

In componenti

$$l_k = m \sum_{i,j} \epsilon_{kij} x_i \dot{x}_j = \sum_{i,j} \epsilon_{kij} x_i p_j$$

Il campo vettoriale associato al *momento* l_k é dunque descritto nelle coordinate x_k dalle tre funzioni

$$f_i^k(x) \equiv \epsilon_{kij}x_j$$

dove ϵ_{kij} é il simbolo di Ricci.

In questo caso

$$f_j^k(x) = (A^k x)_j \tag{7.20}$$

dove le matrici A^k sono date da $A_{ij}^k = \epsilon_{kij}$.

Il gruppo ad un parametro associato a l_k si ottiene risolvendo l'equazione

$$\frac{dx}{d\alpha} = A^k x \tag{7.21}$$

E' facile verificare che la soluzione di (7.21) rappresenta le rotazioni nel piano perpendicolare al k^{mo} asse coordinato.

Dall'implicazione (b) \rightarrow (c) del Teorema di Noether segue dunque che se le tre componenti del momento della quantità di moto sono conservate, allora la Lagrangiana é invariante sotto il gruppo delle rotazioni.

Poiché l'energia cinetica é invariante per rotazioni (piú precisamente per il sollevamento delle rotazioni allo spazio tangente) ne deduciamo che $U(x)$ é invariante per rotazioni, e quindi dipende solo da $|x|$.

Le forze cui é soggetto il punto materiale sono dunque in questo caso delle forze centrali.

ESERCIZIO

Dimostrare che, se in un sistema di N punti materiali in E^3 soggetti a forze conservative, la quantità di moto é conservata, allora il potenziale $V(x_1 \dots x_N)$ dipende solo dai vettori $x^i - x^j \in R^3$, $i, j = 1 \dots N$.

Nota 7.6

Se A_1, A_2 , funzioni sullo spazio delle fasi, sono costanti del moto per un sistema lagrangiano, anche ogni loro funzione é costante del moto.

In generale tuttavia *non tutte le costanti del moto sono funzioni dei momenti conservati*.

Vi sono dunque delle costanti del moto *non riconducibili a simmetrie della Lagrangiana*.

Ad esempio, per un sistema meccanico autonomo é costante del moto l'energia $E = T + U$, che *non é funzione dei momenti se $U \neq 0$* .

Quindi non tutte le costanti del moto sono una conseguenza del teorema di Noether.

Ad esempio la conservazione dell'energia é conseguenza dell'invarianza della lagrangiana per la trasformazione $t \rightarrow t + \alpha$.

Per poter riguardare la conservazione dell'energia come caso particolare del teorema di Noether é dunque necessario considerare uno spazio delle configurazioni "esteso", dato da $\Sigma \times R$, dove Σ é lo spazio delle configurazioni ed R é l'asse dei tempi.

La struttura risultante é detta *di contatto*; noi l'abbiamo brevemente discussa quando abbiamo dedotto il principio di Maupertius da quello di Hamilton.

Nel corso di quell'analisi abbiamo anche notato che *in questo contesto* l'energia puó essere considerata come il momento che é conservato a causa dell'invarianza per traslazioni temporali di una nuova lagrangiana in cui il tempo appare come coordinata (e non come parametro).



GENERALIZZAZIONI DEL TEOREMA DI NOETHER

Alcune parti del Teorema di Noether possono essere generalizzate in vari modi.

Indichiamo solo una di queste generalizzazioni, che trova utilizzazione frequente.

Essa si basa sul fatto che esistono trasformazioni che *non lasciano invariante la lagrangiana* ma lasciano invariante *l'insieme delle soluzioni* delle equazioni di Lagrange.

Ricordando che le soluzioni delle equazioni di Lagrange sono i punti critici del funzionale d'Azione I^L , si vede che affinché l'insieme delle soluzioni sia invariante *é sufficiente* che la variazione della Lagrangiana L risulti essere la derivata totale di una funzione che dipende solo dalle coordinate q e dal tempo.

Infatti in questo caso, per il teorema fondamentale del calcolo, l'Azione I^L varierá come funzione delle coordinate q agli istanti estremi t_1 e t_2 e non vi sará variazione nel suo differenziale (che *é* calcolato solo per variazioni delle traiettorie a estremi fissati).

L'invarianza della lagrangiana a meno di una derivata totale permette allora di dedurre l'esistenza di una costante del moto (ma non dá luogo a una diminuzione nel numero di gradi di libertá).

Daremo alcuni esempi di applicazione di queste considerazioni.

Tratteremo anche un caso in cui la variazione della lagrangiana risulta essere la derivata totale di una funzione di posizione e velocitá.

In questo caso dunque l'Azione non viene variata solo se si considerano variazioni delle traiettorie in cui vengano fissate sia le posizioni che le velocitá agli istanti estremi.

Le soluzioni delle equazioni di Lagrange sono punti critici anche per queste variazioni, ma a priori vi potrebbero essere punti critici "spuri", che non rimangono tali quando si varino anche le velocitá agli istanti estremi.

Dimostreremo quindi l'esistenza di una costante del moto utilizzando direttamente le equazioni di Lagrange.

Proposizione 7.2

Supponiamo che in un aperto di $T\Sigma$ che ammette coordinate $\{q, \eta\}$, per una famiglia di trasformazioni

$$q \rightarrow \phi(q, \eta, \alpha, t), \quad \eta \rightarrow \frac{d}{dt}\phi(q, \dot{q}, \alpha, t)_{\dot{q}=\eta, \ddot{q}=\dot{\eta}} \quad 7.22$$

si abbia,

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0} = \frac{dF(q(t), \eta(t), t)}{dt} \quad 7.23$$

dove abbiamo posto

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha} \equiv \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(L(\phi(q(t), \alpha, t), \dot{\phi}(q(t), \alpha, t), t) \right) \quad 7.24$$

(la lagrangiana puó dipendere esplicitamente dal tempo).

Allora l'espressione

$$B(q, \eta, t)|_{\eta=\dot{q}} \equiv F(q, \eta, t) - \left(\sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{dq_k}{d\alpha} \right)_{\alpha=0}$$

é una costante del moto.

◇

Dimostrazione

La dimostrazione *é* immediata e si effettua calcolando esplicitamente la variazione della funzione B lungo le traiettorie del sistema, facendo uso delle equazioni di Lagrange e della (7.23)

♡

Nota 7.7

Questo risultato generalizza la relazione di implicazione (c) \rightarrow (b) del Teorema di Noether. Si noti che la (7.23) implica

$$\left(\frac{dI}{d\alpha}\right)_{\alpha=0} = G(q(t_1), q(t_2), \dot{q}(t_1), \dot{q}(t_2))$$

per un'opportuna funzione G .



E' anche importante notare che nella (7.23) compare la derivata di L rispetto al parametro α , *calcolata per il valore zero del parametro*.

Questa restrizione (che non é presente nel teorema di Noether) é dovuta al fatto che la famiglia di trasformazioni considerate dipende dal tempo e quindi il campo vettoriale che la genera non commuta con le traslazioni nel tempo.

ESEMPLI

a)

Consideriamo un sistema di N punti materiali in R^3 descritta dalla lagrangiana

$$L(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N m_n (\dot{x}^n)^2 - \sum_{n,m=1}^N U_{n,m}(x^n - x^m)$$

(sistema con forze centrali che soddisfano in terzo principio della dinamica).

Consideriamo la trasformazione di Galileo

$$x^n \rightarrow x^n + vt, \quad v \in R^3 \quad n = 1 \dots N \quad 7.25$$

(questa trasformazione di coordinate corrisponde alla scelta di un riferimento inerziale in moto rettilineo uniforme con velocità v)

Sostituendo la (7.24) nella lagrangiana si ha

$$L(x, \dot{x}) \rightarrow L(x, \dot{x}) + \frac{dF}{dt}, \quad F(x, t) \equiv v \cdot P + \frac{1}{2} M v^2 t \quad 7.26$$

dove P é la quantità di moto del sistema e M é la massa totale.

Dunque per ogni componente v_i del vettore v

$$\left(\frac{\partial L}{\partial v_i}\right)_{v=0} = P_i = M \frac{dx_i^B}{dt}, \quad i = 1, 2, 3$$

dove x_i^B é la i^{ma} coordinata del baricentro.

Si ha anche

$$\sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^3 \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i^n} \frac{dx_i^n}{dv_j} = \sum_n \sum_i m_n t \dot{x}_j^n = P_j t$$

cosí che la quantità che viene affermata essere costante del moto é *la posizione iniziale del baricentro*

$$x_j^B(t) - \frac{P}{M} t \equiv x_j^B(0) \quad 7.27$$

(il baricentro si muove di moto rettilineo uniforme con velocità $\frac{P}{M}$).

Questa puó apparire una conclusione non significativa, poiché tutti i dati iniziali sono *per definizione* costanti del moto (hanno lo stesso valore in corrispondenza ai punti di ciascuna traiettoria).

Si può tuttavia notare che la (7.27) può essere scritta

$$x^B(t) - t\dot{x}^B(t) = C, \quad C \in R^3$$

e questa identità, letta come equazione, ha come soluzione

$$x^B(t) = C(1 + C^1 t)$$

dove C^1 è un vettore costante.

Dunque la (7.27) descrive completamente il moto del baricentro.

b)

Come secondo esempio, consideriamo la lagrangiana dell'oscillatore armonico

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}kq^2 \quad 7.28$$

e la trasformazione di coordinate

$$q \rightarrow q_\epsilon \equiv q + \epsilon \text{sen} \omega t, \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Si può notare che, essendo ogni soluzione delle equazioni di Lagrange della forma

$$A \cos \omega t + B \text{sen} \omega t$$

la trasformazione data trasforma soluzioni in soluzioni.

Per sostituzione diretta si ottiene

$$L_\epsilon(q, \dot{q}, t) \equiv L(q_\epsilon, \dot{q}_\epsilon) = \frac{1}{2}m(\dot{q} + \epsilon \omega \cos \omega t)^2 - \frac{1}{2}k(q + \epsilon \text{sen} \omega t)^2 \quad 7.29$$

così che

$$\left(\frac{\partial L_\epsilon}{\partial \epsilon} \right)_{\epsilon=0} = m\omega \dot{q} \cos \omega t - kq \text{sen} \omega t \equiv \frac{dG}{dt}$$

dove abbiamo posto

$$G \equiv m\omega q \cos \omega t$$

E' dunque conservata la quantità

$$F(q, \dot{q}, t) \equiv G - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{\partial q_\epsilon}{\partial \epsilon} = m\omega q \cos \omega t - m\dot{q} \text{sen} \omega t \quad 7.30$$

Anche in questo caso, questa può essere letta come un'equazione differenziale per il logaritmo della funzione $q(t)$ (nei punti in cui $q(t)$ non si annulla).

Le soluzioni sono precisamente le soluzioni dell'equazione dell'oscillatore armonico.

Vi sono due costanti di integrazione poiché l'equazione ottenuta è del primo ordine ma omogenea in q e \dot{q} , così che le soluzioni sono determinate a meno di una costante moltiplicativa.

c)

Consideriamo la lagrangiana che descrive il moto in R^3 di un punto materiale di massa m che viene attratto da un punto fisso (l'origine) con una forza inversamente proporzionale al quadrato della distanza (potenziale Kepleriano)

$$L(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{km}{|x|} \quad 7.31$$

Consideriamo, per ciascun valore dell'indice n , $n = 1, 2, 3$ la trasformazione

$$x_k \rightarrow x_k(\epsilon, n) \equiv x_k - \epsilon m [2x_n \dot{x}_k - x_k \dot{x}_n - (x, \dot{x}) \delta_{n,k}], \quad k = 1, 2, 3$$

dove abbiamo indicato con (x, y) il prodotto scalare dei vettori x e y .

Per sostituzione diretta si ha

$$L_{\epsilon, n} = L - \epsilon m^2 [2(\dot{x}, \ddot{x})x_n - (x, \dot{x})\ddot{x}_n - (x, \ddot{x})\dot{x}_n] + \epsilon mk \frac{(x, \dot{x})x_n - (x, x)\dot{x}_n}{|x|^3} + O(\epsilon^2)$$

così che

$$\left(\frac{\partial L_{\epsilon, n}}{\partial \epsilon} \right)_{\epsilon=0} = \frac{dG_n}{dt} \quad G_n \equiv -m^2 [(\dot{x}, \dot{x})x_n - (\dot{x}, x)\dot{x}_n] - mk \frac{x_n}{|x|} \quad 7.32$$

Ne deduciamo che è conservato il vettore A di componenti

$$A_n \equiv G_n - m\dot{x}_n \frac{\partial x_{\epsilon, n}}{\partial \epsilon} = m(\dot{x}, \dot{x})x_n - m^2(\dot{x}, x)\dot{x}_n - mk \frac{x_n}{|x|}$$

Questo vettore, detto *vettore di Runge-Lenz*, si può scrivere nella forma

$$A = p \wedge L - km \frac{x}{|x|} \quad 7.33$$

dove p è la quantità di moto ed L è il momento angolare.

Se $L = 0$ segue dalla conservazione di A che il moto si svolge interamente sulla retta diretta come A .

Se $L \neq 0$, si verifica che A è perpendicolare a L , e quindi giace nel piano del moto.

Prendendo il prodotto scalare con x e indicando con θ l'angolo tra le direzioni di x e di A si ottiene

$$|x||A|\cos\theta = (x, A) = L^2 - mk|x| \quad 7.34$$

che implica

$$|x| = L^2 [mk(1 + e\cos\theta)]^{-1}, \quad e \equiv \frac{|A|}{mk} \quad 7.35$$

Se $|A| < mk$ (cioè se l'energia corrispondente al dato iniziale scelto è negativa) la (7.35) è l'equazione parametrica di un'ellisse di eccentricità e , con fuoco nell'origine e semiasse maggiore diretto secondo A .

APPENDICE alla Lezione 7: GRUPPI DI SIMMETRIA CHE DIPENDONO DA PIU' PARAMETRI; PRODOTTO DI LIE DI CAMPI VETTORIALI.

Ci poniamo ora il seguente problema.

Supponiamo che il gruppo G di trasformazioni che lascia invariante in forma la lagrangiana contenga più sottogruppi a un parametro tra loro distinti, ciascuno dipendente in modo differenziabile dal suo parametro.

In che misura è possibile estendere il Teorema di Noether ?

Ovviamente la parte (b) \leftrightarrow (c) del Teorema implica che esistono tanti momenti conservati, localmente indipendenti, quanti sono i sottogruppi ad un parametro indipendenti contenuti in G (due sottogruppi sono indipendenti se, in ogni punto dello spazio delle configurazioni i corrispondenti campi vettoriali sono linearmente indipendenti).

Vogliamo ora determinare sotto quali ipotesi sia possibile generalizzare l'implicazione (c) \rightarrow (a).

Vogliamo ad esempio determinare le condizioni sotto le quali l'invarianza della lagrangiana sotto *due* diversi gruppi ad un parametro di trasformazioni implica che é possibile scegliere un sistema di coordinate tale che *due* di esse siano cicliche.

Vedremo che questo *non é sempre possibile*. Ad esempio, se la lagrangiana L é invariante per il gruppo delle rotazioni in R^3 , essa é invariante per tre gruppi a un parametro di simmetrie (ad esempio le rotazioni attorno a tre assi prefissati e distinti fra loro) ma in generale una sola delle coordinate associate é ciclica.

Ad esempio, se si utilizzano coordinate sferiche, la latitudine non é una variabile ciclica, perché appare nel termine di energia cinetica).

Si ha

Proposizione 7A.1

Consideriamo due gruppi ad un parametro G^1 e G^2 di diffeomorfismi dello spazio delle configurazioni; un sistema di coordinate tale che due di esse siano cicliche per ogni Lagrangiana L che sia lasciata invariante in forma sia da G^1 che da G^2 può essere trovato *se e solo se* é soddisfatta la relazione

$$\phi^1(\alpha) \cdot \phi^2(\beta) = \phi^2(\beta) \cdot \phi^1(\alpha) \quad \forall \alpha, \beta \quad 7A.1$$

dove $\phi^1(\alpha)$ e $\phi^2(\beta)$ sono gli elementi di G^1 e G^2 rispettivamente.

Se vale (7A.1) i parametri α e β possono essere utilizzati come coordinate.

◇

La Proposizione 7A.1 é un caso particolare (per due campi vettoriali) di un teorema di Frobenius, che enunceremo e analizzeremo in seguito.

A questo scopo sará utile introdurre una struttura di algebra per i campi vettoriali sufficientemente regolari.

Ricordiamo che un campo vettoriale ξ può essere identificato con una derivazione ∂_ξ sulle funzioni differenziabili sulla varietà Σ (spazio delle configurazioni).

Se la varietà Σ ha dimensione N e se in un sistema di coordinate il campo vettoriale é identificato in un intorno \mathcal{N} di $\sigma \in \Sigma$ dalla N^{pla} di funzioni $\{f_k(q)\}$, allora in quel sistema di coordinate la derivazione ∂_ξ é rappresentata dalla operazione

$$\sum_{k=1}^N f_k(q) \frac{\partial}{\partial q_k}$$

Dati due campi vettoriali ξ, ζ consideriamo l'operazione

$$\partial_\xi \partial_\zeta - \partial_\zeta \partial_\xi \quad 7A.2$$

definita su funzioni due volte differenziabili, e verifichiamo che si tratta di una derivazione.

Naturalmente (7A.2) é ben definita solo se le funzioni $\{f_k\}$, $\{g_k\}$ che rappresentano i due campi vettoriali sono differenziabili.

L'operazione (7A.2) é ovviamente lineare. Per verificare che essa rappresenta una derivazione, basta dunque verificare che soddisfa la regola di Leibnitz.

Per due funzioni due volte differenziabili A e B e per due campi vettoriali differenziabili ξ e ζ valutiamo $(\partial_\xi \partial_\zeta - \partial_\zeta \partial_\xi)(AB)$;

Si ha

$$\partial_\xi (\partial_\zeta (AB)) = \partial_\xi (B \partial_\zeta A + A \partial_\zeta B) = (\partial_\xi B) (\partial_\zeta A) + B \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \zeta} A + (A \leftrightarrow B)$$

Sottraendo l'espressione che si ottiene scambiando tra loro ∂_ξ e ∂_ζ i termini che contengono derivate seconde si elidono e si ottiene

$$(\partial_\xi \partial_\zeta - \partial_\zeta \partial_\xi)(AB) = A(\partial_\xi \partial_\zeta - \partial_\zeta \partial_\xi)B + B(\partial_\xi \partial_\zeta - \partial_\zeta \partial_\xi)A \quad 7A.3$$

Questo dimostra che (7A.2) definisce una derivazione.

Al campo vettoriale cosí definito si dá il nome *prodotto di Lie* dei due campi ξ e ζ .

Diamo ora l'espressione esplicita, nelle coordinate q che parametrizzano la varietà Σ , del prodotto di Lie di due campi vettoriali che, nelle coordinate q , siano rappresentati dalle funzioni $\{f_k\}$ e $\{g_k\}$, $k = 1 \dots N$.

Se A é una funzione due volte differenziabile delle coordinate q_k scelte, si ha

$$\partial_\xi(\partial_\zeta A) \equiv \sum_k f_k(q) \frac{\partial}{\partial q_k}(\partial_\zeta A) = \sum_k f_k(q) \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\sum_h g_h(q) \frac{\partial A}{\partial q_h} \right).$$

Pertanto, svolgendo le derivate del prodotto, si ha

$$\partial_\xi \cdot \partial_\zeta A - \partial_\zeta \cdot \partial_\xi A = \partial_{[\xi, \zeta]} A \quad 7A.4$$

dove il campo vettoriale $[\xi, \zeta]$ é rappresentato nelle coordinate q dalla N-pla di funzioni

$$\sum_h \left(f_h \frac{\partial g_k}{\partial q_h} - g_h \frac{\partial f_k}{\partial q_h} \right), \quad k = 1 \dots n \quad 7A.5$$

Si puó notare che $[\xi, \zeta]$ risulta definito, attraverso la (7A.4), come derivazione sulle funzioni di classe C^1 , sebbene nella sua definizione siano state utilizzate solo funzioni di classe C^2 .

Notiamo che se, in un sistema di coordinate q , i campi vettoriali ξ e ζ sono rappresentati in un intorno \mathcal{N} di un punto $\sigma \in \Sigma$ da funzioni che assumono valori costanti in \mathcal{N} , allora $[\xi, \zeta] = 0$ in \mathcal{N} .

Questo dimostra la parte *necessaria* del seguente Teorema

Teorema 7A.2 (Frobenius)

Sia data una varietà Σ di dimensione N e un intorno Ω di un punto $\sigma \in \Sigma$.

Indichiamo con ξ^i , $i = 1 \dots M$ M campi vettoriali, dove l'intero M é non maggiore della dimensione di Σ .

La condizione $[\xi^i, \xi^j] = 0$ $i, j = 1 \dots M$ é condizione *necessaria e sufficiente* affinché sia possibile scegliere in un intorno Ω' di σ (eventualmente piú piccolo di Ω) coordinate $q_1 \dots q_M$ tali che per $i = 1 \dots M$ il campo vettoriale ξ^i sia rappresentato in Ω' da $\frac{\partial}{\partial q_i}$.

