



SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea Magistrale in Matematica per le Applicazioni

Metodi numerici di ordine ridotto nelle equazioni di von Kármán parametriche

RELATORE

Prof. Maurizio Falcone

SECONDO RELATORE

Prof. Gianluigi Rozza

LAUREANDO

Federico Pichi

Anno Accademico 2015-2016
Dipartimento di Matematica 'Guido Castelnuovo'

INTRODUZIONE

Immaginiamo di avere tra le nostre mani una piastra rettangolare elastica e sottile e di poterla comprimere lungo due lati. Quello che ci aspettiamo empiricamente è che tale piastra rimanga indeformata fintantoché non esercitiamo una forza adeguata. Imprimendo una compressione maggiore, invece, vorremmo osservare il cosiddetto *fenomeno di buckling* ovvero una deformazione della piastra nella direzione normale al piano della stessa.

Modellizzando matematicamente questo esperimento non si può non tenere conto delle molteplici caratteristiche che lo contraddistinguono. Ad un livello di base sarà necessaria la teoria dell'elasticità, in modo da chiarire il concetto di deformazione e le varie ipotesi sul materiale preso in considerazione. Dalle leggi dell'elasticità è possibile ricavare l'equazione alle derivate parziali (EDP) che descrive il nostro modello. Ovviamente dovendo tenere conto del fenomeno di *buckling* ci aspettiamo una non linearità matematica della EDP, che dà luogo alla possibile perdita dell'unicità della soluzione. Per descrivere accuratamente questo fenomeno vorremo avere il controllo su di un parametro che gestisce la compressione, per questo motivo l'equazione sarà dipendente da tale parametro.

Il modello che si ottiene è dunque quello proposto da Von Kármán nel 1910 in [25], ovvero il sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali del quarto ordine, non lineari e parametriche

$$\begin{cases} \Delta^2 u + \lambda u_{xx} = [\phi, u] , & \text{in } \Omega = [0, L] \times [0, 1] \\ \Delta^2 \phi = - [u, u] , & \text{in } \Omega = [0, L] \times [0, 1] \end{cases}$$

corredato da opportune condizioni al bordo, dove si è indicato con

$$\Delta^2 := \Delta\Delta = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)^2,$$

l'operatore biarmonico, con λ il parametro che misura la compressione e con

$$[u, \phi] := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}.$$

il cosiddetto *bracket di Monge-Ampère*, definito come prodotto delle derivate seconde delle due incognite, che corrisponde al termine non lineare.

Siamo interessati allo studio dei fenomeni di *buckling* della piastra, che corrispondono alle possibili biforcazioni del sistema di Von Kármán. Vorremmo infatti capire come e quando avviene la perdita di unicità della soluzione e di conseguenza quali siano tali *valori critici* per il parametro λ , detti anche punti di biforcazione. Una possibilità consiste nello studiare il sistema al variare del parametro, costruendo così un diagramma di biforcazione utile ad osservare quando si ottiene il *buckling*. Questa scelta risulta però essere molto dispendiosa a livello computazionale, poiché a priori non abbiamo indicazioni sulla posizione dei punti di biforcazione.

Tali informazioni possono essere ottenute mediante lo studio dello spettro del problema linearizzato, in quanto ogni punto di biforcazione per il sistema di Von Kármán deve essere necessariamente un autovalore di

$$\Delta^2 u + \lambda u_{xx} = 0, \quad \text{in } \Omega.$$

Al fine di ottenere tutti questi risultati è stato fondamentale l'utilizzo dei software Freefem++ [13] e Matlab [16], in cui è stato implementato l'algoritmo risolutivo composto da un metodo di continuazione, il metodo di Newton e il metodo di Galerkin - Elementi Finiti (FE). Grazie alla combinazione di questi tre approcci siamo riusciti a trattare rispettivamente la dipendenza dal parametro, la non linearità e la risoluzione del sistema a partire dalla formulazione debole.

Successivamente, avendo a che fare con metodi dall'elevato costo computazionale, anche detti metodi *full order*, si è passati alla trattazione *reduced order*. Questi Metodi di Riduzione di Ordine (ROM), di cui fa parte il metodo delle Basi Ridotte (RB) utilizzato nella tesi, sono stati sviluppati non con l'intento di sostituire i metodi *full order* (ad esempio Elementi Finiti) bensì di costruire la soluzione a partire da essi. Infatti, al fine di garantire una maggiore efficienza nella risoluzione del sistema, è possibile accoppiare queste tecniche e dividere il lavoro in una fase *offline* (computazionalmente

onerosa) e una fase *online* (che fornisce in “tempo reale” la soluzione).

La tesi è strutturata nel seguente modo:

- *Capitolo 1:* Si è partiti dallo studio della teoria dell’elasticità, definendo gli strumenti di base ed presentando i teoremi più significativi. In particolare si sono analizzate le quantità definibili sulla configurazione di riferimento e sulla configurazione deformata e le relazioni che sussistono tra di esse. Uno strumento fondamentale in quest’ottica è sicuramente la *trasformata di Piola* che ci permette di arrivare alla definizione del *primo e secondo tensore degli sforzi di Piola-Kirchhoff*. Successivamente abbiamo ricavato le equazioni di equilibrio e la corrispondente formulazione debole dal principio degli sforzi di Eulero e Cauchy. Infine si sono studiate le varie proprietà dei materiali, quali elasticità, isotropia e omogeneità ricavandone le equazioni costitutive che determinano il comportamento della piastra.
- *Capitolo 2:* Una volta ricavate le equazioni dell’elasticità non lineare abbiamo presentato gli strumenti matematici necessari alla loro trattazione. Nello specifico, oltre a definire gli spazi in cui è ambientato il problema, abbiamo riportato i classici risultati di analisi funzionale quali ad esempio il teorema della funzione implicita e il teorema dell’applicazione aperta. Dopo aver richiamato tali nozioni si è passati ai risultati di esistenza e unicità per l’elasticità lineare e non lineare.
- *Capitolo 3:* Infine presentiamo la trattazione numerica del caso test delle equazioni di Von Kármán. Si è mostrato come è possibile trasformare il sistema al quarto ordine in uno al secondo ordine e come da esso ricavare la formulazione debole. Abbiamo richiamato la teoria di base delle biforcazioni in spazi di Banach ed i risultati relativi al collegamento con gli autovalori del problema linearizzato. Dopo la presentazione dell’algoritmo risolutivo e del metodo degli Elementi Finiti abbiamo trattato la riduzione di ordine e il metodo delle Basi Ridotte. Abbiamo concluso il capitolo ed il lavoro, presentando i risultati numerici comprensivi di soluzione del problema nel caso di piastra rettangolare e quadrata, analisi dei diagrammi di biforcazione con focus sulla biforcazione doppia e analisi della stabilità grazie allo studio spettrale, il tutto in ottica *full e reduced order*.

INDICE

Introduzione	iii
1 Teoria dell'elasticità	1
1.1 Definizioni preliminari	1
1.1.1 Deformazioni e spostamenti in \mathbb{R}^3	1
1.1.2 Elementi nella configurazione deformata	3
1.1.3 Deformazioni rigide	8
1.2 Equazioni di equilibrio e principio dei lavori virtuali	10
1.2.1 Teorema di Cauchy	11
1.2.2 Principio dei lavori virtuali	17
1.2.3 Tensori degli sforzi di Piola-Kirchhoff	18
1.3 Materiali elastici ed equazioni costitutive	22
1.3.1 Elasticità e assioma di indifferenza dalla struttura	22
1.3.2 Equazioni costitutive	26
1.3.3 Materiali di Kirchhoff-St Venant	29
2 Analisi matematica del problema	33
2.1 Richiami di analisi funzionale	33
2.2 Esistenza per l'elasticità lineare	37
2.3 Esistenza per l'elasticità non lineare	45
3 Approssimazione numerica del modello di Von Kármán	48
3.1 Modello di Von Kármán e biforcazioni	49
3.1.1 Equazioni di Von Kármán	49
3.1.2 Biforcazioni	53
3.2 Metodo di Galerkin e riduzione di ordine	56

3.2.1	Elementi finiti	58
3.2.2	Basi ridotte	61
3.3	Simulazioni e risultati	65
3.3.1	Celle e diagrammi di biforcazione	66
3.3.2	Autovalori e stabilità	74
	Conclusioni e obiettivi	77
	Bibliografia	81

CAPITOLO 1

TEORIA DELL'ELASTICITÀ

1.1 Definizioni preliminari

Un aspetto centrale nello studio dei problemi di elasticità non lineare, consiste nel trovare la posizione di equilibrio di un corpo elastico che occupa un dominio di riferimento $\bar{\Omega}$ in assenza di forze esterne, dove Ω è un dominio contenuto in \mathbb{R}^3 .

Se soggetto a forze esterne, il corpo occupa una configurazione deformata $\varphi(\bar{\Omega})$, caratterizzata da una mappa $\varphi : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$ che deve possedere particolari proprietà. In questa sezione andremo a presentare le principali caratteristiche geometriche di questa mappa e come queste influenzano le quantità fisiche in gioco.

1.1.1 Deformazioni e spostamenti in \mathbb{R}^3

Assumeremo, da adesso in poi, di fissare un'origine \mathbf{o} e un sistema di basi ortonormali $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ in \mathbb{R}^3 . Identificheremo inoltre il punto x nell'insieme $\bar{\Omega}$ con il vettore $\mathbf{o}x$, le sue componenti rispetto alle basi \mathbf{e}_i con x_i e le derivate parziali rispetto alla variabile x_i con $\partial_i = \partial/\partial x_i$. Utilizzeremo infine, dove non specificato altrimenti e seguendo [8], la convenzione degli indici ripetuti per la somma. Ovvero ogni volta che un indice Latino (i, j , etc.) appare due volte in una formula, si somma la stessa per l'indice che varia in $I = \{1, 2, 3\}$.

Sia Ω un dato sottoinsieme di \mathbb{R}^3 , aperto, limitato, connesso e con frontiera sufficientemente regolare (per il momento). Possiamo pensare alla

chiusura $\bar{\Omega}$ dell'insieme Ω come al volume occupato del corpo prima della deformazione e per questo la chiameremo **configurazione di riferimento**.

Definizione 1.1. Una *deformazione* della configurazione di riferimento $\bar{\Omega}$ è un campo vettoriale $\varphi : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$ che sia sufficientemente regolare, iniettivo (con possibile eccezione della frontiera di Ω) e che preservi l'orientamento.

Data la deformazione $\varphi = \varphi_i \mathbf{e}_i$, definiamo in ogni punto dell'insieme Ω la matrice

$$\nabla \varphi := \begin{pmatrix} \partial_1 \varphi_1 & \partial_2 \varphi_1 & \partial_3 \varphi_1 \\ \partial_1 \varphi_2 & \partial_2 \varphi_2 & \partial_3 \varphi_2 \\ \partial_1 \varphi_3 & \partial_2 \varphi_3 & \partial_3 \varphi_3 \end{pmatrix},$$

che viene detta **gradiente di deformazione**. Dato che una deformazione preserva l'orientamento per definizione, il determinante del gradiente di deformazione deve soddisfare il **principio di conservazione dell'orientamento**, che da [1] risulta essere

$$\det(\nabla \varphi(x)) > 0, \quad \text{per ogni } x \in \bar{\Omega}.$$

In particolare quindi la matrice $\nabla \varphi(x)$ è invertibile in ogni punto x della configurazione di riferimento $\bar{\Omega}$.

Osservazione 1.1. La notazione $\nabla \varphi$ potrebbe confondere poiché il gradiente di una funzione a valori reali f è il vettore colonna formato dalle sue derivate parziali prime $\partial_i f$, mentre $(\nabla \varphi)_{i,j} = \partial_j \varphi_i$. Nella nostra notazione quindi il gradiente di deformazione sarà semplicemente la matrice rappresentante la derivata di Fréchet della mappa φ , che per funzioni a valori reali è identificata come il trasposto del gradiente.

Spesso è conveniente definire, insieme con la deformazione φ , il campo vettoriale $\mathbf{u} : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$ detto **spostamento**. Viene definito mediante la relazione $\varphi = \mathbf{id} + \mathbf{u}$, dove \mathbf{id} denota la mappa identità, ristretta a $\bar{\Omega}$, da \mathbb{R}^3 in \mathbb{R}^3 .

Ovviamente in questo caso possiamo definire il **gradiente di spostamento**

$$\nabla \mathbf{u} := \begin{pmatrix} \partial_1 u_1 & \partial_2 u_1 & \partial_3 u_1 \\ \partial_1 u_2 & \partial_2 u_2 & \partial_3 u_2 \\ \partial_1 u_3 & \partial_2 u_3 & \partial_3 u_3 \end{pmatrix},$$

che risulta collegato al gradiente di deformazione tramite la formula

$$\nabla \varphi = \mathbf{I} + \nabla \mathbf{u}.$$

Partendo dalla configurazione di riferimento $\bar{\Omega}$ e dalla deformazione $\varphi : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$, l'insieme $\varphi(\bar{\Omega})$ è chiamato **configurazione deformata**. Possiamo infatti definire a partire da ogni punto x di $\bar{\Omega}$ un punto della configurazione deformata $x^\varphi := \varphi(x)$, da cui otteniamo $\partial_j \varphi(x) = \partial_j \varphi_i(x) e_i$.

Ogni vettore $\partial_j \varphi(x)$ misura la deformazione locale nella direzione del vettore e_j . Equivalentemente il vettore $\partial_j \varphi(x)$ è il vettore tangente al j -esimo asse passante attraverso il punto x^φ . Quindi poiché la j -esima colonna della matrice $\nabla \varphi$ corrisponde esattamente al vettore $\partial_j \varphi(x)$, la conoscenza del gradiente di deformazione definisce completamente le deformazioni locali entro il primo ordine.

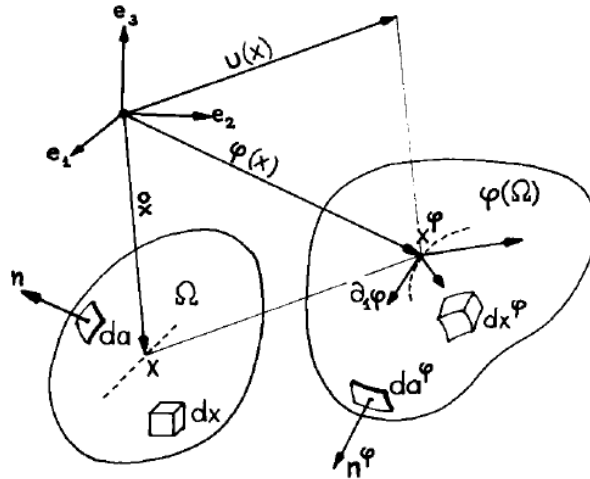


Fig. 1.1: Esempio di una possibile deformazione a partire dalla configurazione di riferimento Ω .

1.1.2 Elementi nella configurazione deformata

Passiamo ora allo studio della configurazione deformata, analizzando come variano le diverse quantità quali volume, area e lunghezza degli elementi. L'obiettivo è quello di esprimere tali grandezze, per una data deformazione, in termini di alcune quantità definite però nella configurazione di riferimento. Tutte le volte che dovremo riferirci alla configurazione deformata utilizzeremo l'apice " φ " in ogni elemento definito su essa.

Un esempio esplicativo è dato dalla variabile "Lagrangiana" $x \in \bar{\Omega}$ e dalla corrispondente variabile "Euleriana" $x^\varphi = \varphi(x) \in \varphi(\bar{\Omega})$.

Cominciamo con i volumi, se dx denota l'elemento di volume nel punto x della configurazione di riferimento, allora l'elemento di volume dx^φ nel

punto x^φ della configurazione deformata è dato da

$$dx^\varphi = \det(\nabla\varphi(x))dx, \quad (1.1)$$

poiché per ipotesi $|\det(\nabla\varphi(x))| = \det(\nabla\varphi(x)) > 0$.

L'elemento di volume dx^φ si utilizza nel calcolo di volumi nella configurazione deformata: ad esempio se con A denotiamo un insieme misurabile della configurazione di riferimento $\bar{\Omega}$, il volume dell'insieme A e quello dell'insieme deformato $A^\varphi := \varphi(A)$ sono espressi da

$$\text{vol}(A) := \int_A dx, \quad \text{vol}(A^\varphi) := \int_{A^\varphi} dx^\varphi = \int_A \det(\nabla\varphi(x))dx.$$

Ovviamente l'ultima uguaglianza è semplicemente un caso speciale della formula per il cambio di variabili negli integrali multipli.

Un ulteriore aiuto, al fine di calcolare le quantità nella configurazione deformata per mezzo delle quantità calcolate nella configurazione di riferimento, proviene dall'introduzione di una trasformazione tra tensori nelle due configurazioni. Ricordiamo che per **tensore** indichiamo qui un tensore del secondo ordine $\mathbf{T} = (T_{i,j})$. Possiamo quindi identificare l'insieme di tutti questi tensori con l'insieme \mathbb{M}^3 di tutte le matrici quadrate di ordine 3.

Dato un campo tensoriale sufficientemente regolare $\mathbf{T} : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{M}^3$ definito sulla configurazione di riferimento $\bar{\Omega}$, definiamo in ogni punto $x \in \bar{\Omega}$ la sua divergenza $\mathbf{div} \mathbf{T}$ come il vettore le cui componenti sono le divergenze del trasposto delle righe di \mathbf{T} visto come matrice. Vale quindi

$$\mathbf{T} = (T_{i,j}) = \begin{pmatrix} T_{1,1} & T_{1,2} & T_{1,3} \\ T_{2,1} & T_{2,2} & T_{2,3} \\ T_{3,1} & T_{3,2} & T_{3,3} \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{div} \mathbf{T} := \begin{pmatrix} \partial_1 T_{1,1} + \partial_2 T_{1,2} + \partial_3 T_{1,3} \\ \partial_1 T_{2,1} + \partial_2 T_{2,2} + \partial_3 T_{2,3} \\ \partial_1 T_{3,1} + \partial_2 T_{3,2} + \partial_3 T_{3,3} \end{pmatrix}$$

da cui si ottiene la formula $\mathbf{div} \mathbf{T} = \partial_j T_{i,j} \mathbf{e}_i$.

Considerando tali formule nella configurazione deformata otteniamo

$$\mathbf{T}^\varphi = (T_{i,j}^\varphi) \Rightarrow \mathbf{div}^\varphi \mathbf{T}^\varphi = \partial_j^\varphi T_{i,j}^\varphi \mathbf{e}_i,$$

dove $\partial_j^\varphi := \partial/\partial x_j^\varphi$ rappresenta la derivata prima rispetto alla variabile x_j^φ .

Applicando la formula di Green nell'insieme $\bar{\Omega}$ si mostra che la divergenza di un campo tensoriale soddisfa

$$\int_{\bar{\Omega}} \mathbf{div} \mathbf{T} dx = \left(\int_{\bar{\Omega}} \partial_j T_{i,j} dx \right) \mathbf{e}_i = \left(\int_{\partial\bar{\Omega}} T_{i,j} n_j da \right) \mathbf{e}_i,$$

o equivalentemente in forma matriciale

$$\int_{\Omega} \mathbf{div} \mathbf{T} \, dx = \int_{\partial\Omega} \mathbf{T} \mathbf{n} \, da, \quad (1.2)$$

dove da rappresenta l'elemento d'area lungo $\partial\Omega$ ed $\mathbf{n} = n_i \mathbf{e}_i$ è la normale uscente al dominio Ω .

Questa formula di Green, che può essere applicata nel caso della configurazione deformata, viene anche detta **teorema della divergenza per campi tensoriali**.

Ricordiamo che data una matrice $\mathbf{A} = (a_{i,j})$ di ordine n ed indicata con $\mathbf{A}'_{i,j}$ la matrice di ordine $n - 1$ ottenuta eliminando la i -esima riga e la j -esima colonna dalla matrice \mathbf{A} , possiamo definire la **matrice dei cofattori** nel seguente modo

$$d_{i,j} := (-1)^{i+j} \det(\mathbf{A}'_{i,j}), \quad \mathbf{Cof}(\mathbf{A}) := (d_{i,j}).$$

Osserviamo inoltre che la formula del calcolo del determinante espressa mediante la matrice dei cofattori diventa

$$\mathbf{A}(\mathbf{Cof}(\mathbf{A}))^T = (\det(\mathbf{A}))\mathbf{I},$$

da cui se la matrice \mathbf{A} risulta invertibile otteniamo

$$\mathbf{Cof}(\mathbf{A}) = (\det(\mathbf{A}))\mathbf{A}^{-T}.$$

Diamo ora un'importante definizione che ci servirà in seguito.

Definizione 1.2. *Sia φ una deformazione iniettiva su $\bar{\Omega}$, in modo che $\nabla\varphi$ sia invertibile in ogni punto della configurazione di riferimento. Allora se $\mathbf{T}^\varphi(x^\varphi)$ è un tensore definito in un punto x^φ della configurazione deformata, chiamiamo **trasformata di Piola** la trasformazione*

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(x) &:= (\det(\nabla\varphi(x)))\mathbf{T}^\varphi(x^\varphi)\nabla\varphi(x)^{-T} = \mathbf{T}^\varphi(x^\varphi)\mathbf{Cof}(\nabla\varphi(x)), \\ x^\varphi &= \varphi(x), \end{aligned} \quad (1.3)$$

che al tensore $\mathbf{T}^\varphi(x^\varphi)$ associa il tensore $\mathbf{T}(x)$ definito nel punto x della configurazione di riferimento.

Osservazione 1.2. Potrebbe sembrare più naturale definire la trasformata a partire dal tensore nella configurazione di riferimento, ma come vedremo il punto di partenza nella teoria dell'elasticità sarà proprio un campo tensoriale definito nella configurazione deformata.

Con il prossimo teorema vogliamo mostrare che vale una semplice relazione tra le divergenze dei tensori \mathbf{T}^φ e \mathbf{T} ed inoltre, come corollario, anche tra i corrispondenti elementi d'area.

Teorema 1.1.1. *Sia $\mathbf{T} : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{M}^3$ la trasformata di Piola di $\mathbf{T}^\varphi : \bar{\Omega}^\varphi \rightarrow \mathbb{M}^3$. Allora valgono*

$$\operatorname{div} \mathbf{T}(x) = (\det(\nabla \varphi(x))) \operatorname{div}^\varphi \mathbf{T}^\varphi(x^\varphi) \quad \text{per ogni } x^\varphi = \varphi(x), x \in \bar{\Omega}, \quad (1.4a)$$

$$\mathbf{T}(x) \mathbf{n} da = \mathbf{T}^\varphi(x^\varphi) \mathbf{n}^\varphi da^\varphi \quad \text{per ogni } x^\varphi = \varphi(x), x \in \partial\Omega. \quad (1.4b)$$

Per gli elementi d'area "da" e "da $^\varphi$ " nei punti $x \in \partial\Omega$ e $x^\varphi \in \partial\Omega^\varphi$, rispettivamente con normali esterne \mathbf{n} e \mathbf{n}^φ , si ottiene

$$\det(\nabla \varphi(x)) |\nabla \varphi(x)^{-T} \mathbf{n}| da = |\mathbf{Cof}(\nabla \varphi(x)) \mathbf{n}| da = da^\varphi. \quad (1.5)$$

Dimostrazione. Cominciamo provando l'identità di Piola

$$\operatorname{div}((\det(\nabla \varphi)) \nabla \varphi^{-T}) = \operatorname{div} \mathbf{Cof}(\nabla \varphi) = 0. \quad (1.6)$$

Contando gli indici modulo 3, gli elementi della matrice $\mathbf{Cof}(\nabla \varphi)$ sono dati (senza applicare la regola della somma) da

$$(\mathbf{Cof}(\nabla \varphi))_{i,j} = \partial_{j+1} \varphi_{i+1} \partial_{j+2} \varphi_{i+2} - \partial_{j+2} \varphi_{i+1} \partial_{j+1} \varphi_{i+2},$$

e con un calcolo diretto si giunge alla conclusione

$$\partial_j((\det(\nabla \varphi)) \nabla \varphi^{-T})_{i,j} = \partial_j(\mathbf{Cof}(\nabla \varphi))_{i,j} = 0 \quad \forall i.$$

Per provare la (1.4a) partiamo da

$$T_{i,j}(x) = (\det(\nabla \varphi(x))) T_{i,k}^\varphi(x^\varphi) (\nabla \varphi(x)^{-T})_{k,j},$$

ed eliminando il termine che si annulla grazie all'identità di Piola, otteniamo

$$\partial_j T_{i,j}(x) = (\det(\nabla \varphi(x))) \partial_j T_{i,k}^\varphi(\varphi(x)) (\nabla \varphi(x)^{-T})_{k,j}.$$

Infine grazie alla regola della catena

$$\partial_j T_{i,k}^\varphi(x^\varphi) = \partial_l^\varphi T_{i,k}^\varphi(\varphi(x)) \partial_j \varphi_l(x) = \partial_l^\varphi T_{i,k}^\varphi(x^\varphi) (\nabla \varphi(x))_{l,j}$$

ed alla ovvia identità

$$(\nabla \varphi(x))_{l,i} (\nabla \varphi(x)^{-T})_{k,i} = \delta_{l,k}$$

si ottiene la relazione cercata tra $\operatorname{div} \mathbf{T}(x)$ e $\operatorname{div}^\varphi \mathbf{T}^\varphi(x)$.

Per mostrare la (1.4b), combiniamo la relazione (1.1), il teorema della divergenza per campi tensoriali e la formula per il cambio di variabili in integrali multipli, ottenendo

$$\begin{aligned} \int_{\partial A} \mathbf{T}(x) \mathbf{n} \, da &= \int_A \operatorname{div} \mathbf{T}(x) \, dx = \int_A \operatorname{div}^\varphi \mathbf{T}^\varphi(\varphi(x)) \det(\nabla \varphi(x)) \, dx = \\ &= \int_{\varphi(A)} \operatorname{div}^\varphi \mathbf{T}^\varphi(x^\varphi) \, dx^\varphi = \int_{\partial \varphi(A)} \mathbf{T}^\varphi(x^\varphi) \mathbf{n}^\varphi \, da^\varphi, \end{aligned}$$

che prova la relazione $\mathbf{T}(x) \mathbf{n} \, da = \mathbf{T}^\varphi(x^\varphi) \mathbf{n}^\varphi \, da^\varphi$ poiché il dominio A è arbitrario.

La (1.5) si ottiene come caso speciale della formula appena dimostrata, prendendo la trasformata di Piola $\det(\nabla \varphi) \nabla \varphi^{-T}$ del tensore unità I . \square

Abbiamo quindi tutti gli strumenti per capire come vengono trasformate le aree da una deformazione φ : se Δ è un sottoinsieme misurabile della frontiera ∂A del sottodominio A , l'area dell'insieme deformato $\Delta^\varphi = \varphi(\Delta)$ è data da

$$\operatorname{area}(\Delta^\varphi) := \int_{\Delta^\varphi} da^\varphi = \int_{\Delta} \det(\nabla \varphi) |\nabla \varphi^{-T} \mathbf{n}| \, da.$$

Infine vogliamo capire come variano le lunghezze nella “nuova” configurazione. Per fare ciò osserviamo che se una deformazione φ è differenziabile in un punto $x \in \bar{\Omega}$ allora possiamo scrivere per ogni punto $x + \delta \mathbf{x} \in \bar{\Omega}$:

$$\varphi(x + \delta \mathbf{x}) - \varphi(x) = \nabla \varphi(x) \delta \mathbf{x} + o(|\delta \mathbf{x}|),$$

e quindi

$$|\varphi(x + \delta \mathbf{x}) - \varphi(x)|^2 = \delta \mathbf{x}^T \nabla \varphi^T(x) \nabla \varphi(x) \delta \mathbf{x} + o(|\delta \mathbf{x}|^2).$$

Il tensore *simmetrico* $\mathbf{C} := \nabla \varphi^T \nabla \varphi$, che appare nell'equazione precedente, è detto in elasticità il **tensore destro delle deformazioni di Cauchy-Green**.

Osservazione 1.3. Notiamo che la forma quadratica associata:

$$(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \boldsymbol{\xi}^T \mathbf{C}(x) \boldsymbol{\xi} = |\nabla \varphi(x) \boldsymbol{\xi}|^2$$

è definita positiva in ogni punto $x \in \bar{\Omega}$, poiché il gradiente di deformazione $\nabla \varphi$ è ovunque invertibile per ipotesi.

Sia $\gamma = \mathbf{f}(I)$, $\mathbf{f} : I \rightarrow \bar{\Omega}$, I : intervallo compatto di \mathbb{R} , una curva nella configurazione di riferimento. Se indichiamo con f_i le componenti della mappa \mathbf{f} , la lunghezza della curva γ è data da

$$l(\gamma) := \int_I |\mathbf{f}'(t)| dt = \int_I |f_i'(t) f_i'(t)|^{1/2} dt,$$

mentre quella nella configurazione deformata è data da

$$l(\gamma^\varphi) := \int_I |(\varphi \circ \mathbf{f})'(t)| dt = \int_I (C_{i,j}(\mathbf{f}(t)) f_i'(t) f_j'(t))^{1/2} dt.$$

É inoltre possibile definire, anche se non ha una diretta interpretazione geometrica, il **tensore sinistro delle deformazioni di Cauchy-Green** come $\mathbf{B} := \nabla\varphi \nabla\varphi^T$ che risulta ovviamente ancora simmetrico.

