

# On the sectional curvature of Fréchet manifolds

Lorenzo Cecchi

15 luglio 2022



## Varietà di mappe lisce

Siano  $M, N$  due varietà lisce. La topologia compatta-aperta su  $C(M, N)$  è generata dalla prebase  $W(K, U) = \{f: M \rightarrow N \mid f(K) \subset U\}$ .

### Legge esponenziale della topologia compatta-aperta

Per spazi localmente compatti di Hausdorff vale l'omeomorfismo

$$\hat{\cdot}: C(X, C(Y, Z)) \xrightarrow{\cong} C(X \times Y, Z), \quad \hat{f}(x, y) = f(x)(y)$$

Per costruire una carta intorno a  $f: M \rightarrow N$  usiamo “deformazioni”:

$$\begin{array}{ccc} & TN & \\ & \nearrow h & \downarrow \pi_N \\ M & \xrightarrow{f} & N \end{array}$$

Lo spazio modello

$$\Gamma_f(TN) = \{h \in C^\infty(M, TN) \mid \pi_N \circ h = f\}$$

è uno spazio vettoriale di dimensione infinita.

## Varietà di mappe lisce

Siano  $M, N$  due varietà lisce. La topologia compatta-aperta su  $C(M, N)$  è generata dalla prebase  $W(K, U) = \{f: M \rightarrow N \mid f(K) \subset U\}$ .

### Legge esponenziale della topologia compatta-aperta

Per spazi localmente compatti di Hausdorff vale l'omeomorfismo

$$\hat{\cdot}: C(X, C(Y, Z)) \xrightarrow{\cong} C(X \times Y, Z), \quad \hat{f}(x, y) = f(x)(y)$$

Per costruire una carta intorno a  $f: M \rightarrow N$  usiamo “deformazioni”:

$$\begin{array}{ccc}
 & TN & \\
 h \nearrow & \downarrow \pi_N & \\
 M & \xrightarrow{f} & N
 \end{array}$$

Lo spazio modello

$$\Gamma_f(TN) = \{h \in C^\infty(M, TN) \mid \pi_N \circ h = f\}$$

è uno spazio vettoriale di dimensione infinita.

# Varietà di dimensione infinita

Il concetto di varietà “nasce” includendo la dimensione infinita.

Dall' *Habilitationschrift* di Riemann (1854)

«Es giebt indess auch Mannigfaltigkeiten, in welchen die Ortsbestimmung nicht eine endliche Zahl, sondern entweder eine unendliche Reihe oder eine stetige Mannigfaltigkeit von Grössenbestimmungen erfordert. Solche Mannigfaltigkeiten bilden z. B. die möglichen Bestimmungen einer Function für ein gegebenes Gebiet, die möglichen Gestalten ein erräumlichen Figur u. s. w.»

Traduzione

Esistono, però, varietà in cui per determinare un punto occorre non un numero finito, bensì una serie oppure una varietà di parametri. Esempi di tali varietà sono le possibili funzioni definite su una regione data, le possibili forme di una figura nello spazio, ecc.

# Il concetto di differenziabilità

Nel corso del XX secolo molti sono stati i tentativi di dare fondamenta rigorose al calcolo differenziale tra spazi localmente convessi.

## Teoria differenziale

Data un'espressione per  $f: E \supset U \rightarrow F$  della forma

$$f(x+h) = f(x) + Df(x)h + Rf(x, h),$$

dove  $Df(x): E \rightarrow F$  è un operatore lineare e continuo, una *teoria differenziale* è il dato di:

- (differenziabilità in  $x$ ) una condizione sul resto  $h \mapsto Rf(x, h)$ ;
- (regolarità  $C^1$ ) una condizione di "continuità" su  $x \mapsto Df(x)$ .

## La funzione valutazione

Sia  $E$  uno spazio localmente convesso e sia  $E^*$  il suo duale topologico. Denotiamo  $ev: E \times E^* \rightarrow \mathbb{R}$  la funzione valutazione  $ev(x, f) = f(x)$ .