◇

Dimostrazione

La condizione é necessaria.

Infatti, se esiste un sistema di coordinate con le proprietà descritte, in queste coordinate si ha $\xi^k = \frac{\partial}{\partial q_k}$.

Dunque in queste coordinate si ha $[\xi^k, \xi^i] = 0 \forall k, i$; d'altra parte la definizione di prodotto di Lie é indipendente dal sistema di coordinate scelto.

Non daremo invece i dettagli della dimostrazione della sufficienza, limitandoci a darne una traccia attraverso le considerazioni che seguono.

Si noti che la conclusione sulla rappresentabilità dei campi vettoriali ξ^i é equivalente all'affermazione che per ogni valore dell'indice i il gruppo di trasformazioni associato al campo ξ^i é dato da

$$q_i \rightarrow q_i + \alpha \quad q_k \rightarrow q_k \text{ se } k \neq i \quad 7A.6$$

La dimostrazione del fatto che la condizione nel Teorema di Frobenius é sufficiente si ottiene, come nella dimostrazione del Teorema dell'intorno tubolare (vedere Appendice alla Lezione 9), dal Teorema della Funzione Inversa, applicato ora a funzioni da Σ ad R^N (anziché R^1).

Questo permette di dimostrare che i parametri dei sottogruppi associati ai campi vettoriali ξ^i possono essere utilizzati come coordinate indipendenti, almeno in un intorno abbastanza piccolo del punto σ considerato.

♡

Dimostriamo ora un risultato che é utile per costruire, a partire da momenti conservati, altre costanti del moto.

Proposizione 7A.3

Se i campi vettoriali ξ^1 e ξ^2 corrispondono a gruppi di simmetria di una lagrangiana L , anche il campo vettoriale $[\xi^1, \xi^2]$ corrisponde a un gruppo di simmetria di L .

◇

Dimostrazione

Abbiamo già notato che per studiare la trasformazione di L per un gruppo di trasformazioni G associato ad un campo vettoriale ξ sulla varietà Σ (spazio delle configurazioni) é necessario innanzitutto costruire il *sollevamento* \hat{G} di questo gruppo a $T\Sigma$ (spazio delle posizioni e velocità).

Al gruppo di trasformazioni \hat{G} corrisponderá allora un campo vettoriale $\hat{\xi}$ sulla varietà $T\Sigma$ (quindi un elemento di $T(T\Sigma)$, che chiameremo *sollevato di ξ*).

Se $\{f_k(q)\}$ é la N-pla che rappresenta il campo vettoriale ξ quando si utilizzano le coordinate q , e se $\{q_k, \eta_k\}$ sono le coordinate utilizzate per descrivere $T\Sigma$ (almeno in intorno del punto considerato), allora $\hat{\xi}$ é rappresentato dalla n-pla di funzioni

$$\{f_k(q), \sum_{h=1}^N \frac{\partial f_k(q)}{\partial q_h} \cdot \eta_h\} \quad 7A.7$$

Notare che la dipendenza dalle coordinate η_k é lineare.

La (7A.7) può essere verificata facilmente nel modo seguente.

Sia $Q(q, \alpha)$ la soluzione (locale) del sistema di equazioni

$$\frac{dq_k}{d\alpha} = f_k(q) \quad 7A.8$$

Per una generica funzione differenziabile F su $T\Sigma$, utilizzando il teorema di derivazione di funzioni composte, si ha

$$\frac{dF}{d\alpha} = \sum_k f_k \frac{\partial F}{\partial q_k} + \sum_k \frac{\partial F}{\partial \eta_k} \frac{d\eta_k}{d\alpha} = \sum_k f_k \frac{\partial F}{\partial q_k} + \sum_{k,m} \frac{\partial F}{\partial \eta_k} \frac{\partial f_k}{\partial q_m} \eta_m \equiv \partial_{T\xi} F \quad 7A.9$$

da cui si ottiene (7A.7).

Se ξ, ζ sono due campi vettoriali su Σ , si può costruire il prodotto di Lie dei corrispondenti campi *sollevati* $\hat{\xi}, \hat{\zeta}$.

Sarà utile conoscere la relazione tra questi due prodotti di Lie.

Se ξ, ζ sono due campi vettoriali, descritti dalle funzioni $\{f_k\}, \{g_k\}$ rispettivamente, se α, β sono i parametri dei corrispondenti gruppi di trasformazione e se F é una funzione due volte differenziabile su $T\Sigma$, sviluppando esplicitamente, utilizzando (7A.9) il calcolo di

$$\frac{d}{d\beta} \left(\frac{dF}{d\alpha} \right) - \frac{d}{d\alpha} \left(\frac{dF}{d\beta} \right)$$

si verifica facilmente la seguente importante relazione:

$$[\hat{\xi}, \hat{\zeta}] = [\xi, \zeta] \quad 7A.10$$

Dalla (7A.10) segue subito che

$$[\xi, \zeta] = 0 \Leftrightarrow [\hat{\xi}, \hat{\zeta}] = 0 \quad 7A.11$$

Possiamo ora dimostrare la Proposizione 7A.3; se L é invariante per l'azione dei gruppi di simmetria che corrispondono ai campi vettoriali ξ_1 e ξ_2 , si ha per definizione $\partial_{\xi_k} L = 0$, $k = 1, 2$. Dunque, ricordando la definizione di prodotto di Lie,

$$\partial_{[\hat{\xi}_1, \hat{\xi}_2]} L = 0 \quad 7A.12$$

Da (7A.12) segue allora $\partial_{[\xi_1, \xi_2]} L = 0$ e questo conclude la dimostrazione della Proposizione 7A.3.

♡

Diamo ora alcuni esempi di prodotti di Lie per classi speciali di campi vettoriali.

ESEMPIO 1

Supponiamo che le funzioni f_k^1, f_k^2 che rappresentano i campi vettoriali ξ^1 e ξ^2 nelle variabili q siano lineari, e quindi corrispondano a matrici A^1, A^2 :

$$f_k^i = \sum_{m=1}^n A_{k,m}^i x_m \quad i = 1, 2, \quad k = 1 \dots n \quad 7A.13$$

Dalla definizione di $[\xi_1, \xi_2]$ segue che anche questo campo vettoriale é rappresentato nelle variabili q da funzioni lineari, e la matrice corrispondente é

$$[A^1, A^2] \equiv (A^1 A^2 - A^2 A^1)$$

Questa identitá giustifica l'uso dello stesso simbolo per denotare il prodotto di Lie di due campi vettoriali e il "commutatore" di due matrici.

In particolare se ξ^1, ξ^2 corrispondono a rotazioni attorno a due assi cartesiani tra loro ortogonali \hat{x}^1 e \hat{x}^2 , si ottiene $[\xi^1, \xi^2] = \xi^3$, dove ξ^3 corrisponde a rotazioni attorno all'asse $\hat{x}_3 \equiv \hat{x}_1 \wedge \hat{x}_2$.

Dal teorema di Noether segue allora che, per un sistema lagrangiano, la conservazione di due componenti del momento della quantitá di moto implica la conservazione della terza componente.

ESEMPIO 2

Sia $N=3$ e supponiamo che i campi vettoriali ξ e ζ siano descritti nelle coordinate q dalle funzioni $f_k(q) \equiv (r \wedge q)_k$ e $g_k(q) \equiv (s \wedge q)_k$ dove r ed s sono due vettori preassegnati.

Dalle definizioni segue che $[\xi, \zeta]$ é rappresentato dalle funzioni $((r \wedge s) \wedge q)$.

Questo giustifica l'uso che viene spesso fatto della notazione $[r, s]$ anziché $r \wedge s$ per individuare il prodotto esterno dei due vettori $r, s \in R^3$.

ESEMPIO 3

Consideriamo per un sistema composto da punti materiali le tre componenti P_k del momento associato dalla lagrangiana L alle coordinate del baricentro del sistema

Se il sistema é isolato l'invarianza per traslazioni spaziali assicura le P_k sono costanti del moto.

In un sistema meccanico composto da N punti in R^3 si ha

$$P_k = \sum_{i=1}^N m_i \dot{x}_k^i = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k^i} \quad k = 1, 2, 3. \quad 7A.14$$

Si può notare da questo esempio, poiché $[\xi^k, \xi^h] = 0$, che la conservazione di due componenti della quantità di moto *non* implica che anche la terza componente sia conservata.

Nota 7A.1

Si può verificare, dalla sua definizione, che il prodotto di Lie gode delle seguenti proprietà:

i)

ANTISIMMETRIA

$$[\xi^1, \xi^2] = -[\xi^2, \xi^1]$$

ii)

IDENTITA' DI JACOBI

$$[\xi^1, [\xi^2, \xi^3]] + [\xi^2, [\xi^3, \xi^1]] + [\xi^3, [\xi^1, \xi^2]] = 0$$

iii)

LINEARITA'

$$[(\xi^1 + \xi^2), \xi^3] = [\xi^1, \xi^3] + [\xi^2, \xi^3]$$



Ricordiamo che i campi vettoriali formano uno spazio lineare; il campo vettoriale $\alpha\xi^1 + \xi^2$, $\alpha \in R$, è definito dalla relazione $\partial_{\alpha\xi^1 + \xi^2} \equiv \alpha^{-1}\partial_{\xi^1} + \partial_{\xi^2}$.

Dagli esempi 1 e 2 dati sopra si deduce che questa è la stessa struttura algebrica che hanno le matrici quando per operazione "prodotto" si prende il commutatore, e i vettori quando per operazione "prodotto" si prende il prodotto esterno (prodotto vettoriale).

Definizione 7A.1

Un insieme di campi vettoriali (su di una superficie Σ) che è chiuso per l'operazione *prodotto di Lie* è indicato con il nome di *algebra di Lie* (di campi vettoriali su Σ).



Abbiamo dunque dimostrato che l'insieme dei campi vettoriali cui sono associati gruppi di simmetria di una Lagrangiana L forma un'algebra di Lie.

PROBLEMA

Dimostrare che, per un punto materiale di massa m in R^3 , se sono conservate due componenti del momento della quantità di moto ed una componente della quantità di moto, allora sono conservati sia la quantità di moto che il momento della quantità di moto.

Lezione 8. ANGOLI DI EULERO. MOTO DELLA TROTTOLA

Nel moto di un corpo rigido con un punto fisso, anche in assenza di potenziale non é possibile scrivere la Lagrangiana del sistema in modo che *due coordinate riferite ad un sistema inerziale* siano cicliche .

Questo é dovuto al fatto che rotazioni attorno ad assi fissi non commutano tra loro e quindi i campi vettoriali associati hanno prodotto di Lie diverso da zero.

E' invece possibile scegliere un sistema di coordinate delle quali due sono cicliche nel caso di un corpo rigido che abbia un punto fisso O, *sia invariante per rotazioni attorno ad un asse ξ passante per O e solidale con il corpo rigido*) e sia soggetto a forze potenziali il cui potenziale V é invariante per rotazioni attorno ad un asse fisso ζ passante per O.

L'energia cinetica é invariante per rotazioni attorno ad un asse fisso (rispetto al sistema inerziale che consideriamo).

Pertanto la lagrangiana non dipende dall'angolo di rotazione attorno all'asse ζ fisso nello spazio e quest'angolo é una coordinata é ciclica.

L'ipotesi che il corpo rigido sia invariante per rotazioni attorno all'asse ξ (solidale con il corpo) implica che, se si descrive la lagrangiana mediante coordinate naturali per un sistema solidale con il corpo rigido, il potenziale non dipende dall'angolo di rotazione attorno a ξ .

Dimostreremo nel seguito che anche l'energia cinetica é invariante per rotazioni attorno all'asse di simmetria ξ (sebbene questo asse di simmetria non sia fisso).

Pertanto la Lagrangiana é invariante per rotazioni attorno all'asse ξ , e se si descrive il corpo rigido con un sistema di assi coordinati che contiene ξ il corrispondente angolo di rotazione é una variabile ciclica.

Per avere due coordinate cicliche, e quindi due costanti del moto (oltre all'energia) dobbiamo verificare che *esiste un sistema di assi coordinati che contiene sia ζ che ξ* .

Poiché i due assi di rotazione hanno per ipotesi un punto in comune, basterá allora prendere come terzo asse di rotazione un asse perpendicolare sia a ξ che a ζ .

In questo modo la rotazione che individua la configurazione del corpo rigido sará *la composizione di tre rotazioni* e la matrice che la individua sará *il prodotto delle corrispondenti matrici*.

Le coordinate angolari cosí ottenute sono *gli angoli di Eulero*.

Notare che la loro costruzione *non contraddice il teorema di Frobenius* poiché l'asse di simmetria del corpo rigido *non é uno degli assi di una terna cartesiana solidale con il sistema di riferimento inerziale*.

Si puó notare che la scelta del terzo asse *non é unica* se gli assi ξ e ζ sono paralleli. In questo caso gli angoli di Eulero non sono definiti e pertanto non possono essere utilizzati come coordinate.

Moti che passino per queste configurazioni devono essere studiati in un intorno del tempo di passaggio utilizzando un diverso sistema di coordinate.

Notiamo che se l'asse ζ é considerato verticale (la direzione della forza peso) le configurazioni in esame sono quelle in cui l'asse del corpo rigido (trottola) é verticale.

Dimostreremo che questa posizione é di equilibrio per l'asse della trottola. Ne consegue che per determinare la sua stabilitá *non si potranno utilizzare gli angoli di Eulero*.

Notiamo che l'angolo che individua la rotazione attorno ad un asse solidale con il corpo rigido é ciclico *solo se l'asse di rotazione é un asse di simmetria*.

Gli angoli di Eulero sono dunque particolarmente utili solo nella trattazione della trottola *simmetrica*.

Definiamo ora in dettaglio gli angoli di Eulero.

Indichiamo con $\{\hat{h}_1, \hat{h}_2, \hat{h}_3\}$ una terna cartesiana con origine nel punto fisso O e solidale con un sistema di riferimento inerziale, scelta in modo che \hat{h}_3 sia l'asse di simmetria del potenziale. Indichiamo poi con $\{\hat{k}_1, \hat{k}_2, \hat{k}_3\}$ una terna cartesiana con origine O e solidale con il corpo rigido, scelta in modo che \hat{k}_3 sia l'asse di simmetria del corpo. .

Sarà dunque $\hat{k}_i(t) = S_{ij}(t)\hat{h}_j$, dove S é una matrice ortogonale.

Vogliamo scrivere la trasformazione definita da S come composizione di tre trasformazioni, ciascuna delle quali é rappresentata da una matrice che descrive la rotazione di una terna cartesiana attorno al suo primo o al suo terzo asse.

Scegliamo per convenzione la terna $\{\hat{h}_i\}$ in modo che \hat{h}_3 sia l'asse di simmetria del potenziale delle forze che agiscono sul corpo rigido, e la terna $\{\hat{k}_i\}$ in modo che \hat{k}_3 sia l'asse di simmetria del corpo rigido.

Supponiamo che all'istante t considerato i due assi \hat{h}_3 e \hat{k}_3 non coincidano. Come abbiamo già osservato in corrispondenza a configurazioni per le quali questi due assi coincidono le coordinate *angoli di Eulero* hanno una singolarità.

Questo problema, occasionalmente sottovalutato, é all'origine di alcune difficoltà nella trattazione della stabilità della direzione verticale dell'asse di simmetria della trottola.

Sotto l'ipotesi di non coincidenza descritta sopra, definiamo *asse dei nodi* $\hat{\eta}(t)$ la retta per O ortogonale al piano definito da \hat{h}_3 e da $\hat{k}_3(t)$ e scegliamo su di essa il verso definito da $\hat{h}_3 \wedge \hat{k}_3(t)$. Per costruzione, $\hat{\zeta}(t)$ é perpendicolare a \hat{h}_3 e quindi appartiene al piano sotteso da \hat{h}_1 e da \hat{h}_2 .

Denotiamo con $\phi(t)$ l'angolo tra \hat{h}_1 e $\hat{\eta}(t)$

Sia $S^3(\phi(t))$ la matrice che rappresenta la rotazione attorno all'asse \hat{h}_3 che porta l'asse \hat{h}_1 a coincidere con $\hat{\eta}(t)$ procedendo in modo levogiro.

Per costruzione, $\hat{\eta}(t)$ é il primo asse cartesiano del sistema di riferimento ottenuto da $\{\hat{h}_i\}$ attraverso la rotazione $S^3(\phi(t))$.

Per costruzione \hat{h}_3 e $\hat{k}_3(t)$ sono perpendicolari a $\hat{\eta}(t)$.

Denotiamo con $\theta(t)$ l'angolo tra \hat{h}_3 e $\hat{k}_3(t)$ determinato in senso levogiro. Sia $S^{(1)}(\theta(t))$ la rotazione attorno a $\hat{\eta}(t)$ che sovrappone (in senso levogiro) \hat{h}_3 a $\hat{k}_3(t)$.

Questa é una rotazione *attorno al primo asse* della terna cartesiana ottenuta con la trasformazione $S^3(\phi(t))$; per questo la denotiamo con il simbolo S^1 .

L'asse $\hat{k}_3(t)$ é per costruzione il terzo asse della terna cartesiana ottenuta da $\{\hat{h}_i\}$ attraverso la rotazione $S^{(1)}(\theta(t)) \cdot S^3(\phi(t))$; per costruzione $\hat{k}_1(t)$ e $\hat{\eta}(t)$ sono perpendicolari a $\hat{k}_3(t)$.

Denotiamo con $\psi(t)$ l'angolo tra $\hat{k}_1(t)$ e $\hat{\zeta}(t)$, in senso levogiro.

Indichiamo con $S^{(3)}(\psi(t))$ la rotazione attorno a $\hat{k}_3(t)$, in senso levogiro, che sovrappone $\hat{\zeta}(t)$ a $\hat{k}_1(t)$. La rotazione composta

$$S^{(3)}(\psi(t)) \cdot S^{(1)}(\theta(t)) \cdot S^3(\phi(t)) \tag{8.1}$$

sovrappone l'asse \hat{h}_1 all'asse $\hat{k}_1(t)$ e l'asse \hat{h}_3 all'asse $\hat{k}_3(t)$.

Notare che utilizziamo lo stesso simbolo S^3 (con argomento diverso) poiché sia $S^3(\psi)$ che $S^3(\phi)$ sono matrici di rotazione *attorno all'asse 3* (in sistemi di riferimento *diversi*) e quindi hanno la stessa forma analitica.

Poiché ortogonalità e orientazione sono preservate dalle rotazioni, anche $\hat{h}_2(t)$ viene sovrapposta a $\hat{k}_2(t)$.

Dunque

$$S(t) = S^{(3)}(\psi(t)) \cdot S^{(1)}(\theta(t)) \cdot S^3(\phi(t)) \tag{8.2}$$

(il simbolo \cdot rappresenta il prodotto di matrici).

Ne segue che ogni rotazione é individuata da tre coordinate che sono gli angoli $\phi(t), \theta(t), \psi(t)$; questi sono *gli angoli di Eulero*.

Si noti che questo sistema di coordinate é degenere per $\theta = 0$ e per $\theta = \pi$; infatti in corrispondenza a questi valori di θ l'asse dei nodi non é definito (ad esempio, per $\theta = 0$, le coordinate (ϕ, ψ) e $(\phi - \psi_0, \psi + \psi_0)$ individuano la stessa configurazione per ogni valore di ψ_0).

Per costruzione, il dominio di variabilitá degli angoli di Eulero é

$$0 \leq \theta < \pi \quad 0 \leq \phi < 2\pi \quad 0 \leq \psi < 2\pi \quad 8.3$$

Non tutti i punti di questo dominio corrispondono a configurazioni distinte del corpo rigido.

Ad esempio, per ogni σ i punti di coordinate $(0, \phi + \sigma, \psi - \sigma)$ corrispondono alla stessa configurazione.

Questo riflette il fatto che, per $\theta = 0$ gli angoli di Eulero sono un sistema di coordinate singolare.

Per costruzione si ha

$$S^3(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e

$$S^1(\beta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta & \sin\beta \\ 0 & -\sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$$

La matrice che definisce la trasformazione delle coordinate cartesiane $x \rightarrow x(t) = R(t)x$ é data allora da (8.2) e si ha

$$R(t) = S(t)^t = S^{(3)}(\phi(t)) \cdot S^{(1)}(\theta(t)) \cdot S^{(3)}(\psi(t)), \quad 8.4$$

Dalla (8.4) si deduce la relazione tra $\omega(t)$ e le funzioni $\dot{\psi}(t), \dot{\theta}(t), \dot{\phi}(t)$.

Ricordiamo che la velocitá angolare di un moto composto é la somma (vettoriale) delle velocitá angolare dei moti componenti.

La velocitá angolare del moto descritto da $R^3(\phi(t))$ é (rappresentata da) $\dot{\phi}(t)\hat{h}_3$.

La velocitá angolare del moto descritto da $S^1(\theta(t))$ é $\dot{\theta}(t)\hat{\xi}(t)$; infatti essa corrisponde a rotazioni attorno all'asse dei nodi, ed ha quindi la forma $\dot{\theta}(t)\hat{\eta}_0$ in un sistema di riferimento O' in cui l'asse dei nodi sia fisso.