1.1.3 Deformazioni rigide

Vogliamo mostrare che il tensore \mathbf{C} è un utile strumento per comprendere le caratteristiche di una deformazione, intesa qui nel senso fisico del termine. Per farlo, cominciamo analizzando una classe di deformazioni che non inducono alcun tipo di variazione di forma. Diremo che una particolare deformazione è una **deformazione rigida** se è della forma

$$\varphi(x) = \mathbf{a} + \mathbf{Q}ox, \quad \mathbf{a} \in \mathbb{R}, \mathbf{Q} \in \mathbb{O}_+^3, \quad \text{per ogni } x \in \bar{\Omega},$$

dove con \mathbb{O}_+^3 abbiamo indicato l'insieme delle rotazioni in \mathbb{R}^3 , ovvero l'insieme delle matrici ortogonali di ordine 3 il cui determinante è +1. In pratica la configurazione deformata è ottenuta ruotando la configurazione di riferimento attorno all'origine tramite la rotazione \mathbf{Q} e traslandola di un vettore \mathbf{a} : questo corrisponde all'idea di una azione che comporta uno spostamento ma non un'effettiva deformazione. Per come abbiamo definito una deformazione rigida segue direttamente che $\nabla\varphi(x) = \mathbf{Q} \in \mathbb{O}_+^3$ per ogni punto $x \in \bar{\Omega}$ e quindi

$$\varphi \text{ deformazione rigida} \quad \Rightarrow \quad \nabla\varphi(x)^T \nabla\varphi(x) = \mathbf{I} \quad \text{per ogni } x \in \bar{\Omega}.$$

Un fatto molto importante da notare è che, come mostra il seguente teorema, risulta vera anche l'implicazione opposta.

Teorema 1.1.2. *Sia Ω un sottoinsieme aperto e connesso di \mathbb{R}^n e $\varphi \in \mathcal{C}^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$ che soddisfa $\nabla\varphi(x)^T \nabla\varphi(x) = \mathbf{I}$ per ogni $x \in \Omega$. Allora esistono un vettore $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ ed una matrice $\mathbf{Q} \in \mathbb{O}^n$ tali che $\varphi(x) = \mathbf{a} + \mathbf{Q}ox$ per ogni $x \in \Omega$.*

Osservazione 1.4. Nel caso in cui richiediamo per ipotesi che φ sia una deformazione e che valga dunque $\det(\nabla\varphi(x)) > 0$, possiamo concludere che la matrice ortogonale \mathbf{Q} è una rotazione.

Ci si potrebbe domandare, inoltre, come sono legate due deformazioni cui corrisponde lo stesso tensore \mathbf{C} . La risposta è nel seguente teorema.

Teorema 1.1.3. *Sia Ω un sottoinsieme aperto e connesso di \mathbb{R}^n e $\varphi, \psi \in \mathcal{C}^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$ tali che*

$$\begin{aligned} \nabla\varphi(x)^T \nabla\varphi(x) &= \nabla\psi(x)^T \nabla\psi(x) \quad \text{per ogni } x \in \Omega, \\ \psi : \Omega &\rightarrow \mathbb{R}^n \text{ è iniettiva e } \det(\nabla\psi(x)) \neq 0 \text{ per ogni } x \in \Omega. \end{aligned}$$

Allora esistono un vettore $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ e una matrice $\mathbf{Q} \in \mathbb{O}^n$ tali che

$$\varphi(x) = \mathbf{a} + \mathbf{Q}\psi(x) \quad \text{per ogni } x \in \Omega.$$

In conclusione possiamo affermare che due deformazioni corrispondenti allo stesso tensore \mathbf{C} possono essere ottenute l'una dall'altra mediante la composizione con una trasformazione rigida.

Da questi due ultimi teoremi abbiamo quindi compreso il ruolo essenziale che gioca il tensore \mathbf{C} : infatti dal Teorema 1.1.2, considerando la quantità

$$2\mathbf{E} := \mathbf{C} - \mathbf{I}$$

ci accorgiamo che questa rappresenta una misura della “distanza” tra una data deformazione e una deformazione rigida, infatti $\mathbf{C} = \mathbf{I}$ se e solo se la deformazione è rigida. Mentre dal Teorema 1.1.3 osserviamo che la conoscenza del campo tensoriale $\mathbf{C} : \Omega \rightarrow \mathbb{S}_>^3$, dove $\mathbb{S}_>^3$ rappresenta lo spazio delle matrici simmetriche definite positive di ordine 3, determina completamente la deformazione a meno di composizioni con deformazioni rigide.

Il tensore \mathbf{E} è chiamato **tensore delle deformazioni di Green-St Venant**. Esprimendo invece il tensore destro di Cauchy-Green in termini del gradiente di spostamento $\nabla\mathbf{u}$, ricordando che $\nabla\varphi = \mathbf{I} + \nabla\mathbf{u}$, si ottiene

$$\mathbf{C} = \nabla\varphi^T \nabla\varphi = \mathbf{I} + \nabla\mathbf{u}^T + \nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^T \nabla\mathbf{u} = \mathbf{I} + 2\mathbf{E},$$

trovando così una nuova espressione per il tensore \mathbf{E} in termini del vettore degli spostamenti

$$\mathbf{E}(\mathbf{u}) := \mathbf{E} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u}^T + \nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^T \nabla\mathbf{u}).$$

Utilizzando nuovamente la notazione compatta con le somme, possiamo riscrivere i tensori per componenti nella seguente forma:

$$C_{i,j} = \partial_i \varphi_k \partial_j \varphi_k,$$

$$E_{i,j} = \frac{1}{2} (\partial_i u_j + \partial_j u_i + \partial_i u_k \partial_j u_k).$$

Osservazione 1.5. L'introduzione del fattore $\frac{1}{2}$ nella definizione del tensore \mathbf{E} è motivato dal fatto che il termine al primo ordine $\frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u}^T + \nabla \mathbf{u})$ coincide, come vedremo in seguito, con il tensore delle deformazioni linearizzato.

Concludiamo quindi questa sezione identificando il sottoinsieme di \mathbb{S}^3 generato dal tensore di deformazione di Green-St Venant $\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I})$ quando la matrice \mathbf{F} varia nell'insieme \mathbb{M}_+^3 .

Teorema 1.1.4. *L'insieme*

$$\mathbb{V}(\mathbf{0}) := \left\{ \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}) \in \mathbb{S}^3 ; F \in \mathbb{M}_+^3 \right\}$$

è un intorno dell'origine in \mathbb{S}^3 .

Dimostrazione. Poiché ogni matrice $\mathbf{C} \in \mathbb{S}_>^3$ può essere scritta come $\mathbf{C} = \mathbf{C}^{1/2} \mathbf{C}^{1/2}$, allora possiamo riscrivere l'insieme $\mathbb{V}(\mathbf{0})$ come

$$\mathbb{V}(\mathbf{0}) = \left\{ \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}) \in \mathbb{S}^3 ; \mathbf{C} \in \mathbb{S}_>^3 \right\} = f^{-1}(\mathbb{S}_>^3),$$

dove $f : \mathbf{E} \in \mathbb{S}^3 \rightarrow (\mathbf{I} + 2\mathbf{E}) \in \mathbb{S}^3$ è una mappa continua. Ma $\mathbb{S}_>^3$ è aperto in \mathbb{S}^3 e quindi $\mathbf{0} \in \mathbb{V}(\mathbf{0})$. \square

1.2 Equazioni di equilibrio e principio dei lavori virtuali

Un corpo che occupa una configurazione deformata $\bar{\Omega}^\varphi$, soggetto a forze di volume in Ω^φ e a forze di superficie in una porzione della sua frontiera $\Gamma_1^\varphi = \varphi(\Gamma_1)$, è in equilibrio (statico) se è soddisfatto il *principio fondamentale degli sforzi di Eulero e Cauchy*. Questo assioma che vedremo e utilizzeremo in questa sezione, oltre ad essere la base della meccanica dei continui, implicherà il *teorema di Cauchy*, attraverso il quale otterremo le equazioni di equilibrio. Data la struttura di queste equazioni potremo dedurre una formulazione debole e quindi il principio dei lavori virtuali.

L'unico problema che sorge è che le equazioni sono espresse in termini dell'incognita x^φ , ma in questo ci verrà in soccorso la trasformata di Piola definita nella sezione precedente.

1.2.1 Teorema di Cauchy

Prima di passare a descrivere l'assioma su cui costruiremo le equazioni dell'equilibrio, descriviamo brevemente le possibili forze esterne cui può essere soggetto un corpo nella configurazione deformata. Abbiamo due tipi di forze esterne:

- (i) **forze di volume**, definite dal campo vettoriale $\mathbf{f}^\varphi := \Omega^\varphi \rightarrow \mathbb{R}^3$, detto **densità delle forze di volume** per unità di volume nella configurazione deformata;
- (ii) **forze di superficie**, definite dal campo vettoriale $\mathbf{g}^\varphi := \Gamma_1^\varphi \rightarrow \mathbb{R}^3$ su un sottoinsieme da^φ -misurabile della frontiera $\Gamma^\varphi := \partial\Omega^\varphi$, detto **densità delle forze di superficie** per unità di area nella configurazione deformata.

Sia $\rho : \Omega^\varphi \rightarrow \mathbb{R}$ la densità di massa nella configurazione deformata, tale che la massa di ogni sottoinsieme dx^φ -misurabile A^φ di $\bar{\Omega}^\varphi$ sia data dall'integrale $\int_{A^\varphi} \rho^\varphi(x^\varphi) dx^\varphi$. Allora assumendo che $\rho^\varphi(x^\varphi) > 0$ per ogni $x^\varphi \in \Omega^\varphi$ le forze di volume possono essere ugualmente definite mediante la loro densità $\mathbf{b}^\varphi := \Gamma_1^\varphi \rightarrow \mathbb{R}^3$ per unità di massa nella configurazione deformata, collegata ovviamente alla densità \mathbf{f}^φ mediante l'equazione $\mathbf{f}^\varphi = \rho^\varphi \mathbf{b}^\varphi$.

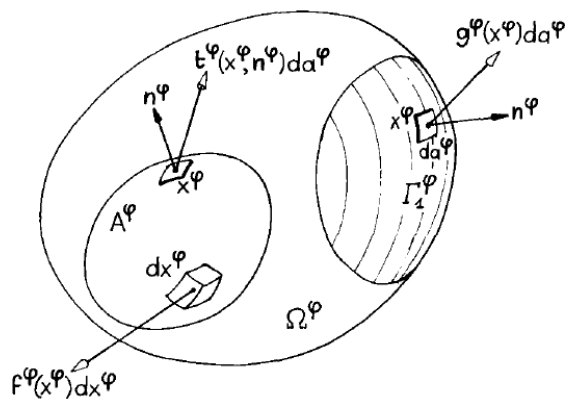


Fig. 1.2: Esempio di forze esterne di volume e di superficie applicate ad un volume elementare.

Queste forze descrivono l'azione del mondo esterno sul nostro corpo. Un esempio di forza di volume è data dal *campo gravitazionale*, per il quale abbiamo $\mathbf{f}^\varphi(x^\varphi) = -g\rho^\varphi(x^\varphi)\mathbf{e}_3$ per ogni $x^\varphi \in \Omega^\varphi$ avendo indicato con \mathbf{e}_3 la direzione verticale orientata verso l'alto e con g la costante di gravità.

Diamo inoltre un'utile definizione che ci servirà in seguito: una forza esterna si dirà *carico morto* se la densità associata \mathbf{f} per unità di volume nella configurazione di riferimento è indipendente dalla particolare deformazione considerata. Un esempio è dato dal campo gravitazionale definito in precedenza. L'assunzione che una forza esterna sia un carico morto è una semplificazione dal punto di vista matematico, in quanto la densità in questi casi diventa una funzione "esplicita" della $x \in \Omega$. Bisogna però tenere a mente che sono davvero pochi i casi in cui tale ipotesi è giustificata. Ad esempio se la forza esterna, in questo caso di superficie, è una pressione, ovvero della forma $\mathbf{g}^\varphi(x^\varphi) = -\pi\mathbf{n}^\varphi(x^\varphi)$ con $x^\varphi \in \Gamma_1^\varphi$, allora questa non è un carico morto, eccezion fatta per il caso $\pi = 0$ che però corrisponde alla forzante nulla.

La meccanica dei continui è fondamentalmente (in maniera fondamentale) basata sul seguente assioma, detto principio degli sforzi di Eulero e Cauchy.

Assioma 1.1. *Consideriamo un corpo che occupa una configurazione deformata $\bar{\Omega}^\varphi$ e soggetto a forze esterne di densità $\mathbf{f}^\varphi := \Omega^\varphi \rightarrow \mathbb{R}^3$ e $\mathbf{g}^\varphi := \Gamma_1^\varphi \rightarrow \mathbb{R}^3$. Allora esiste un campo vettoriale*

$$\mathbf{t}^\varphi : \bar{\Omega}^\varphi \times S_1 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \text{dove} \quad S_1 = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3; |\mathbf{v}| = 1\},$$

tale che:

- (i) Per ogni sottodominio A^φ di $\bar{\Omega}^\varphi$ e in ogni punto $x^\varphi \in \Gamma_1^\varphi \cap \partial A^\varphi$ dove la normale uscente \mathbf{n}^φ esiste, si ha

$$\mathbf{t}^\varphi(x^\varphi, \mathbf{n}^\varphi) = \mathbf{g}^\varphi(x^\varphi).$$

- (ii) **Bilancio delle forze:** per ogni sottodominio A^φ di $\bar{\Omega}^\varphi$ vale

$$\int_{A^\varphi} \mathbf{f}^\varphi(x^\varphi) dx^\varphi + \int_{\partial A^\varphi} \mathbf{t}^\varphi(x^\varphi, \mathbf{n}^\varphi) da^\varphi = 0.$$

- (iii) **Bilancio dei momenti:** per ogni sottodominio A^φ di Ω^φ vale

$$\int_{A^\varphi} \mathbf{ox}^\varphi \wedge \mathbf{f}^\varphi(x^\varphi) dx^\varphi + \int_{\partial A^\varphi} \mathbf{ox}^\varphi \wedge \mathbf{t}^\varphi(x^\varphi, \mathbf{n}^\varphi) da^\varphi = 0.$$

Data l'importanza, analizziamo nel dettaglio il significato delle precedenti affermazioni. In primis, il principio degli sforzi asserisce l'esistenza di una forza elementare di superficie $\mathbf{t}^\varphi(x^\varphi, \mathbf{n}^\varphi) da^\varphi$ lungo le frontiere di tutti i possibili domini nella configurazione deformata. Il punto (i) afferma invece che, fissato un punto x^φ della frontiera ∂A^φ , questa forza elementare dipende dal dominio A^φ esclusivamente attraverso la normale uscente \mathbf{n}^φ a ∂A^φ in x^φ . Questo fatto non è così immediato, in quanto potrebbe essere ipotizzabile a priori che essa dipenda anche da altre proprietà geometriche del sottodominio A^φ , come ad esempio dalla curvatura di ∂A^φ in x^φ . Infine i punti (ii) e (iii) corrispondono alla condizione intuitiva di equilibrio per ogni sottodominio $A^\varphi \subseteq \bar{\Omega}^\varphi$.

Possiamo allora dare la seguente definizione.

Definizione 1.3. *Sia $x^\varphi \in \bar{\Omega}^\varphi$ allora il vettore $\mathbf{t}^\varphi(x^\varphi, \mathbf{n}^\varphi)$ è detto **vettore degli sforzi di Cauchy** attraverso un elemento orientato della superficie con normale uscente \mathbf{n}^φ , che corrisponde alla densità delle forze di superficie per unità d'area nella configurazione deformata.*

Ora abbiamo tutti gli strumenti necessari per poter enunciare uno dei risultati più importanti in meccanica dei continui. Tale teorema, mostra che la dipendenza del vettore degli sforzi di Cauchy dal secondo argomento è lineare e che il tensore che agisce sulla normale è simmetrico. Infine collega tutte le quantità in gioco mediante un'equazione alle derivate parziali in Ω^φ .

Teorema 1.2.1. *Assumiamo che la densità della forza di volume $\mathbf{f}^\varphi : \bar{\Omega}^\varphi \rightarrow \mathbb{R}^3$ sia continua e che il campo vettoriale degli sforzi di Cauchy $\mathbf{t}^\varphi : (x^\varphi, \mathbf{n}) \in \bar{\Omega}^\varphi \times S_1 \rightarrow \mathbf{t}^\varphi(x^\varphi, \mathbf{n}) \in \mathbb{R}^3$ è differenziabile rispetto a $x^\varphi \in \bar{\Omega}^\varphi$ per ogni $\mathbf{n} \in S_1$ e continua rispetto alla variabile $\mathbf{n} \in S_1$ per ogni $x^\varphi \in \bar{\Omega}^\varphi$. Allora gli assiomi del bilancio di forza e momento implicano l'esistenza di un campo tensoriale differenziabile*

$$\mathbf{T}^\varphi : x^\varphi \in \bar{\Omega}^\varphi \rightarrow \mathbf{T}^\varphi(x^\varphi) \in \mathbb{M}^3,$$

tale che il vettore degli sforzi di Cauchy soddisfa

$$\mathbf{t}^\varphi(x^\varphi, \mathbf{n}) = \mathbf{T}^\varphi(x^\varphi)\mathbf{n} \quad \text{per ogni } x^\varphi \in \bar{\Omega}^\varphi \text{ e per ogni } \mathbf{n} \in S_1,$$

e tale che

$$\begin{cases} -\operatorname{div}^\varphi \mathbf{T}^\varphi(x^\varphi) = \mathbf{f}^\varphi(x^\varphi) & \text{per ogni } x^\varphi \in \Omega^\varphi, \\ \mathbf{T}^\varphi(x^\varphi) = \mathbf{T}^\varphi(x^\varphi)^T & \text{per ogni } x^\varphi \in \bar{\Omega}^\varphi, \\ \mathbf{T}^\varphi(x^\varphi)\mathbf{n}^\varphi = \mathbf{g}^\varphi(x^\varphi) & \text{per ogni } x^\varphi \in \Gamma_1^\varphi, \end{cases} \quad (1.7)$$

dove \mathbf{n}^φ è la normale uscente lungo Γ_1^φ .

Dimostrazione. Fissato $x^\varphi \in \Omega^\varphi$, poiché Ω^φ è aperto possiamo trovare come particolare sottodominio di $\bar{\Omega}^\varphi$ un tetraedro T con vertice in x^φ e le tre facce parallele ai piani coordinati, la restante faccia F avrà normale uscente pari a $\mathbf{n} = n_i \mathbf{e}_i$ con $n_i > 0$. Se indichiamo gli altri vertici con v_i e con F_i le facce opposte ad essi avremo che $area(F_i) = n_i \cdot area(F)$. Applicando l'assioma del bilancio delle forze al tetraedro otteniamo

$$\int_T \mathbf{f}^\varphi(y^\varphi) dy^\varphi + \int_{\partial T} \mathbf{t}^\varphi(y^\varphi, \mathbf{n}^\varphi) da^\varphi = 0,$$

da cui scrivendo tale relazione componente per componente e utilizzando il teorema del valore medio per integrali (che possiamo applicare all'integrale su ∂T dato che le funzioni $y^\varphi \in \partial T \rightarrow \mathbf{t}^\varphi(y^\varphi, \mathbf{n})$ sono continue per ipotesi), otteniamo per ogni indice i

$$|t_i^\varphi(y_i, \mathbf{n}) + t_i^\varphi(y_{i,j}, -\mathbf{e}_j)n_j| \cdot area(F) \leq \sup_{y \in T} |f_i^\varphi(y)| \cdot vol(T),$$

presi opportunamente $y_i \in F$ e $y_{i,j} \in F_j$.

Mandiamo ora a zero il volume del tetraedro avvicinando sempre di più i vertici v_i al vertice x^φ . Usando nuovamente la continuità del campo vettoriale $\mathbf{t}^\varphi(x^\varphi, \mathbf{n})$ rispetto alla prima variabile x^φ e utilizzando la relazione $vol(T) = c(\mathbf{n}) \cdot (area(F))^{3/2}$ otteniamo

$$\mathbf{t}^\varphi(x^\varphi, \mathbf{n}) = -n_j \mathbf{t}^\varphi(x^\varphi, -\mathbf{e}_j).$$

Utilizzando invece la continuità rispetto alla seconda variabile, facendo il limite per \mathbf{n} che tende ad un particolare vettore della base \mathbf{e}_j nell'espressione appena ottenuta troviamo

$$\mathbf{t}^\varphi(x^\varphi, \mathbf{e}_j) = -\mathbf{t}^\varphi(x^\varphi, -\mathbf{e}_j).$$

Abbiamo quindi ottenuto la relazione

$$\mathbf{t}^\varphi(x^\varphi, \mathbf{n}) = n_j \mathbf{t}^\varphi(x^\varphi, \mathbf{e}_j). \quad (1.8)$$

Definiamo ora le funzioni $T_{i,j}^\varphi : \bar{\Omega}^\varphi \rightarrow \mathbb{R}$ nel modo seguente

$$\mathbf{t}^\varphi(x^\varphi, \mathbf{e}_j) = T_{i,j}^\varphi(x^\varphi) \mathbf{e}_i \quad \text{per ogni } x^\varphi \in \bar{\Omega}^\varphi, \quad (1.9)$$

in modo che $\mathbf{t}^\varphi(x^\varphi, \mathbf{n}) = T_{i,j}^\varphi(x^\varphi) n_j \mathbf{e}_i$ e quindi

$$t_i^\varphi(x^\varphi, \mathbf{n}) = T_{i,j}^\varphi(x^\varphi) n_j \quad \text{per ogni } x^\varphi \in \bar{\Omega}^\varphi, \mathbf{n} \in S_1.$$

Inoltre se definiamo un tensore $\mathbf{T}^\varphi(x^\varphi) := (T_{i,j}^\varphi(x^\varphi))$, le ultime equazioni corrispondono all'equazione vettoriale

$$\mathbf{t}^\varphi(x^\varphi, \mathbf{n}) = \mathbf{T}^\varphi(x^\varphi)\mathbf{n}. \quad (1.10)$$

Ora le ipotesi di continuità rispetto ad entrambe le variabili ci permettono di estendere questa relazione per ogni $x^\varphi \in \bar{\Omega}^\varphi$ e per ogni $\mathbf{n} \in S_1$. La relazione (1.9) inoltre mostra che la regolarità del campo tensoriale \mathbf{T}^φ è esattamente la stessa del vettore degli sforzi di Cauchy rispetto alla prima variabile.

Vogliamo ora derivare l'equazione a derivate parziali, per fare ciò utilizziamo il teorema della divergenza per campi tensoriali, enunciato nella sezione precedente in (1.2), nell'integrale dato dall'assioma di bilancio delle forze. Fissato un generico sottodominio $A^\varphi \subset \Omega^\varphi$, possiamo scrivere

$$\int_{\partial A^\varphi} \mathbf{t}^\varphi(x^\varphi, \mathbf{n}^\varphi) da^\varphi = \int_{\partial A^\varphi} \mathbf{T}^\varphi(x^\varphi)\mathbf{n}^\varphi da^\varphi = \int_{A^\varphi} \mathbf{div}^\varphi \mathbf{T}^\varphi(x^\varphi) dx^\varphi,$$

che sostituito nel bilancio delle forze implica

$$\int_{A^\varphi} \{\mathbf{div}^\varphi \mathbf{T}^\varphi(x^\varphi) + \mathbf{f}^\varphi(x^\varphi)\} dx^\varphi = 0$$

per ogni sottodominio $A^\varphi \in \Omega^\varphi$; quindi dall'arbitrarietà di A^φ si ottiene

$$\mathbf{div}^\varphi \mathbf{T}^\varphi(x^\varphi) + \mathbf{f}^\varphi(x^\varphi) = 0 \quad \text{per ogni } x^\varphi \in \Omega^\varphi. \quad (1.11)$$

Allo stesso modo possiamo utilizzare la formula di Green per trasformare gli integrali di superfici in integrali di volume nell'equazione di bilancio

dei momenti. Avremo allora per ogni $i \neq j$

$$\begin{aligned}
& \int_{\partial A^\varphi} \{x_j^\varphi t_i^\varphi(x^\varphi, \mathbf{n}^\varphi) - x_i^\varphi t_j^\varphi(x^\varphi, \mathbf{n}^\varphi)\} da^\varphi \\
&= \int_{\partial A^\varphi} \{x_j^\varphi T_{i,k}^\varphi(x^\varphi) - x_i^\varphi T_{j,k}^\varphi(x^\varphi)\} n_k^\varphi da^\varphi \\
&= \int_{A^\varphi} \partial_k^\varphi \{x_j^\varphi T_{i,k}^\varphi(x^\varphi) - x_i^\varphi T_{j,k}^\varphi(x^\varphi)\} dx^\varphi \\
&= \int_{A^\varphi} \{\delta_{j,k} T_{i,k}^\varphi(x^\varphi) - \delta_{i,k} T_{j,k}^\varphi(x^\varphi)\} dx^\varphi \\
&+ \int_{A^\varphi} \{x_j^\varphi \partial_k^\varphi T_{i,k}^\varphi(x^\varphi) - x_i^\varphi \partial_k^\varphi T_{j,k}^\varphi(x^\varphi)\} dx^\varphi \\
&= \int_{A^\varphi} \{T_{i,j}^\varphi(x^\varphi) - T_{j,i}^\varphi(x^\varphi)\} dx^\varphi - \int_{A^\varphi} \{x_j^\varphi f_i^\varphi(x^\varphi) - x_i^\varphi f_j^\varphi(x^\varphi)\} dx^\varphi,
\end{aligned}$$

dove nell'ultima uguaglianza abbiamo utilizzato l'equazione (1.11). L'assioma del bilancio dei momenti implica che

$$\int_{A^\varphi} \{T_{i,j}^\varphi(x^\varphi) - T_{j,i}^\varphi(x^\varphi)\} dx^\varphi = 0$$

per ogni sottodominio A^φ di $\bar{\Omega}^\varphi$, da cui si ricava la condizione di simmetria $\mathbf{T}^\varphi(x^\varphi) = \mathbf{T}^\varphi(x^\varphi)^T$ per ogni $x^\varphi \in \bar{\Omega}^\varphi$. Infine la condizione al bordo $\mathbf{T}^\varphi(x^\varphi)\mathbf{n}^\varphi = \mathbf{g}^\varphi(x^\varphi)$ per ogni $x^\varphi \in \Gamma_1^\varphi$ è un'immediata conseguenza della definizione del vettore di Cauchy e della relazione con il tensore \mathbf{T}^φ . \square

Nel teorema precedente viene introdotto un oggetto fondamentale per proseguire lo studio di queste equazioni, il tensore $\mathbf{T}^\varphi(x^\varphi)$ che viene detto **tensore degli sforzi di Cauchy** in $x^\varphi \in \bar{\Omega}^\varphi$. Osserviamo inoltre che poiché si ha $\mathbf{t}^\varphi(x^\varphi, \mathbf{e}_j) = T_{i,j}^\varphi(x^\varphi)\mathbf{e}_i$, gli elementi della j -esima riga di $\mathbf{T}^\varphi(x^\varphi)$ rappresentano le componenti del vettore degli sforzi di Cauchy $\mathbf{t}^\varphi(x^\varphi, \mathbf{n})$ nel punto x^φ corrispondente alla scelta $\mathbf{n}^\varphi = \mathbf{e}_j$. Questo è importante in quanto la conoscenza dei tre vettori $\mathbf{t}^\varphi(x^\varphi, \mathbf{e}_j)$ determina completamente, per la (1.8), il vettore degli sforzi di Cauchy.

Diamo ora un esempio importante per capire come entra in gioco il tensore degli sforzi di Cauchy. Se definiamo $\mathbf{T}^\varphi(x^\varphi) = -\pi\mathbf{I}$ con $\pi \in \mathbb{R}$, tale tensore viene detto *pressione*, derivando il nome da π che viene chiamato allo stesso modo. In questo caso il vettore degli sforzi di Cauchy $\mathbf{t}^\varphi(x^\varphi, \mathbf{n}) = -\pi\mathbf{n}^\varphi$ è sempre normale all'elemento di superficie, ha modulo costante e punta verso l'interno se $\pi > 0$.

1.2.2 Principio dei lavori virtuali

Come mostrato nel Teorema 1.2.1 gli assiomi della meccanica dei continui implicano che il tensore degli sforzi di Cauchy \mathbf{T}^φ soddisfi un problema con condizioni al bordo, espresso nella variabile x^φ nella configurazione deformata. Una proprietà fondamentale che deriva dalla presenza della divergenza nell'equazione differenziale trovata, è che può essere espressa mediante una formulazione variazionale.

Richiamiamo qualche definizione per il prodotto interno, che nel caso dei vettori verrà espresso nella maniera usuale $u \cdot v = u_i v_i$, mentre nel caso delle matrici scriveremo $\mathbf{A} : \mathbf{B} = A_{i,j} B_{i,j} = \text{tr}(\mathbf{A}^T \mathbf{B})$.