### Teorema

Se  $ev$  è continua in  $(0, 0)$  rispetto a una **qualsiasi** topologia localmente convessa su  $E^*$  allora la topologia di  $E$  è generata da una norma.

### Dimostrazione.

- 1 Esistono intorno aperti  $U \subset E$ ,  $V \subset E^*$  tali che  $ev(U \times V) \subset [-1, 1]$
- 2 L'aperto  $U$  è debolmente limitato, quindi limitato
- 3 La famiglia  $\{rU\}_{r>0}$  è una base locale di  $0 \in E$
- 4 Il funzionale  $\mu(x) = \inf\{r > 0 \mid r^{-1}x \in U\}$  è la norma cercata □

## La funzione valutazione

Sia  $E$  uno spazio localmente convesso e sia  $E^*$  il suo duale topologico. Denotiamo  $ev: E \times E^* \rightarrow \mathbb{R}$  la funzione valutazione  $ev(x, f) = f(x)$ .

### Teorema

Se  $ev$  è continua in  $(0, 0)$  rispetto a una **qualsiasi** topologia localmente convessa su  $E^*$  allora la topologia di  $E$  è generata da una norma.

### Dimostrazione.

- ① Esistono intorno aperti  $U \subset E$ ,  $V \subset E^*$  tali che  $ev(U \times V) \subset [-1, 1]$
- ② L'aperto  $U$  è debolmente limitato, quindi limitato
- ③ La famiglia  $\{rU\}_{r>0}$  è una base locale di  $0 \in E$
- ④ Il funzionale  $\mu(x) = \inf\{r > 0 \mid r^{-1}x \in U\}$  è la norma cercata □

# La funzione valutazione — conseguenze

Esistono almeno due possibili letture del teorema precedente:

- 1 Le topologie non sono strutture adatte per spazi di operatori lineari e continui; si introducono allora “nozioni di convergenza” più fini rispetto alle quali, ad esempio, richiedere la “continuità” di  $x \mapsto Df(x)$ .
- 2 Si abbandona l’idea che la differenziabilità sia strettamente legata alla continuità. In particolare, ammettiamo funzioni lisce ma **non** continue (come  $ev$ )!

L’interpretazione 1 ci conduce alla teoria di Michal–Bastiani, mentre la 2 costituisce il punto di partenza per il cosiddetto *convenient* calculus.

# La funzione valutazione — conseguenze

Esistono almeno due possibili letture del teorema precedente:

- 1 Le topologie non sono strutture adatte per spazi di operatori lineari e continui; si introducono allora “nozioni di convergenza” più fini rispetto alle quali, ad esempio, richiedere la “continuità” di  $x \mapsto Df(x)$ .
- 2 Si abbandona l'idea che la differenziabilità sia strettamente legata alla continuità. In particolare, ammettiamo funzioni lisce ma **non** continue (come *ev*)!

L'interpretazione 1 ci conduce alla teoria di Michal–Bastiani, mentre la 2 costituisce il punto di partenza per il cosiddetto *convenient calculus*.

## La funzione valutazione — conseguenze

Esistono almeno due possibili letture del teorema precedente:

- 1 Le topologie non sono strutture adatte per spazi di operatori lineari e continui; si introducono allora “nozioni di convergenza” più fini rispetto alle quali, ad esempio, richiedere la “continuità” di  $x \mapsto Df(x)$ .
- 2 Si abbandona l’idea che la differenziabilità sia strettamente legata alla continuità. In particolare, ammettiamo funzioni lisce ma **non** continue (come *ev*)!

L’interpretazione 1 ci conduce alla teoria di Michal–Bastiani, mentre la 2 costituisce il punto di partenza per il cosiddetto *convenient* calculus.