D'altra parte, per la legge di trasformazione delle matrici di rotazione, rotazioni di un angolo θ attorno all'asse $\hat{\zeta}_0$ di O' sono descritte nel sistema inerziale scelto come rotazioni di un angolo θ attorno a $\eta(t)$.

Nello stesso modo si verifica che la velocitá angolare del moto descritto da $S^3(\psi(t))$ é $\dot{\psi}(t)\hat{k}_3(t)$.

Dunque la velocitá angolare del moto composto é

$$\dot{\phi}(t)\hat{h}_3 + \dot{\theta}(t)\hat{\eta}(t) + \dot{\psi}(t)\hat{k}_3(t) \quad 8.5$$

Si noti che nel dedurre questa formula non é stata fatta una scelta di assi cartesiani, e i vettori sono riguardati come enti geometrici.

Determiniamo ora le componenti del vettore (8.5) lungo la terna di assi solidali con la trottola.

Per la simmetria del corpo rigido, la lagrangiana é invariante per rotazioni attorno all'asse $\hat{k}_3(t)$. Ad ogni istante t_0 non vi é dunque perdita di generalitá nell'assumere $\hat{\eta}(t_0) = \hat{k}_1(t_0)$.

Determiniamo allora $\Omega_i(t_0)$ trovando le componenti di (8.5) rispetto alla terna $\hat{k}_i(t_0)$.

Si ha

$$\hat{h}_3 = (S^{(1)}(t_0))_{3m}\hat{k}_m = \cos\theta(t_0)\hat{k}_3(t_0) + \sin\theta(t_0)\hat{k}_2(t_0) \quad 8.6$$

dunque

$$\dot{\phi}(t_0)\hat{h}_3 + \dot{\theta}(t_0)\hat{\eta}(t) + \dot{\psi}(t_0)\hat{k}_3(t)$$

$$= (\dot{\phi}(t_0)\cos\theta(t_0) + \dot{\psi}(t_0))\hat{k}_3(t_0) + (\dot{\psi}(t_0)\sin\theta(t_0))\hat{k}_2(t_0) + \dot{\theta}(t_0)\hat{k}_1(t_0) \quad 8.7$$

e quindi, per ogni t_0 ,

$$\Omega_3 = \dot{\phi} \cos\theta + \dot{\psi}, \quad \Omega_2 = \dot{\phi} \sin\theta, \quad \Omega_1 = \dot{\theta}$$

pur di scegliere $\hat{k}_1(t_0)$ in modo che $\hat{\eta}(t_0) = \hat{k}_1(t_0)$.

L'energia cinetica T é data da $T = \frac{1}{2}(\Omega, I\Omega)$ dove I rappresenta il tensore d'inerzia nel sistema solidale con il corpo rigido.

Poiché questo tensore é per ipotesi invariante per rotazioni attorno all'asse $\hat{k}_3(t_0)$ la scelta $\hat{\eta}(t_0) = \hat{k}_1(t_0)$ puó essere fatta, per ogni t_0 , senza alterare il valore di T .

Si avrá dunque, per ogni t ,

$$T = \frac{1}{2}I_3 (\dot{\psi} + \cos\theta \dot{\phi})^2 + \frac{1}{2}I_1(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta \dot{\phi}^2)$$

dove I_3 é il momento d'inerzia rispetto all'asse di simmetria del corpo rigido e I_1 é il momento di inerzia rispetto ad uno degli assi perpendicolari.

Il potenziale V delle forze applicate é per ipotesi invariante per rotazioni attorno all'asse \hat{h}_3 e quindi non dipende dall'angolo ϕ .

Inoltre V non dipende da ψ poiché il corpo rigido é per ipotesi invariante per rotazioni attorno all'asse \hat{k}_3 .

Dunque $V = V(\theta)$ e la Lagrangiana diventa

$$L = \frac{1}{2}I_3 (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos\theta)^2 + \frac{1}{2}I_1(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta \dot{\phi}^2) + V(\theta)$$

Le variabili ψ e ϕ sono dunque cicliche.

Sono pertanto conservati i momenti ad esse associati:

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = I_3 (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos\theta) \cos\theta + I_1 \dot{\phi} \sin^2\theta \quad 8.8$$

$$p_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = I_3 (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos\theta) \quad 8.9$$

E' inoltre conservata l'energia totale, essendo il sistema autonomo:

$$E = T + U \quad U \equiv -V \quad 8.10$$

Utilizzando (8.8) e (8.9) si possono esplicitare $\dot{\psi}$ e $\dot{\phi}$ come funzioni di θ e di $\dot{\theta}$. Sostituendo in (8.10) si ottiene l'identitá

$$\frac{1}{2}I_1\dot{\theta}^2 + \frac{(m - M\cos\theta)^2}{2I_1\sin^2\theta} + U(\theta) = cost. \quad 8.11$$

dove m é il valore di p_ϕ (componente lungo \hat{h}_3 del momento della quantitá di moto) in corrispondenza dei dati iniziali scelti ed M é il valore di p_ψ , componente lungo $\hat{k}_3(t)$ del momento della quantitá di moto.

Nota 8.1

Notare che in questo caso per riduzione si ottiene un sistema che soddisfa un'equazione di Lagrange; in effetti é facile verificare che (8.11) é la legge di conservazione dell'energia per un sistema lagrangiano con lagrangiana

$$L_0 = \frac{1}{2}I_1\dot{\theta}^2 - \frac{(m - M\cos\theta)^2}{2I_1\sin^2\theta} - U(\theta) \quad 8.12$$



E' facile verificare che L_0 si può anche ottenere con il metodo di Routh.

Nota 8.2

La funzione L_0 in (8.12) é singolare per $\theta = 0$. Tuttavia la funzione $\theta(t)$ che individua in parte il moto della trottola non presenta singolarità in corrispondenza agli istanti in cui l'asse di simmetria della trottola viene a trovarsi in posizione verticale.



Questa apparente contraddizione si risolve tenendo presente che la Lagrangiana L_0 , che dipende dai parametri m ed M , descrive il moto *in corrispondenza ai valori m ed M delle proiezioni del momento angolare rispettivamente lungo la verticale e lungo l'asse di simmetria della trottola*. Poiché queste componenti sono costanti del moto, se i dati iniziali sono tali che $m \neq M$, non può esistere alcun istante t_0 per cui $\theta(t_0) = 0$ (poiché le proiezioni dovrebbero coincidere). Dunque se $m \neq M$ la singolarità del sistema di coordinate rappresentato dagli angoli di Eulero é al di fuori della regione in cui si svolge il moto. Se invece $m = M$, la Lagrangiana (8.12) assume la forma

$$L_0 = \frac{1}{2}I_1\dot{\theta}^2 - \frac{m(1 - \cos\theta)^2}{2I_1\sin^2\theta} - U(\theta) \quad 8.13$$

La funzione

$$\frac{(1 - \cos\theta)^2}{\sin^2\theta}$$

é differenziabile anche in $\theta = 0$, e dunque L_0 in (8.13) non é singolare.

Le corrispondenti equazioni di Lagrange hanno dunque una soluzione $\theta(t)$ che é regolare anche in corrispondenza agli eventuali tempi t_0 per cui $\theta(t_0) = 0$.

Utilizzando questa soluzione in (8.9) e (8.8) si determinano $\phi(t)$ e $\psi(t)$, e le funzioni così ottenute sono differenziabili in t anche in corrispondenza agli eventuali tempi t_0 per cui $\theta(t_0) = 0$.

In corrispondenza a questi valori del tempo gli angoli di Eulero ϕ e ψ non sono definiti.

Lungo la traiettoria considerata possiamo allora *definire* gli angoli di Eulero al tempo t_0 per cui $\theta(t_0) = 0$ mediante

$$\phi(t_0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \phi(t_0 + \epsilon); \quad \psi(t_0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \psi(t_0 + \epsilon) \quad 8.14$$

(assumiamo che lungo la traiettoria $\theta(t) \neq 0$ per $t - t_0$ non nullo e sufficientemente piccolo).

Con questa definizione *lungo la traiettoria considerata* gli angoli di Eulero risulteranno definiti univocamente e differenziabili in t .

Va tuttavia notato che i valori numerici di ϕ_0 e ψ_0 che risultano dalla definizione (8.14) *dipendono in generale dalla traiettoria considerata* e quindi non é possibile utilizzare (8.14) per definire gli angoli di Eulero quando $\theta = 0$.



TROTTOLA SIMMETRICA PESANTE

Consideriamo il caso in cui la forza esterna é la forza peso, così che

$$U(\theta) = \mu g l \cos\theta$$

dove abbiamo indicato con μ la massa della trottola, con g la costante di gravitazione, con l la distanza del baricentro dal punto fisso.

Vogliamo descrivere brevemente il moto *dell'asse della trottola*; studieremo successivamente la stabilità della posizione verticale dell'asse.

Il movimento descritto dalla coordinata θ é detto *nutazione*. Questa coordinata individua l'inclinazione dell'asse rispetto alla verticale.

L'angolo ϕ descrive il moto dell'asse della trottola lungo l'azimut; il corrispondente moto é detto *precessione*.

La descrizione del moto della trottola é poi completata descrivendo la variazione nel tempo dell'angolo ψ che individua la rotazione della trottola attorno al proprio asse.

Il moto di nutazione può essere descritto utilizzando la conservazione dell'energia per il moto descritto dalla lagrangiana (8.12)

Da (8.12) si deduce

$$E - \frac{M^2}{2I_3} = \frac{I_1}{2}\dot{\theta}^2 + U_{eff}(\theta), \quad U_{eff}(\theta) \equiv \frac{(m - M\cos\theta)^2}{2I_1\sin^2\theta} + \mu gl\cos\theta \quad 8.15$$

I moti di precessione e di rotazione attorno all'asse di simmetria potranno poi essere descritti esplicitando, attraverso le (8.8) e (8.9) le corrispondenti velocità angolari.

Si ottiene

$$\dot{\phi} = \frac{m - M\cos\theta(t)}{I_1\sin^2\theta(t)} \quad \dot{\psi} = \frac{M}{I_3} - \frac{M}{I_1} + \frac{M - m\cos\theta(t)}{I_1\sin^2\theta(t)} \quad 8.16$$

Notare che, se i dati iniziali sono tali che $M = m$ (questo deve accadere in particolare se nel corso del moto la coordinata θ assume il valore zero) la (8.16) assume la forma

$$\dot{\phi} = \frac{m}{I_1(1 + \cos\theta(t))} \quad \dot{\psi} = \frac{M}{I_3} - \frac{M}{I_1} + \frac{m}{I_1(1 + \cos\theta(t))} \quad 8.16_1$$

Analoghe considerazioni valgono se nel corso del moto si può avere $\theta = \pi$; notare che questo implica $m = -M$.

Nota 8.3

Dalle equazioni (8.15) e (8.16) si vede che le velocità angolari $\dot{\phi}$ e $\dot{\psi}$ sono ben definite anche per $\theta = 0$ (mentre gli angoli ϕ e ψ non sono ben definiti se non su ciascuna traiettoria).

Inoltre per $\theta = 0$ si ha

$$\frac{d(\phi + \psi)}{dt} = \frac{|l|}{I_3}$$

coerentemente al fatto che, se $\theta = 0$ l'angolo di rotazione é $\phi + \psi$ e l é la componente del momento angolare lungo l'asse di rotazione.



Iniziamo lo studio del moto della trottola pesante considerando il caso $m \neq M$.

Conviene introdurre i parametri

$$a \equiv \frac{m}{I_1}, \quad b \equiv \frac{M}{I_1}, \quad G \equiv \mu gl \quad 8.17$$

e la variabile

$$u \equiv \cos\theta, \quad |u| \leq 1$$

Si ha allora

$$U_{eff}(u) = gu + \frac{(a - bu)^2}{(1 - u^2)} \quad 8.17_1$$

Per $m \neq M$ la funzione U_{eff} diverge in $u = \pm 1$, e quindi nello studio della funzione U_{eff} non é rilevante il fatto che la trasformazione di coordinate $\theta \rightarrow u(\theta)$ sia singolare per $u = \pm 1$. La funzione U_{eff} é limitata inferiormente e tende a $+\infty$ per $u \rightarrow \pm 1$; nell'intervallo $(-1, 1)$ essa é infinite volte differenziabile. Dunque ha un minimo assoluto.

Si ha inoltre

$$(1 - u^2)^2 \frac{dU_{eff}}{du} \equiv F(u) = G(1 - u^2)^2 + 2b(1 - u^2)(a - bu) - 2(a - bu)^2 u \quad 8.18$$

Poiché

$$F(1) = -2(a - b)^2 < 0; \quad F(-1) = -2(a + b)^2 < 0$$

la funzione $\frac{dU_{eff}}{du}$ ha sempre uno zero nell'intervallo $(-1, 1)$ e puó averne tre (di cui alcuni eventualmente coincidenti) per opportune scelte dei parametri (e quindi dei dati iniziali).

Se lo zero é unico, la funzione $U_{eff}(\theta)$ ha in ciascuno degli intervalli $0 < \theta < \pi$ e $-\pi < \theta < 0$ un minimo assoluto e nessun altro punto critico.

Se si hanno tre zeri distinti di $F(u)$ la funzione $U_{eff}(\theta)$ ha due minimi e un massimo in ciascuno dei due intervalli.

Se due degli zeri coincidono si ha un minimo assoluto e un punto di flesso orizzontale, se i tre zeri coincidono si ha solo un minimo assoluto.

Se $m = M$ l'energia potenziale effettiva assume la forma

$$U_{eff}(\theta) \equiv \frac{m^2(1 - \cos\theta)^2}{2I_1 \sin^2\theta} + \mu gl \cos\theta \quad 8.19$$

In questo caso la funzione U_{eff} é di classe C^∞ anche nell'origine; nell'origine essa ha un minimo se $m^2 \geq 4\mu gl I_1$ e un massimo se $m^2 < 4\mu gl I_1$.

Da queste informazioni su U_{eff} si deduce che se i dati iniziali sono scelti in modo che θ assuma il valore corrispondente al minimo dell'energia potenziale effettiva (o, quando esistano, un massimo o un flesso orizzontale), l'inclinazione dell'asse della trottola rimane costante nel corso del moto (nel modello che consideriamo si trascurano gli effetti di dissipazione).

Per gli altri dati iniziali, il moto di nutazione é periodico e avviene tra due valori θ_1 e θ_2 ; fanno eccezione i dati iniziali che non sono massimi o punti di flesso orizzontale ma che corrispondono a un valore critico dell'energia potenziale effettiva.

In questi casi il moto di nutazione é asintotico

Per il teorema di Lagrange i minimi assoluti di U_{eff} sono sempre posizioni di equilibrio stabile dell'asse della trottola.

Se $m \neq M$, i massimi relativi di U_{eff} sono delle posizioni di equilibrio instabile per l'asse della trottola. Infatti per ogni dato iniziale "sufficientemente vicino" si avrá ancora $m \neq M$ e quindi il corrispondente grafico di U_{eff} non cambierà molto e avrá ancora un massimo relativo.

Lo studio della stabilitá puó essere allora fatto come nel caso dei moti centrali con la conclusione che l'equilibrio é instabile.

Nel caso dei flessi orizzontali, per dati iniziali che corrispondono a piccole variazioni di M e di m essi possono scomparire e quindi non corrispondere piú a posizioni di equilibrio per il moto dell'asse della trottola. Quindi anche in questo caso l'equilibrio é instabile.

Se invece si ha una posizione di equilibrio con $M = m$ il potenziale efficace ha la forma

$$U_{eff}(\theta) = \frac{m}{2I_1} \frac{1 - \cos\theta}{\sin^2\theta} + \mu gl \cos(\theta) \quad 8.20$$

il cui grafico é una curva regolare.

Se $\frac{m^2}{8I_1} \leq \frac{\mu g l}{2}$ la funzione U_{eff} ha un minimo assoluto in $\theta = 0$ e un massimo in $\theta = \pi$. La posizione verticale dell'asse é quindi un equilibrio instabile.

Se $\frac{m^2}{8I_1} > \frac{\mu g l}{2}$ la funzione U_{eff} ha un minimo relativo in $\theta = \pi$ e due massimi in $\pm\theta_c$.

Per il teorema di Lagrange le posizioni θ_c sono posizioni di equilibrio instabile per l'asse della trottola.

La posizione verticale (verso l'alto) é certamente posizione d'equilibrio stabile *se si considerano solo configurazioni per le quali $m = M$* .

In un intorno arbitrariamente piccolo di queste posizioni ve ne sono altre per le quali $m \neq M$. Per determinare in questo caso la stabilitá della posizione di equilibrio verticale (rivolta verso l'alto) dell'asse della trottola é necessario uno studio piú articolato che faremo in seguito.

Consideriamo ora il moto di precessione. Se $m \neq M$ esso é descritto dalle equazioni (8.16) se $m \neq M$ e (8.16₁) se $m = M$.

Siano θ_1 e θ_2 i due estremi dell'intervallo di variazione dell'angolo θ , con $\theta_1 < \theta_2$.

Se la funzione $m - M\cos\theta$ non cambia segno in questo intervallo, il moto di precessione é monotono, e la direzione dell'asse della trottola traccia sulla sfera unitaria una curva regolare di tipo sinusoidale.

Se invece essa cambia segno, il moto di precessione avviene in direzione opposta sui paralleli $\theta = \theta_1$ e $\theta = \theta_2$ e la curva tracciata dall'asse della trottola sulla sfera unitaria ha dei punti di autointersezione (dei lacci).

Un caso intermedio é quello in cui $m - M\cos\theta$ ha segno definito all'interno dell'intervallo di oscillazione di θ ma si annulla in uno degli estremi.

In questo caso ha segno la curva tracciata dall'asse della curva sulla sfera unitaria ha delle cuspidi, corrispondenti agli istanti in cui $\dot{\phi} = 0$.

Questo avviene in particolare se si prendono dati iniziali in cui $\dot{\phi}(0) = 0$ e $\theta(0) = \theta_2$. In questo caso l'asse della trottola "cade" inizialmente ma poi ritorna alla quota iniziale dove si ha nuovamente $\dot{\phi} = 0$.

Un caso estremo é quello in cui $\theta_1 = \theta_2$ (massimi o punti di flesso di U_{eff}).

In questo caso la curva tracciata é una circonferenza. Il moto di precessione e anche quello di rotazione avvengono con velocità costante.

In corrispondenza a dati iniziali per i quali il moto asintotico é di nutazione corrispondono moti di precessione e di rotazione con velocità angolari che tendono a valori costanti.

Il moto di rotazione, descritto dalle equazioni (8.16) e (8.16₁), può essere analizzato nello stesso modo. I dettagli verranno lasciati al lettore.

STABILITA' DELLA POSIZIONE VERTICALE DELL'ASSE

Studiamo ora la stabilitá della posizione verticale dell'asse della trottola, con il baricentro al di sopra del punto di contatto (la posizione verticale con il baricentro al di sotto del punto di contatto é sempre una posizione di equilibrio stabile per l'asse della trottola).

Indichiamo con $\omega_0 = \dot{\hat{c}}_3$ la velocità angolare al tempo $t = 0$.

E' facile vedere che la direzione verticale é una posizione di equilibrio per l'asse della trottola. Infatti, in questa posizione dell'asse, é nullo il momento delle forze. D'altra parte, in assenza di (momento delle) forze, ogni rotazione uniforme attorno all'asse di simmetria é soluzione delle equazioni di Eulero.

Quindi

$$\omega(t) = \omega_0 = \dot{\hat{c}}_3, \quad R(t) = e^{A\omega_0 t} R(0) \quad 8.21$$

é soluzione delle equazioni di Eulero per la trottola non soggetta a peso.

Lungo queste soluzione, il momento della forza peso é nullo.

Dunque (8.21) *é anche soluzione delle equazioni per la trottola soggetta alla forza peso.*
Per il teorema di unicita', essa *é la soluzione per il dato iniziale*

$$\omega(0) = c\hat{h}_3, \quad \hat{k}_i(0) = \hat{h}_i$$

e si ha $\hat{k}_3(t) = \hat{h}_3 \quad \forall t$.

Discutiamo ora brevemente la stabilita' della posizione di equilibrio $\theta = \pi$ per il sistema (8.18). I parametri m ed M che appaiono dipendono dalla posizione e velocita' iniziale della trottola (cosi' che le proprietá dell' equilibrio possono cambiare se si considera la possibilita' che questi parametri vengano modificati).

Incominciamo con lo studio del moto dell'asse della trottola in corrispondenza a dati iniziali per cui $m = M$

Abbiamo gia' notato che $\theta = \pi$ *é una posizione di equilibrio instabile per l'asse della trottola se*

$$\frac{m^2}{8I_1} \leq \frac{1}{2}\mu gl \quad 8.22$$

Se

$$\frac{m^2}{8I_1} > \frac{1}{2}\mu gl \quad 8.23$$

dallo studio del grafico di U_{eff} possiamo concludere la stabilita' *solo relativamente a quei dati iniziali prossimi alla posizione di equilibrio e tali che $m=M$.*

Dobbiamo ora considerare gli altri dati iniziali prossimi alla posizione di equilibrio.