Teorema 1.2.2. *Il problema al bordo*

$$\begin{cases} -\text{div}^\varphi \mathbf{T}^\varphi = \mathbf{f}^\varphi & \text{in } \Omega^\varphi, \\ \mathbf{T}^\varphi \mathbf{n}^\varphi = \mathbf{g}^\varphi & \text{in } \Gamma_1^\varphi, \end{cases} \quad (1.12)$$

è formalmente equivalente all'equazione variazionale:

$$\int_{\Omega^\varphi} \mathbf{T}^\varphi : \nabla^\varphi \boldsymbol{\theta}^\varphi dx^\varphi = \int_{\Omega^\varphi} \mathbf{f}^\varphi \cdot \boldsymbol{\theta}^\varphi dx^\varphi + \int_{\Gamma_1^\varphi} \mathbf{g}^\varphi \cdot \boldsymbol{\theta}^\varphi dx^\varphi, \quad (1.13)$$

che risulta vera per tutti i $\boldsymbol{\theta}^\varphi : \bar{\Omega}^\varphi \rightarrow \mathbb{R}^3$ sufficientemente regolari che soddisfano

$$\boldsymbol{\theta}^\varphi = 0 \quad \text{in } \Gamma_0^\varphi := \Gamma^\varphi - \Gamma_1^\varphi.$$

Dimostrazione. L'equivalenza che andiamo a mostrare è nuovamente una conseguenza della formula di Green. Per ogni campo tensoriale \mathbf{T}^φ e per ogni campo vettoriale $\boldsymbol{\theta}^\varphi$ sufficientemente regolari sappiamo che vale

$$\int_{\Omega^\varphi} \text{div}^\varphi \mathbf{T}^\varphi \cdot \boldsymbol{\theta}^\varphi dx^\varphi = - \int_{\Omega^\varphi} \mathbf{T}^\varphi : \nabla^\varphi \boldsymbol{\theta}^\varphi dx^\varphi + \int_{\Gamma^\varphi} \mathbf{T}^\varphi \mathbf{n}^\varphi \cdot \boldsymbol{\theta}^\varphi da^\varphi.$$

Quindi se moltiplichiamo l'equazione (1.11) per il campo vettoriale $\boldsymbol{\theta}^\varphi$ che si annulla in Γ_0^φ e integriamo tutto nel dominio Ω^φ otteniamo

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega^\varphi} (\text{div}^\varphi \mathbf{T}^\varphi + \mathbf{f}^\varphi) \cdot \boldsymbol{\theta}^\varphi dx^\varphi \\ &= \int_{\Omega^\varphi} \{-\mathbf{T}^\varphi : \nabla^\varphi \boldsymbol{\theta}^\varphi + \mathbf{f}^\varphi \cdot \boldsymbol{\theta}^\varphi\} dx^\varphi + \int_{\Gamma_1^\varphi} \mathbf{T}^\varphi \mathbf{n}^\varphi \cdot \boldsymbol{\theta}^\varphi da^\varphi, \end{aligned}$$

da cui segue la formulazione variazionale considerando $\mathbf{T}^\varphi \mathbf{n}^\varphi = \mathbf{g}^\varphi$ in Γ_1^φ . Per l'implicazione opposta, assumiamo che la formulazione variazionale

sia soddisfatta. Ipotizzando $\boldsymbol{\theta}^\varphi = 0$ in Γ^φ le equazioni si riducono a

$$\int_{\Omega^\varphi} \mathbf{T}^\varphi : \nabla^\varphi \boldsymbol{\theta}^\varphi dx^\varphi = \int_{\Omega^\varphi} \mathbf{f}^\varphi \cdot \boldsymbol{\theta}^\varphi dx^\varphi, \quad (1.14)$$

e quindi applicando la formula di Green

$$\int_{\Omega^\varphi} \mathbf{T}^\varphi : \nabla^\varphi \boldsymbol{\theta}^\varphi dx^\varphi = - \int_{\Omega^\varphi} \operatorname{div}^\varphi \mathbf{T}^\varphi \cdot \boldsymbol{\theta}^\varphi dx^\varphi.$$

deduciamo $\operatorname{div}^\varphi \mathbf{T}^\varphi + \mathbf{f}^\varphi = 0$ in Ω^φ . Utilizzando quest'ultima nella formulazione variazionale otteniamo la relazione

$$\int_{\Gamma_1^\varphi} \mathbf{T}^\varphi \mathbf{n}^\varphi \cdot \boldsymbol{\theta}^\varphi da^\varphi = \int_{\Gamma_1^\varphi} \mathbf{g}^\varphi \cdot \boldsymbol{\theta}^\varphi da^\varphi,$$

che implica l'imposizione della condizione al bordo $\mathbf{T}^\varphi \mathbf{n}^\varphi = \mathbf{g}^\varphi$ in Γ_1^φ . \square

Le equazioni

$$- \operatorname{div}^\varphi \mathbf{T}^\varphi = \mathbf{f}^\varphi \quad \text{in } \Omega^\varphi, \quad (1.15a)$$

$$\mathbf{T}^\varphi = (\mathbf{T}^\varphi)^T \quad \text{in } \Omega^\varphi, \quad (1.15b)$$

$$\mathbf{T}^\varphi \mathbf{n}^\varphi = \mathbf{g}^\varphi \quad \text{in } \Gamma_1^\varphi, \quad (1.15c)$$

sono dette **equazioni di equilibrio nella configurazione deformata**, mentre la formulazione variazionale associata costituisce il **principio dei lavori virtuali**.

1.2.3 Tensori degli sforzi di Piola-Kirchhoff

Il nostro obiettivo finale è arrivare a determinare la deformazione e il tensore degli stress di Cauchy indotti da un certo sistema di forze esterne. Il principale ostacolo, a questo punto, è che tutte le equazioni che abbiamo ottenuto sono espresse per mezzo dell'incognita $x^\varphi = \varphi(x)$. Per portare a termine il nostro compito dovremo allora trasformare tutte le quantità e le relazioni definite finora su $\bar{\Omega}^\varphi$ in altre simili ma definite questa volta in $\bar{\Omega}$. Utilizzeremo qui i risultati ottenuti nella sezione precedente, in particolare la trasformata di Piola che ricordiamo essere definita come il campo tensoriale $\mathbf{T} : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{M}^3$ tale che

$$\mathbf{T}(x) := (\det(\nabla \varphi(x))) \mathbf{T}^\varphi(x^\varphi) \nabla \varphi(x)^{-T}, \quad x^\varphi = \varphi(x).$$

In questo caso, la trasformata di Piola $\mathbf{T}(x)$ del tensore di Cauchy è detta **primo tensore degli sforzi di Piola-Kirchhoff**.

Come già visto in (1.4a), questa trasformazione porta alla semplice relazione tra le divergenze dei due tensori

$$\operatorname{div} \mathbf{T}(x) = (\det(\nabla \varphi(x))) \operatorname{div}^{\varphi} \mathbf{T}^{\varphi}(x^{\varphi}), \quad x^{\varphi} = \varphi(x).$$

Ovviamente, come conseguenza, anche le equazioni saranno trasformate e con esse la formulazione variazionale. Cominciamo allora trasformando il vettore degli sforzi di Cauchy $\mathbf{t}^{\varphi}(x^{\varphi}, \mathbf{n}^{\varphi})$ in un vettore $\mathbf{t}(x, \mathbf{n})$ in modo tale che valga la relazione

$$\mathbf{t}(x, \mathbf{n}) = \mathbf{T}(x)\mathbf{n},$$

dove \mathbf{n} e \mathbf{n}^{φ} sono i vettori normali nei punti x e x^{φ} della frontiera rispettivamente dei sottodomini A ed A^{φ} . Dalla relazione (1.4b) osserviamo che basta definire il vettore $\mathbf{t}(x, \mathbf{n})$ mediante la relazione

$$\mathbf{t}(x, \mathbf{n}) da = \mathbf{t}^{\varphi}(x^{\varphi}, \mathbf{n}^{\varphi}) da^{\varphi}.$$

Infatti poiché dal teorema di Cauchy abbiamo trovato

$$\mathbf{t}^{\varphi}(x^{\varphi}, \mathbf{n}^{\varphi}) = \mathbf{T}^{\varphi}(x^{\varphi})\mathbf{n}^{\varphi},$$

allora vale la relazione $\mathbf{t}(x, \mathbf{n}) = \mathbf{T}(x)\mathbf{n}$.

Il vettore $\mathbf{t}(x, \mathbf{n})$ è detto primo vettore delle deformazioni di Piola-Kirchhoff nel punto x . Tale vettore rappresenta, quindi, la densità delle forze di superficie per unità d'area nella configurazione di riferimento. Mentre il tensore delle deformazioni di Cauchy $\mathbf{T}^{\varphi}(x^{\varphi})$ è simmetrico, dal Teorema 1.2.1, questo non è detto in generale per il tensore di Piola-Kirchhoff poiché si ha

$$\mathbf{T}(x)^T = \nabla \varphi^{-1} \mathbf{T}(x) \nabla \varphi^T.$$

Al fine di ottenere una maggiore semplicità nella scrittura delle equazioni che ci serviranno in futuro, volendo mantenere l'informazione di simmetria, si definisce con $\Sigma(x)$ il **secondo tensore degli sforzi di Piola-Kirchhoff** dato dall'equazione

$$\Sigma(x) := \nabla \varphi^{-1} \mathbf{T}(x) = (\det(\nabla \varphi(x))) \nabla \varphi(x)^{-1} \mathbf{T}^{\varphi}(x^{\varphi}) \nabla \varphi(x)^{-T}. \quad (1.16)$$

Osservazione 1.6. Entrambi i tensori degli sforzi di Piola-Kirchhoff $\mathbf{T}(x)$ e $\Sigma(x)$ dipendono dalla deformazione φ , il primo attraverso la trasformata di Piola mentre il secondo poiché anche il tensore degli sforzi di Cauchy ne

dipende.

Ciò che ci rimane da fare è quindi trasformare le densità delle forze esterne per definirle nella configurazione di riferimento. Alla densità della forza di volume \mathbf{f}^φ assoceremo il campo vettoriale $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ in modo tale che valga

$$\mathbf{f}(x)dx = \mathbf{f}^\varphi(x^\varphi)dx^\varphi, \quad (1.17)$$

che dalla relazione (1.1) porta alla relazione

$$\mathbf{f}(x) = (\det(\nabla\varphi(x)))\mathbf{f}^\varphi(x^\varphi). \quad (1.18)$$

In questo modo il campo vettoriale \mathbf{f} corrisponderà alla densità delle forze di volume per unità di volume nella configurazione di riferimento. Alla densità della forza di superficie \mathbf{g}^φ invece assoceremo il campo vettoriale $\mathbf{g} : \Gamma_1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definito mediante la relazione

$$\mathbf{g}(x)da = \mathbf{g}^\varphi(x^\varphi)da^\varphi, \quad (1.19)$$

che per la relazione (1.4b) diventa

$$\mathbf{g}(x) = \det(\nabla\varphi(x))|\nabla\varphi(x)^{-T}\mathbf{n}|\mathbf{g}^\varphi(x^\varphi). \quad (1.20)$$

Otteniamo così una definizione per il campo vettoriale \mathbf{g} che rappresenterà la densità delle forze di superficie per unità d'area nella configurazione di riferimento (vedi Fig. 1.3).

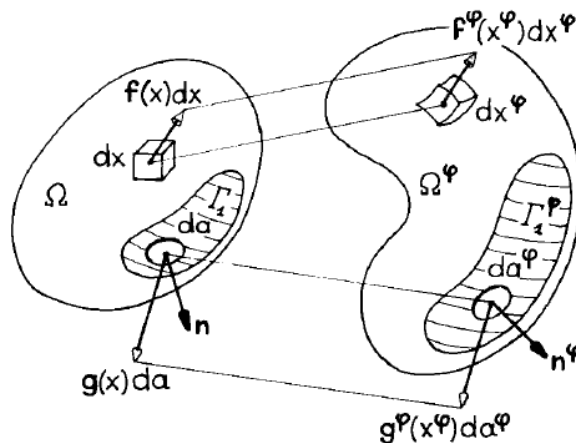


Fig. 1.3: Esempio di forze esterne di volume e di superficie applicate alla configurazione di riferimento ed alla configurazione deformata.

Siamo pronti per enunciare un teorema, analogo al Teorema 1.2.2, nella configurazione di riferimento.

Teorema 1.2.3. *Il primo tensore degli sforzi di Piola-Kirchhoff, definito come $\mathbf{T}(x) = (\det(\nabla\varphi(x)))\mathbf{T}^\varphi(x^\varphi)\nabla\varphi(x)^{-T}$, soddisfa le seguenti equazioni nella configurazione di riferimento $\bar{\Omega}$*

$$-\operatorname{div} \mathbf{T}(x) = \mathbf{f}(x), \quad x \in \Omega, \quad (1.21a)$$

$$\nabla\varphi(x)\mathbf{T}(x)^T = \mathbf{T}(x)\nabla\varphi(x)^T, \quad x \in \Omega, \quad (1.21b)$$

$$\mathbf{T}(x)\mathbf{n} = \mathbf{g}(x), \quad x \in \Gamma_1. \quad (1.21c)$$

Inoltre la prima e la terza equazione sono equivalenti alla formulazione variazionale:

$$\int_{\Omega} \mathbf{T} : \nabla\boldsymbol{\theta} dx = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\theta} dx + \int_{\Gamma_1} \mathbf{g} \cdot \boldsymbol{\theta} da,$$

valida per ogni campo vettoriale $\boldsymbol{\theta} : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$ che soddisfa

$$\boldsymbol{\theta} = 0 \quad \text{su} \quad \Gamma_0 := \Gamma - \Gamma_1.$$

Dimostrazione. La dimostrazione consiste semplicemente nel mettere assieme tutti i risultati ottenuti in precedenza. Infatti la (1.21a) deriva dalle relazioni (1.15a), (1.4a) e (1.18). La (1.21b) viene semplicemente dalla definizione del tensore \mathbf{T} e dalla simmetria del tensore \mathbf{T}^φ . Infine la (1.21c) è una diretta conseguenza di (1.15c), (1.4b) e (1.19). L'equivalenza con la formulazione variazionale si dimostra in modo del tutto equivalente al teorema precedente. \square

Possiamo inoltre esprimere il precedente teorema in termini del secondo tensore degli sforzi di Piola-Kirchhoff.

Teorema 1.2.4. *Il secondo tensore degli sforzi di Piola-Kirchhoff, definito come $\boldsymbol{\Sigma}(x) = (\det(\nabla\varphi(x)))\nabla\varphi(x)^{-1}\mathbf{T}^\varphi(x^\varphi)\nabla\varphi(x)^{-T}$, soddisfa le seguenti equazioni nella configurazione di riferimento $\bar{\Omega}$*

$$-\operatorname{div} (\nabla\varphi\boldsymbol{\Sigma}(x))(x) = \mathbf{f}(x), \quad x \in \Omega, \quad (1.22a)$$

$$\boldsymbol{\Sigma}(x) = \boldsymbol{\Sigma}(x)^T, \quad x \in \Omega, \quad (1.22b)$$

$$\nabla\varphi\boldsymbol{\Sigma}(x)\mathbf{n} = \mathbf{g}(x), \quad x \in \Gamma_1. \quad (1.22c)$$

Inoltre la prima e la terza equazione sono equivalenti alla formulazione variazionale:

$$\int_{\Omega} \nabla\varphi\boldsymbol{\Sigma}(x) : \nabla\boldsymbol{\theta} dx = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\theta} dx + \int_{\Gamma_1} \mathbf{g} \cdot \boldsymbol{\theta} da,$$

valida per ogni campo vettoriale $\theta : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$ che soddisfa

$$\theta = 0 \quad \text{su} \quad \Gamma_0 := \Gamma - \Gamma_1.$$

Queste equazioni che devono essere soddisfatte da entrambi i tensori degli sforzi sono chiamate: **le equazioni di equilibrio nella configurazione di riferimento**, mentre le formulazioni variazionali associate costituiscono il **principio dei lavori virtuali nella configurazione di riferimento**. Le condizioni su Γ_1 sono dette invece condizioni al bordo di trazione, mentre si dicono condizioni al bordo di posizione quelle della forma $\varphi = \varphi_0$ su Γ_0 , dove $\varphi_0 : \Gamma_0 \rightarrow \mathbb{R}^3$ è una data mappa.

Osservazione 1.7. Possiamo pensare ad ogni campo vettoriale θ che appare nel principio dei lavori virtuali, come una variazione “virtuale” della deformazione, consistente con le condizioni di posizione al bordo. L’aggettivo virtuali, riflette quindi il fatto che tali quantità sono essenzialmente matematiche e non necessitano di una interpretazione fisica.

1.3 Materiali elastici ed equazioni costitutive

Le tre equazioni di equilibrio (1.21) nella configurazione di riferimento, che sono valide a prescindere dal mezzo continuo macroscopico considerato (gas, liquido, solido) costituiscono un sistema indeterminato, in quanto sono presenti nove funzioni incognite (le tre componenti della deformazione e le sei componenti del primo tensore degli sforzi di Piola-Kirchhoff). Le sei equazioni mancanti vengono fornite tramite specifiche assunzioni sulla tipologia del materiale considerato.

1.3.1 Elasticità e assioma di indifferenza dalla struttura

La precedente sezione ci ha portati a dover studiare un problema con condizioni al bordo in cui il numero di incognite è superiore al numero delle equazioni. L’indeterminatezza è conseguenza, come era possibile immaginare, del fatto che tali equazioni non stanno prendendo in considerazione la natura del materiale stesso. Infatti, in presenza di una forza esterna, ci aspettiamo risposte diverse a seconda che il materiale sia, ad esempio, ferro o piombo.

Per questo è possibile, e necessario per proseguire il nostro studio, definire matematicamente una classe di materiali per i quali le equazioni aggiuntive assumono una forma piuttosto semplice.

Definizione 1.4. *Un materiale è elastico se esiste una mappa*

$$\hat{\mathbf{T}}^D : (x, \mathbf{F}) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{M}_+^3 \rightarrow \hat{\mathbf{T}}^D(x, \mathbf{F}) \in \mathbb{S}^3,$$

detta *funzione di risposta per il tensore degli sforzi di Cauchy*, tale che in qualsiasi stato deformato occupato da un corpo fatto di questo materiale, il tensore di Cauchy $\mathbf{T}^\varphi(x^\varphi)$ in ogni punto x^φ della configurazione deformata dipende dal corrispondente punto x nella configurazione di riferimento mediante l'equazione

$$\mathbf{T}^\varphi(x^\varphi) = \hat{\mathbf{T}}^D(x, \nabla\varphi(x)), \quad x^\varphi = \varphi(x). \quad (1.23)$$

Tale relazione è detta **equazione costitutiva del materiale**. Assumere che un materiale sia elastico significa quindi pensare che il tensore degli sforzi di Cauchy in un determinato punto, dipenda esclusivamente dal gradiente di deformazione calcolato nel punto corrispondente e dal punto stesso.

Osservazione 1.8. Osserviamo che il gradiente di deformazione è sempre rappresentabile mediante una matrice in \mathbb{M}_+^3 , in quanto il suo gradiente risulta, per definizione, strettamente positivo.

Osservazione 1.9. La funzione di risposta è definita per tutte le matrici $\mathbf{F} \in \mathbb{M}_+^3$, questo implica che dato un qualsiasi punto $x \in \bar{\Omega}$ e una qualsiasi matrice $\mathbf{F} \in \mathbb{M}_+^3$ esiste una deformazione φ tale che $\nabla\varphi(x) = \mathbf{F}$. Stiamo escludendo dalla nostra trattazione tutti quei materiali che non sottostanno a particolari deformazioni, come ad esempio i *materiali incomprimibili*.

In virtù delle relazioni che legano il tensore di Cauchy ad entrambi i tensori di Piola-Kirchhoff, possiamo affermare che esistono due mappe

$$\hat{\mathbf{T}} : \bar{\Omega} \times \mathbb{M}_+^3 \rightarrow \mathbb{M}^3 \quad \text{e} \quad \hat{\Sigma} : \bar{\Omega} \times \mathbb{M}_+^3 \rightarrow \mathbb{S}^3,$$

date rispettivamente da

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{T}}(x, \mathbf{F}) &= (\det(\mathbf{F}))\hat{\mathbf{T}}^D(x, \mathbf{F})\mathbf{F}^{-T} \quad \text{per ogni } x \in \bar{\Omega}, \mathbf{F} \in \mathbb{M}_+^3, \\ \hat{\Sigma}(x, \mathbf{F}) &= (\det(\mathbf{F}))\mathbf{F}^{-1}\hat{\mathbf{T}}^D(x, \mathbf{F})\mathbf{F}^{-T} \quad \text{per ogni } x \in \bar{\Omega}, \mathbf{F} \in \mathbb{M}_+^3, \end{aligned}$$

tali che valgano

$$\mathbf{T}(x) = \hat{\mathbf{T}}(x, \nabla\varphi(x)) \quad \text{e} \quad \Sigma(x) = \hat{\Sigma}(x, \nabla\varphi(x)) \quad \text{per ogni } x \in \bar{\Omega}.$$

Poiché queste equazioni corrispondono ad una definizione alternativa per i materiali elastici, anche queste verranno dette **equazioni costitutive**

e le mappe $\hat{\mathbf{T}}$ e $\hat{\Sigma}$ sono dette rispettivamente **funzioni di risposta per il primo e secondo tensore degli sforzi di Piola-Kirchhoff**.

Diremo inoltre che un materiale in una configurazione di riferimento è **omogeneo** se le sue funzioni di risposta sono indipendenti dal punto $x \in \bar{\Omega}$ considerato; altrimenti il materiale sarà detto **non omogeneo**. Quindi nel caso di un materiale elastico che sia anche omogeneo, le equazioni costitutive assumono la forma

$$\mathbf{T}^\varphi(x^\varphi) = \hat{\mathbf{T}}^D(\nabla\varphi(x)) \quad \text{per ogni } x^\varphi \in \bar{\Omega}^\varphi. \quad (1.24)$$

Osservazione 1.10. L'omogeneità è una proprietà che si richiede ad un materiale nella configurazione deformata e che potrebbe non valere più a seguito di una deformazione.

Osservazione 1.11. La funzione di risposta $\hat{\mathbf{T}}^D$ di un materiale elastico è per definizione indipendente dalla particolare deformazione considerata, infatti l'apice "D" sta ad indicare che viene utilizzato per esprimere quantità nella configurazione deformata.

Abbiamo quindi trovato che il tensore degli sforzi di Cauchy $\mathbf{T}^\varphi(x^\varphi)$, in un punto x^φ , dipende dalla deformazione esclusivamente mediante le sue derivate prime $\partial_j\varphi_i$. Osserviamo subito infatti che se dipendesse anche dalla deformazione stessa, il tensore potrebbe cambiare anche a seguito di una deformazione rigida.

Notiamo ora che la funzione di risposta di un materiale elastico dipende a priori dalla particolare scelta della base ortonormale e dalla particolare configurazione di riferimento considerata. Al contrario un assioma generale in fisica asserisce che ogni *quantità osservabile* deve essere indipendente dalla particolare base ortogonale in cui viene calcolata. Applicando questo principio al nostro materiale elastico, considerando il vettore degli sforzi di Cauchy come la nostra quantità osservabile, si giunge al seguente **assioma di indifferenza dalla struttura** che viene anche detto *assioma di invarianza sotto il cambio di osservatore*.

Assioma 1.2. Consideriamo la configurazione deformata $\bar{\Omega}^\varphi$ ed una sua rotazione $\bar{\Omega}^\psi$ ottenuta ruotando la prima per qualche rotazione $\mathbf{Q} \in \mathbb{O}_+^3$ tale che $\psi = \mathbf{Q}\varphi$. Allora vale

$$\mathbf{t}^\psi(x^\psi, \mathbf{Q}\mathbf{n}) = \mathbf{Q}\mathbf{t}^\varphi(x^\varphi, \mathbf{n}) \quad \text{per ogni } x \in \bar{\Omega}, \mathbf{n} \in S_1, \quad (1.25)$$

dove $x^\psi = \psi(x)$, $x^\varphi = \varphi(x)$ mentre \mathbf{t}^ψ e \mathbf{t}^φ denotano rispettivamente i vettori degli sforzi di Cauchy nelle configurazioni deformate $\bar{\Omega}^\psi$ e $\bar{\Omega}^\varphi$.

Anche da questo assioma possiamo trarre importanti conclusioni, che riportiamo nel seguente teorema.

Teorema 1.3.1. *La funzione di risposta $\hat{\mathbf{T}}^D : \bar{\Omega} \times \mathbb{M}_+^3 \rightarrow \mathbb{S}^3$ per il tensore degli sforzi di Cauchy soddisfa l'assioma di indifferenza dal materiale se e solo se, per ogni $x \in \bar{\Omega}$ vale*

$$\hat{\mathbf{T}}^D(x, \mathbf{QF}) = \mathbf{Q}\hat{\mathbf{T}}^D(x, \mathbf{F})\mathbf{Q}^T \quad \text{per ogni } \mathbf{F} \in \mathbb{M}_+^3, \mathbf{Q} \in \mathbb{O}_+^3, \quad (1.26)$$

o equivalentemente, se e solo se esiste una mappa $\tilde{\Sigma} : \bar{\Omega} \times \mathbb{S}_>^3 \rightarrow \mathbb{S}^3$ tale che per ogni $x \in \bar{\Omega}$ si ha

$$\hat{\Sigma}(x, \mathbf{F}) = \tilde{\Sigma}(x, \mathbf{F}^T \mathbf{F}), \quad \text{per ogni } \mathbf{F} \in \mathbb{M}_+^3, \quad (1.27)$$

dove $\tilde{\Sigma}$ è la funzione di risposta per il secondo tensore degli stress di Piola-Kirchhoff.

Possiamo esprimere la (1.26) in termini delle funzioni di risposta per i tensori di Piola-Kirchhoff $\hat{\mathbf{T}}$ e $\hat{\Sigma}$, ottenendo così

$$\hat{\mathbf{T}}(x, \mathbf{QF}) = \mathbf{Q}\hat{\mathbf{T}}(x, \mathbf{F}) \quad \text{per ogni } \mathbf{F} \in \mathbb{M}_+^3, \mathbf{Q} \in \mathbb{O}_+^3, \quad (1.28a)$$

$$\hat{\Sigma}(x, \mathbf{QF}) = \hat{\Sigma}(x, \mathbf{F}) \quad \text{per ogni } \mathbf{F} \in \mathbb{M}_+^3, \mathbf{Q} \in \mathbb{O}_+^3. \quad (1.28b)$$

Ovviamente diremo che le funzioni di risposta $\hat{\mathbf{T}}$ e $\hat{\Sigma}$ soddisfano l'assioma di indifferenza dalla struttura, o più semplicemente sono indipendenti dalla struttura, se e solo se le relazioni (1.28) sono soddisfatte.

La relazione (1.27) invece esprime l'idea che: un'equazione costitutiva appare come una relazione funzionale tra la "misura della deformazione" data dal tensore $\mathbf{C} = \nabla\varphi^T \nabla\varphi$ e la "misura degli sforzi" data dal tensore Σ . Questo spiega il motivo per il quale tali equazioni sono spesso dette *leggi di sforzo-deformazione*.

Abbiamo appena visto come, grazie ad un assioma ed alle sue conseguenze, è possibile restringere la classe delle funzioni di risposta. Al fine di spingerci ancora di più in questa direzione, possiamo definire particolari proprietà che possono essere soddisfatte dai materiali. Per un materiale la proprietà di **isotropia** corrisponde all'idea intuitiva che in un dato punto, la risposta del materiale è la stessa in tutte le possibili direzioni. Diamo ora una definizione matematica precisa di questa proprietà.

Definizione 1.5. *Un materiale elastico si dice **isotropo** nel punto x se la sua funzione di risposta per il tensore degli sforzi di Cauchy soddisfa*

$$\hat{\mathbf{T}}^D(x, \mathbf{FQ}) = \hat{\mathbf{T}}^D(x, \mathbf{F}) \quad \text{per ogni } \mathbf{F} \in \mathbb{M}_+^3, \mathbf{Q} \in \mathbb{O}_+^3, \quad (1.29)$$

ovvero se il tensore degli sforzi è lasciato inalterato quando la configurazione è soggetta ad una rotazione arbitraria intorno al punto x .

Nel caso in cui le relazioni precedenti non valgano, o valgano solo per un dato sottoinsieme di \mathbb{O}_+^3 , allora il materiale si dirà **anisotropo** in x .

Inoltre un materiale nella configurazione di riferimento $\bar{\Omega}$ si dice isotropo se è isotropo in ogni punto di $\bar{\Omega}$. Anche in questo caso è utile esprimere la condizione di isotropia per mezzo delle funzioni di risposta per i tensori di Piola-Kirchhoff, ottenendo così le relazioni

$$\hat{\mathbf{T}}(x, \mathbf{F}\mathbf{Q}) = \hat{\mathbf{T}}(x, \mathbf{F})\mathbf{Q} \quad \text{per ogni } \mathbf{F} \in \mathbb{M}_+^3, \mathbf{Q} \in \mathbb{O}_+^3, \quad (1.30)$$

$$\hat{\Sigma}(x, \mathbf{F}\mathbf{Q}) = \mathbf{Q}^T \hat{\Sigma}(x, \mathbf{F})\mathbf{Q} \quad \text{per ogni } \mathbf{F} \in \mathbb{M}_+^3, \mathbf{Q} \in \mathbb{O}_+^3. \quad (1.31)$$

Abbiamo allora tutti gli strumenti per caratterizzare la funzione di risposta per un materiale elastico ed isotropo in un punto.

Teorema 1.3.2. *Una funzione di risposta $\hat{\mathbf{T}}^D : \bar{\Omega} \times \mathbb{M}_+^3 \rightarrow \mathbb{S}^3$ è isotropa in un punto $x \in \bar{\Omega}$, nel senso che il materiale nel punto x soddisfa la condizione di isotropia, se e solo se esiste una mappa $\bar{\mathbf{T}}^D(x, \cdot) : \mathbb{S}_>^3 \rightarrow \mathbb{S}^3$ tale che*

$$\hat{\mathbf{T}}^D(x, \mathbf{F}) = \bar{\mathbf{T}}^D(x, \mathbf{F}\mathbf{F}^T) \quad \text{per ogni } \mathbf{F} \in \mathbb{M}_+^3. \quad (1.32)$$

Osservazione 1.12. Osserviamo che esiste un certo parallelismo tra i Teoremi 1.3.1 e 1.3.2. Nel primo caso infatti è la configurazione deformata ad essere ruotata, ovvero la matrice \mathbf{F} è moltiplicata *a sinistra* per \mathbf{Q} e la funzione di risposta si riduce ad una funzione del prodotto $\mathbf{F}^T\mathbf{F}$. Nel secondo caso invece è la configurazione di riferimento ad essere ruotata, la matrice \mathbf{F} viene moltiplicata *a destra* per \mathbf{Q} ed infine la funzione di risposta diventa funzione del prodotto $\mathbf{F}\mathbf{F}^T$.