# Bastiani calculus e convenient calculus

It's better to work with a nice category containing some nasty objects, than a nasty category containing only nice objects (Baez–Grothendieck)

## Teoria di Michal–Bastiani

- Si definisce  $Df(x)h = \lim_{t \rightarrow 0} [f(x + th) - f(x)]/t$
- Una funzione  $f: E \rightarrow F$  è  $C^1$  se  $Df(x)h$  è continua sul prodotto
- Valgono molti teoremi classici, come la media integrale, la chain rule e il differenziale totale.

## Convenient calculus

- Una funzione  $f: E \rightarrow F$  è liscia se manda ogni curva liscia  $c: \mathbb{R} \rightarrow E$  nella curva liscia  $f \circ c: \mathbb{R} \rightarrow F$
- Vale legge esponenziale, ossia  $C^\infty(E, C^\infty(F, G)) \cong C^\infty(E \times F, G)$

# Bastiani calculus e convenient calculus

It's better to work with a nice category containing some nasty objects, than a nasty category containing only nice objects (Baez–Grothendieck)

## Teoria di Michal–Bastiani

- Si definisce  $Df(x)h = \lim_{t \rightarrow 0} [f(x + th) - f(x)]/t$
- Una funzione  $f: E \rightarrow F$  è  $C^1$  se  $Df(x)h$  è continua sul prodotto
- Valgono molti teoremi classici, come la media integrale, la chain rule e il differenziale totale.

## Convenient calculus

- Una funzione  $f: E \rightarrow F$  è liscia se manda ogni curva liscia  $c: \mathbb{R} \rightarrow E$  nella curva liscia  $f \circ c: \mathbb{R} \rightarrow F$
- Vale legge esponenziale, ossia  $C^\infty(E, C^\infty(F, G)) \cong C^\infty(E \times F, G)$

# Spazi di Fréchet

## Definizione

Uno spazio localmente convesso è di Fréchet se la sua topologia può essere indotta da una metrica completa invariante per traslazione.

Equivalentemente, la topologia di uno spazio di Fréchet può essere indotta da una quantità numerabile di seminorme.

## Buone notizie

Su spazi di Fréchet le due teorie producono le stesse funzioni lisce!

## Brutte notizie

Se il duale di un Fréchet è ancora Fréchet, allora entrambi sono Banach. Il teorema della funzione inversa e di esistenza locale di soluzioni per problemi di Cauchy non valgono.

# Spazi di Fréchet

## Definizione

Uno spazio localmente convesso è di Fréchet se la sua topologia può essere indotta da una metrica completa invariante per traslazione.

Equivalentemente, la topologia di uno spazio di Fréchet può essere indotta da una quantità numerabile di seminorme.

## Buone notizie

Su spazi di Fréchet le due teorie producono le stesse funzioni lisce!

## Brutte notizie

Se il duale di un Fréchet è ancora Fréchet, allora entrambi sono Banach. Il teorema della funzione inversa e di esistenza locale di soluzioni per problemi di Cauchy non valgono.

# Spazi di Fréchet

## Definizione

Uno spazio localmente convesso è di Fréchet se la sua topologia può essere indotta da una metrica completa invariante per traslazione.

Equivalentemente, la topologia di uno spazio di Fréchet può essere indotta da una quantità numerabile di seminorme.

## Buone notizie

Su spazi di Fréchet le due teorie producono le stesse funzioni lisce!

## Brutte notizie

Se il duale di un Fréchet è ancora Fréchet, allora entrambi sono Banach. Il teorema della funzione inversa e di esistenza locale di soluzioni per problemi di Cauchy non valgono.

# Varietà di Fréchet — spazi tangenti

## Definizione

Una varietà di Fréchet è un insieme  $M$  munito di un atlante di carte  $(U_\alpha, u_\alpha)$  a valori in spazi di Fréchet  $E_\alpha$ .

