

# Аффинные алгебры Ли и конформная теория поля

14 июня 2025 г.

Лекции в Сколтехе, осень 2018. Содержат опечатки, о найденных сообщайте по адресу [mbersht@gmail.com](mailto:mbersht@gmail.com)

## Содержание

<b>1</b>	<b>Напоминания про конечномерные алгебры Ли</b>	<b>2</b>
1.1	Алгебры, системы корней . . . . .	2
1.2	Представления . . . . .	3
1.3	Элемент Казимира . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Аффинные алгебры Ли</b>	<b>5</b>
2.1	Алгебры . . . . .	5
2.2	Представления . . . . .	6
2.3	Токовая реализация . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Пространства конформных блоков</b>	<b>9</b>
3.1	Коинварианты . . . . .	9
3.2	Пространство конформных блоков через коинварианты . . . . .	10
<b>4</b>	<b>Конформные блоки для интегрируемых представлений. Топологические теории</b>	<b>12</b>
4.1	Конечномерность пространства конформных блоков . . . . .	12
4.2	Топологические теории . . . . .	14
<b>5</b>	<b>Вычисление алгебры Верлинде</b>	<b>16</b>
5.1	Сравнение с операторным подходом к конформным блокам . . . . .	16
5.2	Вычисление алгебры Верлинде для случая $\mathfrak{sl}_2$ . . . . .	17
5.3	Спектр алгебры Верлинде $\mathfrak{sl}_2$ . . . . .	19
5.4	Обобщение на случай других алгебр Ли . . . . .	22

<b>6</b>	<b>Свободная реализация</b>	<b>26</b>
6.1	Алгебра $\mathfrak{sl}_2$ . . . . .	26
6.2	Общий случай в терминах функций на клетке . . . . .	31
6.3	Скрининги . . . . .	36
6.4	В терминах гамильтоновой редукции . . . . .	37
<b>7</b>	<b>Уравнения Книжника-Замолодчикова</b>	<b>41</b>
7.1	Конформные блоки . . . . .	41
7.2	Интегральные формулы для решений . . . . .	44
7.3	Вывод из свободной реализации . . . . .	45
	<b>Список литературы</b>	<b>48</b>
	<b>Список задач</b>	<b>49</b>

## 1 Напоминания про конечномерные алгебры Ли

Источником может быть [2, Sec. 2], [3, Sec. 13]

### 1.1 Алгебры, системы корней

Через  $\mathfrak{g}$  мы будем обозначать простую алгебру Ли, основным пример для нас это  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$ . Также мы может встретится со случаем  $\mathfrak{g}$  полупростая, т.е. сумма простых или со случаем  $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n$  которая не является полупростой из-за наличия одномерного центра.

Через  $\mathfrak{h}$  мы обозначим картановскую подалгебру. Алгебра  $\mathfrak{g}$  разлагается по собственным подространствам  $\mathfrak{h}$ :  $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in R} \mathfrak{g}_\alpha$ . Множество  $R \in \mathfrak{h}^*$  является системой корней.

Через  $\Delta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\} \subset R$  мы будем обозначать систему простых корней. Любой корень  $\alpha \in R$  единственным образом представим в виде  $\alpha = \sum_{i=1}^l a_i \alpha_i$ , причем либо все  $a_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  либо все  $a_i \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$ . В первом случае корень называется положительным, во втором отрицательным. Множество положительных корней обозначается  $R_+$ , множество отрицательных  $R_-$ . Определим подалгебры:

$$\mathfrak{n}^\pm = \bigoplus_{\alpha \in R_\pm} \mathfrak{g}_\alpha, \quad \mathfrak{b}^\pm = \mathfrak{n}^\pm \oplus \mathfrak{h}.$$

Понятно, что  $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+$ .

Через  $\theta$  мы обозначаем старший корень — корень в разложении которого по  $\alpha_i$  все  $a_i$  максимальны. С точки зрения теории представлений  $\theta$  является старшим весом присоединенного представления.