1.3.2 Equazioni costitutive

In questa sottosezione consideriamo un materiale che soddisfi simultaneamente le ipotesi di indifferenza dalla struttura e di isotropia in un punto, per poter derivare un'espressione più semplice delle funzioni di risposta.

Prima di fare ciò ricordiamo che data una matrice \mathbf{A} di ordine 3, si possono definire le quantità $i_1 = i_1(\mathbf{A})$, $i_2 = i_2(\mathbf{A})$ ed $i_3 = i_3(\mathbf{A})$ che permettono di scrivere il *polinomio caratteristico* di \mathbf{A} nella forma

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = -\lambda^3 + i_1\lambda^2 - i_2\lambda + i_3.$$

Questi prendono il nome di **invarianti principali** della matrice \mathbf{A} . Indicando con $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ gli autovalori della matrice A , si ricavano facilmente le seguenti caratterizzazioni

$$\begin{aligned} i_1 &= a_{i,i} = \text{Tr}(\mathbf{A}) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \\ i_2 &= \frac{1}{2}(a_{i,i}a_{j,j} - a_{i,j}a_{j,i}) = \frac{1}{2}((\text{Tr}(\mathbf{A}))^2 - \text{Tr}(\mathbf{A}^2)) \\ &= \text{Tr}(\mathbf{Cof}(\mathbf{A})) = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1, \\ i_3 &= \det(\mathbf{A}) = \frac{1}{6} \{ (\text{Tr}(\mathbf{A}))^3 - 3(\text{Tr}(\mathbf{A}))(\text{Tr}(\mathbf{A}^2)) + 2(\text{Tr}(\mathbf{A}^3)) \} = \lambda_1\lambda_2\lambda_3. \end{aligned}$$

Denoteremo inoltre con $\mathbf{i}_\mathbf{A} = (i_1(\mathbf{A}), i_2(\mathbf{A}), i_3(\mathbf{A}))$ la tripla formata dai tre invarianti principali della matrice \mathbf{A} .

Possiamo allora enunciare il teorema di rappresentazione di Rivlin-Ericksen, dove per semplicità di notazione non specifichiamo la dipendenza da x e l'apice D .

Teorema 1.3.3. *Una mappa $\hat{\mathbf{T}} : \mathbb{M}_+^3 \rightarrow \mathbb{S}^3$ soddisfa l'assioma di indifferenza dalla configurazione e la proprietà di isotropia*

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{QF}) &= \mathbf{Q}\hat{\mathbf{T}}(\mathbf{F})\mathbf{Q}^T \quad \text{per ogni } \mathbf{F} \in \mathbb{M}_+^3, \mathbf{Q} \in \mathbb{O}_+^3, \\ \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{FQ}) &= \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{F}) \quad \text{per ogni } \mathbf{F} \in \mathbb{M}_+^3, \mathbf{Q} \in \mathbb{O}_+^3. \end{aligned}$$

se e solo se, data la mappa $\bar{\mathbf{T}} : \mathbb{S}_>^3 \rightarrow \mathbb{S}^3$ della forma

$$\bar{\mathbf{T}}(\mathbf{B}) = \beta_0(\mathbf{i}_\mathbf{B})\mathbf{I} + \beta_1(\mathbf{i}_\mathbf{B})\mathbf{B} + \beta_2(\mathbf{i}_\mathbf{B})\mathbf{B}^2 \quad \text{per ogni } \mathbf{B} \in \mathbb{S}_>^3,$$

dove $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ sono funzioni a valori reali dei tre invarianti principali della matrice \mathbf{B} , vale la seguente relazione

$$\hat{\mathbf{T}}(\mathbf{F}) = \bar{\mathbf{T}}(\mathbf{FF}^T), \quad \text{per ogni } \mathbf{F} \in \mathbb{M}_+^3. \quad (1.33)$$

Come detto in precedenza, la grande utilità di tale teorema, consiste nel semplificare la forma delle funzioni di risposta per i tensori degli sforzi di Piola-Kirchhoff. Questo fatto è evidente dal prossimo risultato che segue direttamente dal teorema di rappresentazione.

Teorema 1.3.4. *Consideriamo un materiale elastico, indifferente dalla struttura e isotropo nel punto $x \in \bar{\Omega}$. Per una data deformazione φ , il tensore degli sforzi di Cauchy nel punto x^φ è dato da*

$$\mathbf{T}^\varphi(x^\varphi) = \hat{\mathbf{T}}^D(x, \nabla\varphi(x)) = \bar{\mathbf{T}}^D(x, \nabla\varphi(x)\nabla\varphi(x)^T), \quad (1.34)$$

dove la funzione di risposta $\bar{\mathbf{T}}^D(x, \cdot) : \mathbb{S}_>^3 \rightarrow \mathbb{S}^3$ assume la forma

$$\bar{\mathbf{T}}^D(x, \mathbf{B}) = \beta_0(x, \mathbf{i}_B)\mathbf{I} + \beta_1(x, \mathbf{i}_B)\mathbf{B} + \beta_2(x, \mathbf{i}_B)\mathbf{B}^2 \quad \text{per ogni } \mathbf{B} \in \mathbb{S}_>^3, \quad (1.35)$$

dove $\beta_0(x, \cdot), \beta_1(x, \cdot), \beta_2(x, \cdot)$ sono funzioni reali dei tre invarianti principali della matrice \mathbf{B} .

Possiamo inoltre scrivere il secondo tensore di Piola-Kirchhoff nella forma

$$\boldsymbol{\Sigma}(x) = \hat{\boldsymbol{\Sigma}}(x, \nabla \boldsymbol{\varphi}(x)) = \tilde{\boldsymbol{\Sigma}}(x, \nabla \boldsymbol{\varphi}(x)^T \nabla \boldsymbol{\varphi}(x)), \quad (1.36)$$

dove la funzione di risposta $\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}(x, \cdot) : \mathbb{S}_>^3 \rightarrow \mathbb{S}^3$ assume la forma

$$\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}(x, \mathbf{C}) = \gamma_0(x, \mathbf{i}_C)\mathbf{I} + \gamma_1(x, \mathbf{i}_C)\mathbf{C} + \gamma_2(x, \mathbf{i}_C)\mathbf{C}^2 \quad \text{per ogni } \mathbf{C} \in \mathbb{S}_>^3, \quad (1.37)$$

dove $\gamma_0(x, \cdot), \gamma_1(x, \cdot), \gamma_2(x, \cdot)$ sono funzioni reali dei tre invarianti principali della matrice \mathbf{C} .

Al contrario, se almeno una delle funzioni di risposta è della forma descritta sopra, il materiale soddisfa l'assioma di indifferenza dalla struttura ed è isotropo nel punto $x \in \bar{\Omega}$.

Osserviamo che non è possibile scrivere il primo tensore degli sforzi di Piola-Kirchhoff come funzione di una matrice simmetrica. Questo è il principale motivo per cui, nonostante nelle equazioni di equilibrio appare il primo tensore degli sforzi, è più conveniente utilizzare il secondo.

Continuiamo definendo il tensore che fa riferimento alla configurazione deformata quando $\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{id}$. Indichiamo dunque con

$$\mathbf{T}_R(x) := \hat{\mathbf{T}}^D(x, \mathbf{I}) = \hat{\boldsymbol{\Sigma}}(x, \mathbf{I}) = \tilde{\boldsymbol{\Sigma}}(x, \mathbf{I}) \quad (1.38)$$

il **tensore degli sforzi residui** nel punto x della configurazione di riferimento. Osserviamo subito che dal Teorema 1.3.4, nel caso di un materiale elastico e isotropo in $x \in \bar{\Omega}$ il tensore degli sforzi residui nel punto x è una *pressione*, ovvero un multiplo scalare della matrice identità. Questo risultato è ovviamente una conseguenza dell'isotropia, in quanto il materiale in corrispondenza di un punto fissato deve rispondere in maniera identica in ogni direzione.

Infine diremo che una configurazione di riferimento $\bar{\Omega}$ è uno **stato naturale** se il tensore degli sforzi residui $\mathbf{T}_R(x)$ si annulla in ogni punto del dominio. Questa caratteristica corrisponde alla situazione in cui non ci sono forze agenti nel dominio.

1.3.3 Materiali di Kirchhoff-St Venant

Abbiamo visto nelle sezioni precedenti che il tensore di Green-St Venant $E = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I})$ è una misura della distanza tra una data deformazione ed una deformazione rigida. Quello che vogliamo fare ora è calcolare entro un certo ordine in termini del tensore \mathbf{E} , una espansione del tensore Σ corrispondente ad una configurazione deformata che è "vicina" alla configurazione di riferimento, ovvero a quella corrispondente alla particolare deformazione rigida $\varphi = \text{id}$.

Teorema 1.3.5. *Consideriamo un materiale elastico la cui funzione di risposta sia indifferente dalla struttura e che sia isotropo in $x \in \bar{\Omega}$. Assumiamo inoltre che le funzioni $\gamma_\alpha(x, \cdot)$, $\alpha = 0, 1, 2$, siano differenziabili nel punto $\mathbf{i}_1 = (3, 3, 1)$. Allora esistono tre costanti $\pi(x), \lambda(x), \mu(x) \in \mathbb{R}$ tali che*

$$\begin{aligned} \tilde{\Sigma}(x, \mathbf{C}) = -\pi(x)\mathbf{I} + \lambda(x)(\text{Tr}(\mathbf{E}))\mathbf{I} + 2\mu(x)\mathbf{E} + o(\mathbf{E}; x) \\ \text{per ogni } \mathbf{C} = \mathbf{I} + 2\mathbf{E} \in \mathbb{S}_{>}^3. \end{aligned} \quad (1.39)$$

Dimostrazione. Dalla relazione $\mathbf{C} = \mathbf{I} + 2\mathbf{E}$ otteniamo

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\mathbf{C}) &= 3 + 2\text{Tr}(\mathbf{E}), \\ \text{Tr}(\mathbf{C}^2) &= 3 + 4\text{Tr}(\mathbf{E}) + o(\mathbf{E}), \\ \text{Tr}(\mathbf{C}^3) &= 3 + 6\text{Tr}(\mathbf{E}) + o(\mathbf{E}), \end{aligned}$$

quindi gli invarianti principali della matrice \mathbf{C} al primo ordine sono semplicemente funzioni della traccia di \mathbf{E}

$$\begin{aligned} i_1(\mathbf{C}) &= 3 + 2\text{Tr}(\mathbf{E}), \\ i_2(\mathbf{C}) &= 3 + 4\text{Tr}(\mathbf{E}) + o(\mathbf{E}), \\ i_3(\mathbf{C}) &= 1 + 2\text{Tr}(\mathbf{E}) + o(\mathbf{E}). \end{aligned}$$

Ora grazie alle ipotesi di differenziabilità nell'enunciato osserviamo che una qualsiasi funzione γ_α può essere scritta come

$$\gamma_\alpha(\mathbf{i}_\mathbf{C}) = \gamma_\alpha(\mathbf{i}_1) + \hat{\gamma}_\alpha(\mathbf{i}_1)\text{Tr}(\mathbf{E}) + o(\mathbf{E}),$$

dove

$$\hat{\gamma}_\alpha(\mathbf{i}_1) := 2\frac{\partial\gamma_\alpha}{\partial\mathbf{i}_1}(\mathbf{i}_1) + 4\frac{\partial\gamma_\alpha}{\partial\mathbf{i}_2}(\mathbf{i}_1) + 2\frac{\partial\gamma_\alpha}{\partial\mathbf{i}_3}(\mathbf{i}_1).$$

Utilizzando questo ed il fatto che $\mathbf{C}^2 = \mathbf{I} + 4\mathbf{E} + o(\mathbf{E})$, otteniamo

$$\begin{aligned}\tilde{\Sigma}(\mathbf{C}) = \tilde{\Sigma}(\mathbf{I} + 2\mathbf{E}) &= \tilde{\Sigma}(\mathbf{I}) + \{\hat{\gamma}_0(\mathbf{i}_1) + \hat{\gamma}_1(\mathbf{i}_1) + \hat{\gamma}_2(\mathbf{i}_1)\} (\text{Tr}(\mathbf{E}))\mathbf{I} \\ &+ \{2\gamma_1(\mathbf{i}_1) + 4\gamma_2(\mathbf{i}_1)\} \mathbf{E} + o(\mathbf{E}),\end{aligned}$$

da cui si conclude osservando che

$$\tilde{\Sigma}(\mathbf{I}) = \{\gamma_0(\mathbf{i}_1) + \gamma_1(\mathbf{i}_1) + \gamma_2(\mathbf{i}_1)\} \mathbf{I}.$$

□

Ipotizzando che il materiale sia elastico, isotropo, omogeneo e la cui configurazione di riferimento sia uno stato naturale, si ottiene così un utile corollario del Teorema 1.3.5.

Corollario 1. *Sotto le ipotesi appena elencate, se le funzioni γ_α , $\alpha = 0, 1, 2$, del Teorema 1.3.5 sono differenziabili nel punto $\mathbf{i}_1 = (3, 3, 1)$, allora esistono due costanti λ e μ tali che la funzione di risposta $\hat{\Sigma} : \mathbb{M}_+^3 \rightarrow \mathbb{S}^3$ è della forma*

$$\begin{aligned}\hat{\Sigma}(\mathbf{F}) = \tilde{\Sigma}(\mathbf{C}) = \tilde{\Sigma}(\mathbf{E}) &= \lambda(\text{Tr}(\mathbf{E}))\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{E} + o(\mathbf{E}), \\ \mathbf{C} = \mathbf{F}^T\mathbf{F} = \mathbf{I} + 2\mathbf{E}, \quad \mathbf{F} &\in \mathbb{M}_+^3.\end{aligned}\tag{1.40}$$

In questo caso le costanti λ e μ prendono il nome di **costanti di Lamé** del materiale considerato.

Grazie ad alcuni semplici esempi è possibile dimostrare che ci sono delle importanti restrizioni sui valori che queste costanti possono assumere. Si trovano infatti le relazioni

$$\mu > 0, \tag{1.41}$$

$$3\lambda + 2\mu > 0, \tag{1.42}$$

$$\lambda > 0. \tag{1.43}$$

Si possono inoltre introdurre due costanti, a partire da queste, che rappresentano specificamente proprietà fisiche del materiale: il **rapporto di Poisson** ν definito come

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}, \tag{1.44}$$

che rappresenta la misura, entro il primo ordine, del rapporto tra le grandezze caratteristiche del problema, ed il **modulo di Young** E definito

come

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}, \quad (1.45)$$

che rappresenta il rapporto tra la pressione applicata e la deformazione ottenuta. Le restrizioni trovate sulle costanti di Lamè si ripercuotono ovviamente anche sulle costanti ν ed E . Infatti risulta facile provare che

$$\lambda > 0 \quad \text{e} \quad \mu > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < \nu < \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad E > 0.$$

Finalmente se consideriamo solo i termini al primo ordine nell'espressione (1.40) otteniamo il modello di funzione di risposta ideato da Kirchhoff e St Venant. Diremo infatti che un materiale elastico è un **materiale di Kirchhoff-St Venant** se la sua funzione di risposta per il secondo tensore degli sforzi di Piola-Kirchhoff è della forma

$$\check{\Sigma}(\mathbf{E}) = \check{\Sigma}(\mathbf{I} + 2\mathbf{E}) = \lambda(\text{Tr}(\mathbf{E}))\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{E}, \quad \mathbf{I} + 2\mathbf{E} \in \mathbb{S}_{>}^3, \quad (1.46)$$

con λ e μ costanti di Lamé. Possiamo esprimere la funzione di risposta come funzione del tensore \mathbf{E} e dei moduli di Poisson e Young, ottenendo

$$\check{\Sigma}(\mathbf{E}) = \frac{E}{1 + \nu} \left\{ \frac{\nu}{1 - 2\nu} (\text{Tr}(\mathbf{E}))\mathbf{I} + \mathbf{E} \right\}.$$

Quindi per definizione, la mappa $\mathbf{E} \rightarrow \check{\Sigma}(\mathbf{E})$, che corrisponde ad un materiale di Kirchhoff-St Venant, è lineare. Al contrario la mappa associata, una volta che si ricorda la dipendenza del tensore delle deformazioni $\mathbf{E}(\mathbf{u})$ dal vettore degli spostamenti \mathbf{u} , non risulta più lineare.

Questo fatto risulta evidente anche dalla scrittura delle equazioni costitutive che riportiamo componente per componente. Utilizzando infatti la notazione $\check{\Sigma}(\mathbf{E}) = (\check{\sigma}_{i,j}(\mathbf{E}))$ e $\mathbf{E} = (E_{i,j})$, abbiamo

$$\check{\sigma}_{i,j}(\mathbf{E}) = \lambda E_{k,k} \delta_{i,j} + 2\mu E_{i,j}, \quad E_{i,j} = \frac{1}{2}(\partial_i u_j + \partial_j u_i + \partial_i u_k \partial_j u_k), \quad (1.47)$$

o equivalentemente,

$$\check{\sigma}_{i,j}(\mathbf{E}) = a_{i,j,k,l} E_{k,l} \quad \text{con} \quad a_{i,j,k,l} := \lambda \delta_{i,k} \delta_{k,l} + \mu(\delta_{i,k} \delta_{j,l} + \delta_{i,l} \delta_{j,k}). \quad (1.48)$$

Poiché i materiali di Kirchhoff-St Venant sono i più facili con cui lavorare tra i modelli non lineari, sono quelli solitamente utilizzati nelle simulazioni.

Concludiamo quindi che, per quanto detto, tale modello è utile nello studio delle "piccole deformazioni", ma grazie alla struttura non lineare

modella perfettamente il problema.

CAPITOLO 2

ANALISI MATEMATICA DEL PROBLEMA

La questione dell'esistenza di soluzioni del problema al bordo di elasticità non lineare, può essere affrontato in diversi modi. Quello cui faremo riferimento, seguendo [8], consiste nell'applicazione del teorema della funzione implicita direttamente al problema di elasticità non lineare

$$-\operatorname{div} \{(\mathbf{I} + \nabla \mathbf{u}) \check{\Sigma}(\mathbf{E}(\mathbf{u}))\} = \mathbf{f} \quad \text{in } \Omega, \quad (2.1)$$

con condizioni al bordo di Dirichlet,

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{su } \Gamma,$$

che possiede la soluzione particolare $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ corrispondente a $\mathbf{f} = \mathbf{0}$ (assumendo che la configurazione di riferimento sia uno stato naturale).

Cominciamo questo capitolo con un breve accenno ad alcuni noti risultati di analisi matematica che saranno indispensabili per le questioni di esistenza, unicità e regolarità della nostra equazione.

2.1 Richiami di analisi funzionale

Facendo riferimento, per i dettagli, a [6] e [3], introduciamo le notazioni che utilizzeremo in questo capitolo. Dati X e Y due spazi vettoriali normati indichiamo con $L(X; Y)$ lo spazio vettoriale formato da tutte le mappe lineari continue $A : X \rightarrow Y$. Ricordiamo che una mappa $f : \Omega \subset X \rightarrow Y$ è

differenziabile in un punto $a \in \Omega$ se esiste un elemento $f'(a)$ nello spazio $L(X; Y)$ tale che

$$f(a + h) = f(a) + f'(a)h + o(h),$$

in tal caso l'elemento $f'(a) \in L(X; Y)$ è detto *derivata di Fréchet*.

Indichiamo inoltre con $Isom(X; Y)$ l'insieme di tutte le mappe continue lineari $A : X \rightarrow Y$ che sono biettive e la cui inversa $A^{-1} : Y \rightarrow X$ è ancora continua.

Possiamo ora enunciare il **teorema della funzione implicita** (vedi Fig. 2.1).

Teorema 2.1.1. *Siano X_1 e Y due spazi vettoriali normati, X_2 uno spazio di Banach, un dominio $\Omega \subset X_1 \times X_2$ contenente il punto (a_1, a_2) e una mappa $\phi : \Omega \subset X_1 \times X_2 \rightarrow Y$ che soddisfa*

$$\phi \in C^1(\Omega; Y), \quad \partial_2\phi(a_1, a_2) \in Isom(X_2; Y),$$

e poniamo $\phi(a_1, a_2) = b \in Y$. Allora esistono due sottoinsiemi aperti O_1 e O_2 rispettivamente degli spazi X_1 e X_2 con $(a_1, a_2) \in O_1 \times O_2 \subset \Omega$, e una funzione implicita $f : O_1 \subset X_1 \rightarrow O_2 \subset X_2$ tale che

$$\{(x_1, x_2) \in O_1 \times O_2 ; \phi(x_1, x_2) = b\} = \{(x_1, x_2) \in O_1 \times O_2 ; x_2 = f(x_1)\},$$

$$f \in C^1(O_1; X_2),$$

$$f'(x_1) = - \{\partial_2\phi(x_1, f(x_1))\}^{-1} \partial_1\phi(x_1, f(x_1)) \quad \text{per ogni } x_1 \in O_1.$$

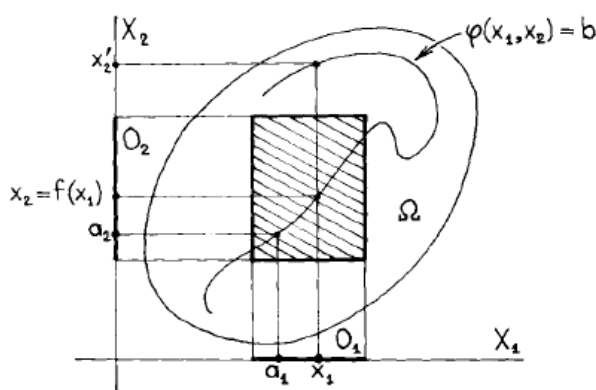


Fig. 2.1: La funzione ϕ viene detta *funzione implicita* se l'equazione $\phi(x_1, x_2) = b$ è localmente equivalente all'equazione $x_2 = \phi(x_1)$.

Ricordiamo ora un risultato fondamentale che vale negli spazi di Banach, il **teorema dell'applicazione aperta** [6].

Teorema 2.1.2. *Siano X e Y due spazi di Banach e sia F un operatore continuo e lineare da X a Y che sia suriettivo. Allora esiste una costante $c > 0$ tale che*

$$F(B_X(0, 1)) \supset B_Y(0, c). \quad (2.2)$$

Da questo seguono due utili corollari.

Corollario 2. *Siano X e Y due spazi di Banach e sia F un operatore continuo e lineare da X a Y che sia biiettivo. Allora F^{-1} è ancora un operatore continuo da Y in X .*

Corollario 3. *Siano date due norme $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ su uno spazio vettoriale X . Assumiamo che munito di tali norme X sia uno spazio di Banach e che esista una costante $C \geq 0$ tale che*

$$\|x\|_2 \leq C\|x\|_1 \quad \text{per ogni } x \in X.$$

Allora le due norme sono equivalenti, ovvero esiste una costante $c > 0$ tale che

$$\|x\|_1 \leq c\|x\|_2 \quad \text{per ogni } x \in X.$$

Richiamiamo infine le definizioni principali ed i risultati più interessanti, nell'ottica del nostro lavoro, nella teoria degli spazi di Sobolev.

Sia Ω un sottoinsieme aperto di \mathbb{R}^n e p un numero reale nella retta estesa, soddisfacente $1 \leq p \leq \infty$. Allora per ogni intero $m \geq 0$ lo **spazio di Sobolev** $W^{m,p}(\Omega)$ consiste delle funzioni $v \in L^p(\Omega)$ per le quali tutte le derivate parziali, nel senso delle distribuzioni, di ordine $\leq m$ appartengono ancora allo spazio $L^p(\Omega)$. In altre parole, per ogni multi indice α con $|\alpha| \leq m$, esiste una funzione $v^\alpha \in L^p(\Omega)$ tale che

$$\int_{\Omega} v^\alpha \theta \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v \partial^\alpha \theta \, dx \quad \text{per ogni } \theta \in D(\Omega),$$

dove con $D(\Omega)$ abbiamo indicato lo spazio delle funzioni reali $\theta \in C^\infty(\Omega)$ il cui supporto è un sottoinsieme compatto di Ω .

Osservazione 2.1. Ricordiamo che lo spazio di Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ è uno spazio di Banach se munito della norma

$$v \rightarrow \|v\|_{m,p,\Omega} := \left\{ \int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq m} |\partial^\alpha v|^p \, dx \right\}^{\frac{1}{p}} \quad \text{se } 1 \leq p < \infty,$$

$$v \rightarrow \|v\|_{m,\infty,\Omega} := \max_{|\alpha| \leq m} |\partial^\alpha v|_{0,\infty,\Omega} \quad \text{se } p = \infty,$$

dove abbiamo utilizzato la seguente notazione per il caso $p = \infty$.

$$|v|_{0,\infty,\Omega} := \inf \{ \alpha \geq 0; |\{x \in \Omega; |v(x)| > \alpha\}| = 0 \}.$$

Infine risulta interessante, per se e per gli scopi di questa tesi, definire per ogni intero $m \geq 0$ e per ogni numero reale $p \geq 1$ gli spazi di Sobolev

$$W_0^{m,p}(\Omega) := \overline{\{D(\Omega)\}} \quad , \quad H_0^m(\Omega) := W_0^{m,2}(\Omega),$$

avendo preso la chiusura rispetto alla norma $\|\cdot\|_{m,p,\Omega}$.

Indichiamo ora, con la notazione $X \hookrightarrow Y$, l'immersione continua dello spazio normato X nello spazio normato Y , nel senso che $X \subset Y$ e che esiste una costante c tale che $\|v\|_Y \leq c\|v\|_X$ per ogni $v \in X$. Uno dei teoremi centrali in questa teoria è il seguente **teorema delle immersioni di Sobolev**.

Teorema 2.1.3. *Sia Ω un dominio di \mathbb{R}^n , $m \geq 0$ un intero e poniamo $1 \leq p < \infty$. Allora valgono le seguenti immersioni continue*

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega) \quad \text{con} \quad \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{m}{n} \quad \text{se} \quad m < \frac{n}{p}, \quad (2.3)$$

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \quad \text{per ogni } q \text{ con} \quad 1 \leq q < \infty \quad \text{se} \quad m = \frac{n}{p}, \quad (2.4)$$

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,m-n/p}(\bar{\Omega}) \quad \text{se} \quad \frac{n}{p} < n < \frac{n}{p} + 1, \quad (2.5)$$

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\lambda}(\bar{\Omega}) \quad \text{per ogni} \quad \lambda \in (0,1) \quad \text{se} \quad m = \frac{n}{p} + 1, \quad (2.6)$$

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,1}(\bar{\Omega}) \quad \text{se} \quad \frac{n}{p} + 1 < m. \quad (2.7)$$

$$(2.8)$$

Un'importante conseguenza del teorema precedente è che la stessa disuguaglianza che garantisce la validità dell'immersione $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\bar{\Omega})$ provvede anche a garantire il fatto che lo spazio $W^{m,p}(\Omega)$ sia un'algebra di **Banach**, ovvero il prodotto di due funzioni in $W^{m,p}(\Omega)$ appartiene ancora allo stesso spazio se $mp > n$. Possiamo così enunciare l'ultimo teorema di questa sezione.

Teorema 2.1.4. *Nelle stesse ipotesi del teorema precedente, nel caso $mp > n$, vale*

$$u, v \in W^{m,p}(\Omega) \Rightarrow uv \in W^{m,p}(\Omega),$$

ed inoltre esiste una costante c tale che

$$\|uv\|_{m,p,\Omega} \leq c\|u\|_{m,p,\Omega}\|v\|_{m,p,\Omega} \quad \text{per ogni } u, v \in W^{m,p}(\Omega).$$

2.2 Esistenza per l'elasticità lineare

Siamo finalmente pronti per studiare nel dettaglio le questioni di esistenza ed unicità per le equazioni che abbiamo derivato nel capitolo precedente. Consideriamo quindi nuovamente l'equazione (2.1)

$$-\operatorname{div} \{(\mathbf{I} + \nabla \mathbf{u})\check{\Sigma}(\mathbf{E}(\mathbf{u}))\} = \mathbf{f} \quad \text{in } \Omega,$$

con condizioni al bordo miste

$$\begin{cases} \mathbf{u} = \mathbf{0} & \text{su } \Gamma_0, \\ (\mathbf{I} + \nabla \mathbf{u})\check{\Sigma}(\mathbf{E}(\mathbf{u}))\mathbf{n} = \mathbf{g} & \text{su } \Gamma_1. \end{cases}$$

Ricordiamo che, per quanto visto nel Teorema 1.1.4, la funzione di risposta $\check{\Sigma}$ per il secondo tensore degli sforzi di Piola-Kirchhoff è definita in un intorno $\mathbb{V}(\mathbf{0})$ di \mathbb{S}^3 , il quale soddisfa, nelle ipotesi del Corollario 1, la relazione

$$\check{\Sigma}(\mathbf{E}) = \lambda(\operatorname{tr}(\mathbf{E}))\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{E} + o(\|\mathbf{E}\|).$$

L'obiettivo di questa sezione è quello di calcolare, a livello formale, la derivata nel punto $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ dell'operatore di elasticità non lineare \mathcal{A} , che rappresenta il membro a sinistra dell'equazione (2.1).

Con "a livello formale" intendiamo che tutte le quantità in gioco siano sufficientemente regolari, in modo da garantire la buona definizione dell'operatore \mathcal{A} .