## Spazio tangente cinematico

$$T_x M = \{(\alpha, v) \mid v \in E_\alpha\} / \sim, \quad (\alpha, v) \sim (\beta, w) \iff v = Du_{\alpha\beta}(u_\beta(x))w$$

## Spazio tangente operativo

Consideriamo lo *spazio dei germi* in  $x$ , ossia l'insieme

$$C_x^\infty(M) = \{(U, f) \mid U \subset M \text{ aperto e } f \in C^\infty(U, \mathbb{R})\} / \sim$$

dove  $(U, f) \sim (V, g)$  se esiste un aperto  $W \subset U \cap V$  tale che  $f|_W = g|_W$ .

$$D_x M = \{\partial: C_x^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R} \text{ lineari} \mid \partial(f \cdot g) = \partial(f)g(x) + f(x)\partial(g)\}$$

# Varietà di Fréchet — spazi tangenti

## Definizione

Una varietà di Fréchet è un insieme  $M$  munito di un atlante di carte  $(U_\alpha, u_\alpha)$  a valori in spazi di Fréchet  $E_\alpha$ .

## Spazio tangente cinematico

$$T_x M = \{(\alpha, v) \mid v \in E_\alpha\} / \sim, \quad (\alpha, v) \sim (\beta, w) \iff v = Du_{\alpha\beta}(u_\beta(x))w$$

## Spazio tangente operativo

Consideriamo lo *spazio dei germi* in  $x$ , ossia l'insieme

$$C_x^\infty(M) = \{(U, f) \mid U \subset M \text{ aperto e } f \in C^\infty(U, \mathbb{R})\} / \sim$$

dove  $(U, f) \sim (V, g)$  se esiste un aperto  $W \subset U \cap V$  tale che  $f|_W = g|_W$ .

$$D_x M = \{\partial: C_x^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R} \text{ lineari} \mid \partial(f \cdot g) = \partial(f)g(x) + f(x)\partial(g)\}$$

## Derivazioni non cinematiche

Possiamo interpretare un vettore  $v \in T_x M$  come derivazione in  $x \in M$  ponendo  $v(f) = df(x)v$ . Otteniamo così il contenimento  $T_x M \subset D_x M$ .

### Derivazione non cinematica

Sia  $E$  uno spazio di Banach non riflessivo. Ciascun elemento  $\alpha \in E^{**} \setminus E$  definisce una derivazione  $\hat{\alpha}(f) = \alpha(df(x))$  non cinematica.

In alcuni casi — ad esempio varietà di Hilbert — si ha uguaglianza.

### Varietà non lisce

Se  $M$  ha dimensione **finita** e la struttura di varietà è solo  $C^k$ , allora lo spazio  $D_x M$  ha dimensione  $\text{card}(\mathbb{R})$ . In particolare, il contenimento  $T_x M \subset D_x M$  è stretto anche in questo caso!

## Derivazioni non cinematiche

Possiamo interpretare un vettore  $v \in T_x M$  come derivazione in  $x \in M$  ponendo  $v(f) = df(x)v$ . Otteniamo così il contenimento  $T_x M \subset D_x M$ .

### Derivazione non cinematica

Sia  $E$  uno spazio di Banach non riflessivo. Ciascun elemento  $\alpha \in E^{**} \setminus E$  definisce una derivazione  $\hat{\alpha}(f) = \alpha(df(x))$  non cinematica.

In alcuni casi — ad esempio varietà di Hilbert — si ha uguaglianza.

### Varietà non lisce

Se  $M$  ha dimensione **finita** e la struttura di varietà è solo  $C^k$ , allora lo spazio  $D_x M$  ha dimensione  $\text{card}(\mathbb{R})$ . In particolare, il contenimento  $T_x M \subset D_x M$  è stretto anche in questo caso!

# Metriche deboli

## Somma di Whitney

Usando il pullback tramite  $\Delta(x) = (x, x)$  possiamo costruire un nuovo fibrato a partire dal fibrato tangente  $TM \rightarrow M$ .

$$\begin{array}{ccc}
 TM \oplus TM & \longrightarrow & TM \times TM \\
 \downarrow & & \downarrow \pi_M \times \pi_M \\
 M & \xrightarrow{\Delta} & M \times M
 \end{array}
 \quad (TM \oplus TM)_x = T_x M \times T_x M$$

## Metrica Riemanniana debole

Una metrica Riemanniana debole è una mappa liscia  $g: TM \oplus TM \rightarrow \mathbb{R}$  tale che ciascuna restrizione  $g(x): T_x M \times T_x M \rightarrow \mathbb{R}$  è un prodotto scalare definito positivo.