На алгебре  $\mathfrak{g}$  есть инвариантное скалярное произведение — форма Киллинга. Ее можно спустить на  $\mathfrak{h}$  и перенести на  $\mathfrak{h}^*$ . Элементы  $R$  (корни) или будут все иметь одну и ту же длину или длина будет принимать два значения. Мы будем нормировать скалярное произведение на так, что длинный корень имеет норму 2:  $(\theta, \theta) = 2$ .

Используя отождествление  $\mathfrak{h}$  и  $\mathfrak{h}^*$  сопоставим каждому корню  $\alpha \in R$  элемент  $h_\alpha \in \mathfrak{h}$  такой, что  $(\lambda, \alpha) = \lambda(h_\alpha)$ ,  $\forall \lambda \in \mathfrak{h}^*$ .

Простым корням соответствуют образующие  $e_i \in \mathfrak{g}_{\alpha_i} \subset \mathfrak{n}^+$ ,  $h_i = h_{\alpha_i} \frac{2}{(\alpha_i, \alpha_i)} \in \mathfrak{h}$ ,  $f_i \in \mathfrak{g}_{-\alpha_i} \subset \mathfrak{n}^-$ , здесь  $i = 1, \dots, l$ . Они удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} [h_i, h_j] &= 0, [h_i, e_j] = a_{ij}e_j, [h_i, f_j] = -a_{ij}f_j, \\ [e_i, f_i] &= h_i, [e_i, f_j] = 0, i \neq j \\ (\text{ad } e_i)^{1-a_{ij}}e_j &= 0, (\text{ad } f_i)^{1-a_{ij}}f_j = 0. \end{aligned} \quad (1.1)$$

где  $a_{ij} = \alpha_i(h_j)$  — матрица Картана. Соотношения в последней строчке называются соотношениями Серра

**Пример 1.1.** Пусть  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$ . Через  $E_{ij}$  будем обозначать матричные единицы. Тогда

$$e_i = E_{i,i+1}, h_i = E_{i,i} - E_{i+1,i+1}, f_i = E_{i+1,i}, \quad i = 1, \dots, n-1.$$

Соотношения Серра для  $e_i$  принимают вид

$$[e_i, e_j] = 0, |i-j| > 1 \quad [e_i, [e_i, e_j]] = 0, |i-j| = 1.$$

Через  $Q = \bigoplus \mathbb{Z}\alpha_i$  мы обозначим решетку корней.

Обозначим  $\alpha^\vee = h_\alpha \frac{2}{(\alpha, \alpha)}$ . Эти элементы образуют двойственную систему корней. Через  $P = \{\lambda \in \mathfrak{h}^* | \lambda(\alpha_i^\vee) \in \mathbb{Z}\}$ . В случае простых связей можно писать просто  $(\lambda, \alpha) \in \mathbb{Z}$ , то есть это просто решетка двойственная решетке корней. Через  $P^+$  обозначим конус доминантных весов  $P^+ = \{\lambda \in \mathfrak{h}^* | \lambda(\alpha_i^\vee) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ .

Фундаментальные веса  $\omega_i$  определяются по формуле  $\omega_i(\alpha_j^\vee) = \delta_{i,j}$ . Тогда  $P = \bigoplus \mathbb{Z}\omega_i$ ,  $P^+ = \bigoplus \mathbb{Z}_{\geq 0}\omega_i$ . Нам еще понадобится вектор  $\rho$  который можно определить по любой из следующих формул:

$$\rho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in R_+} \alpha = \sum \omega_i. \quad (1.2)$$

**Задача 1.1.** Система корней  $D_n$  состоит из корней вида  $e_i - e_j, e_i + e_j, -e_i - e_j$ ,  $i \neq j$ . Найдите простые корни,  $\theta, \rho, \omega_i$ , проверьте формулу (1.2).

С каждым простым корнем  $\alpha_i$  связано отражение  $s_i$  которое действует на  $\mathfrak{h}^*$  по формуле  $\lambda \mapsto \lambda - \frac{2(\lambda, \alpha_i)}{(\alpha_i, \alpha_i)}\alpha_i$ . Группой Вейля называется группа порожденная всеми такими отражениями.