Teorema 2.2.1. *Sia $\check{\Sigma} : \mathbb{V}(\mathbf{0}) \subset \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^3$ la funzione di risposta di un materiale elastico, isotropo e omogeneo, che sia in uno stato naturale e tale che si possa trovare :*

(i) *un intorno $\mathbf{V}(\mathbf{0})$ dell'origine in uno spazio normato $\mathbf{W}(\Omega)$ di funzioni a valori vettoriali $v : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$ che soddisfino le condizioni al bordo $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ su Γ_0 , in modo tale che $\mathbf{E}(v) \in \mathbb{V}(\mathbf{0})$ se $v \in \mathbf{V}(\mathbf{0})$,*

(ii) *uno spazio vettoriale normato $\mathbf{F}(\Omega)$ di funzioni a valori vettoriali definite su Ω tali che*

$$v \in \mathbf{V}(\mathbf{0}) \subset \mathbf{W}(\Omega) \Rightarrow \mathbf{A}(v) := -\operatorname{div} \{(\mathbf{I} + \nabla v)\check{\Sigma}(\mathbf{E}(v))\} \in \mathbf{F}(\Omega),$$

(iii) uno spazio vettoriale normato $\mathbf{G}(\Gamma_1)$ di funzioni a valori vettoriali definite su Γ_1 tali che

$$\mathbf{v} \in \mathbf{V}(\mathbf{0}) \subset \mathbf{W}(\Omega) \Rightarrow \mathbf{B}(\mathbf{v}) := (\mathbf{I} + \nabla \mathbf{v}) \check{\Sigma}(\mathbf{E}(\mathbf{v})) \mathbf{n}|_{\Gamma_1} \in \mathbf{G}(\Gamma_1),$$

in modo tale che l'operatore di elasticità non lineare

$$\mathcal{A} : \mathbf{v} \in \mathbf{V}(\mathbf{0}) \subset \mathbf{W}(\Omega) \rightarrow \mathcal{A}(\mathbf{v}) := (\mathbf{A}(\mathbf{v}), \mathbf{B}(\mathbf{v})) \in \mathbf{F}(\Omega) \times \mathbf{G}(\Gamma_1)$$

sia differenziabile in $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Allora l'azione della derivata di Fréchet $\mathcal{A}'(\mathbf{0}) = (\mathbf{A}'(\mathbf{0}), \mathbf{B}'(\mathbf{0}))$ su un elemento arbitrario $\mathbf{v} \in \mathbf{W}(\Omega)$ è data da

$$\mathcal{A}'(\mathbf{0})\mathbf{v} = (-\operatorname{div} \{ \lambda(\operatorname{tr}(\mathbf{e}(\mathbf{v})))\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{e}(\mathbf{v}) \}, \{ \lambda(\operatorname{tr}(\mathbf{e}(\mathbf{v})))\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{e}(\mathbf{v}) \} \mathbf{n})$$

dove abbiamo utilizzato la notazione

$$\mathbf{e}(\mathbf{v}) := \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v}^T + \nabla \mathbf{v}).$$

Dimostrazione. Per calcolare l'azione di $\mathcal{A}'(\mathbf{0})$ su \mathbf{v} , una volta che siamo nelle ipotesi di esistenza di tale derivata, è sufficiente studiare i termini che sono lineari rispetto a \mathbf{v} nella differenza $\{ \mathcal{A}(\mathbf{v}) - \mathcal{A}(\mathbf{0}) \}$ dove $\mathbf{E}(\mathbf{v})$ e $\check{\Sigma}(\mathbf{E})$ sono sostituiti dalle loro espansioni al primo ordine, rispettivamente

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{v}) &= \mathbf{e}(\mathbf{v}) + o(\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{W}(\Omega)}), \\ \check{\Sigma}(\mathbf{E}) &= \lambda(\operatorname{tr}(\mathbf{E}))\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{E} + o(\|\mathbf{E}\|). \end{aligned}$$

Si riescono così a trovare le seguenti equivalenze

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{v}) - \mathbf{A}(\mathbf{0}) &= -\operatorname{div} \{ \lambda(\operatorname{tr}(\mathbf{e}(\mathbf{v})))\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{e}(\mathbf{v}) \} + o(\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{W}(\Omega)}) \in \mathbf{F}(\Omega), \\ \mathbf{B}(\mathbf{v}) - \mathbf{B}(\mathbf{0}) &= \{ \lambda(\operatorname{tr}(\mathbf{e}(\mathbf{v})))\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{e}(\mathbf{v}) \} \mathbf{n} + o(\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{W}(\Omega)}) \in \mathbf{G}(\Gamma_1), \end{aligned}$$

da cui segue la tesi. □

Per definizione, il **problema di elasticità linearizzato** associato all'equazione (2.1), sarà dato dal seguente problema al bordo: Date $(\mathbf{f}, \mathbf{g}) \in \mathbf{F}(\Omega) \times \mathbf{G}(\Gamma_1)$, trovare $\mathbf{u} \in \mathbf{W}(\Omega)$ tale che

$$\mathcal{A}'(\mathbf{0})\mathbf{u} = (\mathbf{f}, \mathbf{g})$$

o più esplicitamente

$$\begin{cases} -\mathbf{div} \{ \lambda(\operatorname{tr}(\mathbf{e}(\mathbf{u})))\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{e}(\mathbf{u}) \} = \mathbf{f} & \text{in } \Omega, \\ \mathbf{u} = \mathbf{0} & \text{su } \Gamma_0, \\ \{ \lambda(\operatorname{tr}(\mathbf{e}(\mathbf{u})))\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{e}(\mathbf{u}) \} \mathbf{n} = \mathbf{g} & \text{su } \Gamma_1, \end{cases} \quad (2.9)$$

dove con la quantità $\mathbf{e}(\mathbf{u})$ abbiamo indicato il tensore delle deformazioni linearizzato. Di conseguenza l'operatore

$$\mathbf{A}'(\mathbf{0}) : \mathbf{v} \rightarrow -\mathbf{div} \{ \lambda(\operatorname{tr}(\mathbf{e}(\mathbf{v})))\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{e}(\mathbf{v}) \},$$

verrà chiamato **operatore linearizzato dell'elasticità**.

Osservazione 2.2. Osserviamo che il problema (2.9) rappresenta esclusivamente la "derivata nell'origine" dell'equazione non lineare iniziale, quindi anche se da una parte risulta un utilissimo strumento matematico per capire e comprendere, in maniera semplice, la fisica del problema, dall'altra non può essere considerato come modello in quanto, ad esempio, non soddisfa l'assioma di indifferenza dalla struttura. Tratteremo quindi la soluzione del problema linearizzato come un'approssimazione del "vero" vettore di spostamento \mathbf{u} .

Ricordiamo inoltre che, nella derivazione del problema lineare, un'ipotesi cruciale riguarda il fatto che la configurazione iniziale sia uno stato naturale. Questo ci garantisce che non ci siano termini di ordine zero nell'espansione della funzione di risposta $\tilde{\Sigma}$ intorno a $\mathbf{E} = \mathbf{0}$, ed inoltre implica che $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ è una soluzione particolare (ovvero corrispondente a $\mathbf{f} = \mathbf{0}$ e $\mathbf{g} = \mathbf{0}$).

Prima di passare allo studio di esistenza ed unicità per il problema lineare, mostriamo che è possibile esprimerlo anche componente per componente nella seguente forma:

$$\begin{cases} -\partial_j(a_{i,j,p,q}e_{p,q}(\mathbf{u})) = f_i & \text{in } \Omega, \\ u_i = 0 & \text{su } \Gamma_0, \\ a_{i,j,p,q}e_{p,q}n_j = g_i & \text{su } \Gamma_1, \end{cases} \quad (2.10)$$

avendo utilizzato la notazione

$$a_{i,j,p,q} = \lambda\delta_{i,j}\delta_{p,q} + \mu(\delta_{i,p}\delta_{j,q} + \delta_{i,q}\delta_{j,p}), \quad (2.11)$$

$$e_{p,q}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\partial_p u_q + \partial_q u_p). \quad (2.12)$$

Procediamo allora andando ad analizzare le principali proprietà del sistema linearizzato. Utilizzeremo qui gli stessi argomenti trattati nei testi di equazioni a derivate parziali, ovvero attraverso una semplice integrazione per parti, scriveremo una formulazione variazionale equivalente da cui ricavare il risultato di esistenza in uno spazio opportuno.

Teorema 2.2.2. *Trovare una soluzione \mathbf{u} al problema al bordo lineare (2.9) è formalmente equivalente a trovare una soluzione $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ dell'equazione*

$$B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = L(\mathbf{v}) \quad \text{per ogni } \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \quad (2.13)$$

dove

$$B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \int_{\Omega} \{ \lambda \operatorname{tr}(\mathbf{e}(\mathbf{u})) \operatorname{tr}(\mathbf{e}(\mathbf{v})) + 2\mu \mathbf{e}(\mathbf{u}) : \mathbf{e}(\mathbf{v}) \} dx, \quad (2.14)$$

$$L(\mathbf{v}) := \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dx + \int_{\Omega} \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} da, \quad (2.15)$$

con \mathbf{V} che denota uno spazio di funzioni a valori vettoriali sufficientemente regolari $\mathbf{v} : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$ che si annullano su Γ_0 .

Dimostrazione. Utilizzando nuovamente la formula di Green, deduciamo che per ogni campo tensoriale simmetrico sufficientemente regolare $\mathbf{S} : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{S}^3$ e per ogni campo vettoriale $\mathbf{v} : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$, vale la seguente espressione

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{S}) \cdot \mathbf{v} dx &= \int_{\Omega} \mathbf{S} : \nabla \mathbf{v} dx + \int_{\Gamma} \mathbf{S} \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} da \\ &= \int_{\Omega} \mathbf{S} : \mathbf{e}(\mathbf{v}) dx + \int_{\Gamma} \mathbf{S} \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} da \end{aligned} \quad (2.16)$$

da cui seguendo la linea della dimostrazione utilizzata nei Teoremi 1.2.2 e 1.2.4 si ottiene la tesi. \square

Siamo pronti allora per mostrare un risultato di esistenza che può essere applicato ad una larga classe di problemi astratti della forma trovata nel problema precedente. Infatti mostreremo che dato il problema di trovare $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ tale che valga (2.13), dove B è una forma bilineare continua e simmetrica ed L un funzionale lineare e continuo sullo spazio \mathbf{V} , allora nelle ipotesi cruciali che \mathbf{V} sia completo e che B sia \mathbf{V} -ellittica il risultato di esistenza è una diretta conseguenza del Teorema di rappresentazione di Riesz negli spazi di Hilbert (vedi [6]).

Teorema 2.2.3. *Sia \mathbf{V} uno spazio di Banach munito della norma $\|\cdot\|$, sia $L : \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R}$ una forma lineare continua e sia $B : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineare continua e*

simmetrica che sia **V-ellittica**, nel senso che esiste una costante β tale che

$$\beta > 0 \quad e \quad B(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \geq \beta \|\mathbf{v}\|^2 \quad \text{per ogni } \mathbf{v} \in \mathbf{V}. \quad (2.17)$$

Allora il problema di trovare $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ tale che

$$B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = L(\mathbf{v}) \quad \text{per ogni } \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \quad (2.18)$$

ha una ed una sola soluzione, che risulta anche essere l'unica soluzione del problema di trovare $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ tale che

$$J(\mathbf{u}) = \inf_{\mathbf{v} \in \mathbf{V}} J(\mathbf{v}), \quad \text{dove } J : \mathbf{v} \in \mathbf{V} \rightarrow J(\mathbf{v}) := \frac{1}{2}B(\mathbf{v}, \mathbf{v}) - L(\mathbf{v}). \quad (2.19)$$

Dimostrazione. Per il risultato di esistenza possiamo osservare che dalla **V-ellitticità** e dalla continuità della forma bilineare si ha

$$\beta \|\mathbf{v}\|^2 \leq B(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \leq \|B\| \|\mathbf{v}\|^2 \quad \text{per ogni } \mathbf{v} \in \mathbf{V},$$

quindi la forma simmetrica bilineare B è un prodotto scalare sullo spazio \mathbf{V} e la norma associata $\mathbf{v} \in \mathbf{V} \rightarrow \{B(\mathbf{v}, \mathbf{v})\}^{1/2}$ è equivalente alla norma data. Allora lo spazio \mathbf{V} è uno spazio di Hilbert quando viene munito della norma indotta da questo prodotto scalare. Dal teorema di rappresentazione di Riesz sappiamo allora che esiste un unico elemento $\mathbf{l} \in \mathbf{V}$ tale che

$$L(\mathbf{v}) = B(\mathbf{l}, \mathbf{v}) \quad \text{per ogni } \mathbf{v} \in \mathbf{V},$$

e quindi $\mathbf{u} = \mathbf{l}$ è l'unica soluzione del nostro problema. Per quanto riguarda invece l'equivalenza con il problema di minimizzazione, osserviamo da calcoli diretti che vale

$$J(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = J(\mathbf{u}) + \{B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - L(\mathbf{v})\} + \frac{1}{2}B(\mathbf{v}, \mathbf{v}).$$

Ma poiché in una direzione sappiamo che vale $B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = L(\mathbf{v})$ per ogni $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ allora otteniamo

$$J(\mathbf{u} + \mathbf{v}) - J(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}B(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \geq \frac{\alpha}{2} \|\mathbf{v}\|^2 \quad \text{per ogni } \mathbf{v} \in \mathbf{V},$$

ovvero \mathbf{u} è un estremo del funzionale J . Al contrario, per l'implicazione inversa, ipotizziamo che \mathbf{u} sia un estremo di J e \mathbf{v} un elemento qualsiasi di

V. La disuguaglianza

$$J(\mathbf{u} + \theta \mathbf{v}) - J(\mathbf{u}) = \theta(\{B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - L(\mathbf{v})\} + \frac{\theta}{2}B(\mathbf{v}, \mathbf{v})) \quad \text{per ogni } \theta \in \mathbb{R},$$

implica che $B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = L(\mathbf{v})$, infatti se la quantità $B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - L(\mathbf{v})$ fosse diversa da zero, la differenza $J(\mathbf{u} + \theta \mathbf{v}) - J(\mathbf{v})$ sarebbe < 0 per valori sufficientemente piccoli di $|\theta|$. \square

Osservazione 2.3. Una soluzione \mathbf{u} del problema astratto (2.18) continua ad esistere anche nel caso in cui la forma bilineare non sia simmetrica, anche se ovviamente ad esso non sarà associato alcun problema di minimizzazione. Tale generalizzazione è data dal famoso lemma di Lax-Milgram [24].

Non ci resta che decidere in quale spazio \mathbf{V} andare a ricercare la soluzione della formulazione debole del nostro problema di elasticità lineare. Osserviamo innanzitutto che la forma bilineare simmetrica B del Teorema 2.2.2 è continua rispetto alla norma $\|\cdot\|_{1,\Omega}$. Per questo motivo viene naturale scegliere

$$\mathbf{V} := \{\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega); \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ da-q.o su } \Gamma_0\}.$$

Per quanto detto nel precedente capitolo inoltre sappiamo che $\lambda, \mu > 0$ e quindi ricaviamo

$$\begin{aligned} B(\mathbf{v}, \mathbf{v}) &= \int_{\Omega} \{\lambda \text{tr}(\mathbf{e}(\mathbf{v})) \text{tr}(\mathbf{e}(\mathbf{v})) + 2\mu \mathbf{e}(\mathbf{v}) : \mathbf{e}(\mathbf{v})\} dx \\ &\geq 2\mu \int_{\Omega} \mathbf{e}(\mathbf{v}) : \mathbf{e}(\mathbf{v}) dx. \end{aligned}$$

Allora possiamo ottenere la \mathbf{V} -ellitticità di B se mostriamo che, sullo spazio \mathbf{V} , la semi-norma

$$\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega) \rightarrow |\mathbf{e}(\mathbf{v})|_{0,\Omega} := \left\{ \int_{\Omega} \mathbf{e}(\mathbf{v}) : \mathbf{e}(\mathbf{v}) dx \right\}^{1/2} \quad (2.20)$$

è una norma equivalente alla norma $\|\cdot\|_{1,\Omega}$. Questo risultato è in effetti una conseguenza di una famosa disuguaglianza, dovuta a Korn, che presentiamo nel prossimo teorema (vedi [9]).

Teorema 2.2.4. Sia Ω un dominio in \mathbb{R}^3 . Per ogni $\mathbf{v} = (v_i) \in \mathbf{H}^1(\Omega)$, poniamo $\mathbf{e}(\mathbf{v}) := (\frac{1}{2}(\partial_j v_i + \partial_i v_j)) \in \mathbf{L}^2(\Omega)$. Allora esiste una costante $c > 0$ tale che

$$\|\mathbf{v}\|_{1,\Omega} \leq c \{|\mathbf{v}|_{0,\Omega}^2 + |\mathbf{e}(\mathbf{v})|_{0,\Omega}^2\}^{1/2} \quad \text{per ogni } \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega), \quad (2.21)$$

e quindi, nello spazio $\mathbf{H}^1(\Omega)$, la mappa

$$\mathbf{v} \rightarrow \{|\mathbf{v}|_{0,\Omega}^2 + |\mathbf{e}(\mathbf{v})|_{0,\Omega}^2\}^{1/2}$$

è una norma equivalente alla norma $\|\cdot\|_{1,\Omega}$.

La disuguaglianza proposta mostra che i due spazi di Hilbert

$$\mathbf{H}^1(\Omega) = \{\mathbf{v} = (v_i) \in \mathbf{L}^2(\Omega); \partial_j v_i \in L^2(\Omega), 1 \leq i, j \leq 3\}$$

e

$$\mathbf{K}(\Omega) := \left\{ \mathbf{v} = (v_i) \in \mathbf{L}^2(\Omega); e_{i,j}(\mathbf{v}) = \frac{1}{2}(\partial_j v_i + \partial_i v_j) \in L^2(\Omega), 1 \leq i, j \leq 3 \right\},$$

sono identici. Possiamo allora osservare che la disuguaglianza di Korn è una conseguenza dei Corollari 2 e 3, considerando la mappa identità da $\mathbf{H}^1(\Omega)$ in $\mathbf{K}(\Omega)$, che risulta essere biettiva in quanto $\mathbf{H}^1(\Omega) = \mathbf{K}(\Omega)$, e continua, dato che chiaramente esiste una costante d tale che

$$\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{K}(\Omega)} := \{|\mathbf{v}|_{0,\Omega}^2 + |\mathbf{e}(\mathbf{v})|_{0,\Omega}^2\}^{1/2} \leq d \|\mathbf{v}\|_{1,\Omega} \quad \text{per ogni } \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega).$$

Un fatto sorprendente appare essere l'inclusione $\mathbf{H}^1(\Omega) \supset \mathbf{K}(\Omega)$ (l'inclusione opposta è ovvia), in quanto le funzioni in $\mathbf{K}(\Omega)$ hanno solo sei combinazioni lineari indipendenti di derivate parziali nello spazio $L^2(\Omega)$, mentre le funzioni $\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ devono avere tutte le nove derivate parziali $\partial_j v_i$ in $L^2(\Omega)$. Infine possiamo enunciare il teorema che, grazie alla disuguaglianza di Korn, mostra la \mathbf{V} -ellitticità della forma bilineare $\mathbf{v} \rightarrow \int_{\Omega} \mathbf{e}(\mathbf{v}) : \mathbf{e}(\mathbf{v}) \, dx$, da cui segue quella della forma bilineare B .

Teorema 2.2.5. *Sia Ω un dominio in \mathbb{R}^3 , sia Γ_0 un sottoinsieme da-misurabile di $\Gamma = \partial\Omega$. Allora posto*

$$\mathbf{V} := \{\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega); \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ da-q.o su } \Gamma_0\},$$

se Γ_0 ha misura non nulla, esiste una costante $c > 0$ tale che

$$c^{-1} \|\mathbf{v}\|_{1,\Omega} \leq |\mathbf{e}(\mathbf{v})|_{0,\Omega} \leq c \|\mathbf{v}\|_{1,\Omega} \quad \text{per ogni } \mathbf{v} \in \mathbf{V},$$

ovvero sullo spazio \mathbf{V} , la semi-norma $\mathbf{v} \rightarrow |\mathbf{e}(\mathbf{v})|_{0,\Omega}$ è una norma, equivalente alla norma $\|\cdot\|_{1,\Omega}$.

Finalmente siamo pronti per enunciare il teorema di esistenza della soluzione $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ della forma debole del problema (2.9). Tale soluzione verrà chiamata **soluzione debole**.

Teorema 2.2.6. *Sia Ω un dominio in \mathbb{R}^3 e sia Γ_0 un sottoinsieme da-misurabile di Γ con misura diversa da zero. Posto $\Gamma_1 = \Gamma - \Gamma_0$, consideriamo le costanti di Lamé $\lambda, \mu > 0$ e assumiamo $\mathbf{f} \in \mathbf{L}^{6/5}(\Omega)$ e $\mathbf{g} \in \mathbf{L}^{4/3}(\Gamma_1)$.*

Allora esiste una ed una sola funzione \mathbf{u} nello spazio

$$\mathbf{V} := \{ \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega); \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ da-q.o su } \Gamma_0 \}$$

che soddisfa

$$B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = L(\mathbf{v}) \quad \text{per ogni } \mathbf{v} \in \mathbf{V},$$

dove ricordiamo che abbiamo posto

$$B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \int_{\Omega} \{ \lambda \operatorname{tr}(\mathbf{e}(\mathbf{u})) \operatorname{tr}(\mathbf{e}(\mathbf{v})) + 2\mu \mathbf{e}(\mathbf{u}) : \mathbf{e}(\mathbf{v}) \} dx,$$

$$L(\mathbf{v}) := \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dx + \int_{\Omega} \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} da.$$

Inoltre si ha

$$J(\mathbf{u}) = \inf_{\mathbf{v} \in \mathbf{V}} J(\mathbf{v}), \quad \text{dove } J(\mathbf{v}) := \frac{1}{2} B(\mathbf{v}, \mathbf{v}) - L(\mathbf{v}).$$

Dimostrazione. Il teorema delle immersioni di Sobolev (Teorema 2.1.3) e la continuità dell'operatore traccia (vedi [8]) implicano che l'operatore L è lineare sullo spazio $\mathbf{H}^1(\Omega)$ se $\mathbf{f} \in \mathbf{L}^{6/5}(\Omega)$ e $\mathbf{g} \in \mathbf{L}^{4/3}(\Gamma_1)$. Inoltre da $\lambda > 0$, $\mu > 0$ e il fatto che Γ_0 ha misura non nulla, la forma bilineare simmetrica e continua B risulta anche essere \mathbf{V} -ellittica per il Teorema 2.2.6. Infine la tesi deriva dal Teorema 2.2.3. \square

Come promesso mostriamo infine un risultato di regolarità addizionale, che si verifica quando il problema è di **puro spostamento**, ovvero $\Gamma = \Gamma_0$. Poiché stiamo considerando le condizioni al bordo $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ su Γ , lo spazio \mathbf{V} sarà lo spazio di Sobolev $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$.

Teorema 2.2.7. *Sia Ω un dominio in \mathbb{R}^3 con bordo Γ di classe \mathcal{C}^2 , sia $\mathbf{f} \in \mathbf{L}^p(\Omega)$ con $p \geq \frac{6}{5}$ e sia $\Gamma = \Gamma_0$. Allora la soluzione debole $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ del problema linearizzato è nello spazio $\mathbf{W}^{2,p}(\Omega)$ e soddisfa*

$$-\operatorname{div} \{ \lambda (\operatorname{tr}(\mathbf{e}(\mathbf{u}))) \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{e}(\mathbf{u}) \} = \mathbf{f} \quad \text{in } L^p(\Omega).$$

Sia inoltre $m \geq 1$ un intero. Se il bordo Γ è di classe \mathcal{C}^{m+2} e se $\mathbf{f} \in \mathbf{W}^{m,p}(\Omega)$, allora la soluzione debole $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ è nello spazio $\mathbf{W}^{m+2,p}(\Omega)$.

2.3 Esistenza per l'elasticità non lineare

Dopo aver analizzato nel dettaglio le principali proprietà dell'equazione linearizzata, cominciamo questa sezione considerando il problema (2.1) per un materiale di Kirchhoff-St Venant con condizioni al bordo di Dirichlet. Questa particolare scelta non risulta troppo restrittiva, in quanto mostra le principali caratteristiche del modello ed al contempo è molto più facile da utilizzare. Assumendo quindi che le forze in gioco siano carichi morti e che le condizioni al bordo di Dirichlet siano omogenee, otteniamo il seguente problema al bordo

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\{(\mathbf{I} + \nabla\mathbf{u})\boldsymbol{\Sigma}\} = \mathbf{f} & \text{in } \Omega, \\ \boldsymbol{\Sigma} = \check{\boldsymbol{\Sigma}}(\mathbf{E}(\mathbf{u})) = \lambda(\operatorname{tr}(\mathbf{E}(\mathbf{u})))\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{E}(\mathbf{u}) & \text{in } \Omega, \\ \mathbf{u} = 0 & \text{su } \Gamma, \end{cases} \quad (2.22)$$

che possiamo scrivere in alternativa componente per componente nel seguente modo

$$\begin{cases} -\partial_j(\sigma_{i,j} + \sigma_{k,j}\partial_k u_i) = f_i & \text{in } \Omega, \\ \sigma_{i,j} = a_{i,j,p,q} E_{p,q}(\mathbf{u}) & \text{in } \Omega, \\ a_{i,j,p,q} = \lambda\delta_{i,j}\delta_{p,q} + \mu(\delta_{i,p}\delta_{j,q} + \delta_{i,q}\delta_{j,p}), \\ E_{i,j}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\partial_i u_j + \partial_j u_i + \partial_i u_m \partial_j u_m), \\ u_i = 0 & \text{su } \Gamma. \end{cases} \quad (2.23)$$

Ricordiamo inoltre che possiamo esprimere il problema appena descritto in modo tale che il vettore di spostamento sia l'unica incognita: Cerchiamo quindi un campo vettoriale $\mathbf{u} : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$ che soddisfa

$$\begin{cases} \mathbf{A}(\mathbf{u}) = \mathbf{f} & \text{in } \Omega, \\ \mathbf{u} = \mathbf{0} & \text{su } \Gamma, \end{cases} \quad (2.24)$$

dove l'operatore non lineare $\mathbf{A} = (A_i)$ è definito da

$$\begin{aligned} A_i(\mathbf{u}) := & -\partial_i(a_{i,j,p,q} e_{p,q}(\mathbf{u})) + \frac{1}{2}a_{i,j,p,q}\partial_p u_m \partial_q u_m \\ & + a_{k,j,p,q}\partial_p u_q \partial_k u_i + \frac{1}{2}a_{k,j,p,q}\partial_p u_m \partial_q u_m \partial_k u_i \end{aligned}$$

dove abbiamo utilizzato la relazione

$$a_{k,j,p,q} e_{p,q}(\mathbf{u}) = a_{k,j,p,q} \partial_p u_q,$$

che segue dalla proprietà di simmetria $a_{i,j,p,q} = a_{i,j,q,p}$ e da

$$e_{p,q}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\partial_p u_q + \partial_q u_p) .$$

Passiamo allora ad enunciare il teorema di esistenza per il problema (2.22).

Teorema 2.3.1. *Sia Ω un dominio in \mathbb{R}^3 con frontiera Γ di classe C^2 e assumiamo che l'equazione costitutiva sia della forma*

$$\check{\Sigma}(\mathbf{E}) = \lambda(\text{tr}(\mathbf{E}))\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{E} , \quad \text{con } \lambda > 0, \mu > 0 .$$

Allora per ogni numero $p > 3$, esiste un intorno F^p dell'origine nello spazio $L^p(\Omega)$ e un intorno \mathbf{U}^p dell'origine nello spazio

$$\mathbf{V}^p(\Omega) := \{ \mathbf{v} \in \mathbf{W}^{2,p}(\Omega); \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ su } \Gamma \} ,$$

tale che, per ogni $\mathbf{f} \in F^p$, il problema

$$\mathbf{A}(\mathbf{u}) := -\text{div} \{ (\mathbf{I} + \nabla \mathbf{u}) \check{\Sigma}(\mathbf{E}(\mathbf{u})) \} = \mathbf{f} ,$$

con condizioni al bordo di Dirichlet omogenee, ha una sola soluzione $\mathbf{u} \in \mathbf{U}^p$.

Dimostrazione. L'osservazione principale da fare è che, dal Teorema 2.1.4, lo spazio di Sobolev $W^{1,p}$ è un'algebra di Banach per $p > 3$ se Ω è un dominio. Come conseguenza, l'operatore non lineare \mathbf{A} mappa lo spazio $\mathbf{W}^{2,p}(\Omega)$ nello spazio $L^p(\Omega)$. Poiché la soluzione $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ è chiaramente una soluzione corrispondente a $\mathbf{f} = \mathbf{0}$, l'idea naturale consiste nel mostrare che la mappa \mathbf{A} è localmente invertibile, ovvero in un intorno di questa particolare soluzione. In poche parole, l'obiettivo è quello di applicare il teorema della funzione implicita, Teorema 2.1.1, in un intorno dell'origine nello spazio $\mathbf{V}^p(\Omega) \times L^p(\Omega)$. L'unica assunzione che dobbiamo verificare riguarda il fatto che la derivata $\mathbf{A}'(\mathbf{0})$ nell'origine sia un isomorfismo tra gli spazi $\mathbf{V}^p(\Omega)$ e $L^p(\Omega)$. Ma il problema di trovare \mathbf{u} tale che

$$\mathbf{A}'(\mathbf{0})\mathbf{u} = \mathbf{f}$$

è esattamente il problema linearizzato

$$\begin{cases} -\partial_j(a_{i,j,p,q}e_{p,q}(\mathbf{u})) = f_i & \text{in } \Omega, \\ u_i = 0 & \text{su } \Gamma, \end{cases} \quad (2.25)$$

ovvero l'operatore $\mathbf{A}'(\mathbf{0})$ è esattamente l'operatore dell'elasticità linearizzata.