## Metriche deboli

Una metrica debole induce una topologia su  $T_x M$ , in generale meno fine di quella data dallo spazio di Fréchet che modella  $M$ .

### Metrica forte

Una metrica è detta forte se le due topologie sopra menzionate coincidono.

### Osservazione

Se una varietà ammette una metrica forte allora è una varietà di Hilbert.

Una metrica  $g$  definisce un'isometria  $T_x M \hookrightarrow (T_x M, g(x))^* \subset (T_x M)^*$ .

### Teorema

Una metrica  $g$  è forte se e solo se l'applicazione  $v \mapsto g(x)(v, \cdot)$  è suriettiva su  $(T_x M)^*$  per ogni  $x \in M$ .

## Metriche deboli

Una metrica debole induce una topologia su  $T_x M$ , in generale meno fine di quella data dallo spazio di Fréchet che modella  $M$ .

### Metrica forte

Una metrica è detta forte se le due topologie sopra menzionate coincidono.

### Osservazione

Se una varietà ammette una metrica forte allora è una varietà di Hilbert.

Una metrica  $g$  definisce un'isometria  $T_x M \hookrightarrow (T_x M, g(x))^* \subset (T_x M)^*$ .

### Teorema

Una metrica  $g$  è forte se e solo se l'applicazione  $v \mapsto g(x)(v, \cdot)$  è suriettiva su  $(T_x M)^*$  per ogni  $x \in M$ .

## Metriche deboli

Le definizioni date usando metriche deboli non assicurano l'esistenza.

### Simboli di Christoffel & equazione geodetica

$$2g(x)(\Gamma(x)(v, w), z) = \frac{\partial g}{\partial z}(x)(v, w) - \frac{\partial g}{\partial v}(x)(w, z) - \frac{\partial g}{\partial w}(x)(z, v)$$

(Equazione geodetica)       $c''(t) = \Gamma(c(t))(c'(t), c'(t))$

### Spunto di riflessione

È possibile completare ciascun  $T_x M$  rispetto alla metrica indotta dal prodotto scalare  $g(x)$ , ottenendo un'isometria  $T_x M \hookrightarrow \mathcal{H}_x$  con immagine densa all'interno di qualche spazio di Hilbert  $\mathcal{H}_x$ . Tuttavia non è scontato che i completamenti  $\mathcal{H}_x$  si "incollino" bene fra loro. Possiamo interpretare questi vettori tangenti come velocità "limite" o "nascoste".

## Metriche deboli

Le definizioni date usando metriche deboli non assicurano l'esistenza.

### Simboli di Christoffel & equazione geodetica

$$2g(x)(\Gamma(x)(v, w), z) = \frac{\partial g}{\partial z}(x)(v, w) - \frac{\partial g}{\partial v}(x)(w, z) - \frac{\partial g}{\partial w}(x)(z, v)$$

(Equazione geodetica)  $c''(t) = \Gamma(c(t))(c'(t), c'(t))$

### Spunto di riflessione

È possibile completare ciascun  $T_x M$  rispetto alla metrica indotta dal prodotto scalare  $g(x)$ , ottenendo un'isometria  $T_x M \hookrightarrow \mathcal{H}_x$  con immagine densa all'interno di qualche spazio di Hilbert  $\mathcal{H}_x$ . Tuttavia non è scontato che i completamenti  $\mathcal{H}_x$  si "incollino" bene fra loro. Possiamo interpretare questi vettori tangenti come velocità "limite" o "nascoste".