## 1.2 Представления

Для любого  $\lambda \in \mathfrak{h}$  через  $M_\lambda$  мы будем обозначать модуль Верма порожденный старшим вектором веса  $\lambda$ . Это значит, что в модуле Верма есть вектор  $v_\lambda$  такой, что

$$h_i v_\lambda = \lambda(h_i) v_\lambda, \quad e_i v_\lambda = 0$$

и модуль свободно порожден относительно действия  $\mathfrak{n}_-$ , то есть базисом в нем являются вектора  $y_1^{n_1} y_N^{n_N} v_\lambda$ , где  $y_1, \dots, y_N$  — базис в  $\mathfrak{n}^-$ . Коротко это определение записывается формулой  $M_\lambda = \text{Ind}_{\mathfrak{b}^+}^{\mathfrak{g}} \mathbb{C}\lambda$ .

Через  $L_\lambda$  мы будем обозначать (единственный) неприводимый фактор  $L_\lambda = M_\lambda / I_\lambda$ .

**Теорема 1.1.** а) Модуль  $L_\lambda$  является конечномерным если и только  $\lambda \in P^+$ .  
б) В этом случае, если  $\lambda = \sum n_i \omega_i$ , то подмодуль  $I_\lambda$  порожден векторами вида  $f_i^{n_i+1} v_\lambda$ .

**Задача 1.2.** Докажите, что вектора  $f_i^{n_i+1} v_\lambda \in M_\lambda$  являются сингулярными, т.е. зануляется любым  $e_j$ .

В примере  $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n$  старшие веса конечномерных представлений параметризуются сигнатурами — наборами целых чисел  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$  (точнее для алгебры Ли требуется только чтобы  $\lambda_i - \lambda_{i+1} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ , условие  $\lambda_i \in \mathbb{Z}$  нужно для группы Ли). Характеры представлений равны полиномам Шура:

$$s_\lambda(x_1, \dots, x_n) = \frac{\det(x_i^{\lambda_j+n-j})}{\det(x_i^{n-j})} \quad (1.3)$$

**Задача 1.3.** Найдите главную специализацию характера:  $s_\lambda(q^\rho)$ , где  $q^\rho = (q^{n-1}, q^{n-2}, \dots, 1)$ . Выведите из этого формулу для размерности представления.

Тензорное произведение представлений  $V_\lambda \otimes V_\mu = \bigoplus_\nu V_\nu^{\oplus c_{\lambda,\mu}^\nu}$ . В терминах характеров:

$$s_\lambda s_\mu = \sum_\nu c_{\lambda,\mu}^\nu s_\nu. \quad (1.4)$$

Числа  $c_{\lambda,\mu}^\nu$  называются коэффициентами Литтлвуда—Ричардсона (для  $\mathfrak{sl}_2$  Клебша—Гордана).

**Пример 1.2.** Если  $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_1$ , то  $s_{\lambda_1} s_{\mu_1} = s_{\lambda_1 + \mu_1}$ .

Если  $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(2)$ , то  $s_\lambda s_\mu = \sum_\nu s_\nu$ , где суммирование ведется по  $\nu$  таким, что  $|\nu| = |\lambda| + |\mu|$ ,  $\nu_1 \leq \lambda_1 + \mu_1$ ,  $\nu_2 \leq \lambda_1 + \mu_2$ ,  $\nu_2 \leq \mu_1 + \lambda_2$ .

В общем случае ответ устроен сложнее, кроме того числа  $c_{\lambda,\mu}^\nu$  принимают значения большие 1. Просто сказать ответ в случае когда  $\mu$  строка или столбец, это называется формулами Пиери. А именно, обозначим через  $e_j = s_{(1)^j}$  полином Шура соответствующий столбцу, тогда

$$s_\lambda e_j = \sum_\nu s_\nu, \quad (1.5)$$

где суммирование ведется по  $\nu$  которые получаются из  $\lambda$  добавлением  $j$  клеток никакие две из которых не лежат в одной строке. Аналогично, обозначим через  $h_j = s_j$  полином Шура соответствующий строке, тогда

$$s_\lambda h_j = \sum_\nu s_\nu,$$

где суммирование ведется по  $\nu$  которые получаются из  $\lambda$  добавлением  $j$  клеток никакие две из которых не лежат в одном столбце.