Poiche' la direzione iniziale dell'asse di simmetria *é vicina alla verticale*, $\hat{k}_3(0)$ differisce poco da \hat{h}_3 e quindi $m \simeq M$.

Possiamo quindi considerare un intorno di dati iniziali per i quali $|m - M| \leq \epsilon$ e notare che siamo interessati solo al caso $|\epsilon| \ll 1$.

Dobbiamo allora analizzare per $a > 1$ ed ϵ molto piccolo il grafico della funzione $U_{\epsilon,a}(\theta)$

$$U_{\epsilon,a}(\theta) = \frac{2a(\epsilon + 1 - \cos\theta)^2}{\sin^2\theta} + \cos\theta - 1 \quad 8.24$$

Per $\theta \gg |\epsilon|^{1/2}$ ($\gg \epsilon$) il grafico di $U_{\epsilon,a}(\theta)$ non differisce sostanzialmente da quello di $U_{0,a}(\theta)$.

Ci rimane da analizzare (8.24) quando θ *é di ordine* $\epsilon^{1/2}$.

Conviene per questo introdurre la variabile y ponendo

$$y \equiv |\epsilon|^{-1/2}\theta$$

Utilizzando lo sviluppo in serie di $\sin\theta$ e di $\cos\theta$ in un intorno di $\theta = 0$, si ottiene

$$\begin{aligned} U_{\epsilon,a}(|\epsilon|^{1/2}y) &\equiv \tilde{U}_{\epsilon,a}(y) = |\epsilon| \left(\frac{2a[1 \pm \frac{1}{2}y^2]^2}{y^2} - \frac{1}{2}y^2 \right) + O(\epsilon^2) \\ &= |\epsilon| \left(\frac{2a}{y^2} \pm 2a + \frac{1}{2}(a-1)y^2 \right) + O(\epsilon^2) \end{aligned} \quad 8.25$$

dove \pm corrisponde a $\frac{\epsilon}{|\epsilon|} = \pm 1$.

Per ϵ sufficientemente piccolo il termine di ordine ϵ^2 puo' essere trascurato per $|y| \gg \epsilon^{1/2}$.

Se $a > 1$, la funzione

$$\frac{2a}{y^2} \pm 2a + \frac{1}{2}(a-1)y^2 \quad 8.25$$

ha un minimo per

$$y = \pm[4a/(a-1)]^{1/4}$$

e la sua derivata seconda nel punto di minimo vale

$$[12ay^{-4} + a - 1]_{y^4 = \frac{4a}{a-1}} = 4(a-1)$$

Dunque $U_{\epsilon,a}(\theta)$ ha un minimo in $\theta_0 = \pm|\epsilon|^{1/2}(4a(a-1))^{1/4}$ e nel punto di minimo la derivata seconda vale $4\epsilon(a-1)$.

La posizione θ_0 é una posizione di equilibrio stabile e $\theta = \pi$ é nel suo "bacino" (al dato iniziale π corrisponde un'oscillazione intorno a θ_0).

Pertanto se $a > 1$ la posizione verticale rivolta verso l'alto dell'asse é una posizione di equilibrio stabile; infatti scelto ogni $\delta > 0$ si può trovare $\epsilon(\delta) > 0$ (con $\epsilon(\delta) \rightarrow 0$ quando $\delta \rightarrow 0$) tale che se $\epsilon < \epsilon(\delta)$ si ha $|\theta - \pi| < \epsilon$.

Se $a < 1$ la funzione (8.25) non ha minimi e tende asintoticamente a $-\infty$. In questo caso la posizione verticale verso l'alto dell'asse é una posizione di equilibrio *instabile*.

Se $a = 1$ la funzione $U_{\epsilon,1}$ non ha minimi, ma ha un asintoto orizzontale, e quindi un estremo inferiore.

In questo caso per determinare la stabilità é necessario studiare la funzione $U_{\epsilon,1}$ su una scala piú grande, cosi' da analizzare meglio il comportamento vicino all'origine.

Infatti l'analisi fatta finora nel caso $a = 1$ dice solamente che un eventuale minimo di $U_{\epsilon,1}$ é a distanza "molto grande" rispetto a $\epsilon^{1/2}$.

Tenuto conto che, per $a = 1$ si ha

$$U_{eff}(\theta) = C\theta^4(1 + O(\theta)) \quad 8.26$$

conviene introdurre variabili riscalate ponendo

$$z \equiv |\epsilon|^{-1/4}\theta$$

Facendo uso dello sviluppo in serie di Taylor di $\sin \theta$ e di $1 - \cos \theta$ si ottiene

$$U_{eff}(\theta) = \epsilon U_{\epsilon,1}(z) + \epsilon^{1/2} \quad 8.27$$

dove

$$U_{\epsilon,1}(z) = \frac{2}{z^2} + \frac{z^2}{12} + \frac{z^4}{24} + O(\sqrt{\epsilon}) \quad 8.28$$

Dimostriamo che per $a \geq 1$ la configurazione in cui l'asse della trottola é verticale e rivolto verso l'alto é una posizione di equilibrio stabile per l'asse della trottola.

Piú precisamente vogliamo dimostrare

Proposizione 8.1

Per ogni $m, M, C_1 > 0$ esiste una costante $C(m, M, C_1)$ tale che, per ogni $\delta > 0$ tale che, se

$$|p_\phi - m| < \delta^2, \quad |p_\psi - M| < \delta^2, \quad |\dot{\phi}_0| < C_1, \quad \sqrt{\theta_0^2 + \dot{\theta}_0^2} < \delta \quad 8.29$$

allora

$$|\theta(t, \theta_0, \dot{\theta}_0, m, M, \dot{\phi}_0)| < C\delta, \quad |\dot{\theta}(t, \theta_0, \dot{\theta}_0, m, M, \dot{\phi}_0)| < C\delta \quad \forall t \quad 8.30$$

◇

Dimostrazione

Diamo i dettagli solo per il caso $a > 1$.
 E' sufficiente dare la dimostrazione per δ sufficientemente piccolo.
 Dalla definizione si ha

$$p_\phi = p_\psi \cos\theta + I_1 \dot{\phi} \sin^2\theta$$

e quindi, sotto le ipotesi (8.22), e utilizzando le disuguaglianze, valide per θ piccolo

$$|\sin\theta| < |\theta|, \quad 1 - \cos\theta < \frac{1}{2}\theta^2 \quad 8.31$$

si deduce che esiste una costante positiva C_3 tale che. per tutti i dati iniziali che soddisfano (8.29) si ha

$$\left| \frac{m}{M} - 1 \right| < C_3 \delta^2$$

Posto

$$\epsilon = C_3 \delta^2$$

siamo dunque nel dominio di applicabilita' dell'approssimazione che abbiamo fatto per determinare il grafico della funzione $U_{\epsilon,a}(\theta)$.

Utilizzando ancora (8.23) si vede che, per i dati iniziali scelti, l'energia E sodisfa la relazione

$$|cE| < K\delta^2 \quad 8.32$$

per un'opportuna costante positiva K .

Ricordando la scala in cui sono rappresentate ascisse e ordinate si ottiene la dimostrazione della Proposizione 8.1 seguendo il metodo che si utilizza nello studio dei sistemi a un grado di liberta'.

Infatti, la condizione (8.30) garantisce che nel corso del moto la variabile $|y|$ deve rimanere all'interno di un intervallo limitato $[y_1, y_2]$; la variabile θ deve dunque soddisfare a ciascun istante le disuguaglianze

$$\sqrt{C_3} y_1 \delta \leq |\theta(t)| \leq \sqrt{C_3} y_2 \delta \quad 8.33$$

e questa e' precisamente la tesi della Proposizione 8.1.

Tenendo conto del fatto che l'ascissa e' descritta in scala $\sqrt{\epsilon}$ si deduce che esiste un valore $\theta_0 > 0$ tale che per ogni $\delta > 0$ si puo' trovare una traiettoria $\theta(t)$ con dato iniziale $|\theta(0)| < \delta$ e che soddisfa $\sup_t |\theta(t)| > \theta_0$.

Ne concludiamo che la direzione verticale e' di equilibrio stabile per l'asse della trottola se $m^2 \geq 4\mu g l I_1$ e instabile se $m^2 < 4\mu g l I_1$.

♡

Nota 8.3

Nella descrizione del moto reale della trottola non si possono trascurare le forze di attrito. Se si schematizza il loro contributo dissipativo con un effetto di diminuzione della componente m del momento della quantita' di moto, si puo' comprendere sulla base dell'analisi fatta qui sopra il passaggio dalla stabilita' all'instabilita' della posizione verticale dell'asse della trottola. L'equilibrio diventa instabile e la trottola *cade* quando la dissipazione ha portato m ad un valore inferiore al valore critico $2\sqrt{\mu g l I_1}$.

La descrizione del moto e' in realta' piu' complessa, anche se si schematizza l'effetto delle forze di attrito con una diminuzione di m .

Infatti lo studio che abbiamo fatto del moto della trottola e' relativo al caso in cui m e' costante, e uno studio piu' accurato delle soluzioni sarebbe necessario quando m dipende dal tempo.

Possiamo aspettarci che la descrizione data rimanga approssimativamente valida se i tempi di variazione di m sono molto lunghi rispetto ai tempi di variazione degli angoli di Eulero; si può allora pensare di poter considerare che il moto della trottola sia descritto "giustappo-
 ndo" almeno approssimativamente delle soluzioni delle equazioni di Lagrange relative a valori diversi di m .

Discuteremo in seguito la validità di questa approssimazione, che viene detta 'approssimazione
adiabatica.



TROTTOLA SIMMETRICA IN ASSENZA DI PESO

Questo è un caso particolare del problema precedente, quando $g = 0$.

Il suo interesse risiede nel fatto che è possibile fare un confronto tra la descrizione in termini degli angoli di Eulero e la descrizione geometrica di Poincaré.

Inoltre dalle equazioni di Lagrange per la trottola pesante si deduce una proprietà di *similitudine*: nella descrizione qualitativa del moto è significativo solo il rapporto $\frac{m^2}{g}$.

Dunque il moto di una trottola *molto veloce* (cui corrisponde cioè un grande valore di m) è qualitativamente identico a quello di una trottola in un campo gravitazionale *molto piccolo*.

Lo studio del caso $g = 0$ provvede dunque una prima approssimazione al moto di una trottola molto veloce; un' approssimazione successiva potrà essere ottenuta trascurando i termini di ordine maggiore di uno nella costante di gravitazione g , o dimostrando che le caratteristiche qualitative del moto non vengono alterate se g è sufficientemente piccolo.

Se $g=0$ l'energia potenziale effettiva ha la forma

$$U_{eff}^0(\theta) = \frac{(m - M \cos \theta)^2}{2I_1 \sin^2 \theta} \quad 8.35$$

Senza perdita di generalità assumiamo $M \geq 0$ (questo corrisponde ad una scelta di orientazione dell'asse di simmetria).

Se $g = 0$, la direzione *verticale* non è prefissata; per ciascuna scelta dei dati iniziali si può prenderla in modo che $m = |l|$, dove l è il momento angolare (che è conservato se $g = 0$).

Questo corrisponde allo scegliere la direzione del momento angolare come asse h_3 per definire gli angoli di Eulero.

Con questa scelta si ha $m = |l| \geq M$ e la funzione U_{eff} ha un minimo in $\theta_0 \equiv \arccos \frac{M}{|l|}$.

Si ha allora $\theta(0) = \theta_0$ e quindi

$$\theta(t) = \theta_0 \quad \forall t \quad 8.36$$

L'angolo di nutazione è costante e le velocità angolari di rotazione e di precessione sono costanti e date, secondo le (8.15) e (8.16), da

$$\dot{\phi} = \frac{|l|(1 - \cos^2 \theta_0)}{I_1 \sin^2 \theta_0} = \frac{|l|}{I_1}, \quad \dot{\psi} = \frac{M}{I_3} - \frac{|M|}{I_1} \quad 8.37$$

Nota 8.4

Con questa scelta di assi, la descrizione mediante gli angoli di Eulero coincide con la descrizione secondo Poincaré.



Il moto è composizione di due moti periodici, ed è quindi multiperiodico con due frequenze fondamentali.

Questa conclusione é naturalmente vera indipendentemente dalla scelta degli assi, ma per scelte degli assi diverse da quella descritta qui sopra non é immediato dedurre le due frequenze fondamentali dallo studio delle soluzioni del problema.

CAMPO GRAVITAZIONALE PICCOLO

Quando $g \neq 0$ gli angoli di Eulero saranno ancora in generale funzioni multiperiodiche del tempo, ma non avendosi piú una descrizione alla Poincot non é in generale facile determinare i periodi fondamentali né le condizioni sui dati iniziali affinché il moto sia periodico.

Studiamo brevemente il moto nel caso in cui il campo gravitazionale é piccolo.

Vogliamo dimostrare che, se all'istante iniziale la trottola ruota attorno al suo asse di simmetria, che indichiamo con $\hat{k}_3(0)$, nel corso del moto l'asse di simmetria si discosta da $\hat{k}_3(0)$ solo per termini infinitesimi in g e la velocità angolare di rotazione attorno all'asse di simmetria differisce da quella che si ha nel caso $g = 0$ solo per termini infinitesimi in g .

Vi é inoltre un lento moto di precessione dell'asse di simmetria rispetto all'asse verticale (determinato dalla forza peso)

Nota 8.5

Le equazioni che si deducono dalla conservazione dell'energia sono invarianti per la trasformazione

$$g \rightarrow \lambda g, \quad M \rightarrow \sqrt{\lambda} M, \quad m \rightarrow \sqrt{\lambda} m, \quad t \rightarrow \lambda^{-\frac{1}{2}} t, \quad \lambda > 0 \quad 8.38$$

(questa trasformazione altera ciascun termine per lo stesso fattore λ)

Scegliendo $\lambda = g^{-1}$ si vede che lo studio del moto per piccoli valori di g equivale, a meno di cambiamento nella scala dei tempi, allo studio del moto per grandi valori di m e M , e quindi allo studio di una trottola che ruota molto velocemente attorno al suo asse di simmetria.

Dal comportamento per g piccolo si deduce allora che se all'istante iniziale il moto é di rotazione attorno all'asse di simmetria, con grande velocità angolare, l'angolo che l'asse di simmetria forma con la verticale rimane "praticamente costante" anche in presenza di un campo gravitazionale, e la velocità di rotazione attorno all'asse di simmetria viene variata di poco percentualmente.

Vi é inoltre un moto di precessione dell'asse di simmetria attorno alla verticale con una velocità che é piccola rispetto alla velocità di rotazione del corpo attorno al suo asse di simmetria.



Per analizzare il moto quando g é molto piccolo, utilizziamo angoli di Eulero costruiti assumendo come asse fisso la direzione del campo gravitazionale, che chiameremo "verticale".

Se θ_0 é l'angolo che all'istante iniziale l'asse di simmetria forma con la verticale, e con m la proiezione del momento angolare lungo la verticale (così che $m = M \cos \theta_0$) l'energia potenziale effettiva ha la forma

$$U_{eff}^{G, \theta_0} = \frac{M(\cos \theta - \cos \theta_0)^2}{2I_1 \sin^2 \theta} + G \cos \theta, \quad G \equiv \mu g l \quad 8.39$$

Studiamo solo il caso in cui θ_0 é grande rispetto G (in un senso che preciseremo meglio in seguito).

Il caso in cui θ_0 é molto piccolo rispetto a G (così che $1 - \frac{m}{M}$ é piccolo) é stato trattato nel corso dello studio della stabilità della posizione verticale.

Se θ_0 e G sono dello stesso ordine di grandezza, la descrizione del moto é sostanzialmente piú complicata.

Per $g = 0$ la funzione U_{eff}^{G, θ_0} ha un minimo isolato in $\theta = \theta_0$.

Per il teorema della funzione implicita se G é piccolo, la funzione $U_{eff}^{G,\theta}$ avrà un minimo isolato per un valore di θ prossimo a θ_0 .

Per determinare la posizione del minimo e la derivata seconda di U_{eff}^G nel punto di minimo (questo provvederà l'informazione sulla frequenza di piccola nutazione) poniamo $\theta = \theta_0 + w$. Sviluppando al secondo ordine in $|w|$ la funzione U_{eff} (quindi al primo ordine la sua derivata, per applicare il teorema della funzione implicita nella ricerca del minimo) si ottiene

$$U_{eff} = \frac{M \text{sen}^2 \theta_0}{2I_1 \text{cos}^2 \theta_0} \left[\frac{w - GI_1 \text{sen} \theta_0 \text{cos}^2 \theta_0}{M \text{sen}^2 \theta_0} \right]^2 - \frac{G \text{cos} \theta_0}{2} w^2 + O(|w|^3) \quad 8.40$$

Dalla (8.40) si deduce che il minimo della funzione U_{eff} si trova in un punto che, a meno di termini di ordine due in G é dato da

$$\theta_{min} = \theta_0 + w_{min}, \quad w_{min} = \frac{GI_1 \text{cos}^2 \theta_0}{M \text{sen} \theta_0} \quad 8.41$$

Si conclude allora che l'asse di simmetria compie una nutazione periodica con ampiezza data approssimativamente dal doppio di (8.41) e con una frequenza che, al primo ordine in G é data da

$$\omega_{nut}^2 = \frac{M \text{sen}^2 \theta_0}{I \text{cos}^2 \theta_0} - G \text{cos} \theta_0 \quad 8.42$$

Il moto di precessione attorno all'asse verticale é descritto dall'equazione (8.15).

Ricordando che $m = M \text{cos} \theta_0$ e ponendo come prima $w \equiv \theta - \theta_0$ si ottiene, al primo ordine in G

$$\dot{\phi}(t) = \frac{Mw(t)}{\text{sen} \theta_0}$$

La variazione di ϕ per ogni periodo T_{nut} del moto di nutazione é allora dato da

$$\Delta\phi = \int_0^T \frac{Mw(t)}{\text{sen} \theta_0} dt$$

Al primo ordine in G si ha $w(t) = w_{min} + h(t)$ dove w_{min} é dato in (8.42) e $h(t)$ é una funzione a media nulla nel periodo T .

La variazione $\Delta\phi$ é dunque data, al primo ordine in G , da

$$\Delta\phi = Tw_{min}, \quad T = \omega_{nut}^{-1}$$

Sostituendo l'espressione di ω_{nut} data in (8.42) si ottiene

$$\Delta\phi = \frac{I_1 G}{\sqrt{M}} \text{tg}^3 \theta_0 + O(G^2) \quad 8.43$$

Il movimento di precessione é dunque *lento* con velocità media proporzionale a G .

Lezione 9. TRASFORMAZIONI CANONICHE E SIIMPLETTICHE, PARENTESI DI POISSON

Struttura algebrica e geometrica della dinamica hamiltoniana

APPENDICE: Trattazione hamiltoniana di una particella in capo magnetico

Nello studio delle equazioni di Lagrange abbiamo sottolineato come sia importante il fatto che esse siano invarianti in forma per ogni trasformazione di coordinate (di classe C^1) nello spazio delle configurazioni.

Questo permette in particolare di utilizzare le coordinate piú adatte per il problema che si vuole analizzare.

Abbiamo anche notato che ogni trasformazione di coordinate nello spazio delle configurazioni può venir "sollevata" a diventare una trasformazione di coordinate nel fibrato tangente (spazio posizione-velocità), e quindi può essere trasportata, mediante la trasformazione di Legendre, a una trasformazione di coordinate nel fibrato cotangente (spazio delle fasi).

Data l'equivalenza delle equazioni di Lagrange con quelle di Hamilton, le trasformazioni così ottenute lasciano invarianti le equazioni di Hamilton, senza cambiare l'Hamiltoniana (come funzione sullo spazio delle fasi).

Ci dobbiamo aspettare che vi siano altre trasformazioni di coordinate nello spazio delle fasi che godono della stessa proprietà.

Vogliamo studiare in questa Lezione quelle trasformazioni di coordinate nello spazio delle fasi che lasciano invarianti *in struttura* le equazioni di Hamilton

Con questo intendiamo che se un flusso è descritto nel primo sistema di coordinate da equazioni di Hamilton con hamiltoniana H , allora anche nel secondo sistema di coordinate questo flusso è descritto da equazioni di Hamilton, eventualmente per una diversa hamiltoniana K .

Poiché le equazioni di Hamilton sono dette *equazioni canoniche* poniamo la seguente definizione:

Definizione 9.1

Una trasformazione di coordinate $\{q, p\} \rightarrow \{Q, P\}$ in R^{2N} si dice *canonica* se lascia invariante la struttura delle equazioni canoniche

◇

Una trasformazione canonica ha quindi *per definizione* la seguente proprietà.