# Geometria riemanniana

Se i simboli di Christoffel esistono e sono regolari ( $C^1$ ), otteniamo

$$\text{(Levi-Civita)} \quad \nabla_X Y = dY(X) - \Gamma(X, Y)$$

$$\text{(Curvatura)} \quad R(X, Y, Z) = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z$$

$$\text{(Curvatura sezionale)} \quad \sigma_x(v, w) = -g(x)(R(v, w, v), w)$$

con  $v, w$  ortonormali.

Formula per la curvatura sezionale

$$2g(R(v, w, v), w) = -2 \frac{\partial^2 g}{\partial v \partial w} (v, w) + \frac{\partial^2 g}{\partial v \partial v} (w, w) + \frac{\partial^2 g}{\partial w \partial w} (v, v) \\ - 2g(\Gamma(v, w), \Gamma(v, w)) + 2g(\Gamma(v, v), \Gamma(w, w))$$

# Geometria riemanniana

Se i simboli di Christoffel esistono e sono regolari ( $C^1$ ), otteniamo

$$\text{(Levi-Civita)} \quad \nabla_X Y = dY(X) - \Gamma(X, Y)$$

$$\text{(Curvatura)} \quad R(X, Y, Z) = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z$$

$$\text{(Curvatura sezionale)} \quad \sigma_x(v, w) = -g(x)(R(v, w, v), w)$$

con  $v, w$  ortonormali.

Formula per la curvatura sezionale

$$2g(R(v, w, v), w) = -2 \frac{\partial^2 g}{\partial v \partial w}(v, w) + \frac{\partial^2 g}{\partial v \partial v}(w, w) + \frac{\partial^2 g}{\partial w \partial w}(v, v) \\ - 2g(\Gamma(v, w), \Gamma(v, w)) + 2g(\Gamma(v, v), \Gamma(w, w))$$

## Funzioni lisce definite su un aperto

Sia  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  aperto e  $B$  uno spazio di Banach.

Struttura Fréchet su  $C^k(\Omega, B)$

Scegliamo un'eshaustione in compatti  $\{K_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  e muniamo  $C^k(\Omega, B)$  delle seminorme

$$\|f\|_{j,n} = \sup_{x \in K_j} \|D^n f(x)\| < \infty$$

### Controesempio al teorema della funzione inversa

Sia  $F = C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ . La funzione  $\exp(f) = e^f$  ha derivata  $D \exp(f)g = e^f \cdot g$ , dunque è  $C^1$ . Tuttavia l'immagine ha parte interna vuota, poiché il generico aperto

$$U_{n,\varepsilon}(f) = \{g \in F : |g(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in [-n, n]\}$$

contiene funzioni  $g$  tali che  $g(x) \leq 0$  per  $x > n$ .

## Varietà di mappe lisce

Sia  $M$  una varietà **compatta** e  $N$  una varietà di dimensione **finita**.

Topologia compatta-aperta  $C^\infty$

Muniamo  $C^\infty(M, N)$  della topologia di sottospazio data da

$$\iota: C^\infty(M, N) \hookrightarrow \prod_{j=0}^{\infty} C(T^j M, T^j N), \quad \iota_j(f) = T^j f.$$

Teorema

Esiste un'unica struttura di varietà di Fréchet su  $C^\infty(M, N)$  con la topologia descritta sopra e tale che  $f: P \rightarrow C^\infty(M, N)$  è liscia se e solo se

$$\hat{f}: P \times M \rightarrow N, \quad \hat{f}(s, x) = f(s)(x) \quad \text{è liscia.}$$

## Varietà di mappe lisce

Sia  $M$  una varietà **compatta** e  $N$  una varietà di dimensione **finita**.