### 1.3 Элемент Казимира

Пусть  $x_i$  базис в  $\mathfrak{g}$ ,  $x^i$  — двойственный базис. Тогда элемент  $C = \sum x_i x^i \in U(\mathfrak{g})$  называется элементом Казимира. Можно доказать, что элемент  $C$  не зависит от выбора базиса  $x_i$  и лежит в центре  $U(\mathfrak{g})$ .

**Задача 1.4.** Докажите, что  $C$  действует на неприводимом представлении со старшим весом  $\lambda$  константой равной  $(\lambda, \lambda + 2\rho)$ . То же про модуль Верма.

В частности из этого следует, что на присоединенном представлении  $C$  действует числом  $(\theta, \theta + 2\rho) = 2h^\vee$ , где  $h^\vee = (\rho, \theta) + 1$ . Число  $h^\vee$  называется дуальным числом Кокстера, в случае простых связей оно равно обычному числу Кокстера  $h$ . Можно запомнить значение для алгебры  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$ , а именно  $h^\vee = h = n$ .

## 2 Аффинные алгебры Ли

### 2.1 Алгебры

По алгебре  $\mathfrak{g}$  можно построить алгебру токов  $\widehat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C}K$ , где  $K$  центральный элемент, а коммутатор общих элементов имеет вид

$$[x \otimes F, y \otimes G] = [x, y] \otimes FG + K(x, y) \frac{1}{2\pi i} \oint GdF,$$

где  $(\cdot, \cdot)$  — форма Киллинга на  $\mathfrak{g}$ .

Часто к алгебре  $\widehat{\mathfrak{g}}$  добавляют еще дифференцирование  $d$ , с коммутатором  $[d, x \otimes F] = x \otimes t \frac{d}{dt} F$ ,  $[d, K] = 0$ . Полученную алгебру будем обозначать  $\widetilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C}K \oplus \mathbb{C}d$ . На алгебре  $\widetilde{\mathfrak{g}}$  можно ввести невырожденное спаривание

$$(x \otimes F, y \otimes G) = \frac{(x, y)}{2\pi i} \oint FG \frac{dt}{t}, \quad (K, d) = 1.$$

Если посмотреть на формальное определение алгебры Каца-Мууди, то под него подходит  $\widetilde{\mathfrak{g}}$ , а  $\widehat{\mathfrak{g}}$  является в ней подалгеброй.

Разложимые элементы вида  $x \otimes t^n$  часто обозначаются как  $x_n$  или  $x[n]$ . Дифференцирование действует на них по формуле  $[d, x_n] = nx_n$ .

Картановские подалгебры определены как  $\widehat{\mathfrak{h}} = \mathfrak{h} \oplus \mathbb{C}K$ ,  $\widetilde{\mathfrak{h}} = \widehat{\mathfrak{h}} \oplus \mathbb{C}d$ . По отношению к  $\widetilde{\mathfrak{h}}$  алгебра  $\widetilde{\mathfrak{g}}$  разлагается

$$\widetilde{\mathfrak{g}} = \widetilde{\mathfrak{h}} \oplus \sum_{\alpha \in \widehat{R}} \widehat{\mathfrak{g}}_\alpha.$$

Здесь  $\widehat{R} \subset \widetilde{\mathfrak{h}}^*$  обозначает аффинную систему корней. Чтобы написать ее более явно введем элементы  $\delta, \omega_0$  по формулам

$$\delta(\mathfrak{h}) = \omega_0(\mathfrak{h}) = 0, \quad \delta(K) = \omega_0(d) = 0, \quad \delta(d) = \omega_0(K) = 1.$$

Тогда аффинная система корней имеет вид

$$\widehat{R} = \{\alpha + n\delta \mid (\alpha, n) \in (R \cup 0) \times \mathbb{Z} \setminus (0, 0)\}.$$

Корневые подпространства соответствующие корням  $(\alpha, n)$ ,  $\alpha \neq 0$  одномерны и равны  $\mathfrak{g}_\alpha \otimes t^n$  (такие корни называются *вещественными*), корневые подпространства соответствующие корням вида  $n\delta$  (такие корни называются *мнимыми*) имеют размерность  $\dim \mathfrak{h}$  и равны  $\mathfrak{h} \otimes t^n$ .