Scegliamo *arbitariamente* una funzione $H(q, p, t)$ di classe C^2 e indichiamo con

$$\{\phi_m(t; q^0, p^0), \psi_m(t; q^0, p^0)\} \quad m = 1 \dots N$$

le soluzioni di

$$\frac{dq_m}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_m}, \quad \frac{dp_m}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_m}, \quad m = 1, \dots, N \quad 9.1$$

con dati iniziali $\phi_m(t_0; q^0, p^0) = q_m^0$, $\psi_m(t_0; q^0, p^0) = p_m^0$ al tempo t_0

Posto

$$Q_m(t; q^0, p^0) \equiv Q_m(\phi(t, q^0, p^0), \psi(t, q^0, p^0)), \quad P_m(t; q^0, p^0) \equiv P_m(\phi(t, q^0, p^0), \psi(t, q^0, p^0)) \quad 9.2$$

esiste una funzione $K(Q, P, t)$ (dipendente da H) tale che siano soddisfatte le equazioni

$$\frac{dQ_m}{dt} = \frac{\partial K}{\partial P_m}, \quad \frac{dP_m}{dt} = -\frac{\partial K}{\partial Q_m} \quad 9.3$$

I dati iniziali devono naturalmente essere scritti nella forma

$$Q^0 = Q(t_0; q^0, p^0); \quad P^0 = P(t_0; q^0, p^0)$$

E' facile costruire delle trasformazioni per le quali $K(H) \neq H$ (per chiarezza abbiamo indicato esplicitamente la dipendenza di K da H).

Basta porre ad esempio

$$Q_m = \alpha q_m \quad P_m = \alpha p_m, \quad \alpha \neq 0 \quad 9.4$$

Se le coordinate q, p soddisfano (9.1), allora le coordinate Q_k, P_k soddisfano

$$\begin{aligned} \dot{Q}_m &= \alpha \dot{q}_m = \alpha \frac{\partial H}{\partial p_m} = \alpha^2 \frac{\partial H}{\partial P_m} \\ \dot{P}_m &= \alpha \dot{p}_m = -\alpha \frac{\partial H}{\partial q_m} = -\alpha^2 \frac{\partial H}{\partial Q_m} \end{aligned}$$

e dunque si ha $K(H) = \alpha^2 H$.

Nello stesso modo, ponendo $Q_m = p_m, P_m = q_m$ si ottiene $K(H) = -H$.

Una classe particolare di trasformazioni canoniche sono quelle per le quali $K(H) = H$.

Chiameremo *simplettiche* queste trasformazioni.

Vedremo piú avanti che esse hanno un' interpretazione *geometrica*.

Si ha dunque

Definizione 9.2

Una trasformazione canonica viene detta *simplettica* se comunque si scelga la funzione H risulta $K(H) = H$

◇

Nota 9.1

Nella definizione data, la relazione $K(H) = H$ va intesa come identitá tra funzioni definite sullo spazio delle fasi; la dipendenza funzionale di K dalle coordinate Q, P sará in generale *diversa* dalla dipendenza funzionale di H dalle coordinate q, p .

Utilizzeremo questa proprietá per scegliere, in corrispondenza a ciascuna hamiltoniana che studieremo, le coordinate che permettono di semplificare la sua forma.

♣

Non sará naturalmente vero che ogni trasformazione di coordinate nello spazio delle fasi sia simplettica, e neppure canonica.

Dimostreremo però che ogni trasformazione di coordinate di classe C^1 nello spazio delle configurazioni puó essere "sollevata" allo spazio delle fasi (in modo non unico!) in modo da ottenere una trasformazione simplettica.

Questo significa che, per ogni trasformazione di coordinate $q \rightarrow Q(q)$, di classe C^1 , é possibile costruire N funzioni $P_k(q, p)$ in modo tale che la trasformazione $q \rightarrow Q(q), p \rightarrow P(q, p)$ sia simplettica.

E' opportuno notare che queste trasformazioni *sollevate* dallo spazio delle configurazioni *non esauriscono le trasformazioni simplettiche*.

Per individuare condizioni necessarie e/o sufficienti affinché una trasformazione di coordinate nello spazio delle fasi sia simplettica (o sia canonica) conviene studiare innanzitutto la legge di variazione di una generica funzione $G(q, p, t)$ lungo le soluzioni delle equazioni di Hamilton. Indichiamo con $\phi_m^H(t; q^0, p^0), \psi_m^H(t; q^0, p^0)$ la soluzione delle equazioni di Hamilton con Hamiltoniana H, corrispondenti ai dati iniziali q_m^0, p_m^0 .

Utilizzando la regola di derivazione di funzioni composte, si ottiene

$$\frac{d}{dt} G(\phi_m^H(t; q^0, p^0), \psi_m^H(t; q^0, p^0), t) = \sum_k \left(\frac{\partial G}{\partial q_k} \dot{\phi}_k + \frac{\partial G}{\partial p_k} \dot{\psi}_k \right) + \frac{\partial G}{\partial t}$$

$$= \{G, H\}_{q,p}(\phi_m^H(t; q^0, p^0), \psi_m^H(t; q^0, p^0), t) + \frac{\partial G}{\partial t} \quad 9.6$$

dove abbiamo utilizzato le equazioni del moto e abbiamo *definito*

$$\{G, H\}_{q,p} \equiv \sum_k \left(\frac{\partial G}{\partial q_k} \frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial H}{\partial q_k} \frac{\partial G}{\partial p_k} \right) \quad 9.7$$

Definizione 9.3

La funzione $\{G, H\}_{q,p}$ viene detta *Parentesi di Poisson* delle funzioni G e H *relativa alle coordinate* q, p .

◇

Abbiamo utilizzato esplicitamente il suffisso q, p per sottolineare il fatto che *la definizione é stata data utilizzando la dipendenza funzionale di G e di H dalle variabili q, p .*

In generale se si utilizza la dipendenza funzionale di G, H da un altro sistema di coordinate, il risultato dell'operazione indicata é diverso.

L'operazione *Parentesi di Poisson relativa alle coordinate* p, q associa dunque a due funzioni G, H definite sullo spazio delle fasi e di classe $C^k, k \geq 1$, la funzione $\{G, H\}_{q,p}$ di classe C^{k-1} . In realtà si vede dalla definizione che l'operazione "parentesi di Poisson" coinvolge solo le derivate della funzioni G e H rispetto alle coordinate utilizzate, e quindi l'espressione $\{G, H\}_{q,p}$ *dipende solamente dai differenziali dH e dG .*

In particolare le funzioni costanti hanno parentesi di Poisson nulla con tutte le funzioni differenziabili.

L'applicazione $G, H \rightarrow \{G, H\}_{q,p}$ é palesemente lineare in entrambi i fattori, ed é ovviamente antisimmetrica per lo scambio $G \leftrightarrow H$.

Un calcolo esplicito dimostra anche che, per ogni scelta delle funzioni F, G, H di classe C^2 vale l'identità

$$\{F, \{G, H\}\} + \{G, \{H, F\}\} + \{H, \{F, G\}\} = 0 \quad 9.8$$

Definizione 9.4

All'identità (9.8) si dá il nome di *Identitá di Jacobi*.

◇

Nota 8.2

Nell'appendice alla Lezione 7 abbiamo notato che anche il prodotto di Lie di due campi vettoriali gode delle proprietà di linearitá e di antisimmetria e soddisfa l'identità di Jacobi.

Questo non é accidentale; infatti ad ogni funzione F definita sullo spazio delle fasi e di classe C^1 può essere associato un campo vettoriale mediante la seguente prescrizione:

$$\frac{dq_m}{d\alpha} = \frac{\partial F}{\partial p_m}, \quad \frac{dp_m}{d\alpha} = -\frac{\partial F}{\partial q_m} \quad m = 1, \dots, N \quad 9.9$$

(se α é il parametro "tempo" e F é la hamiltoniana, queste sono le equazioni del moto di Hamilton!).

Indicato con ξ_F il campo vettoriale in (9.9), individuato nelle coordinate (q, p) dalle N funzioni

$$\left\{ \frac{\partial F}{\partial p_m} \right\}, \quad \left\{ -\frac{\partial F}{\partial q_m} \right\}$$

si può verificare (noi lo faremo in forma concisa in seguito) che vale l'identità, per ogni coppia di funzioni di classe C^2

$$[\xi_F, \xi_G] = -\xi_{\{F, G\}}$$



Per la determinazione di condizioni necessarie e/o sufficienti affinché una trasformazione di coordinate sia canonica (o simplettica) é utile in seguente teorema.

Esso dá le condizioni affinché un campo vettoriale ξ definisca equazioni hamiltoniane (o, equivalentemente, affinché il flusso di ξ sia composto da soluzioni di equazioni di Hamilton per qualche hamiltoniana.)

TEOREMA DI POISSON

Consideriamo un sistema di equazioni del primo ordine in R^{2N} il cui flusso é descritto nelle coordinate $q_k, p_k, k = 1, \dots, N$ da $t \rightarrow q(t), p(t)$.

Queste equazioni sono canoniche (= hamiltoniane) se e solo se, per ogni coppia di funzioni $R(q, p, t), S(q, p, t)$, si ha

$$\frac{D\{R, S\}_{q,p}}{dt} = \left\{ \frac{DR}{dt}, S \right\}_{q,p} + \left\{ R, \frac{DS}{dt} \right\}_{q,p} \quad 9.10$$

dove abbiamo indicato con $\frac{DF}{dt}$ la derivata totale della funzione F lungo il flusso considerato, cioè

$$\frac{DF(q, p, t)}{dt} \equiv \sum_{k=1}^N \left[\frac{\partial F}{\partial q_k} \frac{dq_k}{dt} + \frac{\partial F}{\partial p_k} \frac{dp_k}{dt} \right] + \frac{\partial F}{\partial t}$$



Dimostrazione

1 - Necessitá

Dalla (9.6) e dalla definizione di $\frac{D}{dt}$ si deduce

$$\frac{D\{R, S\}_{q,p}}{dt} = \{ \{R, S\}, H \}_{q,p} + \frac{\partial}{\partial t} \{R, S\}_{q,p} \quad 9.11$$

Per l'identitá di Jacobi, il primo termine a destra nella (9.11) é uguale a

$$\{ \{R, H\}, S \}_{q,p} + \{ \{H, S\}, R \}_{q,p}$$

mentre il secondo termine a destra nella (9.11) puó essere esplicitato

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \sum_k \left(\frac{\partial R}{\partial q_k} \frac{\partial S}{\partial p_k} - \frac{\partial S}{\partial q_k} \frac{\partial R}{\partial q_k} \right) = \\ & \sum_k \left(\frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{\partial R}{\partial t} \right) \cdot \frac{\partial S}{\partial p_k} + \frac{\partial R}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial}{\partial p_k} \left(\frac{\partial S}{\partial t} \right) - \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{\partial S}{\partial t} \right) \cdot \frac{\partial R}{\partial p_k} - \frac{\partial S}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial}{\partial p_k} \left(\frac{\partial R}{\partial t} \right) \right) \\ & = \left\{ \frac{\partial R}{\partial t}, S \right\}_{q,p} + \left\{ R, \frac{\partial S}{\partial t} \right\}_{q,p} \end{aligned} \quad 9.12$$

L'asserto é allora dimostrato ricordando che

$$\frac{dS}{dt} = \{S, H\}_{q,p} + \frac{\partial S}{\partial t}, \quad \frac{dR}{dt} = \{R, H\}_{q,p} + \frac{\partial R}{\partial t}$$

2 - Sufficienza

Scriviamo le equazioni del moto nella forma

$$\dot{q}_k = \Phi_k(q, p, t), \quad \dot{p}_k = -\Gamma_k(q, p, t) \quad 9.13$$

(questo *definisce* Φ_k e Γ_k).

Dalla definizione di $\{\cdot, \cdot\}_{q,p}$ segue che

$$\{q_k, p_h\}_{q,p} = \delta_{k,h} \quad \{q_k, q_h\}_{q,p} = 0 \quad \{p_k, p_h\}_{q,p} = 0$$

Ponendo in (9.10) $R = p_{k_0}$, $S = q_{h_0}$ si ha allora, per qualunque scelta fatta per gli indici k_0 , h_0

$$0 = \frac{D}{dt}(\{p_{k_0}, q_{h_0}\}_{q,p}) = \{-\Gamma_{k_0}, q_{h_0}\}_{q,p} + \{p_{k_0}, \Phi_{h_0}\}_{q,p} = \frac{\partial \Gamma_{k_0}}{\partial p_{h_0}} - \frac{\partial \Phi_{h_0}}{\partial q_{k_0}} \quad 9.14$$

Analogamente, scegliendo $R = q_{k_0}$, $S = p_{h_0}$ e poi $R = p_{k_0}$, $S = q_{h_0}$ si ottiene

$$\frac{\partial \Gamma_{k_0}}{\partial q_{h_0}} = \frac{\partial \Gamma_{h_0}}{\partial q_{k_0}} \quad \frac{\partial \Phi_{k_0}}{\partial p_{h_0}} = \frac{\partial \Phi_{h_0}}{\partial q_{k_0}} \quad 9.15$$

per ogni scelta degli indici h_0 , k_0 .

Le (9.14) e (9.15) sono precisamente le condizioni affinché per ciascun punto P dello spazio delle fasi (in un intorno del quale si possono utilizzare le coordinate q , p) esista un intorno \mathcal{N} e una funzione $\Psi(q, p, t)$ definita in \mathcal{N} tale che

$$\Phi_h = \frac{\partial \Psi}{\partial p_h} \quad \Gamma_h = \frac{\partial \Psi}{\partial q_h} \quad 9.16$$

Sostituendo (9.16) e (9.13) si ottiene l'asserto.

♡

Dal teorema di Poisson segue un importante corollario

Corollario

Una trasformazione di coordinate $(q, p) \rightarrow (Q, P)$ (eventualmente dipendente dal tempo) è canonica se, per ogni coppia di funzioni F , G definite sullo spazio delle fasi si ha

$$\{F, G\}_{q,p} = \alpha \{F, G\}_{Q,P} \quad \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0 \quad 9.17$$

nel senso che le due espressioni in (9.17) rappresentano in coordinate diverse la stessa funzione.

◇

Dimostrazione

La (9.10) rimane un'identità se ciascun termine viene moltiplicato per α .

♡

Si può dimostrare che la (9.17) è anche condizione *necessaria* affinché la trasformazione $q, p \rightarrow Q, P$ sia canonica.

La condizione (9.17) può quindi essere assunta come *definizione* di trasformazione canonica. Noi non daremo la dimostrazione che (9.17) è anche condizione necessaria. Considereremo invece solo il caso in cui $\alpha = 1$.

Si ha

Proposizione 9.1

Condizione necessaria e sufficiente affinché la trasformazione di coordinate $q, p \rightarrow Q, P$ sia simplettica è che per ogni coppia di funzioni F , G definite sullo spazio delle fasi valga la identità

$$\{F, G\}_{q,p} = \{F, G\}_{Q,P} \quad 9.18$$

◇

Dimostrazione

1) *Necessitá*

Date le funzioni F e G , consideriamo il sistema Hamiltoniano

$$\dot{q}_k = \frac{\partial F}{\partial p_k}, \quad \dot{p}_k = -\frac{\partial F}{\partial q_k} \quad k = 1 \dots N \quad 9.19$$

La derivata di G lungo le soluzioni di (9.19) é data da

$$\frac{DG}{dt} = \{G, F\}_{q,p} \quad 9.20$$

Per ipotesi, la trasformazione considerata é simplettica. Si ha dunque

$$\dot{Q}_k = \frac{\partial F}{\partial P_k}, \quad \dot{P}_k = -\frac{\partial F}{\partial Q_k}$$

e quindi

$$\frac{DG}{dt} = \{G, F\}_{Q,P} \quad 9.21$$

Da (9.20) e (9.21) si deduce (9.18).

2) *Sufficienza*

Dal Corollario del Teorema di Poisson e da (9.18) segue che la trasformazione é canonica. Per ogni funzione F esiste dunque una funzione F' tale che la soluzione di

$$\dot{q}_k = \frac{\partial F}{\partial p_k}, \quad \dot{p}_k = -\frac{\partial F}{\partial q_k} \quad 9.22$$

con dati iniziali q_k^0, p_k^0 , quando sia scritta in funzione delle coordinate Q, P , rende soddisfatte le identitá

$$\dot{Q}_k = \frac{\partial F'}{\partial P_k}, \quad \dot{P}_k = -\frac{\partial F'}{\partial Q_k} \quad 9.23$$

Dobbiamo dimostrare che esiste una costante C tale che $F' = F + C$.

Sia G un'arbitraria funzione sullo spazio delle fasi. La sua derivata rispetto al tempo lungo le soluzioni di (9.22) é

$$\frac{DG}{dt} = \{G, F\}_{q,p} \quad 9.24$$

Poiché per costruzione le soluzioni di (9.23) (corrispondenti agli stessi dati iniziali) individuano la stessa traiettoria, si avrá anche

$$\frac{DG}{dt} = \{G, F'\}_{Q,P} \quad 9.25$$

Per ipotesi $\{G, F\}_{q,p} = \{G, F'\}_{Q,P}$, e quindi da (9.24) e (9.25) segue che

$$\{G, (F - F')\}_{q,p} = 0 \quad \forall G$$

Scegliendo $G = q_{k_0}, k_0 = 1, \dots, N$ e poi $G = p_{k_0}, k_0 = 1, \dots, N$ si ha

$$\frac{\partial}{\partial q_k}(F - F') = \frac{\partial}{\partial p_k}(F - F') \quad k = 1, \dots, N \quad 9.26$$

Da qui si deduce che esiste una costante C tale che $F = F' + C$.

Ricordiamo ora che nelle equazioni di Hamilton l'hamiltoniana può essere variata per una costante additiva senza alterare le equazioni perché una funzione costante ha parentesi di Poisson nulla con qualunque funzione.

Questo completa la dimostrazione della Proposizione 9.1.

♡

Conviene notare che l'invarianza delle parentesi di Poisson, nella forma (9.18), sembra essere una condizione non verificabile con un numero finito di operazioni, poiché (9.18) deve valere per *ogni* scelta delle funzioni F, G .

E' quindi importante la seguente Proposizione

Proposizione 9.2

Sia $q, p \rightarrow Q, P$ una trasformazione di coordinate nello spazio delle fasi.

La trasformazione é simplettica, cioè la relazione (9.18) é soddisfatta *per ogni coppia di funzioni* F, G di classe C^1 , se e solo se sono verificate le $N(2N-1)$ relazioni

$$\{Q_k, P_h\}_{q,p} = \delta_{k,h}, \quad \{Q_k, Q_h\}_{q,p} = 0, \quad \{P_k, P_h\}_{q,p} = 0 \quad h, k = 1 \dots N \quad 9.27$$

◇

Dimostrazione

Si nota innanzitutto che le (9.27) sono necessarie; infatti le seguenti identità seguono banalmente dalle definizioni

$$\{Q_k, P_h\}_{Q,P} = \delta_{k,h}, \quad \{Q_k, Q_h\}_{Q,P} = 0, \quad \{P_k, P_h\}_{Q,P} = 0 \quad h, k = 1 \dots n \quad 9.28$$

D'altra parte, per ogni funzione F di classe C^1 sullo spazio delle fasi si ha, per il teorema di derivazione di funzioni composte,

$$\frac{\partial F}{\partial q_k} = \sum_m \left(\frac{\partial F}{\partial Q_m} \frac{\partial Q_m}{\partial q_k} + \frac{\partial F}{\partial P_m} \frac{\partial P_m}{\partial q_k} \right), \quad \frac{\partial F}{\partial p_k} = \sum_m \left(\frac{\partial F}{\partial Q_m} \frac{\partial Q_m}{\partial p_k} + \frac{\partial F}{\partial P_m} \frac{\partial P_m}{\partial p_k} \right)$$

Utilizzando queste formule é possibile scrivere $\{F, G\}_{q,p}$ in funzione delle derivate parziali di F e G rispetto alle coordinate Q e P .

I coefficienti dipendono linearmente dalle derivate parziali delle Q_k, P_h rispetto alle coordinate q, p .

Si verifica che queste ultime appaiono solo attraverso le combinazioni lineari

$$\{Q_k, P_h\}_{q,p}, \quad \{Q_k, Q_h\}_{q,p}, \quad \{P_k, P_h\}_{q,p}$$

e si utilizza la (9.27) per concludere la dimostrazione.

Non diamo qui i dettagli del calcolo, che é semplice ma non particolarmente istruttivo.

Svilupperemo nel seguito un formalismo che permetterà di verificare rapidamente la Proposizione 9.2 dandole anche un significato "geometrico".

♡

Le condizioni indipendenti in (9.27) sono $N(2N - 1)$; infatti le condizioni $\{Q_k, P_h\}_{q,p} = \delta_{q,p}$ sono N^2 , mentre le condizioni $\{Q_k, Q_h\}_{q,p} = 0$ sono $N(N - 1)/2$ (per l'antisimmetria delle parentesi di Poisson), e altrettante sono le condizioni $\{P_k, P_h\}_{q,p} = 0$.

Nota 9.3

E' importante ricordare che *tutte* le $N(2N - 1)$ condizioni indipendenti descritte in (9.27) devono essere verificate, e non solamente le condizioni $\{Q_k, P_h\}_{q,p} = \delta_{k,h}$.



Come conseguenza della Proposizione 9.1 ometteremo nel seguito l'indicazione della coordinate utilizzate.