Poiché Γ è di classe \mathcal{C}^2 , possiamo applicare i risultati di regolarità ottenuti nella sezione precedente (Teoremi 2.2.6 e 2.2.7): Per ogni $\mathbf{f} \in \mathbf{L}^p(\Omega)$, $p > 3$, il problema $\mathbf{A}'(\mathbf{0})\mathbf{u} = \mathbf{f}$ ha una ed una sola soluzione \mathbf{u} nello spazio $\mathbf{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbf{W}^{2,p}(\Omega)$. Questo ci dice che l'operatore lineare e continuo $\mathbf{A}'(\mathbf{0}) : \mathbf{V}^p(\Omega) \rightarrow \mathbf{L}^p(\Omega)$ è biettiva. Inoltre il suo inverso risulta essere ancora continuo dal Corollario 2. Abbiamo così mostrato che la derivata $\mathbf{A}'(\mathbf{0})$ è un isomorfismo, da cui la tesi. \square

Come detto i materiali di Kirchhoff-St Venant risultano essere un buon modello per l'elasticità, d'altra parte con un minimo sforzo si può enunciare un risultato di esistenza per un generico materiale omogeneo isotropo la cui configurazione di riferimento è uno stato naturale.

Teorema 2.3.2. *Sia Ω un dominio in \mathbb{R}^3 con frontiera Γ di classe \mathcal{C}^2 e sia data una mappa $\check{\Sigma} \in \mathcal{C}^2(\mathbb{V}(\mathbf{0}); \mathbb{S}^3)$ che soddisfa*

$$\check{\Sigma}(\mathbf{E}) = \lambda(\text{tr}(\mathbf{E})) + 2\mu\mathbf{E} + O(\|\mathbf{E}\|^2), \quad \text{con } \lambda > 0, \mu > 0.$$

Allora per ogni numero $p > 3$, esiste un intorno \mathbf{F}^p dell'origine nello spazio $\mathbf{L}^p(\Omega)$ e un intorno \mathbf{U}^p dell'origine nello spazio

$$\mathbf{V}^p(\Omega) = \{ \mathbf{v} \in W^{2,p}(\Omega); \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ su } \Gamma \}$$

tale che per ogni $\mathbf{f} \in \mathbf{F}^p$, il problema al bordo

$$\mathbf{A}(\mathbf{u}) = -\text{div} \{ (\mathbf{I} + \nabla \mathbf{u}) \check{\Sigma}(\mathbf{E}(\mathbf{u})) \} = \mathbf{f}$$

ha esattamente una soluzione $\mathbf{u} \in \mathbf{U}^p$.

Osservazione 2.4. La dimostrazione si basa, come nel caso del Teorema 2.3.1, sull'applicazione del teorema della funzione implicita nello spazio $\mathbf{V}^p(\Omega) \times \mathbf{L}^p(\Omega)$, una volta mostrato che $\mathbf{A}'(\mathbf{0}) \in \text{Isom}(\mathbf{V}^p(\Omega); \mathbf{L}^p(\Omega))$.

CAPITOLO 3

APPROSSIMAZIONE NUMERICA DEL MODELLO DI VON KÁRMÁN

Abbiamo introdotto nei precedenti capitoli gli strumenti necessari di meccanica dei continui e di analisi funzionale al fine di giustificare il modello tridimensionale di elasticità non lineare. Tale sistema di equazioni è molto importante nel contesto del nostro studio, infatti risulta essere il punto di partenza per la derivazione del modello di *Von Kármán*.

Si può infatti dimostrare rigorosamente che a partire da (2.22) e attraverso il metodo delle espansioni formali si riesce a giustificare e trovare risultati di esistenza e unicità in analogia con quanto fatto precedentemente, per il modello che descrive le deformazioni di una piastra in due dimensioni.

In questo capitolo andremo quindi a studiare il sistema di Von Kármán dal punto di vista analitico e numerico, addentrandoci nella teoria delle biforcazioni, al fine di individuare il *fenomeno di buckling* che si osserva empiricamente.

Per fare ciò utilizzeremo, a livello numerico, due diversi approcci che possono essere sintetizzati schematicamente con metodi *full order* e metodi *reduced order*.

Procediamo allora con l'analisi di tale modello e delle sue principali caratteristiche.

3.1 Modello di Von Kármán e biforcazioni

Immaginiamo di avere una piastra rettangolare e bidimensionale in stato di riposo. A livello empirico e sperimentale sappiamo che se esercitiamo una forza di compressione lungo i lati di tale piastra, esisterà un valore critico per la compressione tale per cui, a partire da esso, si ottiene una deformazione lungo l'asse normale al piano individuato dalla piastra.

Tale fenomeno viene chiamato *fenomeno di buckling* e corrisponde nell'ottica del modello matematico ad una mancanza di unicità della soluzione. I punti in cui avviene questo passaggio vengono chiamati *punti di biforcazione* ed il nostro scopo è definirli matematicamente, analizzarne le proprietà ed infine riuscire ad individuarli mediante le simulazioni numeriche.

3.1.1 Equazioni di Von Kármán

Partendo dalle equazioni (2.22) e utilizzando il metodo delle espansioni asintotiche [9] si arriva al seguente sistema di equazioni al quarto ordine, non lineari e parametriche

$$\begin{cases} \Delta^2 u = [\lambda\theta + \phi, u] + f, & \text{in } \Omega \\ \Delta^2 \phi = -[u, u], & \text{in } \Omega \end{cases} \quad (3.1)$$

nelle incognite u e ϕ con il dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ed f una forza esterna trasversale ad esso. Abbiamo indicato con la variabile u lo spostamento lungo l'asse normale alla piastra, mentre la variabile ϕ è una incognita ausiliaria chiamata *potenziale di Airy*, legata alle derivate seconde del tensore degli sforzi di Piola-Kirchhoff.

Tale sistema risulta essere del quarto ordine a causa della presenza dell'operatore *biarmonico*, anche detto *bilaplaciano*, definito nel piano a partire dall'operatore laplaciano nel seguente modo

$$\Delta^2 := \Delta\Delta = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)^2. \quad (3.2)$$

La non linearità del problema è invece dovuta al *bracket di Monge-Ampère* definito come prodotto delle derivate seconde delle due incognite

$$[u, \phi] := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}. \quad (3.3)$$

Infine il problema (3.1) è di tipo parametrico per via del parametro $\lambda \in \mathbb{R}$ che misura l'intensità della compressione modellizzata dalla funzione θ .

Tale modello risulta essere, grazie ad un riscaldamento delle incognite, molto semplificato, in quanto "ad esempio" non sono presenti le costanti dell'elasticità quali il modulo di Young o il coefficiente di Poisson.

Osservazione 3.1. Tramite le equazioni di Von Kármán è anche possibile giustificare un primo e semplice modello per le deformazioni di una piastra, ovvero il problema di Poisson

$$-p\Delta u = g \quad \text{in } \Omega, \quad (3.4)$$

dove $p \in \mathbb{R}$ è il parametro che misura la *tensione* della membrana. Infatti è possibile dimostrare che quando la tensione è sufficientemente grande (ovvero per valori di p molto alti), se g rappresenta la forza trasversale agente sulla piastra, allora la soluzione del problema di Von Kármán si comporta come la soluzione del problema per la membrana lineare.

Ovviamente al problema (3.1) dobbiamo associare delle adeguate condizioni al bordo per entrambe le incognite. In letteratura sono presenti molte possibilità, citiamo qui le due più importanti ed utilizzate:

$$\begin{cases} u = \Delta u = 0, & \text{in } \partial\Omega \\ \phi = \Delta\phi = 0, & \text{in } \partial\Omega \end{cases} \quad (3.5)$$

dette di **semplice supporto** e

$$\begin{cases} u = \partial_n u = 0, & \text{in } \partial\Omega \\ \phi = \partial_n \phi = 0, & \text{in } \partial\Omega \end{cases} \quad (3.6)$$

dette di **blocco totale**, nelle quali abbiamo indicato con ∂_n la derivata nella direzione normale n alla frontiera $\partial\Omega$.

Le condizioni al bordo (3.6) rappresentano fisicamente una piastra completamente bloccata agli estremi. Tali condizioni risultano quelle fisicamente più rilevanti, ma sono spesso difficili da trattare a livello numerico. Per tale motivo quelle che utilizzeremo dapprima per trovare la formulazione debole del nostro sistema e successivamente nelle simulazioni saranno quelle di semplice supporto.

Prima di andare a derivare la formulazione debole del problema che risulterà fondamentale per l'implementazione del modello, associamo a

(3.1) il problema linearizzato

$$\begin{cases} \Delta^2 u = \lambda[\theta, u], & \text{in } \Omega \\ u = \Delta u = 0, & \text{in } \partial\Omega \end{cases} \quad (3.7)$$

attorno alla soluzione di equilibrio $(u, \phi) = (0, 0)$ quando la forzante f è nulla. Per questo motivo nel seguito ipotizzeremo la forzante f nulla.

Tornando al problema (3.1) con condizioni al bordo (3.5) osserviamo che queste ultime ci danno un'indicazione sulla derivazione della formulazione debole. Quello che si può fare è infatti riscrivere il sistema di due equazioni al quarto ordine come un sistema di quattro equazioni al secondo ordine. Ovvero quello che vogliamo fare è introdurre le due nuove incognite

$$U = \Delta u, \quad \Phi = \Delta \phi, \quad (3.8)$$

e scrivere il sistema (3.1) nella forma

$$\begin{cases} \Delta U = [\lambda\theta + \phi, u], & \text{in } \Omega \\ \Delta \Phi = -[u, u], & \text{in } \Omega \\ \Delta u = U, & \text{in } \Omega \\ \Delta \phi = \Phi, & \text{in } \Omega \end{cases} \quad (3.9)$$

in cui i termini del secondo ordine sono dati dall'operatore laplaciano. Ovviamente possiamo riscrivere anche le condizioni al bordo (3.5) nella forma

$$\begin{cases} U = 0, & \text{in } \partial\Omega \\ \Phi = 0, & \text{in } \partial\Omega \\ u = 0, & \text{in } \partial\Omega \\ \phi = 0, & \text{in } \partial\Omega \end{cases} \quad (3.10)$$

il che ci porta come vedremo a definire la formulazione debole nel modo usuale, ovvero similmente a quanto si fa per il problema di Poisson.

La scelta di utilizzare questa particolare decomposizione del sistema deriva dal tipo di tecnica numerica che abbiamo scelto per discretizzare il problema. In letteratura sono presenti molti altri "stratagemmi" per facilitare lo studio e la successiva risoluzione del sistema (vedi [11] e [23]).

Deriviamo ora la formulazione debole. Procediamo nella maniera usuale, ovvero moltiplicando ogni equazione di (3.9) per una funzione test appartenente ad un appropriato spazio funzionale e integrando su tutto il dominio Ω . Scaricando le derivate e considerando le condizioni al bordo

(3.10) si giunge alla seguente formulazione: Cerchiamo (U, u, Φ, ϕ) tali che

$$\begin{cases} (\nabla U, \nabla v)_{L^2(\Omega)} + (\lambda[\theta, u] + [\phi, u], v)_{L^2(\Omega)} = 0, \\ (\nabla \Phi, \nabla \psi)_{L^2(\Omega)} - ([u, u], \psi)_{L^2(\Omega)} = 0, \\ (\nabla u, \nabla w)_{L^2(\Omega)} + (U, w)_{L^2(\Omega)} = 0, \\ (\nabla \phi, \nabla \theta)_{L^2(\Omega)} + (\Phi, \theta)_{L^2(\Omega)} = 0, \end{cases} \quad (3.11)$$

che devono valere per ogni $(v, \psi, w, \theta) \in (H_0^1(\Omega))^4$.

Terminiamo questa sezione precisando il tipo di fenomeno fisico che vogliamo modellizzare. Siamo interessati alla compressione di una piastra rettangolare lungo i lati paralleli all'asse y (vedi Fig. 3.1). In questo caso dovremo quindi scegliere la funzione θ come una parabola concava in funzione della variabile y .

Imponendo quindi $\theta(x, y) = -\frac{1}{2}y^2$ e svolgendo i conti presenti nel bracket di Monge-Ampère otteniamo il sistema

$$\begin{cases} \Delta^2 u + \lambda u_{xx} = [\phi, u], & \text{in } \Omega \\ \Delta^2 \phi = -[u, u], & \text{in } \Omega \end{cases} \quad (3.12)$$

di cui andremo a studiare le caratteristiche di stabilità delle soluzioni nella prossima sezione. Infine è interessante notare che nel caso in cui si considera la compressione agente sui tutti e quattro i lati, il *bracket* restituisce l'operatore laplaciano applicato alla funzione u .

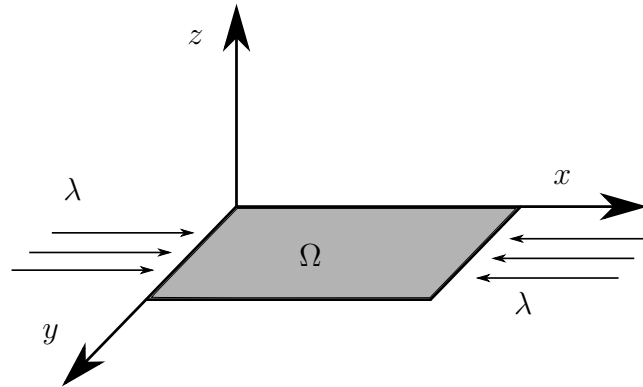


Fig. 3.1: Piastra rettangolare bidimensionale con compressione sui lati paralleli all'asse delle ordinate.

3.1.2 Biforcazioni

Il nostro principale interesse nelle equazioni di Von Kármán è lo studio della stabilità e dell'unicità delle soluzioni. Innanzitutto cominciamo con l'osservare che, come detto prima, per una piastra soggetta a compressione esiste, a livello sperimentale ed empirico, un determinato valore di tale forza per cui la piastra si deforma. Data la simmetria del problema, però, non possiamo che aspettarci l'esistenza di almeno due soluzioni uguali e con segno opposto. Infatti se una data deformazione è soluzione del sistema (3.12), allora la deformazione che si ottiene riflettendo quest'ultima rispetto al piano dove giace la piastra è ancora una soluzione di (3.12).

Inoltre per ogni valore del parametro $\lambda \in \mathbb{R}$ il sistema ammette la soluzione nulla $(u, \phi) = (0, 0)$. Questo ci fa capire che il problema ammette più soluzioni in corrispondenza di un dato valore per il parametro λ .

Prendendo spunto da [3] e [2] introduciamo allora le nozioni di base per la teoria delle biforcazioni.

Come detto, la principale caratteristica dei problemi non lineari è la presenza di più soluzioni per uno specifico parametro. Dal punto di vista teorico si vede allora tale problema non lineare come un'equazione funzionale

$$S(\lambda, u) = 0 \quad (3.13)$$

tale che $S(\lambda, 0) \equiv 0$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$. Stiamo chiedendo dunque che la soluzione nulla esista sempre.

La teoria delle biforcazioni consiste allora nello studio dell'esistenza di quei valori λ^* tali per cui soluzioni non banali, ovvero non nulle, si diramano dalla soluzione $u = 0$.

Consideriamo allora X, Y spazi di Banach e l'equazione (3.13) con $S : \mathbb{R} \times X \rightarrow Y$, possiamo allora definire l'insieme delle *soluzioni non banali* come

$$\Sigma_S = \{(\lambda, u) \in \mathbb{R} \times X : u \neq 0, S(\lambda, u) = 0\}. \quad (3.14)$$

Di importanza fondamentale risulta essere la definizione matematica dei punti a partire dai quali si perde l'unicità della soluzione.

Definizione 3.1. *Un punto di biforcazione per (3.13) è un punto $\lambda^* \in \mathbb{R}$ tale che $(\lambda^*, 0)$ è nella chiusura di Σ_S . In altre parole affinché λ^* sia un punto di biforcazione devono esistere due successioni $\lambda_n \in \mathbb{R}$ e $u_n \in X \setminus \{0\}$ tali che*

- (i) $S(\lambda_n, u_n) = 0$,
- (ii) $S(\lambda_n, u_n) \rightarrow (\lambda^*, 0)$.

Diamo allora un esempio di questo tipo di punti in un caso molto più semplice: questo avrà il duplice scopo di illustrare in linea generale un tipo di biforcazione e di presentare delle caratteristiche analoghe al nostro problema che risulta essere ben più complesso.

Consideriamo allora l'equazione differenziale ordinaria

$$\frac{du}{dt} = f(\lambda, u) = \lambda u - u^3, \tag{3.15}$$

introdotta da Landau per descrivere gli effetti dell'instabilità idrodinamica. I punti critici di (3.15) si trovano imponendo

$$\lambda \bar{u} - \bar{u}^3 = 0$$

le cui soluzioni sono

$$\bar{u}_1 = 0, \quad \bar{u}_2 = \sqrt{\lambda}, \quad \bar{u}_3 = -\sqrt{\lambda}.$$

Si trova allora che se $\lambda \leq 0$ c'è solo un ramo, quello corrispondente alla soluzione nulla, mentre se $\lambda > 0$ ci sono esattamente tre rami, ovvero tre soluzioni. Questo è un esempio di biforcazione di tipo **pitchfork supercritica** (per ottenere la biforcazione *pitchfork subcritica* basta cambiare il segno meno presente nel secondo membro della (3.15)), che possiamo rappresentare mediante il grafico di biforcazione in Fig. 3.2. Poiché questi tre rami si incontrano nel punto $\lambda = 0$, allora quello sarà il nostro punto di biforcazione λ^* .

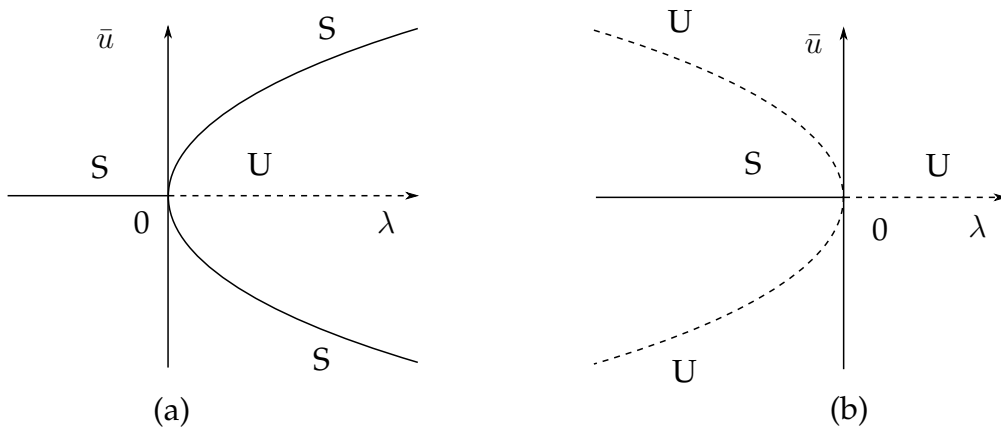


Fig. 3.2: Diagramma di biforcazione *pitchfork*, in cui abbiamo indicato con S i rami stabili e con U i rami instabili, di tipo (a) supercritica e (b) subcritica.

Notiamo allora due cose:

- (i) L'esistenza del punto di biforcazione e quindi della non unicità della soluzione, è permesso dal fatto che stiamo violando le ipotesi del teorema della funzione implicita in quanto $f_u = \lambda - 3u^2 = 0$ nel punto $(\lambda, u) = (0, 0)$.
- (ii) La simmetria presente nel problema, dovuta principalmente al termine cubico, e che ritroveremo anche nello studio delle biforcazioni per le equazioni di Von Kármán, si manifesta tramite la simmetria del diagramma di biforcazione.

Non ci resta quindi che provare a capire quali siano questi punti di biforcazione. Potremmo infatti analizzare numericamente le equazioni per ogni valore del parametro λ , osservando quando si manifesta il fenomeno di *buckling*. Questo però risulta essere un compito molto oneroso a livello computazionale, si è quindi cercato un modo alternativo per individuare tali punti. A tale scopo diversi lavori del passato [4] e [5] hanno indicato il collegamento tra i punti di biforcazione e il comportamento degli autovalori.

Questo collegamento non è sorprendente, in quanto già per i sistemi di equazioni differenziali ordinarie sappiamo che lo studio della stabilità degli equilibri si effettua mediante l'analisi del segno degli autovalori.

Poiché possiamo vedere i punti di biforcazione come i punti nei quali cambiano le stabilità degli equilibri del sistema, possiamo individuare tali punti proprio grazie agli autovalori. Nello specifico quello che vorremmo vedere è l'attraversamento da parte dell'autovalore dell'asse immaginario, quando lasciamo variare il parametro di compressione λ .

Riprendendo allora la Definizione (3.1) possiamo dare il seguente risultato nel caso generico.

Teorema 3.1.1. *Se λ^* è un punto di biforcazione di (3.13) allora $S'_u(\lambda^*, 0) \in L(X; Y)$ non è invertibile.*

Dimostrazione. Se per assurdo $S'_u(\lambda^*, 0)$ fosse invertibile, grazie al teorema della funzione implicita dovrebbe esistere un intorno del punto $(\lambda^*, 0)$ tale per cui l'unica soluzione di $S(\lambda, u) = 0$ dovrebbe essere quella nulla, da cui l'assurdo per la definizione di punto di biforcazione. \square

Per quanto riguarda invece le equazioni di Von Kármán si riesce a dimostrare il seguente fondamentale risultato (vedi [5]).

Teorema 3.1.2. *I punti di biforcazione per il sistema omogeneo di Von Kármán (3.1) possono essere solo gli autovalori del problema linearizzato (3.7).*

Assieme a questo risultato presentiamo i seguenti teoremi, che descrivono esattamente quando e come avviene la prima biforcazione. Supponiamo per semplicità che gli autovalori del problema siano tutti reali positivi e ordinati in modo tale che valga $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \dots$, ipotesi soddisfatta nel caso in cui $\theta(x, y) = -\frac{1}{2}y^2$.

Teorema 3.1.3. *Per ogni valore di $\lambda \leq \lambda_1$ il sistema omogeneo (3.1) non ha soluzioni non banali.*

Teorema 3.1.4. *Il primo autovalore λ_1 del sistema linearizzato (3.7) è un punto di biforcazione per il sistema di Von Kármán.*

Stiamo quindi affermando che effettivamente al fine di trovare i punti di biforcazione, possiamo effettuare lo studio degli autovalori per il sistema linearizzato, ed infatti è quello che abbiamo posto come obiettivo, dal punto di vista numerico, di questa tesi.

Essendo allora il nostro scopo quello di fornire una trattazione numerica del problema, andiamo a descrivere i metodi che abbiamo utilizzato per lo studio delle soluzioni del problema e per la ricerca ed analisi dei punti di biforcazione.

3.2 Metodo di Galerkin e riduzione di ordine

Una volta descritto il modello e le principali caratteristiche che può presentare, illustriamo in questa sezione l'algoritmo che abbiamo implementato per studiare il sistema (3.12) e gli autovalori del problema linearizzato.

Dobbiamo trovare la soluzione di un sistema di equazioni al quarto ordine, non lineari che dipendono da un parametro. Siamo quindi nelle condizioni peggiori dal punto di vista del costo computazionale. Per questo motivo una volta implementato l'algoritmo di risoluzione *full order* siamo passati ai *metodi di riduzione di ordine* (ROM), utilizzando in particolare il *metodo delle basi ridotte* e quindi ad un approccio *reduced order*.

Presentiamo allora dapprima lo pseudo-algoritmo utilizzato, ed in seguito i vari metodi che lo costituiscono.

PSEUDO - ALGORITMO

```

1 while ( $\lambda < \lambda_{MAX}$ )
2
3   if ( $\|u\|_{\infty} < tol_1$ )
4      $\mathbf{X} = \mathbf{X}^{(0)}$ ;
5   end

```

```

6
7   while ( $\|\delta\mathbf{X}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} > tol_2$ )
8        $DG(\mathbf{X}^{(i)})\delta\mathbf{X} = G(\mathbf{X}^{(i)});$ 
9        $\mathbf{X}^{(i+1)} = \mathbf{X}^{(i)} - \delta\mathbf{X};$ 
10  end
11
12   $\lambda = \lambda + d\lambda;$ 
13
14  end
    
```

Descrizione: L'algoritmo è principalmente diviso in tre parti fondamentali che corrispondono ai tre metodi che lo compongono.

Si comincia con un **metodo di continuazione** (vedi [15]) che nella sua versione più semplice è implementato mediante un ciclo esterno di esplorazione sui valori del parametro λ . Tale metodo consiste nel cambiare la *guess* iniziale per la risoluzione del problema non lineare, da una *guess* sinusoidale (soluzione del problema linearizzato) alla soluzione del problema per il λ precedente, non appena la soluzione di quest'ultimo risulta essere non nulla (ovvero non appena abbiamo superato il λ critico, che riusciamo a catturare grazie alla norma infinito della soluzione).

Tale approccio è fondamentale al fine di riuscire a studiare l'andamento della soluzione del problema al variare di λ e riuscire così a catturare il fenomeno di *buckling* e a trovare il diagramma di biforcazione.

Data la non linearità del problema è necessario l'utilizzo di un solutore che risolva l'equazione del tipo $G(\mathbf{X}) = 0$ dove stiamo indicando con $\mathbf{X} = (U, u, \Phi, \phi)$ e con $G(\mathbf{X}) = 0$ la formulazione debole

$$\begin{aligned}
 G(U, u, \Phi, \phi) = & (\nabla U, \nabla v)_{L^2(\Omega)} + (\nabla \Phi, \nabla \psi)_{L^2(\Omega)} + (\nabla u, \nabla w)_{L^2(\Omega)} \\
 & + (\nabla \phi, \nabla \theta)_{L^2(\Omega)} + ([\phi, u] - \lambda u_{xx}, v)_{L^2(\Omega)} - ([u, u], \psi)_{L^2(\Omega)} \\
 & + (U, w)_{L^2(\Omega)} + (\Phi, \theta)_{L^2(\Omega)} = 0.
 \end{aligned}$$

Come detto è stato scelto il **metodo di Newton** per la risoluzione del problema per uno specifico valore di λ . In questo caso quello che si fa è scrivere la formulazione debole del problema $G(\mathbf{X}) = 0$, considerare una variazione dell'incognita, derivare tale formulazione e calcolarla nella variazione considerata. Il metodo di Newton (righe 7-10 dello pseudo-algoritmo) corrisponde alla risoluzione di

$$DG(\mathbf{X}^{(i)})\delta\mathbf{X} = G(\mathbf{X}^{(i)}) \quad (3.16)$$

nell'incognita $\delta\mathbf{X} = (\delta U, \delta u, \delta\Phi, \delta\phi)$, dove abbiamo indicato con

$$\begin{aligned} DG(\mathbf{X}^{(i)})\delta\mathbf{X} &= (\nabla(\delta U), \nabla v)_{L^2(\Omega)} + (\nabla(\delta\Phi), \nabla\psi)_{L^2(\Omega)} + (\nabla(\delta u), \nabla w)_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + (\nabla(\delta\phi), \nabla\theta)_{L^2(\Omega)} + ([\delta\phi, u] + [\phi, \delta u] - \lambda(\delta u)_{xx}, v)_{L^2(\Omega)} \\ &\quad - 2([u, \delta u], \psi)_{L^2(\Omega)} + (\delta U, w)_{L^2(\Omega)} + (\delta\Phi, \theta)_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Come criterio di arresto per il metodo si è utilizzata la norma in $\mathbf{H}^1(\Omega)$ del vettore $\delta\mathbf{X}$.

Infine osserviamo che la (3.16) costituisce esattamente una nuova formulazione debole, questa volta senza i termini non lineari, che possiamo risolvere mediante il **metodo di Galerkin**, e più nello specifico quello degli **Elementi Finiti (EF)** che esporremo nella sottosezione successiva.

3.2.1 Elementi finiti

Diamo qui una breve presentazione del metodo di Galerkin Elementi Finiti (vedi [20] e [10]). Il nostro obiettivo è discretizzare l'equazione a derivate parziali di partenza, che nel nostro caso risulta essere un sistema di problemi ellittici. Inoltre dal problema (3.9) siamo arrivati alla formulazione debole (3.11) che può essere riscritta nel modo seguente

$$\text{trovare } \mathbf{X} = (U, u, \Phi, \phi) \in \mathbb{V} : a(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = F(\mathbf{Y}) \quad \text{per ogni } \mathbf{Y} \in \mathbb{V}, \quad (3.17)$$

essendo \mathbb{V} un opportuno spazio di Hilbert.

Sia allora \mathbb{V}_h una famiglia di spazi dipendente da un parametro positivo h , tali che

$$\mathbb{V}_h \subset \mathbb{V}, \quad \dim(\mathbb{V}) = N_h < \infty \quad \forall h > 0.$$

Il problema approssimato assume allora la seguente forma

$$\text{trovare } \mathbf{X}_h \in \mathbb{V}_h : a(\mathbf{X}_h, \mathbf{Y}_h) = F(\mathbf{Y}_h) \quad \text{per ogni } \mathbf{Y}_h \in \mathbb{V}_h, \quad (3.18)$$

e viene detto *problema di Galerkin*. Indicando allora con $\{\varphi_j, j = 1, 2, \dots, N_h\}$ una base di \mathbb{V}_h , basta che la (3.18) sia verificata per ogni funzione della base, in quanto tutte le funzioni dello spazio \mathbb{V}_h sono una combinazione lineare delle φ_j .

Richiederemo allora che

$$a(\mathbf{X}_h, \varphi_i) = F(\varphi_i) \quad i = 1, 2, \dots, N_h. \quad (3.19)$$

Naturalmente, poiché $\mathbf{X}_h \in \mathbb{V}_h$ possiamo scrivere, considerato $\mathbf{x} = (x, y) \in$

Ω

$$\mathbf{X}_h(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{N_h} \mathbf{X}_j \varphi_j(\mathbf{x}), \quad (3.20)$$

dove gli \mathbf{X}_j con $j = 1, 2, \dots, N_h$ sono i coefficienti incogniti.