Простые корни имеют вид  $\alpha_0, \dots, \alpha_l$ , где  $\alpha_0 = \delta - \theta$ . Положительные корни имеют вид

$$\widehat{R}_+ = \{\alpha + n\delta \mid n \geq 0 \text{ или } n = 0, \alpha \in R_+\},$$

аналогично можно описать отрицательные корни  $\widehat{R}_-$ . Борелевские и нильпотентные подалгебры определены как

$$\widehat{\mathfrak{n}}^\pm = \bigoplus_{\alpha \in \widehat{R}_\pm} \widehat{\mathfrak{g}}_\alpha, \quad \widehat{\mathfrak{b}}^\pm = \widehat{\mathfrak{n}}^\pm \oplus \widehat{\mathfrak{h}}.$$

Можно написать, что  $\widehat{\mathfrak{b}} = \mathfrak{b} \oplus \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t]t \oplus \mathbb{C}K$ , и аналогично для других подалгебр. Через  $e_0, e_1, \dots, e_l, f_0, f_1, \dots, f_l$  мы обозначим образующие Шевалле, они удовлетворяют соотношениям (1.1) с аффинной матрицей Картана. В токовом описании новые генераторы равны  $e_0 = f_\theta \otimes t, f_0 = e_\theta \otimes t^{-1}$ .

Иногда мы будем брать в определении  $\widehat{\mathfrak{g}}$  и  $\widetilde{\mathfrak{g}}$  кольцо формальных степенных рядов  $[[t, t^{-1}]]$  вместо многочленов. Это не важно для представлений старшего веса.

## 2.2 Представления

Представления старшего веса аффинной алгебры  $\widehat{\mathfrak{g}}$  порождаются старшим вектором  $v_{\lambda, k}$ , где  $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ ,  $k \in \mathbb{C}$  таким, что

$$h_i v_{\lambda, k} = \lambda(h_i) v_{\lambda, k}, \quad K v_{\lambda, k} = k v_{\lambda, k}, \quad e_i v_{\lambda, k} = 0.$$

Будем обозначать  $M_{\lambda, k}$  модуль Верма над алгеброй  $\widehat{\mathfrak{g}}$ . Этот модуль является индуцированным с подалгебры  $\widehat{\mathfrak{b}}^+$ , если  $y_1, y_2, \dots$  это базис в дополнительной подалгебре  $\widehat{\mathfrak{n}}^-$ , то базис  $M_{\lambda, k}$  состоит из векторов вида  $y_1^{n_1} \cdot \dots \cdot y_l^{n_l} v_{\lambda, k}$ .

Через  $L_{\lambda, k}$  мы будем обозначать неприводимых фактор модуля Верма  $L_{\lambda, k} = M_{\lambda, k}/I_{\lambda, k}$ .

Для алгебр петель нам будет нужен еще один тип модулей, так называемые модули Вейля. А именно, на неприводимом представлении  $L_\lambda$  алгебры  $\mathfrak{g}$  можно определить действие алгебры  $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t] + \mathbb{C}K$ : элементы положительной степени  $\mathfrak{g}t[t]$  действуют нулем, элемент  $K$  действует числом  $k$ . Тогда  $V_{\lambda, k}$  это представление  $\widehat{\mathfrak{g}}$  индуцированное с этого представления  $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t] + \mathbb{C}K$ . Опять же в терминах базиса — если  $y_1, y_2, \dots$  базис в дополнительной подалгебре  $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t^{-1}]t^{-1}$ ,  $v_1, v_2, \dots$  базис в  $L_\lambda$ , то базис в  $V_{\lambda, k}$  имеет вид  $y_1^{n_1} \cdot \dots \cdot y_l^{n_l} v_j$ .