A stretto rigore, bisognerebbe mantenere l'indicazione della classe di equivalenza cui ci si riferisce (due sistemi di coordinate sono equivalenti se la trasformazione da un sistema all'altro é simplettica).

E' utile dunque precisare quale sia la classe che utilizzeremo.

Dallo studio delle trasformazioni di Legendre abbiamo visto che le equazioni di Lagrange nello spazio delle configurazioni con coordinate q_k per una lagrangiana L sono equivalenti alle equazioni di Hamilton con Hamiltoniana data dalla trasformata di Legendre di L quando queste vengono scritte utilizzando le coordinate q_k e $p_k \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$.

Questo individua un sistema di coordinate nello spazio della fasi e quindi una particolare classe di equivalenza.

Chiameremo it simplettico ogni sistema di coordinate che appartiene a questa classe e ometteremo in seguito questa precisazione.

Nota 9.4

Conviene notare che questa definizione é indipendente dalla particolare lagrangiana utilizzata per definire le variabili "momento".



Vale anche un converso del teorema di Poisson: *le trasformazioni di coordinate date da un flusso hamiltoniano costituiscono ua successione di trasformazioni simplettiche.*

Per vedere questo, notiamo che é sufficiente dimostrare che lungo un flusso hamiltoniano le parentesi di Poisson tra coordinate elementari q_h, p_k non vengono variate.

Riscriviamo le parentesi elementari utilizzando la notazione

$$z_n = q_n \quad z_{N+n} = p_{N+n} \quad n = 1, \dots, N \quad \{z_k, z_h\} = J_{h,k} \quad 9.29$$

e dove la matrice antisimmetrica invertibile J di rango $2N$ é detta *matrice simplettica*.

Per il flusso dovuto a un hamiltoniana (eventualmente dipendente dal tempo) si ha $\frac{dz_h(t)}{dt} = \{H(t), z_h(t)\}$ e quindi

$$\frac{d\{z_k, z_h\}(t)}{dt} = \{\{H(t), z_h(t)\}, z_k(t)\} + \{z_h(t), \{H(t), z_k(t)\}\} \quad 9.30$$

con $z(0) = z$.

Utilizzando l'identitá di Jacobi la (9.30) puó essere riscritta

$$\frac{d\{z_k, z_h\}(t)}{dt} = \{H(t), \{z_h(t), z_k(t)\}\} \quad 9.31$$

La (9.31) é un'equazione lineare omogenea per la funzione $\{z_h, z_k\}(t)$.

Una soluzione é $\{z_h, z_k\} = cost \quad \forall h, k$ perché ogni funzione costante ha parentesi di Poisson zero con qualunque funzione.

Se la hamiltoniana é sufficientemente regolare (in modo che l'operazione "parentesi di Poisson" sia continua) la (9.31) ha soluzione unica.

Tenuto conto dei dati iniziali si ha quindi $\{z_k, z_h\}(t) = J_{k,h} \quad \forall t$.

Questo dimostra che $z \rightarrow z(t)$ é una trasformazione simplettica e quindi *il flusso hamiltoniano é un flusso di trasformazioni simplettiche.*

Questo fa comprendere il motivo per cui la ricerca di soluzioni di un'equazione hamiltoniana viene effettuata, nel metodo di Hamilton-Jacobi che introdurremo nella Lezione seguente, cercando un'opportuna funzione generatrice di una famiglia di trasformazioni simplettiche.

STRUTTURA ALGEBRICA DELLA MECCANICA CLASSICA

L'introduzione delle Parentesi di Poisson e la Proposizione 9.1 permettono una formulazione "algebraica" della Meccanica Classica.

Notiamo che una dinamica nello spazio delle fasi viene data mediante l'assegnazione di una funzione (hamiltoniana) H e corrisponde al flusso del corrispondente campo vettoriale JdH . Anziché studiare il moto del punto rappresentativo nello spazio delle fasi, si può studiare per dualità la variazione nel tempo di una generica funzione $A(q, p)$

$$A \rightarrow A(t), \quad A(t)(q, p) \equiv A(\phi(-t; q, p)) \quad 9.32$$

dove $\phi(t; q, p)$ è la soluzione delle equazioni di Hamilton con hamiltoniana H e dati iniziali q, p per $t = 0$.

Il moto nello spazio delle fasi si otterrà allora specializzando la scelta di della funzione A , ad esempio scegliendo come funzione una delle coordinate (ricordare che le coordinate sono particolari funzioni sullo spazio delle fasi).

Da (9.28), utilizzando la derivazione di funzioni composte, si ha

$$\frac{dA(t)}{dt} = \{A, H\} \quad 9.33$$

Il termine a destra definisce dunque *un campo vettoriale sullo spazio delle funzioni differenziabili nello spazio delle fasi*.

Questo campo vettoriale è individuato dalla funzione H , e, per una generica funzione A di classe C^1 è definito dalla seguente operazione lineare sulle funzioni (di classe C^1)

$$A \rightarrow \{A, H\} \equiv \partial_H A \quad 9.34$$

(questo *definisce* il simbolo ∂_H).

Il campo vettoriale definito da (9.34) è una derivazione.

Per stabilire questo, basta verificare che sono soddisfatte la linearità e la regola di Leibnitz.

La linearità è evidente

$$\partial_H(\lambda A) = \lambda \partial_H A, \quad \lambda \in R \quad \partial_H(A + B) = \partial_H A + \partial_H B$$

La regola di Leibnitz si verifica notando che

$$\partial_H(AB) = B \partial_H A + A \partial_H B$$

Il gruppo ad un parametro associato è

$$\alpha \rightarrow A(\alpha) \quad 9.35$$

dove $A(\alpha)$ la soluzione di

$$\frac{dA(\alpha)}{d\alpha} = \{A(\alpha), H\} = \partial_H A(\alpha) \quad 9.36$$

(poiché considereremo in seguito piú campi vettoriali conviene indicare con α anziché con t il parametro).

Possiamo allora determinare il prodotto di Lie dei due campi vettoriali ∂_H e ∂_K ; eseguendo i calcoli si ottiene

$$[\partial_H, \partial_K] = -\partial_{\{H, K\}} \quad 9.37$$

Quando si scelgono, come funzioni sullo spazio delle fasi, coordinate q_1, \dots, p_N che sono "simpletiche" (cioé appartengono alla stessa classe di equivalenza delle coordinate posizione e impulso), si ottiene

$$[\partial_{q_k}, \partial_{p_h}] = \delta_{h,k}, \quad [\partial_{q_k}, \partial_{q_h}] = [\partial_{p_k}, \partial_{p_h}] = 0 \quad \forall i, k \quad 9.38$$

(dalla definizione segue che, se G assume valore costante su tutto lo spazio delle fasi, si ha $\partial_G F = 0 \forall F$).

Nota 9.5

Diremo che due campi vettoriali ξ_1 e ξ_2 *commutano* se la loro parentesi di Lie é nulla.

Da (9.37) si deduce che due campi vettoriali hamiltoniani commutano se la parentesi di Poisson delle corrispondenti hamiltoniane é una costante (non necessariamente nulla!).



Le (9.38) garantiscono che i campi vettoriali corrispondenti alle q_k e alle p_h *commutano, tra loro* per ogni scelta di indici. Per il teorema di Frobenius si possono utilizzare le q_k, p_h come coordinate nell'ambito del formalismo descritto da (9.36), almeno in un intorno del punto considerato nello spazio delle fasi.

E' importante notare che (9.36) definisce un flusso sulle funzioni *continue* mentre per funzioni continue che non siano di classe C^1 non é definito il campo vettoriale (9.37).

Indicheremo con il termine *algebra delle osservabili classiche* l'algebra \mathcal{A} delle funzioni continue e limitate sullo spazio delle fasi.

Chiameremo *stati* gli elementi del *duale* \mathcal{A}^* dell'algebra \mathcal{A} (i funzionali lineari su \mathcal{A})

Uno stato ha le proprietá di assumere valori positivi in corrispondenza a osservabili positive, e di attribuire il valore 1 all'osservabile che corrisponde alla funzione sullo spazio delle fasi che vale uno in ogni punto (elemento identitá I dell'algebra \mathcal{A}).

Un punto di coordinate (q_0, p_0) nello spazio delle configurazioni definisce attraverso

$$\mathcal{A} \ni A \rightarrow A(q_0, p_0) \quad 9.39$$

uno stato ρ_{q_0, p_0} che chiameremo *puro* perché non é possibile scriverlo come combinazione convessa di stati

Chiameremo *miscela statistica* ogni elemento $\rho \in \mathcal{A}^*$ che puo' essere scritto come

$$\int f(q, p) \rho_{q,p} dq dp \quad f \in L^1(\mathcal{M}), \quad |f|_1 = 1$$

dove \mathcal{M} é lo spazio delle fasi.

L'evoluzione (9.36) definisce, per dualitá, un'evoluzione per l'insieme degli stati.

Si ha, per definizione

$$\rho(t)(A) \equiv \rho(A(t)) \quad 9.40$$

E' facile verificare, integrando per parti, che per gli stati ρ_f , $f \in C^1 \cap L^1$ l'evoluzione definita dalla (9.40) corrisponde alla soluzione dell'equazione

$$\frac{df}{dt} = \{H, f\} \quad 9.41$$

A questa equazione si dá il nome di *equazione di Liouville*.

STRUTTURE DI POISSON

Consideriamo una particella di massa m e carica elettrica e . La sua lagrangiana é data da

$$L = \frac{m}{2} |\dot{q}_k - A_k(q)|^2 + V(q)$$

dove A é il potenziale vettoriale e V é il potenziale scalare.

La definizione di momento coniugato p_k porta alla seguente espressione

$$p_k = m\dot{q}_k - mA_k(q) \tag{9.42}$$

E' facile vedere che la hamiltoniana é data da

$$H = \frac{1}{2m} |p_k|^2 + U(q), \quad U(q) \equiv -V(q)$$

e quindi ha la stessa forma della hamiltoniana con la sola energia potenziale scalare (coulombiana) pur di fare la sostituzione $p_k \rightarrow \pi_k$.

Semplici calcoli mostrano che si ha

$$\{p_k, p_h\} = \epsilon_{k,h,l} \mathcal{B}_l, \quad \{q_k, q_h\} = 0 \quad \{q_k, p_h\} = \delta_{k,h} \tag{9.43}$$

dove \mathcal{B} é il vettore campo magnetico.

Dato il loro interesse per la formulazione hamiltoniana dell'elettromagnetismo, le (9.43) sono state molto studiate ed é stata introdotta una struttura che generalizza le parentesi di Poisson. Questo permette anche di evidenziare le analogie tra la meccanica hamiltoniana e il moto del corpo rigido (e la descrizione euleriana del moto di fluidi non viscosi).

Definizione 9.5

Sia Y uno spazio vettoriale topologico.

Una struttura di Poisson su Y é un'applicazione

$$\Phi : Y \times Y \rightarrow Y$$

che ha le seguenti proprietá:

- a) bilinearitá
- b) antisimmetria
- c) regola di Leibnitz
- d) identitá di Jacobi

◇

Una struttura di Poisson é *non degenera* se il suo nucleo é costituito dalle funzioni costanti.

Esempi tipici di strutture di Poisson sono i seguenti:

i)

Y é lo spazio delle funzioni di classe C^∞ su una varietá Σ di dimensione pari $2N$. Φ é dato da

$$\Phi(F, G)(q, p) \equiv \{F, G\}_{q,p} \tag{9.44}$$

dove in ciascun punto di Σ

$$q \equiv \{q_1, \dots, q_N\}, \quad p \equiv \{p_1, \dots, p_N\}$$

sono coordinate locali.

ii)

Y é lo spazio delle funzioni C^∞ su R^6 con coordinate (x_k, p_k) . Φ é la struttura di Poisson definita in (9.43).

iii)

Y é lo spazio dei vettori di R^3 . Φ é dato da $\Phi(\xi, \eta) \equiv \xi \wedge \eta$.

iv)

Y é lo spazio dei campi vettoriali su una varietà. Φ é il prodotto di Lie dei campi vettoriali.

Nota 9.6

Gli esempi i), ii), iii) sono casi particolari dell'esempio iv). Per questo motivo la struttura di Poisson viene spesso chiamata *struttura di Lie-Poisson*.

◇

Data questa definizione di struttura di Poisson, é naturale porsi il problema di quante strutture di Poisson possano essere poste su di uno spazio vettoriale Y e di quali siano le strutture che coincidono, pur essendo definite in modo diverso.

In questa direzione, formuliamo qui un teorema, che non dimostreremo.

Teorema (Darboux)

Ogni struttura di Poisson non degenera sulle funzioni di classe C^∞ su una varietà di dimensioni pari coincide localmente con la struttura di parentesi di Poisson rispetto ad un opportuno sistema di coordinate.

◇

Nota 9.7

Non é sempre in generale scegliere un sistema di coordinate definito su tutta la varietà e per il quale la struttura di Poisson data coincide con le parentesi di Poisson.

Questa impossibilità ha luogo, ad esempio, per la struttura definita da (9.43) se il campo magnetico é singolare in qualche punto, o equivalentemente se la regione dello spazio nella quale é definito il campo elettromagnetico non é semplicemente connessa.

♣

Per quanto riguarda l'identificazione di strutture di Poisson ottenute con procedimenti diversi, notiamo che abbiamo già dimostrato che due sistemi di Poisson, ottenuti attraverso le parentesi di Poisson utilizzando due sistemi di coordinate diversi, coincidono se e solo se la trasformazione tra i due sistemi di coordinate é simplettica.

Per caratterizzare invece in questo contesto le trasformazioni canoniche, notiamo che una struttura di Poisson su Y associa ad ogni elemento H di Y , attraverso la relazione

$$Y \ni F \rightarrow \Phi(F, H) \tag{9.45}$$

un campo vettoriale lineare, e quindi un'equazione differenziale *lineare*

$$\frac{dF}{dt} = \Phi(F, H) \tag{9.46}$$

Negli esempi i) e ii) si tratta delle equazioni di Hamilton con hamiltoniana H .

Negli esempi ii), iii) si tratta delle equazioni di Eulero per il moto rigido. L'esempio iv) riguarda le equazioni di Eulero per un fluido non viscoso.

Definizione 9.6

Un flusso in uno spazio Y su cui é definita una struttura di Poisson Φ é detto *compatibile* con Φ se il suo campo vettoriale commuta con Φ :

$$\frac{d\Phi(F, G)}{dt} = \Phi \left(\frac{dF}{dt}, \frac{dG}{dt} \right) \quad 9.47$$

◇

Il teorema di Poisson dimostrato precedentemente in questa Lezione afferma che, se si considera la struttura di Poisson

$$\Phi(F, G) \equiv \{F, G\}_{q,p} \quad 9.48$$

definita sulle funzioni (di classe C^∞) su R^{2n} dalle parentesi di Poisson relative a un sistema di coordinate

$$\{z_k\} \equiv q_1, \dots, q_N, p_1 \dots p_N$$

un flusso $t \rightarrow \phi(t, z)$ su R^{2N} induce sulle funzioni (attraverso $f(z) \rightarrow f(t)(z) \equiv f(\phi(t, z))$) un flusso *compatibile* con la struttura $\{\cdot, \cdot\}_{q,p}$ se e solo se il flusso é hamiltoniano nelle coordinate q, p .

Ne segue che una trasformazione di coordinate $(q, p) \rightarrow (Q, P)$ é canonica se e solo se ogni flusso compatibile per la struttura di Poisson definita dalle (q, p) é anche compatibile con la struttura di Poisson definita dalla (Q, P)

STRUTTURA GEOMETRICA DEL FORMALISMO HAMILTONIANO (Geometria симплекtica)

Abbiamo visto che le parentesi di Poisson associano funzioni a coppie di campi vettoriali definiti da derivate di funzioni. Quest'associazione é antisimmetrica e soddisfa la regola di Leibnitz per il prodotto e l'identitá di Jacobi.

Ricordiamo che nel caso finito dimensionale prende il nome di *due forma* una funzione bilineare antisimmetrica sul prodotto cartesiano di due spazi vettoriali.

Nel nostro caso gli spazi vettoriali che consideriamo sono composti da gradienti di funzioni definite nello spazio delle fasi \mathcal{M} e quindi in ciascun punto di \mathcal{M} il loro duale sono le *forme differenziali*.

Ne segue che la parentesi di Poisson rappresenta una *due forma differenziale* ω :

$$\{F, G\} = \omega(\nabla F, \nabla G) \quad 9.49$$

E' facile verificare che l'identitá di Jacobi corrisponde alla proprietá di ω di essere *chiusa* (almeno localmente) cioé di essere (localmente) il differenziale di una uno- forma differenziale. E' facile anche vedere che in uno spazio симплекtico di dimensione $2n$ la forma di volume

$$\omega \times \omega \dots \times \omega \quad N \text{ volte} \quad 9.50$$

coincide, a meno di una fattore di proporzionalitá, con la forma di volume di Louville.

La geometria indotta dalla due forma ω prende il nome di *geometria симплекtica* ; il suo studio si é rivelato molto importante per lo studio dei sistemi hamiltoniani.

In particolare la definizione area é diversa da quella definita in R^{2N} dalla geometria euclidea.

E' facile ad esempio vedere che é nulla l'area simplettica di un quadrato definito in R^4 da

$$0 \leq q_i \leq 1, \quad i = 1, 2 \quad p_i = 0 \quad i = 1, 2$$

(mentre per la geometria euclidea tale area é uno).

L'area simplettica é lasciata invariante dal flusso hamiltoniano. Per confronto ricordiamo che le aree non sono invarianti per il flusso di Liouville in dimensione ≥ 3 .

La trattazione di elementi di geometria simplettica é al di fuori dello scopo di queste Lezioni . Tuttavia utilizzeremo questa corrispondenza tra parentesi di Poisson e due-forme differenziali nella breve trattazione che faremo nell'appendice del moto di una particella carica in R^3 soggetta ad un campo magnetico esterno.

APPENDICE alla Lezione 9 : trattazione hamiltoniana di un punto materiale carico soggetto ad un campo magnetico esterno

Notiamo che l'utilizzazione di diverse strutture di Poisson permette di associare ad hamiltoniane diverse lo stesso campo vettoriale (e quindi le stesse equazioni del moto).

Consideriamo in particolare in R^3 una punto materiale di massa m e carica e che interagisce con un campo magnetico esterno $B(x)$.

Il campo magnetico puó essere rappresentato da un campo vettoriale $B_i(x)$ $i = 1, 2, 3$ o piú correttamente (incluso anche le sue proprietá per inversione spaziale) come una matrice antisimmetrica $\mathcal{B}_{i,k}$.

In quest'ultima descrizione al campo magnetico viene associata naturalmente una due forma differenziale

$$\omega_B = \sum_{l,k} \mathcal{B}_{l,k} dx_l \wedge dx_k \quad 9A.1$$

Consideriamo adesso il sistema

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = B \wedge \frac{dx}{dt} \quad x \in R^3 \quad 9A.2$$

che descrive il moto del punto materiale.

Ad esso é associata la lagrangiana

$$L(q, \dot{q}) = \frac{m}{2} \dot{q}^2 + \frac{1}{2} (\dot{q} \cdot B \wedge q) \quad 9A.3$$

e la corrispondente hamiltoniana

$$H(q, p) = \frac{1}{2m} (p - \mathcal{B}q, p - \mathcal{B}q) \quad 9A.4$$

dove $(\mathcal{B}q)_k \equiv \sum_l \mathcal{B}_{k,l} q_l$ e abbiamo posto

$$p \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}, \quad p \in R^3 \quad 9A.5$$

Le equazioni del moto sono, per una generica funzione F definita sullo spazio delle fasi

$$\frac{dF}{dt} = \{F, H\}_{q,p} \quad 9A.6$$

dove le parentesi di Poisson $\{\cdot, \cdot\}_{q,p}$ sono state definite precedentemente.

Esplicitando i calcoli é facile verificare che le equazioni (9A.6) possono essere scritte facendo uso di una diversa hamiltoniana H e di una struttura di Poisson *diversa da quella data dalle parentesi di Poisson*.

Infatti le (9A.6) si possono scrivere nella forma

$$\frac{dF}{dt} = \{F, H'\}_B, \quad H' = \frac{1}{2}(p, p) \quad 9A.7$$

e

$$\{F, K\}_B \equiv \sum_i \left[\frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial K}{\partial p_i} - \frac{\partial K}{\partial q_i} \frac{\partial F}{\partial p_i} \right] - \sum_{i,j} \mathcal{B}_{i,j} \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial K}{\partial p_j} \quad 9A.8$$

Si puó verificare che (9A.8) definisce una struttura di Poisson (solo la verifica che sono soddisfatte le identità di Jacobi richiede un calcolo un poco elaborato e richiede l'uso dell'identità $\text{div } B = 0$).

In questo esempio si vede anche che la struttura di Poisson (9A.8) puó essere scritta come parentesi di Poisson effettuando il cambiamento di coordinate

$$(q_k, p_i) \Rightarrow (q_k, p_i - \sum_m \mathcal{B}_{i,m} q_m) \quad 9A.9$$

(notare che questa trasformazione non é simplettica).

Una formulazione piú semplice del cambiamento che abbiamo eseguito nella parentesi di Poisson si ottiene con la formulazione geometrica che abbiamo brevemente descritto.