Le equazioni (3.19) diventano allora

$$\sum_{j=1}^{N_h} \mathbf{X}_j a(\varphi_j, \varphi_i) = F(\varphi_i), \quad i = 1, 2, \dots, N_h. \quad (3.21)$$

Denotiamo allora con \mathbf{A} la *matrice di rigidezza* o di *stiffness* con elementi

$$a_{i,j} = a(\varphi_j, \varphi_i)$$

e con \mathbf{f} il vettore di componenti $f_i = F(\varphi_i)$. Se inoltre indichiamo con $\underline{\mathbf{X}}$ il vettore che ha come componenti i coefficienti incogniti \mathbf{X}_j , le equazioni (3.21) sono equivalenti al sistema lineare

$$\underline{\mathbf{A}} \underline{\mathbf{X}} = \mathbf{f}. \quad (3.22)$$

Una volta definito il problema di Galerkin possiamo definire il metodo degli *Elementi Finiti*. In generale per caratterizzare univocamente un elemento finito nel caso generale occorrono tre entità:

- (i) il dominio di definizione K dell'elemento. Nel caso monodimensionale risulta essere un intervallo, nel caso bidimensionale un triangolo.
- (ii) lo spazio dei polinomi \mathbb{P}_r definito su di esso ed una base $\{\varphi_j\}_{j=1}^{N_r}$ di \mathbb{P}_r .
- (iii) un insieme di funzionali su \mathbb{P}_r , $\Sigma = \{\gamma_i : \mathbb{P}_r \rightarrow \mathbb{R}\}_{i=1}^{N_r}$ che soddisfino $\gamma_i(\varphi_j) = \delta_{ij}$, con δ_{ij} la delta di Kronecker. Essi permettono di identificare univocamente i coefficienti $\{\alpha_j\}_{j=1}^{N_r}$ dello sviluppo di un polinomio $p \in \mathbb{P}_r$ rispetto alla base scelta, $p(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{N_r} \alpha_j \varphi_j(\mathbf{x})$. Infatti si ha $\alpha_i = \gamma_i(p)$, $i = 1, \dots, N_r$. Tali coefficienti sono detti *gradi di libertà* dell'elemento finito.

Nel caso degli elementi finiti di Lagrange la base scelta è fornita appunto dai *polinomi di Lagrange* e il grado di libertà α_i è uguale al valore assunto dal polinomio p in un dato punto \mathbf{a}_i di K , detto *nodo*, ovvero si ha $\alpha_i = p(\mathbf{a}_i)$, $i = 1, \dots, N_r$. Inoltre poiché la conoscenza della posizione dei nodi ci permette di trovare i gradi di libertà, possiamo porre $\Sigma = \{\mathbf{a}_j\}_{j=1}^{N_r}$.

Una volta definito l'*elemento finito di Lagrange* come la terna $(K, \Sigma, \mathbb{P}_r)$, vediamo come è possibile costruirlo dal punto di vista pratico. Ci limitiamo al nostro caso di interesse, ovvero un dominio $\Omega \in \mathbb{R}^2$ poligonale con una triangolazione \mathcal{T}_h che ne rappresenta il ricoprimento con triangoli non sovrapposti.

In questo modo il dominio discretizzato

$$\Omega_h = \text{int} \left(\bigcup_{K \in \mathcal{T}_h} K \right)$$

rappresentato dalla parte interna dell'unione dei triangoli di \mathcal{T}_h coincide esattamente con Ω . Il parametro h è ovviamente legato alla spaziatura della griglia, posto $h_K = \text{diam}(K)$ per ogni $K \in \mathcal{T}_h$ allora $h = \max_{K \in \mathcal{T}_h} h_K$.

Infine indichiamo con \mathbb{P}_r lo spazio dei polinomi di grado globale minore o uguale a r , per $r = 1, 2, \dots$

$$\mathbb{P}_r = \left\{ p(x, y) = \sum_{\substack{i, j \geq 0 \\ i+j \leq r}} a_{i,j} x^i y^j, \text{ con } a_{i,j} \in \mathbb{R} \right\}.$$

Ovviamente la dimensione degli spazi \mathbb{P}_r risulta essere data dalla seguente formula

$$\dim(\mathbb{P}_r) = \frac{(r+1)(r+2)}{2},$$

da cui scegliendo r pari ad 1, 2 e 3 una generica funzione \mathbf{Y}_h è ben definita su ogni elemento $K \in \mathcal{T}_h$ qualora se ne conosca il valore rispettivamente in 3, 6 e 10 nodi opportunamente scelti.

Infine si introduce lo spazio degli elementi finiti

$$\mathcal{X}_h^r = \{ \mathbf{Y}_h \in (C^0(\bar{\Omega}))^4 : \mathbf{Y}_h|_K \in (\mathbb{P}_r)^4, \forall K \in \mathcal{T}_h \}, \quad r = 1, 2, \dots$$

ossia lo spazio delle funzioni globalmente continue che sono polinomiali di grado r sui singoli elementi della triangolazione \mathcal{T}_h . Allo stesso modo definiamo

$$\mathring{\mathcal{X}}_h^r = \{ \mathbf{Y}_h \in \mathcal{X}_h^r : \mathbf{Y}_h|_{\partial\Omega} = 0 \}$$

Tali spazi costituiscono quindi due buoni candidati per l'approssimazione dello spazio \mathbb{V} , a seconda delle condizioni al bordo del problema, nel nostro caso ci porta a definire $\mathbb{V}_h = \mathring{\mathcal{X}}_h^r$.

Come descritto precedentemente, allora, ogni funzione $\mathbf{Y}_h \in \mathbb{V}_h$ è caratterizzata in maniera univoca dal valore che essa assume nei nodi \mathbf{N}_i , con

$i = 1, \dots, N_h$ della triangolazione \mathcal{T}_h ; quindi una base per lo spazio \mathbb{V}_h può essere l'insieme delle $\varphi_j \in \mathbb{V}_h, j = 1, \dots, N_h$, tali che

$$\varphi_j(\mathbf{N}_i) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j, \\ 1 & i = j, \end{cases} \quad i, j = 1, \dots, N_h.$$

In particolare se $r = 1$, i nodi sono i vertici degli elementi, esclusi i vertici appartenenti al bordo di Ω , mentre la generica funzione φ_j è lineare su ogni triangolo ed assume il valore 1 nel nodo \mathbf{N}_j e 0 in tutti gli altri nodi della triangolazione.

3.2.2 Basi ridotte

Immaginiamo di avere a che fare con un problema che richiede la risoluzione di un'equazione alle derivate parziali al variare di un dato parametro. In questi casi ridurre il costo computazionale dell'algoritmo risolutivo è fondamentale. Con questo scopo negli ultimi anni si sono sviluppati dei *modelli di ordine ridotto* (ROM) la cui funzione è quella di sostituire il problema originario di dimensione elevata (tipicamente detta approssimazione ad alta fedeltà) con un problema ridotto di dimensione sostanzialmente minore. Ovviamente all'interno dei ROM ci sono molti modi per arrivare al problema ridotto.

Una di queste strategie è quella che prende il nome di **metodo delle Basi Ridotte** (RB), che consiste in una proiezione del problema ad alta fedeltà, detto anche problema *full order*, in un sottospazio costituito da funzioni di base scelte all'interno dell'insieme delle soluzioni *full order*, corrispondenti a parametri selezionati opportunamente (vedi [14] e [21]). Inizialmente tale metodo è stato applicato ai problemi strutturali non lineari (vedi [17]).

Presentiamo allora dapprima le caratteristiche fondamentali di questo metodo e successivamente l'utilizzo che ne è stato fatto per la risoluzione numerica nel caso specifico del problema di Von Kármán.

Consideriamo in generale un dominio $\Omega \in \mathbb{R}^d$ ed un campo vettoriale $w = (w_1, \dots, w_d) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$. Indichiamo inoltre con \mathbb{V} lo spazio vettoriale di Hilbert con la norma indotta dal prodotto scalare $(\cdot, \cdot)_{\mathbb{V}}$. Infine introduciamo uno spazio dei parametri $\mathbb{P} \in \mathbb{R}^P$ il cui generico elemento è il vettore $\mu = (\mu_{[1]}, \dots, \mu_{[P]})$ e insieme ad esso il campo vettoriale parametro dipendente $u : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{V}$, con $u(\mu)$ che rappresenta il campo per il valore $\mu \in \mathbb{P}$.

Ora vogliamo definire la formulazione debole parametro dipendente. Siano allora $F : \mathbb{V} \times \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{R}$ un funzionale lineare (nella prima variabile) e $a : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \times \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineare (nelle prime due variabili).

Allora dato $\mu \in \mathbb{P}$, cerchiamo $u(\mu) \in \mathbb{V}$ tale che

$$a(u(\mu), v; \mu) = F(v; \mu) \quad \forall v \in \mathbb{V}.$$

Abbiamo già visto nella precedente sezione la discretizzazione di questo problema mediante il metodo di Galerkin (3.18), che in questo caso si scrive: dato $\mu \in \mathbb{P}$, cerchiamo $u_h(\mu) \in \mathbb{V}_h$ tale che

$$a(u_h(\mu), v_h; \mu) = F(v_h; \mu) \quad \forall v_h \in \mathbb{V}_h. \quad (3.23)$$

Ci riferiremo a questo problema come al problema “vero” e tramite diverse tecniche presenti in letteratura la soluzione può essere trovata con la precisione desiderata. Come detto però tale calcolo può essere potenzialmente molto costoso o addirittura impossibile, poiché potrebbe essere necessario un numero troppo elevato di gradi di libertà N_h per ottenere il livello di accuratezza richiesta.

Quella che abbiamo appena descritto è quindi la parte cosiddetta *offline*, nella quale esploriamo empiricamente l’insieme di tutte le soluzioni al variare del parametro μ , al fine di costruire una base, risolvendo N problemi veri, che approssimi ogni elemento di tale spazio accuratamente. Al contrario, come vedremo, la parte *online* consiste in una proiezione di Galerkin, utilizzando la forma bilineare parametrica $a(\cdot, \cdot; \mu)$ con $\mu \in \mathbb{P}$ nello spazio generato dallo span della base ridotta costruita nella fase precedente. In questo modo possiamo esplorare lo spazio dei parametri ad un costo sostanzialmente ridotto, idealmente indipendente da N_h .

Immaginiamo allora di aver costruito una base ridotta N -dimensionale, denotata con $\{\xi_n\}_{n=1}^N \subset \mathbb{V}_h$, tale che lo spazio ridotto associato sia dato da

$$\mathbb{V}_{rb} = \text{span} \{\xi_1, \dots, \xi_N\} \subset \mathbb{V}_h.$$

Assumiamo inoltre che la varietà delle soluzioni al discreto sia approssimabile dallo spazio generato da un piccolo numero di funzioni di base, ovvero stiamo richiedendo che valga $N \ll N_h$.

Dato allora lo spazio delle basi ridotte \mathbb{V}_{rb} , il metodo di riduzione si scrive: per ogni $\mu \in \mathbb{P}$, cerco $u_{rb}(\mu) \in \mathbb{V}_{rb}$ tale che

$$a(u_{rb}(\mu), v_{rb}; \mu) = F(v_{rb}; \mu) \quad \forall v_{rb} \in \mathbb{V}_{rb}. \quad (3.24)$$

Poiché le funzioni di base su \mathbb{V}_{rb} sono date da ξ_1, \dots, ξ_N , possiamo

rappresentare $u_{rb}(\mu)$ nel seguente modo

$$u_{rb}(\mu) = \sum_{n=1}^N (u_{rb}^\mu)_n \xi_n, \quad (3.25)$$

dove $\{(u_{rb}^\mu)_n\}_{n=1}^N$ denota i coefficienti dell'approssimazione nella base ridotta.

A livello pratico definiamo la matrice $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{N_h \times N}$ tale che

$$\xi_n = \sum_{i=1}^{N_h} \mathbf{B}_{i,n} \varphi_i,$$

dove l' n -esima colonna della matrice \mathbf{B} denota i coefficienti quando l' n -esima funzione di base ξ_n è espressa in termini delle funzioni di base $\{\varphi_i\}_{i=1}^{N_h}$. Allora la matrice soluzione per le basi ridotte $\mathbf{A}_{rb}^\mu \in \mathbb{R}^{N \times N}$ e il secondo membro $F_{rb}^\mu \in \mathbb{R}^N$ definiti come

$$(\mathbf{A}_{rb}^\mu)_{m,n} = a(\xi_n, \xi_m; \mu), \quad \text{e} \quad (f_{rb}^\mu)_m = F(\xi_m; \mu), \quad 1 \leq n, m \leq N, \quad (3.26)$$

possono essere calcolati grazie alle seguenti relazioni

$$\mathbf{A}_{rb}^\mu = \mathbf{B}^T \mathbf{A}_h^\mu \mathbf{B}, \quad \text{e} \quad f_{rb}^\mu = \mathbf{B}^T f_h^\mu \quad (3.27)$$

Dove con \mathbf{A}_h^μ e f_h^μ abbiamo indicato l'estensione parametro dipendente delle quantità presenti in (3.22). Infine si ricava la soluzione ridotta (3.25) risolvendo il sistema lineare

$$\mathbf{A}_{rb}^\mu u_{rb}^\mu = f_{rb}^\mu. \quad (3.28)$$

Una riflessione importante sul metodo delle basi ridotte, consiste nel notare che questo non è in nessun modo sostitutivo ad un qualsiasi metodo *full order*, bensì è un utilissimo strumento che interviene successivamente, nella fase online, che ad un costo ridotto ci permette di studiare l'andamento della soluzione di un generico problema al variare del parametro.

Infatti questo aspetto rientra anche nell'analisi dell'accuratezza. Avendo ipotizzato che il risolutore *full order* approssima con la precisione desiderata la soluzione del problema, considerando l'ovvia relazione

$$\|u(\mu) - u_{rb}(\mu)\|_{\mathbb{V}} \leq \|u(\mu) - u_h(\mu)\|_{\mathbb{V}} + \|u_h(\mu) - u_{rb}(\mu)\|_{\mathbb{V}}, \quad (3.29)$$

possiamo affermare che l'accuratezza del metodo delle basi ridotte dipende

dal grado di precisione con il quale riusciamo ad approssimare per un dato parametro la soluzione “vera”.

Va fatta un’ulteriore precisazione sulla fase online. Vorremmo che, al fine di garantire una rapida valutazione della nuova soluzione ridotta, questa fosse del tutto indipendente dai gradi di libertà dell’approssimazione *offline*. Notiamo invece che per ogni parametro $\mu \in \mathbb{P}$ dobbiamo assemblare la matrice \mathbf{A}_h^μ e successivamente costruire $\mathbf{A}_{rb}^\mu = \mathbf{B}^T \mathbf{A}_h^\mu \mathbf{B}$, ma a questo punto il costo computazionale dipende da N_h a causa di $\mathbf{A}_h^\mu \in \mathbb{R}^{N_h \times N_h}$.

Per aggirare questo inconveniente dobbiamo assumere che valga l’ipotesi di **decomposizione affine**

$$a(w, v; \mu) = \sum_{q=1}^{Q_a} \theta_a^q(\mu) a_q(w, v),$$

$$f(v; \mu) = \sum_{q=1}^{Q_f} \theta_f^q(\mu) f_q(v),$$

dove ogni forma

$$a_q : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_q : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R},$$

sono indipendenti dal parametro μ e i coefficienti

$$\theta_a^q : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \theta_f^q : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{R},$$

sono quantità scalari indipendenti da w e v . In questo modo infatti le matrici \mathbf{A}_{rb}^q (di dimensione $N \times N$), ciascuna associata alla forma $a_q(\cdot, \cdot)$, possono essere assemblate nella fase *offline*, in modo tale che l’unica operazione da effettuare per ottenere la matrice ridotta sia

$$\mathbf{A}_{rb}^\mu = \sum_{q=1}^{Q_a} \theta_a^q(\mu) \mathbf{A}_{rb}^q,$$

il cui costo, dell’ordine di $Q_a \cdot N^2$, è finalmente indipendente da N_h . Tramite lo stesso ragionamento si può dedurre un’espressione analoga anche per la forma $f(\cdot; \mu)$.

Vediamo infine come si applica tale metodo alla risoluzione del problema di Von Kármán. Una volta trovata la formulazione debole (3.17) non ci resta che decomporre la forma bilineare, al fine di isolare il parametro λ ,

nel seguente modo

$$\begin{aligned}
 a_1(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) &= (\nabla U, \nabla v)_{L^2(\Omega)} + (\nabla \Phi, \nabla \psi)_{L^2(\Omega)} + (\nabla u, \nabla w)_{L^2(\Omega)} + \\
 &\quad (\nabla \phi, \nabla \theta)_{L^2(\Omega)} + (U, w)_{L^2(\Omega)} + (\Phi, \theta)_{L^2(\Omega)}, \\
 a_2(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) &= (u_x, v_x)_{L^2(\Omega)}, \\
 a_3(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) &= ([\bar{\phi}, u] + [\phi, \bar{u}], v)_{L^2(\Omega)} - 2([u, \bar{u}], \psi)_{L^2(\Omega)},
 \end{aligned} \tag{3.30}$$

dove abbiamo indicato con $\mathbf{X} = (U, u, \Phi, \phi)$ il vettore delle incognite, con $\mathbf{Y} = (v, w, \psi, \theta)$ il vettore delle funzioni test e con \bar{u} e $\bar{\phi}$ le soluzioni calcolate precedentemente. Così possiamo scrivere la forma bilineare di partenza come

$$a(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = a_1(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) + \lambda a_2(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) + a_3(\mathbf{X}, \mathbf{Y}), \tag{3.31}$$

quindi nelle notazioni della decomposizione affine, otteniamo $Q_a = 3$ e $\theta_a^2(\lambda) = \lambda$.

Osservazione 3.2. È stato necessario dividere in due parti anche la forma bilineare indipendente dal parametro in quanto, a causa della non linearità del problema, siamo costretti ad aggiornare la matrice all'interno del metodo di Newton.

3.3 Simulazioni e risultati

Concludiamo questa tesi con l'applicazione dell'impianto teorico e numerico al caso test delle equazioni di Von Kármán nel rettangolo $\Omega = [0, L] \times [0, 1]$.

Dato il sistema di equazioni alle derivate parziali con condizioni al bordo di semplice supporto

$$\begin{cases} \Delta^2 u + \lambda u_{xx} = [\phi, u] , & \text{in } \Omega = [0, L] \times [0, 1] \\ \Delta^2 \phi = -[u, u] , & \text{in } \Omega = [0, L] \times [0, 1] \\ u = \Delta u = 0 & \text{in } \partial\Omega \\ \phi = \Delta \phi = 0 & \text{in } \partial\Omega \end{cases} \tag{3.32}$$

siamo interessati allo studio delle soluzioni al variare del parametro che descrive la compressione lungo i lati paralleli all'asse y . Mostriamo il fenomeno di biforcazione che corrisponde a livello fisico al fenomeno di *buckling*. Di interesse generale è la ricerca dei punti di biforcazione che possono essere riconosciuti all'interno del diagramma di biforcazione,

ma anche mediante lo studio della stabilità delle soluzioni stesse, grazie all'analisi degli autovalori del problema linearizzato.

Tali problemi sono stati affrontati a livello *full order*, ad esempio in [7] e [11]. In questa tesi invece sono stati affrontati, data la complessità del problema, anche a livello ridotto in modo da evidenziare le potenzialità del metodo delle basi ridotte.

Per tutte le simulazioni è stato implementato l'algoritmo di risoluzione nel linguaggio *Freefem++*, mentre per il successivo lavoro di visualizzazione delle soluzioni, costruzione della matrice delle basi ridotte e studio del problema agli autovalori si è utilizzato il software *Matlab*.

3.3.1 Celle e diagrammi di biforcazione

Sono stati studiati due casi significativi: la piastra quadrata corrispondente a $L = 1$ e quella rettangolare con $L = 2$. Quello che ci aspettiamo di vedere, pensando alla soluzione del problema linearizzato, sono delle funzioni dall'andamento sinusoidale. Riconosceremo e diversificheremo le varie soluzioni mediante il numero e la posizione delle celle che appaiono quando consideriamo le curve di livello. Vediamo innanzitutto i grafici di biforcazione trovati per i due valori della lunghezza L .

Piastra quadrata: La figura 3.3 rappresenta il **diagramma di biforcazione** nel caso del dominio $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$.

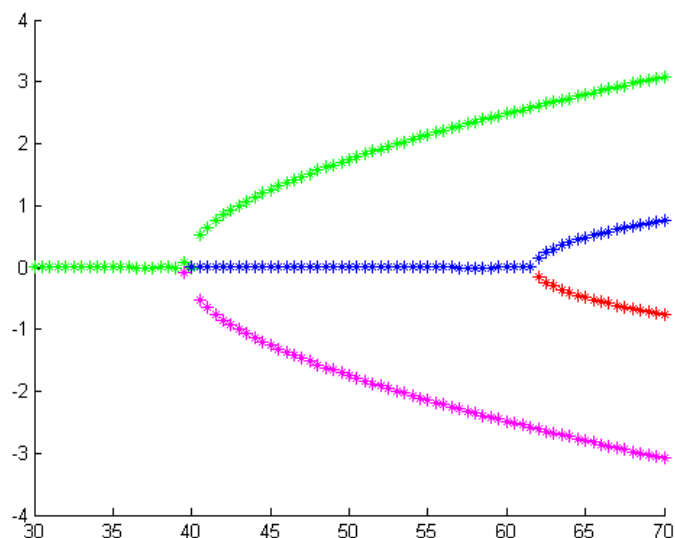


Fig. 3.3: Diagramma di biforcazione *full order* per la piastra quadrata.

Tale grafico rappresenta per ogni valore di $\lambda \in [30, 70]$ in ascissa, il corrispondente valore della soluzione *full order* u nel punto di massimo modulo. Come previsto si osserva il fenomeno di biforcazione dalla soluzione nulla attorno al valore $\lambda^* \approx 40$, ma cambiando *guess* iniziale e facendo variare nuovamente il parametro siamo riusciti a trovare anche la biforcazione successiva.

Entrambi i primi due rami corrispondono alle soluzioni ad una cella (vedi figura 3.4) e il ramo magenta, che si ottiene semplicemente cambiando il segno alla *guess* iniziale, è costituito da soluzioni speculari a quelle del ramo verde.

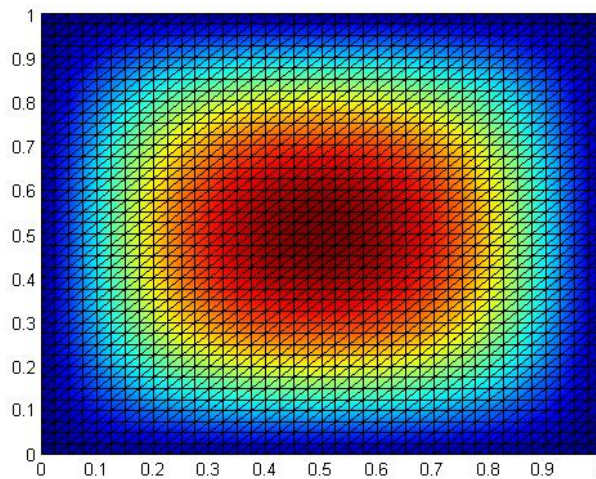


Fig. 3.4: Soluzione *full order* u del problema di Von Kármán, che rappresenta la deformazione della piastra per $\lambda = 70$ appartenente al ramo verde.

La seconda biforcazione invece avviene per i valori di $\lambda \approx 62$ e le soluzioni solo qualitativamente differenti dal caso precedente. Come si può osservare in figura 3.5 si presenta una configurazione a due celle ed anche in questo caso i due rami blu e rosso rappresentano soluzioni uguali con segno opposto.

Nella prossima sottosezione confronteremo allora i valori del λ per cui abbiamo osservato il fenomeno di *buckling* con quelli ottenuti dallo studio degli autovalori.

Passiamo ora invece al confronto di questi risultati con quelli ottenuti grazie al metodo delle basi ridotte. Nella discretizzazione con Galerkin - Elementi Finiti si è trovato un sistema lineare associato alla formulazione debole dell'ordine di $8 \cdot 10^3$. Il nostro obiettivo è stato quindi ridurre il costo computazionale proiettando il problema nello spazio generato dallo

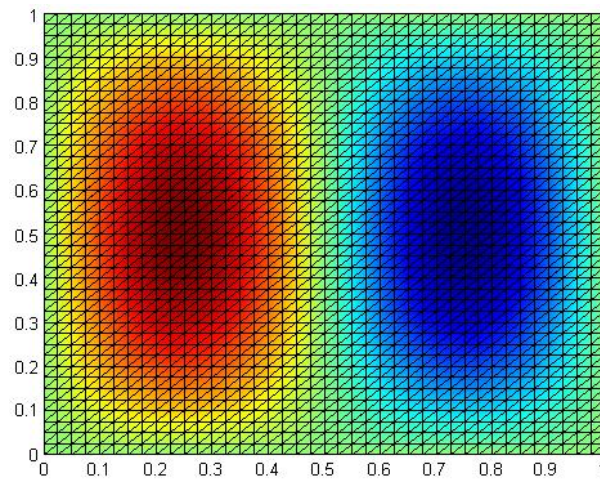


Fig. 3.5: Soluzione *full order* u del problema di Von Kármán, che rappresenta la deformazione della piastra per $\lambda = 70$ appartenente al ramo blu.

span di sole 5 funzioni di base, ovvero di 5 soluzioni *full order*, anche dette *snapshots*, corrispondenti a 5 diversi valori di λ .

In questo modo riusciamo a ricavare informazioni importanti da un sistema di dimensioni molto contenute, ottenendo un'approssimazione molto buona della soluzione vera e riducendo in maniera drastica il tempo computazionale. Nelle figure 3.6 e 3.7 è possibile verificare quanto detto.

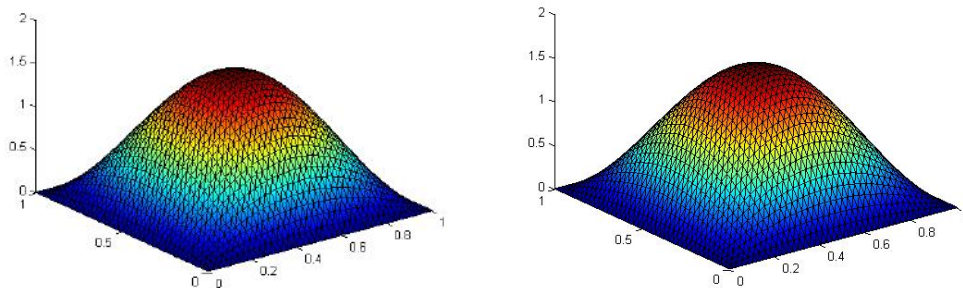


Fig. 3.6: A sinistra la soluzione *full order* u (ramo verde) per $\lambda = 46$ mentre a destra la soluzione *reduced order* corrispondente.

Dunque per queste simulazioni abbiamo utilizzato 5 *snapshots*, in particolare quelli corrispondenti alle soluzioni appartenenti allo stesso ramo per $\lambda \in [30, 70]$. In generale al metodo delle basi ridotte è possibile associare un metodo per il campionamento dei parametri in modo da minimizzare l'errore di approssimazione. Due possibili scelte presenti in letteratura sono la **Proper Orthogonal Decomposition** (POD) e l'algoritmo **Greedy** (per i dettagli [14]).

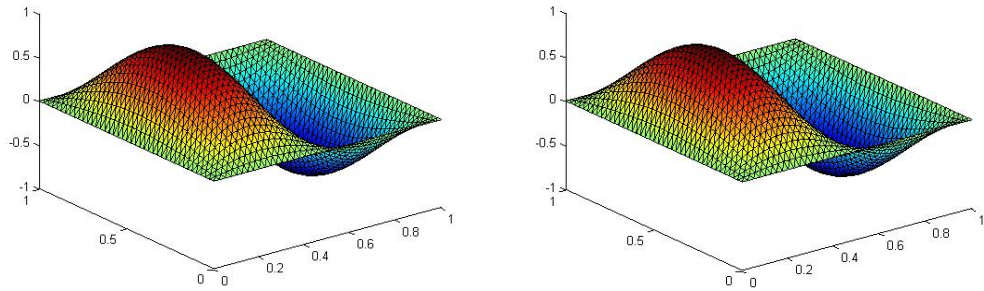


Fig. 3.7: A sinistra la soluzione *full order* u (ramo blu) per $\lambda = 65$ mentre a destra la soluzione *reduced order* corrispondente.

Piastra rettangolare: Allo stesso modo è possibile studiare il dominio $\Omega = [0, 2] \times [0, 1]$. Partiamo anche in questo caso dal diagramma di biforcazione in figura 3.8.