При общих  $\lambda$  представления  $M_{\lambda, k}, V_{\lambda, k}, L_{\lambda, k}$  совпадают, вообще говоря  $V_{\lambda, k}$  является промежуточным — меньше чем модуль Верма  $M_{\lambda, k}$ , но больше чем  $L_{\lambda, k}$ . На этих представлениях можно определить действие алгебры  $\widetilde{\mathfrak{g}}$ , для этого можно определить собственное значение действия  $d$  на старшем векторе  $v_{\lambda, k}$  как угодно и далее продолжить на все представление. Часто удобно считать, что  $d$  действует оператором  $-L_0$ , см. ниже.

Представление старшего веса алгебры  $\widehat{\mathfrak{g}}$  называется интегрируемым, если для любой  $\mathfrak{sl}_2$  тройки  $e_i, h_i, f_i, 0 \leq i \leq r$  элементы  $e_i$  и  $f_i$  действовали локально нильпотентно, то есть для любого вектора  $v$  существует  $N$  такое, что  $e_i^N v = f_i^N v = 0$ . На самом деле из этого следует, что любой  $f_\alpha$  соответствующий вещественному корню действует локально нильпотентно, позже мы этим воспользуемся.

Паре  $(\lambda, k)$  можно сопоставить вес в  $\widehat{\mathfrak{h}}^*$  значение которого на  $h_i$  равно  $\lambda(h_i), 1 \leq r$  и значение на  $K$  равно  $k$ . Если разложение  $\lambda$  по фундаментальным весам равно  $\lambda = \sum_{i=1}^r n_i \omega_i$ , то  $(\lambda, k) = \sum_{i=0}^r n_i \omega_i$ , где  $n_0 = k - (\lambda, \theta^\vee)$  (как обычно в случае простых связей можно не отличать  $\theta$  и  $\theta^\vee$ ).

**Теорема 2.1.** а) Модуль  $L_{\lambda, k}$  является интегрируемым если и только  $(\lambda, k) = \sum_{i=0}^r n_i \omega_i, n_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ .

Эквивалентно это условие можно написать как  $\lambda \in P^+$  и  $(\lambda, \theta^\vee) \leq k$ . Множество  $\lambda$  удовлетворяющих таким условиям обозначается  $P_k^+$ .

б) В этом случае, если  $(\lambda, k) = \sum n_i \omega_i$ , то подмодуль  $L_\lambda$  порожден векторами вида  $f_i^{n_i+1} v_\lambda$ .

**Пример 2.1.** Пусть  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$ . Интегрируемых представлений на уровне  $k$  будет  $k+1$ ,  $\lambda = l\omega_1, 0 \leq l \leq k$ . Сингулярные векторы которые занулены в представлении  $L_{l, k}$  имеют вид  $f_1^{l+1} v_{l, k}$  и  $f_0^{k-l+1} v_{l, k}$  (напомним, что в токовых обозначениях  $f_1 = f[0], f_0 = e[-1]$ ). Если взять меньшую степень, то вектора  $f[0]^l v_{l, k}$  и  $e[-1]^{k-l} v_{l, k}$  лежат в представлении  $L_{l, k}$  и являются примерами так называемых экстремальных векторов, они являются собственными для других борелевских подалгебр (полученных их  $\widehat{\mathfrak{b}}^+$  действием аффинной группы Вейля).

**Задача 2.1.** Обозначим через  $a_n, n \in \mathbb{Z}, \hat{Q}$  генераторы алгебры Гейзенберга, с нетривиальными коммутационными соотношениями  $[a_n, a_{-n}] = n, [a_0, \hat{Q}] = 1$ . Удобно их упаковать в одно (голоморфное) бозонное поле

$$\varphi(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus 0} \frac{1}{-n} a_n z^{-n} + a_0 \log z + \hat{Q}.$$

Докажите, что формулы

$$e(z) = {}_* \exp(\sqrt{2}\varphi(z))_*, \quad h(z) = \sqrt{2}\partial\varphi(z), \quad f(z) = {}_* \exp(-\sqrt{2}\varphi(z))_*$$

задают интегрируемое представление алгебры  $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$  на уровне 1. Сколько представлений получается такой конструкцией?