Come abbiamo visto, la parentesi di Poisson che abbiamo utilizzato corrisponde alla due-forma simplettica

$$\omega = \sum_{i=1}^3 dq_i \wedge dp_i \quad 9A.10$$

E' facile verificare che le nuove parentesi di Poisson corrispondono alla due-forma (detta *magnetica*)

$$\omega + \mathcal{M}, \quad \mathcal{M} = \sum_{i,j=1}^3 \mathcal{B}_{i,j} dx_i dx_j \quad 9A.11$$

La due forma \mathcal{M} é chiusa perché $\text{div } B = 0$.

Da (9A.9) si ha

$$\{q_i, q_k\}_{\mathcal{M}} = 0 \quad \{q_i, p_k\}_{\mathcal{M}} = \delta_{i,k} \quad \{p_i, p_k\}_{\mathcal{M}} = -\mathcal{B}_{i,k} \quad 9A.12$$

Nota 9A.1

E'interessante notare come, nei sistemi giroscopici (ad esempio per l'interazione di un punto materiale con il campo elettromagnetico) la presenza di una matrice antisimmetrica B (nell'esempio dato, il tensore *campo magnetico*) puó essere riguardata come una modificazione della struttura di Poisson (una struttura *geometrica*, se letta in termini di due-forme differenziali) anziché come una modificazione dell'hamiltoniana (una struttura *dinamica*).



Nota 9A.2

Se la regione in cui é definito il campo magnetico non é semplicemente connessa, la due-forma \mathcal{M} é chiusa solo localmente.

Tuttavia non é chiusa globalmente (in questo caso un campo vettoriale $A(x)$ tale che $B(x) = \text{rot}A(x)$ non é definito globalmente).

Quindi non esiste *globalmente* un sistema di coordinate per il quale la struttura di Poisson (9A.12) relativa al campo elettromagnetico B sia data esplicitamente da parentesi di Poisson.



Lezione 10. FUNZIONI GENERATRICI, METODO DI HAMILTON-JACOBI

Abbiamo visto che se $H(q, p, t)$ é differenziabile allora le soluzioni delle equazioni di Hamilton

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k} \quad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k} \quad k = 1 \dots N \quad 10.1$$

sono i punti critici del funzionale

$$\mathcal{A}_{q^1, p^1; q^2, p^2}^H \equiv \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_1^N p_k \dot{q}_k - H(q, p, t) \right) dt \quad 10.2$$

definito su traiettorie tali che

$$q_k(t_i) = q_k^i, \quad p_k(t_i) = p_k^i, \quad i = 1, 2 \quad k = 1 \dots N$$

Corrispondono quindi a soluzioni di $D\mathcal{A}_{q^1, p^1; q^2, p^2}^H = 0$.

Abbiamo esplicitato in (10.1) la dipendenza di \mathcal{A}^H dalle condizioni al bordo, cioè dalla scelta del valore delle p e delle q agli istanti t_1 e t_2 .

Sia $(q, p) \rightarrow (Q(q, p), P(q, p))$ una trasformazione di coordinate, e indichiamo con

$$Q(t) \equiv Q(q(t), p(t)), \quad P(t) \equiv P(q(t), p(t))$$

la dipendenza dal tempo delle coordinate Q, P lungo le traiettorie di (10.1).

Supponiamo che la traiettoria data rappresenti anche soluzioni dell'equazioni di Hamilton con una seconda hamiltoniana $K(Q, P)$

Per il principio variazionale si avrà

$$\dot{Q}_k = \frac{\partial K}{\partial P_k} \quad \dot{P}_k = -\frac{\partial K}{\partial Q_k}$$

per la funzione K (in generale diversa da H) se e solo se, in corrispondenza alla traiettorie soluzioni di (10.1), si ha

$$D\mathcal{A}_{Q^1, P^1; Q^2, P^2}^K = 0, \quad \mathcal{A}_{Q^1, P^1; Q^2, P^2}^K \equiv \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_1^N P_k \dot{Q}_k - K(Q, P, t) \right) dt \quad 10.3$$

Nell'integrale le condizioni al bordo in t_1 e t_2 sono descritte mediante le coordinate Q, P .

Ne segue che la trasformazione di coordinate $q, p \rightarrow Q, P$ é canonica se e solo se

$$\mathcal{A}_{q^1, p^1; q^2, p^2}^H(\zeta) = 0 \leftrightarrow D\mathcal{A}_{Q^1, P^1; Q^2, P^2}^K(\zeta) = 0 \quad 10.4$$

Una condizione *sufficiente* affinché valga (10.4) é che esista una costante reale $\alpha(H)$ e una funzione $S_H(q, p, t)$ tale che, lungo le soluzioni di (10.1) valga la relazione

$$\sum_{k=1}^N p_k \dot{q}_k - H(q, p, t) = \alpha \left[\sum_{k=1}^N P_k \dot{Q}_k - K(Q, P, t) \right] + \frac{dS}{dt} \quad 10.5$$

per un'opportuna funzione S .

Questo si dimostra facilmente integrando (10.5) rispetto al tempo tra i valori t_1 e t_2 e notando che

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{dS}{dt} dt = S(t_2) - S(t_1)$$

così che

$$D \int_{t_1}^{t_2} \frac{dS}{dt} dt = 0$$

per ogni variazione che non altera i valori delle coordinate q e p ai tempi t_1 e t_2 .

La condizione (10.5), che si può dimostrare essere anche *necessaria*, è troppo complicata per essere di utilità pratica, e inoltre richiede in generale che sia conosciuta la soluzione di (10.1).

Conviene quindi considerare la seguente condizione, che è *necessaria e sufficiente* affinché una trasformazione sia simplettica e solo *sufficiente* affinché una trasformazione sia canonica.

Proposizione 10.1

Condizione necessaria e sufficiente affinché la trasformazione di coordinate $q, p \rightarrow Q, P$ sia simplettica è che esista una funzione S sullo spazio delle fasi tale che sussista la seguente relazione tra forme differenziali:

$$\sum_{k=1}^N P_k dQ_k = \sum_{k=1}^N p_k dq_k + dS \quad 10.6$$

◇

Dimostrazione

Dimostreremo qui solamente che la condizione è sufficiente.

Questo ci permetterà di introdurre il metodo di Hamilton-Jacobi.

Daremo in seguito la dimostrazione che la condizione è anche necessaria.

Dimostrazione che la condizione è sufficiente

Assumiamo che valga la (10.6) e indichiamo con $t \rightarrow \{q(t), p(t)\}$ una generica traiettoria, la cui descrizione in coordinate $\{Q, P\}$ indichiamo con $t \rightarrow \{Q(t), P(t)\}$.

La identità (10.6) è una relazione tra funzioni lineari sui campi vettoriali, a valori reali.

Determiniamo in ciascun punto P della traiettoria γ considerata, il valore assunto dalle funzioni in (10.6) in corrispondenza al vettore tangente a γ in P (rappresentato nelle coordinate q, p dal vettore \dot{q}, \dot{p} , e nelle coordinate Q, P dal vettore \dot{Q}, \dot{P}).

Otteniamo l'identità

$$\sum_{k=1}^N P_k \dot{Q}_k = \sum_{k=1}^N p_k \dot{q}_k + \frac{dS}{dt} \quad 10.7$$

dove $\frac{dS}{dt}$ è la derivata della funzione S lungo la traiettoria considerata.

Per ogni traiettoria si ha allora

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{k=1}^N P_k \dot{Q}_k = \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{k=1}^N p_k \dot{q}_k + S_{t_2} - S_{t_1} \quad 10.8$$

dove S_{t_i} , $i=1,2$, è definita da $S_{t_i} \equiv S(q(t_i), p(t_i))$.

Dunque, comunque sia scelta la funzione H

$$\mathcal{A}^K = \mathcal{A}^H + S_2 - S_1 \quad 10.9$$

Ricordando che nella definizione di $D\mathcal{A}^H$ per il principio variazionale di Hamilton si considerano classi di traiettorie che hanno gli stessi estremi, si deduce da (10.9)

$$D\mathcal{A}^K = D\mathcal{A}^H$$

e vale dunque la (10.4) con $K = H + Cost$

♡

Nota 10.1

Poiché (10.6) é anche condizione *necessaria* affinché la trasformazione considerata sia simplettica, sarà naturale, e viene di solito fatto, *definire* simplettica ogni trasformazione che soddisfa (10.6) per un'opportuna funzione S .

Il vantaggio nel fare questo é che, come vedremo in seguito, la (10.6) ha una semplice interpretazione *geometrica* cioè che la differenza tra le uno-forme $\sum_{k=1}^N p_k dq_k$ e $\sum_{k=1}^N P_k dQ_k$ é un differenziale esatto.

♣

Notiamo che la (10.6) *non fa intervenire la dinamica*.

Si possono allora studiare con metodi di geometria differenziale le trasformazioni simplettiche, e solo successivamente *utilizzare il formalismo cosí sviluppato per studiare le equazioni di Hamilton*.

FUNZIONI GENERATRICI

Utilizzando la Proposizione 10.1 sviluppiamo ora un metodo *per costruire* (= generare) trasformazioni simplettiche.

Sia $F(x_1, \dots, x_N, y_1, \dots, y_N)$ una funzione a valori reali su R^{2N} , di classe C^2 e tale che in ogni punto di R^{2N} sia invertibile la matrice i cui elementi sono $\frac{\partial^2 F}{\partial x_h \partial y_h}$.

Utilizzando la funzione F costruiamo ora una trasformazione simplettica.

Nota 10.2

Poiché la costruzione che faremo é locale, se F é definita solo in un intorno del punto considerato, la trasformazione simplettica risultante risulta definita solo in questo intorno.

♣

Utilizziamo il procedimento seguente:

Indichiamo con q_1, \dots, q_N le variabili x_1, \dots, x_N , con Q_1, \dots, Q_N le variabili y_1, \dots, y_N .

Poniamo poi, *per definizione*,

$$p_k \equiv \frac{\partial F}{\partial q_k}, \quad P_k \equiv -\frac{\partial F}{\partial Q_k} \tag{10.10}$$

Per ipotesi la matrice $\|\frac{\partial^2 F}{\partial x_k \partial y_h}\|$ é invertibile.

Dunque dalla prima delle identità (10.10) utilizzando il teorema della funzione implicita si possono esprimere le Q_h come funzioni delle q e delle p almeno in un intorno del punto considerato nello spazio delle fasi.

Indichiamo con $Q = Q(q, p)$ la funzione cosí ottenuta.

Sostituendo quest'espressione per Q_k nella definizione di P_k si ottiene un'espressione di P_k in funzione delle q e delle p : $P_k = P_k(q, p)$.

Dimostriamo che *comunque sia stata scelta la funzione F* , la trasformazione di coordinate cosí ottenuta:

$$\{q_k, p_h\} \rightarrow \{Q_k, P_h\}$$

é simplettica.

Dobbiamo per questo dimostrare che l'espressione

$$\sum_1^N P_k dQ_k - \sum_1^N p_k dq_k$$

é il differenziale di una funzione S.

Dalle definizioni di P_k e di p_h si ha

$$\sum_k P_k dQ_k - \sum_k p_k dq_k = - \sum_k \frac{\partial F}{\partial Q_k} dQ_k - \sum_k \frac{\partial F}{\partial q_k} dq_k = -dF$$

e quindi l'asserto é dimostrato.

La funzione F, utilizzata secondo il procedimento descritto qui sopra, é detta *funzione generatrice della trasformazione simplettica* e il procedimento utilizzato é detto *di procedimento di prima specie*.

Nota 10.3

E' importante sottolineare che *partendo dalla stessa funzione F ma utilizzando procedimenti diversi, si ottengono altre trasformazioni simplettiche.*



Ad esempio si dice *procedimento di seconda specie* il procedimento seguente:

Indichiamo come prima con q_1, \dots, q_N le coordinate x_1, \dots, x_N , ma ora indichiamo con P_1, \dots, P_N le coordinate y_1, \dots, y_N .

Poniamo poi *per definizione*

$$p_k \equiv \frac{\partial F}{\partial q_k}, \quad Q_k \equiv \frac{\partial F}{\partial P_k} \tag{10.11}$$

Invertendo la prima relazione si possono scrivere le P_k in funzione delle q e delle p ; sostituendo nella seconda, si ottiene allora l'espressione delle Q_k in funzione delle q, p .

Vogliamo dimostrare che anche questa trasformazione di coordinate é simplettica (*diversa in generale dalla precedente, sebbene sia stata ottenuta utilizzando, ma con due procedimenti diversi, la stessa funzione F*).

Notiamo innanzitutto che vale la seguente identitá:

$$\sum_k P_k dQ_k = d\left(\sum_k P_k Q_k\right) - \sum_k Q_k dP_k \tag{10.12}$$

Utilizzando (10.12) e (10.11) si ottiene

$$\sum_k P_k dQ_k - \sum_k p_k dq_k = d\left(\sum_k P_k Q_k\right) - \sum_k \left(\frac{\partial F}{\partial P_k} dP_k + \frac{\partial F}{\partial q_k} dq_k\right) = dS$$

dove $S \equiv \sum_k P_k Q_k - F$.

Nota 10.4

E' ovvio che esistono molti altri procedimenti per generare, *a partire dalla stessa funzione F*, altre trasformazioni simplettiche.

Il procedimento generico consiste nell'indicare con il simbolo q *alcune* delle coordinate x , e *le rimanenti* con il simbolo p (cioé per ciascun valore dell'indice k la x_k viene indicata *o con il simbolo q_k o con il simbolo p_k*).

Analogamente, alcune delle coordinate y vengono indicate con il simbolo Q , le rimanenti con il simbolo P .

Ciascuno di questi procedimenti produce (= genera) una trasformazione simplettica, e utilizzando la stessa funzione procedimenti diversi danno luogo a trasformazioni diverse .

E' uso comune chiamare *di terza specie* il procedimento nel quale tutte le x sono indicate con il simbolo p , e tutte le y con il simbolo Q .

E chiamare *di quarta specie* il procedimento nel quale tutte le x sono indicate con il simbolo Q , e tutte le y con il simbolo p .



Le trasformazioni piú comunemente utilizzate sono quelle di seconda specie; il motivo é la seguente Proposizione:

Proposizione 10.2

La trasformazione "identità" (cioé $Q_k = q_k, P_k = p_k \quad \forall k$) puó essere ottenuta solamente con una trasformazione di seconda specie.

In questo caso la sua funzione generatrice é

$$F(x_1, \dots, x_N, y_1, \dots, y_N) \equiv \sum_{k=1}^N x_k y_k \quad 10.13$$



Dimostrazione

Dalla definizione data di procedimento di seconda specie segue subito che la F definita in (12.13) genera la trasformazione identità.

Se la stessa trasformazione si potesse ottenere con un procedimento di specie diversa (utilizzando una funzione F' in generale diversa da (12.13)) dovrebbe essere soddisfatta *per definizione, poiché* $Q_k = q_k, P_k = p_k$, almeno una delle relazioni indicate qui di seguito

$$x_k = \frac{\partial F}{\partial y_k}, \quad y_k = \frac{\partial F}{\partial x_k}, \quad \frac{\partial F}{\partial x_k} = \frac{\partial F}{\partial y_k}$$

Ciascuna di queste relazioni é incompatibile con l'ipotesi fatta che le variabili $\{x_k\}$ e $\{y_k\}$ siano indipendenti.



Poiché saremo interessati soprattutto a trasformazioni simplettiche che differiscono poco dalla trasformazione identità , o comunque tali che siano connesse in modo continuo con la trasformazione identità, la Proposizione 10.2 giustifica il fatto che le trasformazioni piú utilizzate sono quelle di seconda specie.

Per la Proposizione 10.2, se la trasformazione considerata é del tipo

$$Q_k = q_k + \epsilon A_k(q, p) \quad P_k = p_k + \epsilon B_k(q, p) \quad 10.14$$

dove il parametro ϵ é piccolo, e si puó cercare di utilizzare metodi perturbativi scrivendo in particolare la funzione generatrice F_ϵ della trasformazione (10.14) nella forma

$$F_\epsilon = F_0 + \epsilon F_1 + o(\epsilon)$$

Questo puó essere fatto solo se la funzione generatrice si riferisce ad un procedimento di seconda specie.

Ricordiamo che le equazioni di Lagrange sono invarianti per *ogni* trasformazione di coordinate nello spazio delle configurazioni, che sia differenziabile e invertibile.

Questa importante proprietà era alla base della relazione tra simmetrie e costanti del moto. Dimostreremo nel corso di questa Lezione che questa relazione è valida anche nel formalismo hamiltoniano, quando si considerino trasformazioni di coordinate nello spazio delle fasi che siano simplettiche.

Dimostriamo qui preliminarmente che ogni trasformazione di coordinate nello spazio delle configurazioni può essere utilizzata per *definire* una famiglia di trasformazioni simplettiche. Più precisamente, vale la seguente Proposizione

Proposizione 10.3

Ogni trasformazione regolare invertibile nello spazio delle configurazioni può essere estesa (*in modo non unico*) ad una trasformazione nello spazio delle fasi in modo che la trasformazione ottenuta sia simplettica.

◇

Dimostrazione

Siano q_1, \dots, q_N delle coordinate utilizzabili in un intorno del punto considerato, e sia

$$\{q_k\} \rightarrow \{\phi_k(q_1, \dots, q_N)\}$$

la trasformazione di coordinate considerata.

Costruiamo la funzione

$$F(x_1, \dots, x_N, y_1, \dots, y_N) \equiv \sum_k y_k \phi_k(x_1, \dots, x_N) \quad 10.15$$

e utilizziamola in un procedimento di seconda specie.

Sarà allora, per definizione, per ogni valore dell'indice m

$$p_m \equiv \sum_k P_k \frac{\partial \phi_k(q)}{\partial q_m}, \quad Q_m \equiv \phi_m(q)$$

così che

$$P_m = \sum_k (J^{-1})_{k,m} p_k, \quad Q_m = \phi_m(q) \quad 10.16$$

dove J è lo jacobiano della trasformazione di coordinate $q \rightarrow Q$ (che per ipotesi è invertibile).

La (10.16) dá esplicitamente una trasformazione simplettica che "estende" la trasformazione data.

♡

Notare che la scelta (10.15) per la funzione generatrice *non è unica*.

Alla funzione che abbiamo scelto si può aggiungere una generica funzione di classe C^1 delle sole variabili di posizione $G(x_1, \dots, x_N)$; si ottiene allora

$$P_m = \sum_k (J^{-1})_{k,m} \left(p_k - \frac{\partial G}{\partial q_k} \right)$$

Si noti tuttavia che la (10.16) provvede una relazione *lineare omogenea* tra le $\{p_k\}$ e le $\{P_k\}$.

Inoltre, se la trasformazione considerata è lineare omogenea, così che

$$Q_k \equiv C_{k,m} q_m$$

si ha

$$J_{k,m} = C_{k,m}, \quad P_k = (J^{-1})_{k,m}^t p_m$$

In particolare, se la trasformazione considerata nello spazio delle configurazioni era una trasformazione ortogonale, allora il sollevamento allo spazio delle fasi ottenuto mediante la funzione generatrice (10.15) consiste nel trasformare le variabili p secondo la stessa trasformazione ortogonale.

FUNZIONI GENERATRICI DIPENDENTI DAL TEMPO

Consideriamo ora una famiglia di funzioni generatrici $F(x_1, \dots, x_N, y_1, \dots, y_N, t)$ che soddisfano

$$\det \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_k \partial y_h} \right) \neq 0 \quad \forall t$$

Assumiamo che $F(x_1, \dots, x_N, y_1, \dots, y_N, t)$ sia congiuntamente differenziabile nelle variabili x, y e nel parametro t .

Attraverso il procedimento di seconda specie costruiamo le trasformazioni di coordinate (parametrizzate da t)

$$P_k = P_k(q_1, \dots, p_N; t), \quad Q_k = Q_k(q_1, \dots, p_N; t) \quad 10.17$$

Per ogni valore del parametro t si ha

$$- \sum_k P_k dQ_k + \sum_k p_k dq_k = dS, \quad S \equiv - \sum_k P_k Q_k + F \quad 10.18$$

dove si intende che il differenziale di S é relativo alle sole coordinate $\{x_1, \dots, y_N\}$ (e non al parametro t).

Sia ora $t \rightarrow q(t), P(t)$ una traiettoria nello spazio delle fasi descritto mediante le coordinate q, P .

La derivata rispetto al tempo di $S(q(t), P(t))$ é

$$\frac{DS}{dt} = \sum_k \frac{\partial S}{\partial q_k} \dot{q}_k + \sum_k \frac{\partial S}{\partial P_k} \dot{P}_k + \frac{\partial S}{\partial t}$$

Valutando ciascuno dei differenziali in (10.18) sul campo vettoriale che descrive il moto si ottiene

$$- \sum_k P_k \frac{dQ_k}{dt} + \sum_k p_k \frac{dq_k}{dt} = \frac{DS}{dt} - \frac{\partial S}{\partial t} \quad 10.19$$

Si ha dunque, per ogni funzione H

$$\frac{DS}{dt} - \frac{ds}{dt} + \sum_k P_k \frac{dQ_k}{dt} - H = \sum_k p_k \frac{dq_k}{dt} - H \quad 10.20$$

Poniamo

$$K(Q, P, t) \equiv H(q, p, t) + \frac{\partial S}{\partial t} = H(q, p, t) + \frac{\partial F}{\partial t} \quad 10.21$$

In (10.21) le coordinate (q, p) e la funzione $\frac{\partial S}{\partial t}$ devono essere espresse come funzioni delle variabili (Q, P) e del tempo.