Topologia compatta-aperta  $C^\infty$

Muniamo  $C^\infty(M, N)$  della topologia di sottospazio data da

$$\iota: C^\infty(M, N) \hookrightarrow \prod_{j=0}^{\infty} C(T^j M, T^j N), \quad \iota_j(f) = T^j f.$$

**Teorema**

Esiste un'unica struttura di varietà di Fréchet su  $C^\infty(M, N)$  con la topologia descritta sopra e tale che  $f: P \rightarrow C^\infty(M, N)$  è liscia se e solo se

$$\hat{f}: P \times M \rightarrow N, \quad \hat{f}(s, x) = f(s)(x) \quad \text{è liscia.}$$

## Curve piane

Gli embedding  $\text{Emb}(S^1, \mathbb{R}^2)$  formano un aperto di  $C^\infty(S^1, \mathbb{R}^2)$ .

### Spazio delle curve piane

Il quoziente  $\text{Emb}(S^1, \mathbb{R}^2)/\text{Diff}(S^1)$  è una varietà di Fréchet, localmente modellata sullo spazio  $C^\infty(S^1, \mathbb{R})$ .

Metrica debole  $L^2$  [Michor P. e Mumford D., 2005]

$$G_c^A(h, k) = \int_{S^1} (1 + A\kappa_c(\theta)^2) \langle h(\theta), k(\theta) \rangle |c'(\theta)| d\theta, \quad A \geq 0$$

Per  $A = 0$  la distanza geodetica è identicamente nulla!

Curvatura sezionale per  $A = 0$

$$\sigma_0(h, k) = \frac{1}{2} \int_{S^1} (h'k - hk')^2 d\theta \geq 0$$

## Curve piane

Gli embedding  $\text{Emb}(S^1, \mathbb{R}^2)$  formano un aperto di  $C^\infty(S^1, \mathbb{R}^2)$ .

### Spazio delle curve piane

Il quoziente  $\text{Emb}(S^1, \mathbb{R}^2)/\text{Diff}(S^1)$  è una varietà di Fréchet, localmente modellata sullo spazio  $C^\infty(S^1, \mathbb{R})$ .

Metrica debole  $L^2$  [Michor P. e Mumford D., 2005]

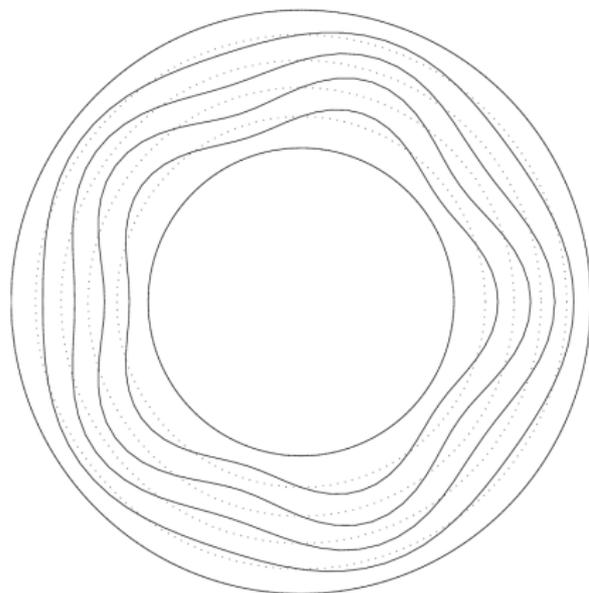
$$G_c^A(h, k) = \int_{S^1} (1 + Ak_c(\theta)^2) \langle h(\theta), k(\theta) \rangle |c'(\theta)| d\theta, \quad A \geq 0$$

Per  $A = 0$  la distanza geodetica è identicamente nulla!

Curvatura sezionale per  $A = 0$

$$\sigma_0(h, k) = \frac{1}{2} \int_{S^1} (h'k - hk')^2 d\theta \geq 0$$

# Oscillazioni



L'insieme di tutte le circonferenze con centro fissato è una geodetica. I punti coniugati, tuttavia, sono densi. In figura osserviamo la deformazione di una geodetica che produce un cammino più corto rispetto a quello geodetico quando il rapporto tra i raggi supera 1.8957...