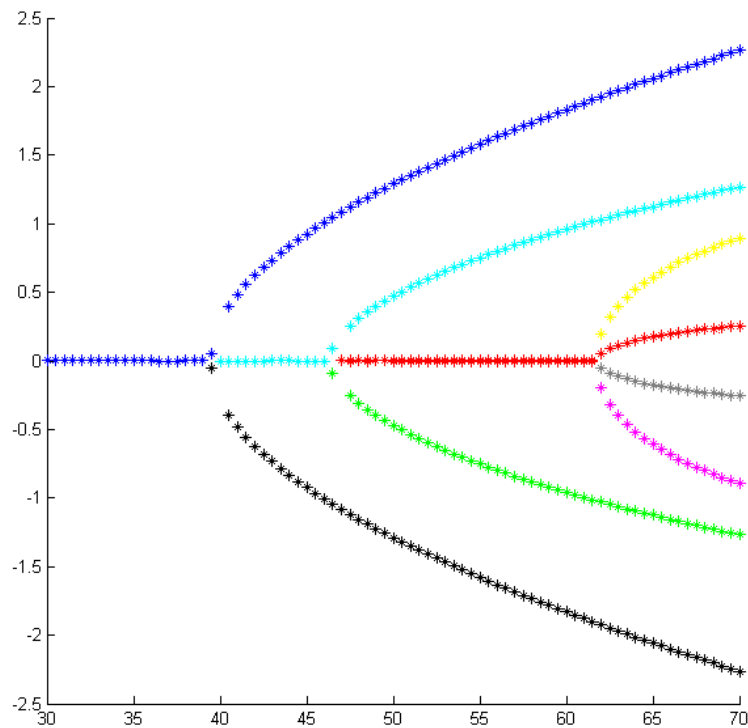


Fig. 3.8: Diagramma di biforcazione *full order* per la piastra rettangolare.

Al variare di λ otteniamo in questo caso una situazione leggermente diversa da quella vista precedentemente, in quanto questa volta abbiamo ben 3 biforcazioni nell'intervallo $[30, 70]$ e l'ultima è sicuramente diversa dalle altre viste fino ad ora. La seconda biforcazione sembrerebbe avvenire

per $\lambda \approx 46$, mentre l'ultima, come prima per $\lambda \approx 62$. La particolarità di questo ultimo punto di biforcazione è che da esso partono ben 4 rami diversi (2 coppie di soluzioni uguali e opposte) e successivamente daremo una giustificazione a questo fenomeno.

Per adesso ci concentriamo sulle diverse configurazioni che assume la soluzione u e il numero di celle relativo ad essa. Il primo ramo e il suo speculare corrispondono, figura 3.9, al caso di suddivisione in due celle. Il secondo ramo e il suo speculare invece corrispondono, figura 3.10, alla configurazione a tre celle.

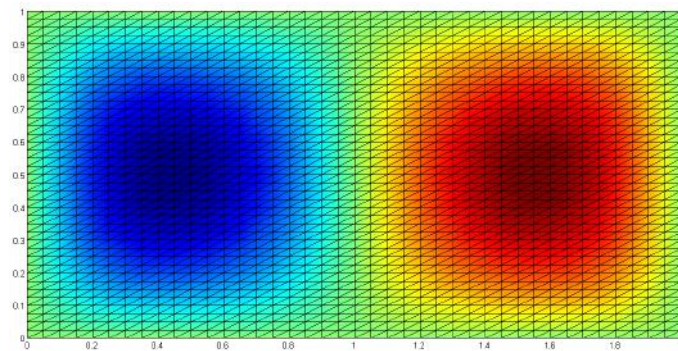


Fig. 3.9: Soluzione *full order* u del problema di Von Kármán, che rappresenta la deformazione della piastra per $\lambda = 70$ appartenente al ramo blu.

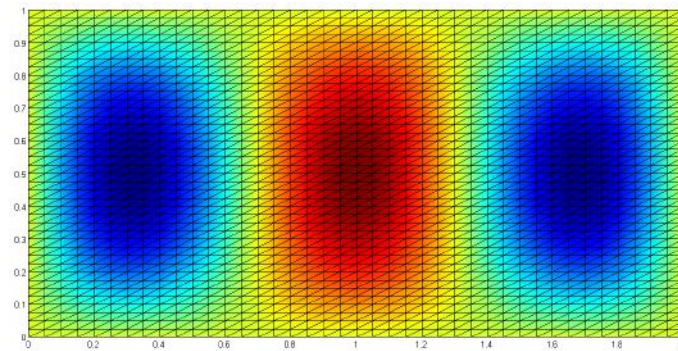


Fig. 3.10: Soluzione *full order* u del problema di Von Kármán, che rappresenta la deformazione della piastra per $\lambda = 70$ appartenente al ramo celeste.

Come abbiamo detto per $\lambda \approx 62$ abbiamo una doppia ramificazione in cui vengono a presentarsi una configurazione a quattro celle e una a ad una singola cella. Mostriamo quindi in figura 3.11 e in figura 3.12 queste due situazioni.

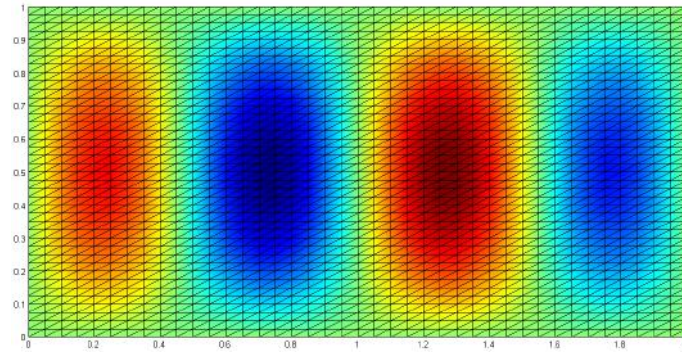


Fig. 3.11: Soluzione *full order* u del problema di Von Kármán, che rappresenta la deformazione della piastra per $\lambda = 70$ appartenente al ramo rosso.

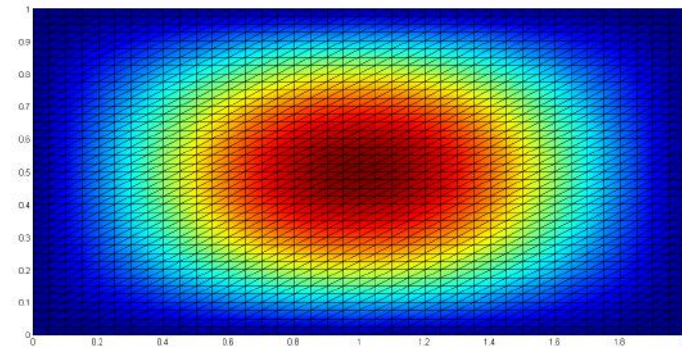


Fig. 3.12: Soluzione *full order* u del problema di Von Kármán, che rappresenta la deformazione della piastra per $\lambda = 70$ appartenente al ramo giallo.

Osservazione 3.3. Consideriamo ancora una volta i diagrammi di biforcazione ottenuti. Osserviamo che presentano le stesse caratteristiche del grafico a sinistra in figura 3.2, che ricordiamo essere collegato ad una biforcazione di tipo *pitchfork* supercritica dovuta ad una non linearità cubica.

Infatti il motivo per cui tali grafici sono così simili è che, a livello formale, possiamo pensare di invertire il bilaplaciano nella seconda equazione di (3.1), inserirla nella prima ed ottenere in questo modo la cubicità dell'operatore dovuta alla doppia applicazione del *bracket* di Monge-Ampère.

Piastra rettangolare: Concludiamo i casi test analizzando anche il caso della piastra rettangolare con $L = 4$, in questo caso $\Omega = [0, 4] \times [0, 1]$. Osserviamo che aumentando la dimensione del dominio, per ottenere la stessa precisione, vedremo aumentare e di molto il numero di gradi di libertà del problema. Con questi mezzi risulta quindi troppo dispendiosa

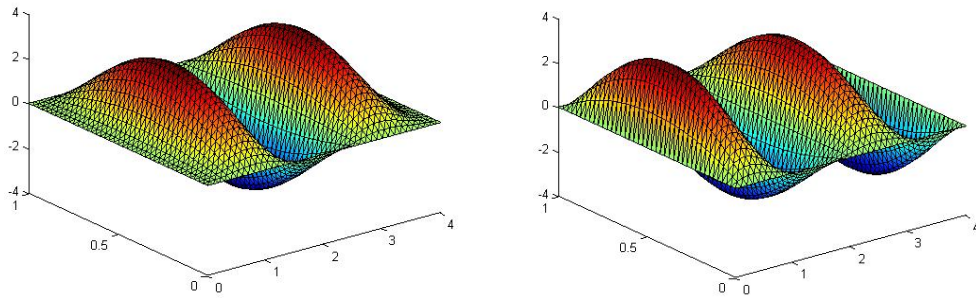


Fig. 3.13: Le soluzioni *reduced order* u per $\lambda = 70$ corrispondenti alle configurazioni rispettivamente a tre e quattro celle.

l'analisi *full order*, per questo motivo abbiamo affrontato quest'ultimo caso test utilizzando unicamente l'approccio ridotto.

La figura 3.13 oltre a mostrare i modi appartenenti ad alcuni rami specifici del diagramma di biforcazione, è la prova della potenza dei metodi di riduzione di ordine. Infatti dove non siamo riusciti ad analizzare l'andamento della soluzione al variare di λ mediante il metodo degli Elementi Finiti, è subentrato il metodo delle Basi Ridotte che ci ha permesso di trovare le soluzioni per il valore di $\lambda = 70$ in questo nuovo dominio.

Anche in questo caso, come è possibile vedere nelle figure 3.14 e 3.15, si ritrovano le configurazioni a cella tipiche dei casi precedenti.

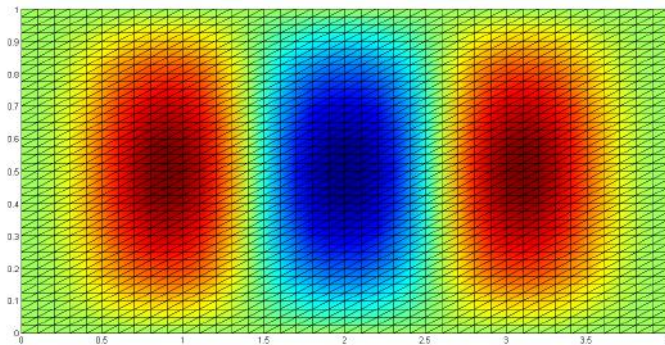


Fig. 3.14: Soluzione *reduced order* u del problema di Von Kármán, che rappresenta la deformazione a tre celle della piastra per $\lambda = 70$.

Terminiamo mostrando nelle figure 3.16 e 3.17 una particolare configurazione a sei celle e la soluzione corrispondente, dovuta ovviamente alla maggiore lunghezza del dominio, che siamo riusciti a "catturare" grazie ad una particolare *guess* iniziale.

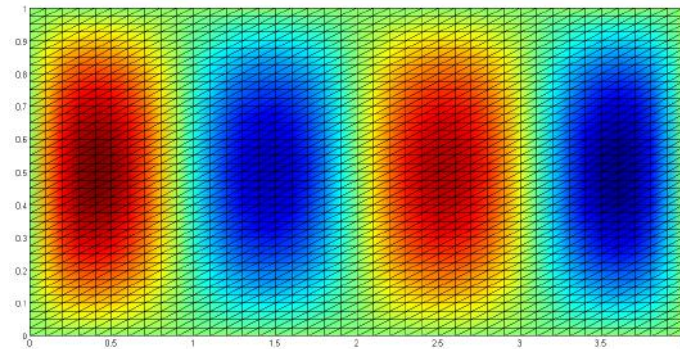


Fig. 3.15: Soluzione *reduced order* u del problema di Von Kármán, che rappresenta la deformazione a quattro celle della piastra per $\lambda = 70$.

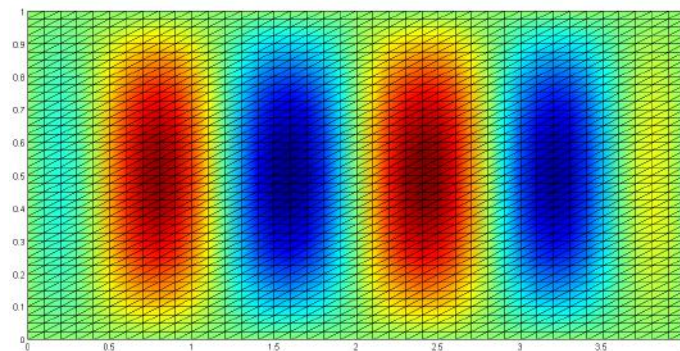


Fig. 3.16: Soluzione *reduced order* u del problema di Von Kármán, che rappresenta la deformazione a sei celle della piastra per $\lambda = 70$.

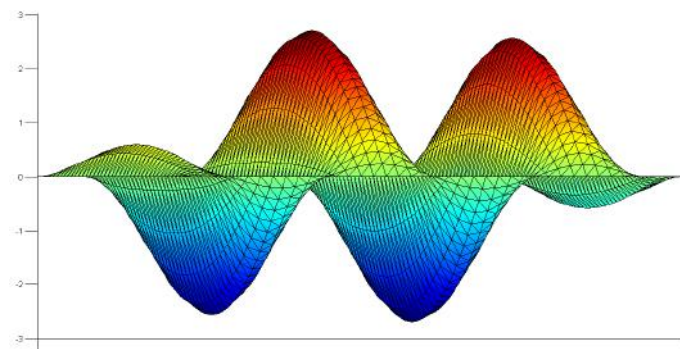


Fig. 3.17: La soluzione *reduced order* u per $\lambda = 70$ corrispondente alla configurazione a sei celle.

3.3.2 Autovalori e stabilità

Abbiamo osservato concretamente la perdita dell'unicità della soluzione e le possibili configurazioni che può assumere la piastra. Dal diagramma di biforcazione, ottenuto principalmente con il metodo di continuazione, si è potuto trovare l'intervallo cui appartiene il λ reo del fenomeno di *buckling*. Osserviamo però che per ottenerlo abbiamo dovuto risolvere in ogni iterata di Newton il problema discretizzato con Galerkin-Elementi Finiti.

Nel caso ridotto la situazione, come spiegato, è computazionalmente meno onerosa, ma ci chiediamo se sia possibile trovare un metodo grazie al quale individuare i lambda critici, ovvero quelli per i quali si ottiene il cambio di stabilità e il fenomeno di biforcazione.

Nell'ambito delle equazioni di Navier-Stokes per fluidi incomprimibili, recentemente si è provato ad analizzare le instabilità mediante lo studio degli autovalori del problema linearizzato (vedi [19] e [18]). Anche alla luce dei risultati descritti nelle sezioni precedenti siamo allora andati ad effettuare l'analisi spettrale del problema (3.7) nel caso di compressione laterale (ovvero $\theta(x, y) = \frac{1}{2}y^2$) e condizioni al bordo di semplice supporto.

Si può trovare allora, per separazione di variabili, che il problema

$$\begin{cases} \Delta^2 u + \lambda u_{xx} = 0, & \text{in } \Omega = [0, L] \times [0, 1] \\ u = \Delta u = 0, & \text{in } \partial\Omega \end{cases} \quad (3.33)$$

ha soluzioni non banali, ovvero le autofunzioni,

$$u = u_{m,n}(x, y) = A_{m,n} \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \sin(n\pi y), \quad m, n = 1, 2, \dots \quad (3.34)$$

se e solo se si ha

$$\lambda = \lambda_{m,n} = \left(\frac{\pi}{L^2}\right) \left[m + \frac{n^2 L^2}{m}\right]^2, \quad m, n = 1, 2, \dots \quad (3.35)$$

dove $A_{m,n}$ sono costanti arbitrarie e $\lambda_{m,n}$ sono gli autovalori.

Osserviamo allora che possiamo, tramite la formula (3.35), ritrovare esattamente i valori di biforcazione osservati nei diagrammi precedenti. Infatti nel caso della piastra quadrata si trovano:

$$\mathbf{L} = \mathbf{1}: \quad \lambda_{1,1} = 4\pi^2, \quad \lambda_{2,1} = \frac{25}{4}\pi^2, \quad \lambda_{3,1} = \frac{100}{9}\pi^2, \quad \lambda_{4,1} = \frac{289}{16}\pi^2,$$

da cui riotteniamo i valori per cui si erano trovate le biforcazioni nel grafico (3.3), ovvero $\lambda_{1,1} \approx 39,47$ e $\lambda_{1,1} \approx 61,68$. Allo stesso modo per la piastra

rettangolare si ha

$$\mathbf{L} = \mathbf{2} : \quad \lambda_{2,1} = 4\pi^2, \quad \lambda_{3,1} = \frac{169}{36}\pi^2, \quad \lambda_{1,1} = \lambda_{4,1} = \frac{25}{4}\pi^2,$$

ed anche in questo caso si ritrovano i valori del grafico (3.8), che risultano uguali a quelli del caso $L = 1$ con l'aggiunta della seconda biforcazione per $\lambda_{3,1} = \frac{169}{36}\pi^2 \approx 46,33$. In particolare riusciamo a capire lo strano comportamento dell'ultima biforcazione, ad essa è infatti associato un autovaleore doppio e la conseguenza è una biforcazione a quattro rami. Per capire quando avviene questo tipo di fenomeno basta imporre la condizione $\lambda_{m,n} = \lambda_{m+k,n}$ per qualche $k \in \mathbb{N}$, dalla quale possiamo ricavare la relazione dipendente dalla lunghezza del dominio $L = \frac{\sqrt{m(m+k)}}{n}$. Osserviamo infatti che se $m = n = 1$ e $k = 3$ otteniamo $L = 2$, ovvero la lunghezza della nostra piastra rettangolare che presenta la doppia biforcazione. In questa situazione molto particolare conosciamo esattamente gli autovalori e quindi possiamo utilizzare la discretizzazione della formulazione debole del problema lineare e il successivo studio dei valori di biforcazione come test di correttezza.

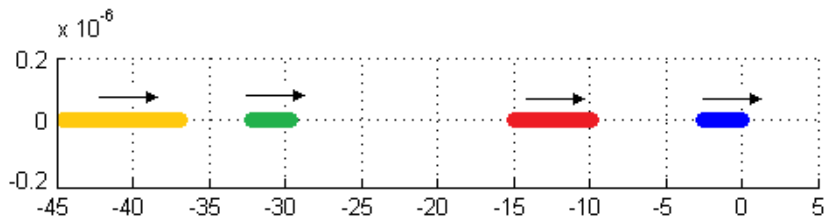


Fig. 3.18: Andamento dei primi 4 autovalori per $\lambda \in [30, 40]$.

Nelle seguenti figure si può osservare che il primo autovalore in corrispondenza del λ di biforcazione attraversa l'asse immaginario, segnalandoci un cambio di stabilità e quindi la presenza di una nuova soluzione. Ad esempio nel caso della piastra quadrata si vede in figura 3.19 che tale passaggio avviene per $\lambda = 39,5$ confermando così il valore trovato. Anche in questo caso si è proiettato il problema nello spazio generato dalle basi ridotte ed i risultati che si sono ottenuti sono stati molto soddisfacenti, in quanto siamo riusciti ad individuare il fenomeno di biforcazione per lo stesso valore di λ del caso *full order*. La figura in 3.20 è infatti praticamente identica a quella in 3.19, ma con la differenza che è stata ottenuta studiando lo spettro di una matrice di tre ordini di grandezza inferiore.

Le stesse considerazioni possono essere fatte nel caso della piastra rettangolare, sia a livello *full order* sia a livello *reduced order*. Di particolare

interesse è la possibilità di andare a individuare le biforcazioni doppie, ovvero l'esistenza di autovalori con molteplicità due che oltrepassano l'asse immaginario. Nel nostro caso specifico siamo quindi riusciti a visualizzare l'attraversamento dei due autovalori, per lo stesso valore del parametro λ , che causa la biforcazione nei 4 rami. Concludiamo dunque questa tesi mostrando in figura 3.21 tale risultato.

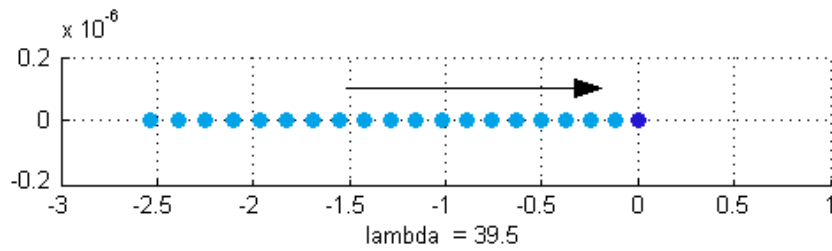


Fig. 3.19: Primo autovalore $\lambda_{1,1}$ che causa la biforcazione (*full order*).

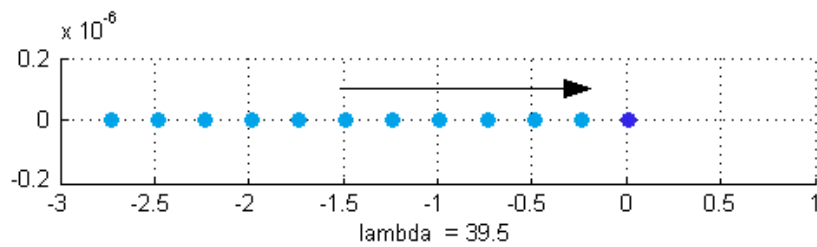


Fig. 3.20: Primo autovalore $\lambda_{1,1}$ che causa la biforcazione (*reduced order*).

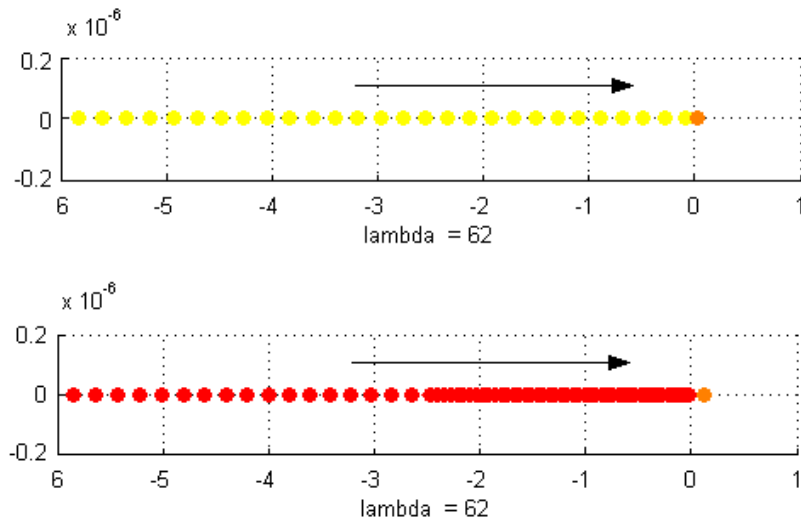


Fig. 3.21: Autovalore doppio $\lambda_{1,1} = \lambda_{4,1}$ che causa la biforcazione in quattro rami.

CONCLUSIONI E OBIETTIVI

Abbiamo concentrato il nostro studio sulla teoria dell'elasticità ed in particolare sul modello introdotto da Von Kármán che descrive le deformazioni di una piastra elastica. Tale sistema di equazioni, non lineari, parametriche ed al quarto ordine ha reso lo studio del problema un compito tanto complicato quanto affascinante.

Dal punto di vista analitico infatti siamo andati ad affrontare la questione di esistenza ed unicità della soluzione e contemporaneamente ci siamo introdotti nella teoria delle biforcazioni cui la non linearità da seguito. In passato si è molto indagato sulla peculiarità e affidabilità di tale modello, ma l'inadeguatezza del calcolo numerico all'epoca dei primi lavori ha in parte rallentato l'attenzione scientifica su di esso.

Dal punto di vista numerico la trattazione dell'operatore biarmonico e della dipendenza dal parametro hanno avuto l'effetto di incrementare esponenzialmente la complessità computazionale dell'algoritmo risolutivo portandoci alla distinzione tra i metodi *full order* e quelli *reduced order*. Per quanto riguarda i primi, noi ci siamo concentrati sulla classica applicazione degli Elementi Finiti, ma si sarebbe potuto utilizzare un qualsiasi metodo per la risoluzione numerica delle EDP (Differenze Finite, Volumi Finiti, Metodi Spettrali...).

Nello specifico abbiamo analizzato il modello di Von Kármán per una piastra rettangolare e quadrata, soggetta a compressione laterale e condizioni al bordo di semplice supporto. Siamo riusciti ad individuare per entrambe il fenomeno di *buckling* attraverso i diagrammi di biforcazione e trovare così i vari modi che possono presentarsi. Questi sono infatti differenti a seconda della lunghezza della piastra ed è interessante capire come si sviluppa una configurazione ad un determinato numero di celle piuttosto che ad un altro.

Siamo riusciti ad individuare e caratterizzare la biforcazione multipla per la piastra rettangolare causata dall'autovalore doppio. Questo compito

in particolare ha richiesto una calibrazione *ad hoc* del solutore non lineare attraverso la scelta della *guess iniziale*. Inoltre abbiamo utilizzato i risultati teorici per trovare, dallo spettro dell'operatore linearizzato, gli autovalori responsabili del cambio di stabilità della soluzione, ovvero i punti di biforcazione.

Proprio a causa dell'elevato costo computazionale abbiamo implementato il metodo delle Basi Ridotte, che ci ha reso possibile il compito del riconoscimento di tali punti attraverso lo studio di matrici di ordine molto inferiore rispetto a quello di partenza. Questo risulta essere il punto cardine del lavoro effettuato, in quanto dato un problema complicato e computazionalmente oneroso ne abbiamo ricavato uno (che sfrutta nella fase *offline* i risultati ottenuti dal primo) che ci fornisce le stesse informazioni in modo approssimato ma qualitativamente equivalente.

Molti e altrettanto interessanti sono i possibili sviluppi di questo lavoro:

- La possibilità di studiare nel dettaglio l'operatore di Von Kármán con diverse condizioni al bordo.
- Considerare le equazioni più generali inserendo una funzione θ che descriva la compressione lungo tutta la frontiera.
- Si possono considerare geometrie diverse e provare a descrivere la presenza delle biforcazioni mediante lo studio degli autovalori.
- Approfondire la parte ridotta pensando ad un campionamento intelligente dello spazio dei parametri (POD e Greedy).
- Provare a catturare le biforcazioni secondarie, ovvero quelle che si biforcano dalla soluzione non banale.
- Applicare lo stesso *modus operandi* ad altri sistemi di equazioni alle derivate parziali non lineari, Navier - Stokes su tutti.
- Sviluppare una libreria ridotta che effettui le due fasi (*offline* e *online*) in maniera automatica, collegata ai diversi metodi risolutivi e alle diverse tecniche di campionamento.
- Esportare in FEniCS [12] e RBniCS [22] l'algoritmo in modo da avere un tool unico ed un ambiente completo dove sviluppare il lavoro (in ottica dello sviluppo ridotto ai punti sopra).

BIBLIOGRAFIA

- [1] R. Abeyaratne. *Lecture Notes on The Mechanics of Elastic Solids, Volume II: Continuum Mechanics*. Cambridge Electronic Publication, 2012.
- [2] A. Ambrosetti and A. Malchiodi. *Nonlinear Analysis and Semilinear Elliptic Problems*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 2007.
- [3] A. Ambrosetti and G. Prodi. *A Primer of Nonlinear Analysis*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 1995.
- [4] L. Bauer and E. Reiss. Nonlinear buckling of rectangular plates. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, 13, 1965.
- [5] M. Berger. On von kármán's equations and the buckling of a thin elastic plate, I the clamped plate. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 20, 1967.
- [6] H. Brezis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Universitext. Springer New York, 2010.
- [7] C. S. Chien and M. S. Chen. Multiple bifurcation in the von Kármán equations. *SIAM J. Sci. Comput.*, 18, 1997.
- [8] P. G. Ciarlet. *Mathematical Elasticity, Volume I: Three-Dimensional Elasticity*. Elsevier Science, 1988.
- [9] P. G. Ciarlet. *Mathematical Elasticity: Volume II: Theory of Plates*. Studies in Mathematics and its Applications. Elsevier Science, 1997.

- [10] P. G. Ciarlet. *The Finite Element Method for Elliptic Problems*. Classics in Applied Mathematics. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2002.
- [11] K. Dossou and R. Pierre. A Newton–GMRES approach for the analysis of the postbuckling behavior of the solutions of the von Kármán equations. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 2003.
- [12] FEniCS. <http://fenicsproject.org/>.
- [13] Freefem++. <http://www.freefem.org/ff++/>.
- [14] J. S. Hesthaven, G. Rozza, and B. Stamm. *Certified Reduced Basis Methods for Parametrized Partial Differential Equations*. SpringerBriefs in Mathematics. Springer International Publishing, 2015.
- [15] C. Kelley. Arclength continuation and bifurcation. <http://www4.ncsu.edu/~ctk/MA784/continue.pdf>, 2005.
- [16] Matlab. <http://it.mathworks.com/products/matlab/>.
- [17] A. Noor and J. M. Peters. Bifurcation and post-buckling analysis of laminated composite plates via reduced basis technique. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 29, 1981.
- [18] G. Pitton, A. Quaini, and G. Rozza. Computational reduction strategies for bifurcations and stability analysis in fluid-dynamics: applications to coanda effect. *Preprint*, 2016.
- [19] G. Pitton and G. Rozza. Recent advances on nonlinear reduced order modelling for stability and bifurcations problems in incompressible fluid dynamics. *Tech. Rep. 47.2015, SISSA, International School for Advanced Studies*, 2015.
- [20] A. Quarteroni. *Modellistica Numerica per Problemi Differenziali*. UNITEXT. Springer Milan, 2013.
- [21] A. Quarteroni, A. Manzoni, and F. Negri. *Reduced Basis Methods for Partial Differential Equations: An Introduction*. UNITEXT. Springer International Publishing, 2015.
- [22] RBniCS. <http://mathlab.sissa.it/rbnics>.
- [23] M. Rosati and V. Valente. Risoluzione numerica di un problema di biforcazione dell’elasticità bidimensionale. *Istituto per le applicazioni del calcolo Mauro Picone*, Roma, 1983.

- [24] S. Salsa. *Equazioni a derivate parziali: Metodi, modelli e applicazioni*. Unitext. Springer Milan, 2010.
- [25] T. Von Kármán. Festigkeitsprobleme im maschinenbau. *Encyclopädie der Mathematischen Wissenschaften*, 4, 1910.