Da (10.20), (10.21) si deduce allora per ogni traiettoria

$$\sum_k P_k \frac{dQ_k}{dt} - K = \sum_k p_k \frac{dq_k}{dt} - H + \frac{DS}{dt}$$

Abbiamo con questo dimostrato

Proposizione 10.4

Sia F una funzione utilizzata come funzione generatrice; supponiamo che essa dipenda in modo differenziabile da un parametro α .

Se il parametro α viene identificato con il tempo e quindi si considera nello spazio delle fasi una trasformazione di coordinate dipendente dal tempo, allora la famiglia di trasformazioni così ottenuta è canonica.

Comunque sia scelta la funzione H , se si considerano le soluzioni di

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}, \quad k = 1, \dots, N \quad 10.22$$

allora la corrispondente dipendenza dal tempo delle coordinate $\{Q_k, P_h\}$, data da

$$t \rightarrow Q_k(q(t), p(t), t), \quad P_h(q(t), p(t), t)$$

è tale da rendere soddisfatte le identità

$$\dot{Q}_k = \frac{\partial K}{\partial P_k}, \quad \dot{P}_k = -\frac{\partial K}{\partial Q_k}, \quad k = 1, \dots, N, \quad K = H + \frac{\partial F}{\partial t} \quad 10.23$$

◇

Nota 10.5

Le trasformazioni canoniche dipendenti dal tempo ottenute mediante questo procedimento vengono spesso indicate con il nome *completamente canoniche*.

♣

IL METODO DI HAMILTON-JACOBI

Abbiamo dimostrato che, indicando con $\{\phi_k(t; q, p), \psi_k(t; q, p)\}$ la soluzione di

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k} \quad \phi_k(0; q, p) = q_k \quad \psi_k(0; q, p) = p_k \quad 10.24$$

per ogni valore del parametro t la trasformazione di coordinate definita da

$$\{q, p\} \rightarrow \{\phi(t; q, p), \psi(t; q, p)\} \quad (10.25)$$

è una trasformazione simplettica.

Abbiamo d'altra parte visto come si possono costruire trasformazioni simplettiche attraverso l'uso di una funzione F .

Abbiamo anche notato che, se la funzione generatrice F dipende in modo differenziabile da un parametro che viene identificato con il tempo, la famiglia di trasformazioni dipendente dal tempo così ottenuta è canonica, nel senso che preserva l'insieme delle strutture hamiltoniane, e la nuova hamiltoniana è $H + \frac{\partial F}{\partial t}$.

È quindi naturale, nello studio della dinamica definita da una data hamiltoniana H , porsi il problema di trovare una funzione F sullo spazio delle fasi, dipendente in generale dal tempo, per la quale la "nuova" Hamiltoniana K abbia una forma particolarmente semplice, così che nel nuovo sistema di coordinate le equazioni del moto siano integrabili in modo elementare.

In questo senso, lo studio delle soluzioni dell'equazione del moto nello spazio delle fasi viene sostituito dalla ricerca di un'opportuna funzione "generatrice" dipendente dal tempo.

In questo consiste il metodo di Hamilton-Jacobi.

La dinamica nelle nuove coordinate sarà particolarmente semplice se $K = 0$; in questo caso il valore delle nuove coordinate Q, P non cambia nel tempo lungo le traiettorie del sistema considerato, ovvero le nuove coordinate sono *costanti del moto*, e il loro valore numerico in corrispondenza ad una data traiettoria può essere determinato dai dati iniziali.

Il moto del sistema si ottiene allora utilizzando a ciascun istante t la funzione generatrice per costruire esplicitamente (almeno localmente) la trasformazione simplettica che dá le coordinate (q, p) in funzione delle coordinate (Q, P) che sono *costanti del moto*.

Sarà dunque in generale interessante lo studio del caso in cui $K = 0$.

Utilizzando un procedimento di seconda specie (l'evoluzione corrisponde a una dipendenza continua delle coordinate dal tempo, e quindi per t piccolo la trasformazione considerata differisce poco dalla trasformazione identità), la corrispondente funzione generatrice F dovrà soddisfare l'identità

$$\frac{\partial F(q, P; t)}{\partial t} + H(q, p, t) = 0 \quad 10.26$$

Notare che a ciascun istante le coordinate (q, P) formano per ipotesi un sistema completo di coordinate e le coordinate p possono essere scritte in funzione delle (q, P) utilizzando la funzione (incognita) F .

Dunque in (10.26) si deve intendere che le $\{p_k\}$ é identificata con $\frac{\partial F}{\partial q_k}$ e quindi la (10.26) può essere scritta nella forma

$$\frac{\partial F(q, P; t)}{\partial t} + H(\{q_k\}, \{\frac{\partial F}{\partial q_k}\}, t) = 0 \quad 10.27$$

Definizione 10.2

Alla (10.27) viene dato il nome di *equazione di Hamilton-Jacobi*.

E' un'equazione *funzionale* che determina la funzione F .

◇

FUNZIONI PRINCIPALI DI HAMILTON

Il metodo che descriviamo in questa Lezione ha un'importanza primaria nello studio dei sistemi hamiltoniani. Esso é detto *metodo di Hamilton-Jacobi* e consiste nel determinare una funzione $F(q, P, t)$ che dipende da N parametri $\{P_k, k = 1, \dots, N\}$ e per ciascun valore di questi parametri soddisfa l'equazione di Hamilton-Jacobi.

Definizione 10.3

A ogni funzione che abbia queste proprietà si dá il nome di *Funzione Principale di Hamilton*.

◇

In generale, almeno localmente, vi sono molte funzioni principali.

E' importante notare che la funzione principale deve dipendere da N parametri.

Inoltre, per poter utilizzare la funzione principale come funzione generatrice, deve essere

$$\frac{\partial F}{\partial P_k} \neq 0 \quad \det \left(\frac{\partial^2 F}{\partial q_h \partial P_k} \right) \neq 0$$

e quindi la funzione F non deve dipendere *in modo additivo* dai parametri P_k .

Nota 10.5

Per motivi di interesse storico, diamo la costruzione fatta da Hamilton di una particolare famiglia di funzioni principali, parametrizzate dal tempo.

Se si fa uso di questa famiglia, le nuove coordinate (Q, P) sono i dati iniziali per le soluzioni delle equazioni di Hamilton di cui (q, p) rappresentano i dati al tempo t (i dati iniziali sono sempre costanti del moto, ma non sono in generale quantità conservate poiché le (Q, P) , come funzioni delle (q, p) dipendono dal tempo t).

Questa costruzione fatta da Hamilton è stata il punto di partenza del formalismo di Hamilton-Jacobi; è stato Jacobi a sottolineare che *ogni* soluzione di (10.27) può essere utilizzata per determinare l'evoluzione del sistema hamiltoniano in esame.

Naturalmente in questo caso le nuove coordinate (Q, P) sono costanti del moto ma *non sono i dati iniziali*



Notazione

Nel seguito, per sottolineare il loro ruolo di parametri, utilizzeremo il simbolo α anziché il simbolo P per denotare i parametri che appaiono nelle funzioni principali.

Utilizzeremo anche il simbolo S anziché F per denotare una funzione principale, per sottolineare che non si tratta di una generica funzione generatrice.



Sia dunque $S(q, \alpha, t)$ una funzione principale di Hamilton per il sistema di hamiltoniana $H(q, p, t)$, e calcoliamo la variazione di S lungo le soluzioni delle equazioni di Hamilton.

Svolgendo il calcolo e ricordando che le α_k assumono valore costante lungo le traiettorie, si ottiene

$$\frac{DS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_k \frac{\partial S}{\partial q_k} \dot{q}_k = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_k p_k \dot{q}_k = -H + \sum_k p_k \dot{q}_k = L(q, \dot{q}, t) \quad 10.28$$

Dunque la derivata di una funzione principale di Hamilton lungo le traiettorie soluzioni della corrispondente equazione di Hamilton coincide con la Lagrangiana del sistema.

La dipendenza di S dalle coordinate α è dunque solo attraverso i dati iniziali, più precisamente attraverso il fatto che diverse soluzioni attribuiscono allo stesso punto nello spazio delle fasi valori diversi delle "costanti del moto" α .

Reciprocamente, per fissato valore delle coordinate q , una stessa scelta del valore numerico delle coordinate α individua punti diversi dello spazio delle fasi se queste coordinate sono definite a partire da diverse funzioni principali.

Dalla (10.28) si deduce che, se le traiettorie del moto del sistema sono conosciute, si può costruire una funzione principale mediante la posizione

$$S(q, \alpha, t) \equiv \int_{t_0}^t L(\phi(s; q_0, \dot{q}_0), \dot{\phi}(s; q_0, \dot{q}_0), s) ds \quad 10.29$$

dove i dati iniziali q_0, \dot{q}_0 della traiettoria $\phi(t, q_0, \dot{q}_0)$ sono scelti in modo tale che

$$\left. \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right|_{t=0} = \alpha, \quad q_0 = \frac{\partial S}{\partial \alpha}$$

Questo è stato il primo procedimento utilizzato da Hamilton per costruire un funzione principale e risolvere quindi il problema della determinazione del moto del sistema mediante una famiglia di trasformazioni canoniche.

Sebbene questo procedimento abbia un importante contenuto storico e concettuale, in particolare per gli sviluppi successivi in teoria del controllo, esso è abbastanza involuto e soprattutto è sostanzialmente un procedimento circolare.

Infatti la ricerca della funzione principale S viene effettuata per poter determinare le traiettorie del sistema, ma la costruzione della funzione principale S attraverso (10.28) richiede che le traiettorie del sistema siano già conosciute (ricordare che l'integrazione in (10.28) deve essere effettuata lungo le soluzioni delle equazioni di Hamilton).

Nota 10.6

In generale esisteranno solo delle soluzioni *locali* delle equazioni di Hamilton-Jacobi; infatti se una funzione principale fosse definita globalmente, il sistema ammetterebbe $2N$ costanti del moto, mentre un generico sistema meccanico ha *poche* costanti del moto che siano definite (come funzioni differenziabili, o anche solo misurabili) sull'intero spazio delle fasi.



Lo studio che faremo della (10.27) dovrà dunque essere considerato solo come *uno studio di esistenza locale*.

Vedremo poi che *per alcuni sistemi Hamiltoniani* (quelli completamente integrabili) le (10.27) possono essere risolte anche globalmente (cioè sull'intero spazio delle fasi), ma le funzioni principali che si ottengono sono in generale *a piú valori*.

Anche in questi casi piú particolari dunque non tutte le "costanti del moto" sono definite globalmente; vedremo che al piú N di esse hanno questa proprietà.

FUNZIONI CARATTERISTICHE DI HAMILTON

Il metodo di Hamilton-Jacobi ammette una variante nel caso in cui l'hamiltoniana non dipende dal tempo.

In questo caso si può utilizzare il metodo di Hamilton-Jacobi per descrivere (localmente) il moto mediante un sistema di coordinate generato con un procedimento di seconda specie a partire da una famiglia a N parametri di funzioni $W(q_1, \dots, q_N; \alpha_1, \dots, \alpha_N)$ *indipendenti dal tempo*.

Si può infatti notare che, se H é indipendente dal tempo (e quindi una costante del moto), ci si può porre il problema di trovare una trasformazione *simplettica* (indipendente dal tempo)

$$(q_1, \dots, q_N, p_1, \dots, p_N) \Rightarrow (Q_1, \dots, Q_N, P_1, \dots, P_N) \tag{10.30}$$

tale che

$$P_N = H(q_1, \dots, p_N) \tag{10.31}$$

Infatti, con questa scelta di trasformazione simplettica si ha

$$\dot{Q}_k = 0, \quad k = 1, \dots, N - 1, \quad \dot{Q}_N = 1, \quad \dot{P}_i = 0 \quad \forall i$$

Queste equazioni ammettono la soluzione

$$Q_k(t) = Q_k(0), \quad k = 1, \dots, N - 1, \quad Q_N(t) = Q_N(0) + t, \quad P_i(t) = P_i(0) \quad \forall i$$

La dipendenza dal tempo delle coordinate q, p si ottiene poi invertendo la trasformazione di coordinate $(q, p) \rightarrow (Q, P)$.

Sia $W(q_1, \dots, q_N, \alpha_1, \dots, \alpha_N)$ la funzione cercata, che genera la trasformazione (10.30) con un procedimento di seconda specie.

Allora la (10.31) può essere scritta nella forma di un'equazione funzionale alle derivate parziali

$$H \left(q_1, \dots, q_N; \frac{\partial W}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial W}{\partial q_N} \right) = \alpha_N \tag{10.32}$$

per la funzione $W(q_1, \dots, q_N, \alpha_1, \dots, \alpha_N)$.

Anche qui abbiamo utilizzato la notazione α_k per indicare i parametri e la notazione P_k per indicare gli stessi parametri cui é stato dato il ruolo di coordinate attraverso la condizione

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha_k} = p_k$$

Definizione 10.4

Alla (10.32) si dá il nome di *equazione di Hamilton-Jacobi indipendente dal tempo*

◇

Si noti che anche qui si cerca una soluzione W (10.32), che dipende dal parametro α_N che appare esplicitamente nell'equazione, e da altri $N - 1$ parametri $\alpha_1, \dots, \alpha_{N-1}$, in modo tale che la dipendenza da questi parametri *non sia di natura additiva*.

Definizione 10.5

Una soluzione di (10.32) che abbia questa proprietá viene detta *funzione caratteristica di Hamilton*.

◇

Nota 10.6

La ricerca di una funzione caratteristica puó essere riguardato come caso particolare della ricerca di una funzione principale.

Infatti, se $H(q,p)$ non dipende dal tempo, e se W é un funzione caratteristica, soluzione di (10.32), una funzione principale si ottiene ponendo

$$S(q, \alpha, t) = W(q, \alpha) - \alpha_N t \quad 10.33$$

In questa soluzione la dipendenza dal tempo é *separata* (appare solo nel secondo termine, che non dipende dalle q_k).

Se H é indipendente dal tempo, esiste sempre una funzione principale che ha forma (10.33).

E' infatti sufficiente prendere per W una soluzione della (10.32)

Si ha inoltre

$$\frac{\partial^2 W}{\partial q_k \partial \alpha_h} = \frac{\partial S^2}{\partial q_k \partial \alpha_h} \quad h, k = 1 \dots N$$

e quindi le condizioni di invertibilitá per S sono verificate se e solo se lo sono per la funzione W .

♣

Data una funzione caratteristica, il metodo di Hamilton-Jacobi si sviluppa come nel caso di una funzione principale.

Ponendo

$$p_k \equiv \frac{\partial W}{\partial q_k}, \quad \beta_k \equiv \frac{\partial W}{\partial \alpha_k} \quad 10.34$$

si ottengono le due trasformazioni *simpletliche*, inversa una dell'altra,

$$(q, p) \rightarrow (\alpha, \beta) \quad (\alpha, \beta) \rightarrow (q, p)$$

Queste trasformazioni sono indipendenti dal tempo, e quindi la descrizione del moto mediante le coordinate α, β si effettua mediante *la stessa Hamiltoniana*, scritta ora nelle coordinate α, β .

Le equazioni del moto saranno allora

$$\dot{\alpha}_k = -\frac{\partial H}{\partial \beta_k} = 0 \quad \forall k$$

$$\dot{\beta}_k = \frac{\partial H}{\partial \alpha_k} = 0, \quad k = 1, \dots, N-1 \quad \dot{\beta}_N = \frac{\partial H}{\partial \alpha_N} = 1 \quad 10.35$$

Se ne conclude che, *localmente*, (cioé negli intorno in cui sono definite), tutte le α_k sono costanti del moto, e sono costanti del moto anche le $\beta_1, \dots, \beta_{N-1}$.

La dipendenza dal tempo di β_N é invece lineare.

APPENDICE alla Lezione 10: Coordinate di Delunay per il problema di Keplero

Dalla lagrangiana per il problema di Keplero scritta utilizzando coordinate sferiche r, θ, ϕ si deduce la seguente espressione dei momenti coniugati

$$p_r = \dot{r}, \quad p_\theta = r^2 \dot{\theta} \quad p_\phi = r^2 \operatorname{sen}^2 \theta \dot{\phi}$$

e pertanto la hamiltoniana H é data

$$2H = p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\phi^2}{r^2 \operatorname{sen}^2 \theta} - \frac{2\mu}{r} \quad 10A.1$$

In questo caso l'equazione di Hamilton-Jacobi per la funzione generatrice é risolubile per separazione di variabili e la funzione generatrice S puó pertanto essere scritta

$$S = S_1(\alpha, \phi) + S_2(\alpha, \theta) + S_3(\alpha, r), \quad \alpha = \{\alpha_\phi, \alpha_\theta, \alpha_r\} \quad 10A.2$$

Le equazioni che devono soddisfare dalle S_k sono rispettivamente

$$\begin{aligned} \frac{dS_1}{d\phi} &= \alpha_\phi, & \left(\frac{dS_2}{d\theta}\right)^2 + \frac{\alpha_\phi^2}{\operatorname{sen}^2 \theta} &= \alpha_\theta^2 \\ \left(\frac{dS_3}{dr}\right)^2 + \frac{\alpha_r^2}{r^2} - \frac{2\mu}{r} &= 2H \end{aligned} \quad 10A.3$$

Si ha

$$\alpha_r \equiv H = -\frac{\mu}{2a}, \quad \alpha_\theta = |r \wedge \dot{r}| \equiv \sqrt{\mu a (1 - e^2)} \cos i \quad 10A.4$$

dove a é il semiasse dell'orbita e abbiamo indicato con i l'angolo d'inclinazione del piano dell'orbita rispetto ad un piano di riferimento.

L'angolo i varia tra 0 e π , mentre si ha

$$\frac{\pi}{2} - i \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} + i, \quad a(1 - e) \leq r \leq a(1 + e)$$

E' facile verificare le seguenti relazioni

$$J_r = \frac{1}{2\pi} \oint p_r dr = -\alpha_\theta + \sqrt{\mu a} \quad J_\theta = \alpha_\theta - \alpha_\phi \quad J_\phi = \alpha_\phi \quad 10A.5$$

Ne segue

$$H = -\frac{\mu^2}{4(J_r + J_\theta + J_\phi)^2}$$

e quindi il moto é periodico con frequenza

$$\omega_r = \omega_\theta = \omega_\phi = \frac{\mu^2}{(J_r + J_\theta + J_\phi)^3}$$

I moti che sono confinati in regioni limitate dello spazio sono tutti periodici.

Siccome la hamiltoniana dipende solo dalla somma delle J conviene eseguire un'ulteriore trasformazione simplettica lineare e a coefficienti costanti in modo tale da esibire in forma esplicita altre due costanti del moto.

Poniamo quindi

$$J_1 \equiv J_r + J_\theta + J_\phi, \quad J_2 = J_\theta - J_\phi, \quad J_3 = J_\phi \quad 10A.6$$

e quindi

$$\theta_1 = \theta_r, \quad \theta_2 = \theta_\theta - \theta_r, \quad \theta_3 = \theta_\phi - \theta_\theta \quad 10A.7$$

Alle coordinate simplettiche così ottenute si dá il nome di *variabili di Delunay*.

Esse vengono indicate in Meccanica Celeste con i nomi

$$L, G, H, l, g, h, \quad 10A.8$$

con la seguente identificazione

$$L = J_1 = \sqrt{\mu a}, \quad G = J_2 = \sqrt{\mu a (1 - e^2)}, \quad H = J_3 = \sqrt{\mu a (1 - e^2)} \cos i$$

$$l = \theta_1 = u - e \operatorname{sen} u, \quad g = \theta_2, \quad h = \theta_3 \quad 10A.9$$

Notiamo che le coordinate l, g, h rappresentano angoli e quindi le coordinate di Delunay rappresentano un sistema completo di variabili azione-angolo (vedere Lezione 12)

Le espressioni esplicite delle coordinate h e g in funzione delle coordinate $p_r, p_\theta, p_\phi, r, \theta, \phi$ é piú complicata e può essere ricavata dalle formule fin qui scritte.

Piú semplice é la scrittura delle coordinate p_r, p_ϕ, p_θ in funzione delle coordinate L, G, H, r, θ, ϕ .

Si ha

$$h = -\frac{1}{2} \frac{\mu^2}{L^2}, \quad p_\phi = H, \quad p_\theta = \sqrt{G^2 - \frac{H^2}{\operatorname{sen}^2 \phi}} \quad p_r = \sqrt{2h + \frac{2\mu}{r} - \frac{G^2}{r^2}} \quad 10A.10$$

Riprenderemo l'analisi delle coordinate di Delunay nella Lezione 19 in cui tratteremo il problema dei tre corpi.