## Curvatura patologica

Metrica debole su  $\ell^2$  [Magnani V. e Tiberio D., 2020]

Sia  $A: \ell^2 \rightarrow \ell^2$  l'operatore  $(Ax)_n = x_n/n^4$ . La metrica

$$g_p(v, w) = e^{-\|p\|^2} \langle Av, w \rangle_{\ell^2}$$

induce distanza geodetica nulla su  $\ell^2$ .

L'immagine di  $A$  è l'insieme  $R = \{x \in \ell^2 \mid \sum_{n=1}^{\infty} n^8 x_n^2 < \infty\}$ . I simboli di Christoffel sono ben definiti in ogni direzione, ma solo per  $p \in R!$

Curvatura sezionale

Per  $p \in R$  e  $v, w$  ortonormali rispetto a  $g_p$ , vale

$$\sigma_p(v, w) = \langle v, v \rangle + \langle w, w \rangle + \langle p, w \rangle^2 + \langle p, v \rangle^2 - e^{\|p\|^2} \cdot \langle p, A^{-1}p \rangle$$

L'espressione di sopra è definita per  $\{p \in \ell^2 \mid \sum_{n=1}^{\infty} n^4 p_n^2 < \infty\} \supset R!$

## Curvatura patologica

Metrica debole su  $\ell^2$  [Magnani V. e Tiberio D., 2020]

Sia  $A: \ell^2 \rightarrow \ell^2$  l'operatore  $(Ax)_n = x_n/n^4$ . La metrica

$$g_p(v, w) = e^{-\|p\|^2} \langle Av, w \rangle_{\ell^2}$$

induce distanza geodetica nulla su  $\ell^2$ .

L'immagine di  $A$  è l'insieme  $R = \{x \in \ell^2 \mid \sum_{n=1}^{\infty} n^8 x_n^2 < \infty\}$ . I simboli di Christoffel sono ben definiti in ogni direzione, ma solo per  $p \in R!$

### Curvatura sezionale

Per  $p \in R$  e  $v, w$  ortonormali rispetto a  $g_p$ , vale

$$\sigma_p(v, w) = \langle v, v \rangle + \langle w, w \rangle + \langle p, w \rangle^2 + \langle p, v \rangle^2 - e^{\|p\|^2} \cdot \langle p, A^{-1}p \rangle$$

L'espressione di sopra è definita per  $\{p \in \ell^2 \mid \sum_{n=1}^{\infty} n^4 p_n^2 < \infty\} \supset R!$

## Curvatura patologica

Usando i vettori ortonormali  $v = n^2 e^{\|p\|^2/2} \mathbf{e}^n$  e  $w = m^2 e^{\|p\|^2/2} \mathbf{e}^m$  troviamo

$$\sigma_p(\mathbf{e}^n, \mathbf{e}^m) = e^{\|p\|^2} (n^4(1 + p_n^2) + m^4(1 + p_m^2) - \langle p, A^{-1}p \rangle)$$

In particolare osserviamo che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_p(\mathbf{e}^n, \mathbf{e}^m) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sigma_p(\mathbf{e}^n, \mathbf{e}^m) = +\infty$$

### Conggettura di Michor–Mumford

Esiste una correlazione tra curvatura sezionale positivamente illimitata e distanza geodetica nulla?

## Curvatura patologica

Usando i vettori ortonormali  $v = n^2 e^{\|p\|^2/2} \mathbf{e}^n$  e  $w = m^2 e^{\|p\|^2/2} \mathbf{e}^m$  troviamo

$$\sigma_p(\mathbf{e}^n, \mathbf{e}^m) = e^{\|p\|^2} (n^4(1 + p_n^2) + m^4(1 + p_m^2) - \langle p, A^{-1}p \rangle)$$

In particolare osserviamo che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_p(\mathbf{e}^n, \mathbf{e}^m) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sigma_p(\mathbf{e}^n, \mathbf{e}^m) = +\infty$$

### Congettura di Michor–Mumford

Esiste una correlazione tra curvatura sezionale positivamente illimitata e distanza geodetica nulla?

Grazie per l'attenzione!