**Задача 2.2.** Пусть  $\psi_r$  — генераторы алгебры Клиффорда с нетривиальными коммутационными соотношениями  $\{\psi_r, \psi_{-r}\} = 1$ . На самом деле две версии этой алгебры: с  $r \in \mathbb{Z}$  и  $r \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$ . Удобно упаковать эти генераторы в одно (голоморфное) фермионное поле  $\psi(z) = \sum \psi_r z^{-r-1/2}$ . Докажите, что формулы

$$e(z) = \sqrt{2} {}_* \psi(z) \exp(\varphi(z))_*, \quad h(z) = 2\partial\varphi(z), \quad f(z) = \sqrt{2} {}_* \psi(z) \exp(-\varphi(z))_*$$

задают интегрируемое представление алгебры  $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$  на уровне 2. Перепишите эти формулы при помощи трех (вещественных) фермионов. Сколько представлений получается такой конструкцией?

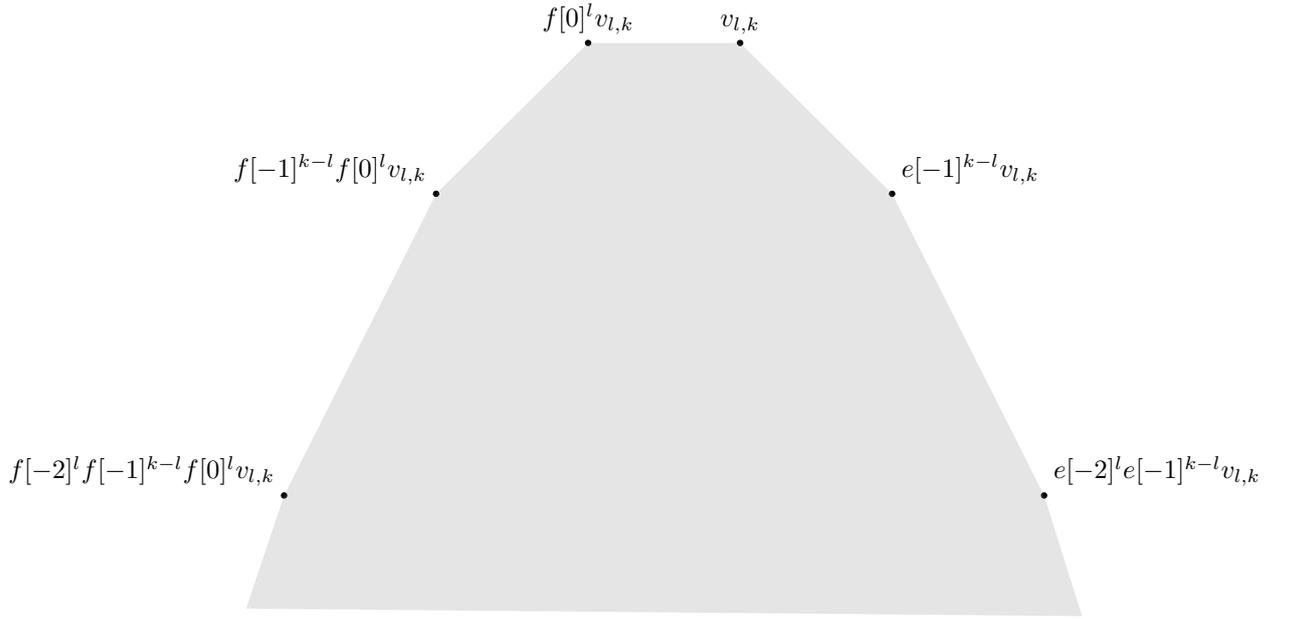


Рис. 1: экстремальные вектора в представлении  $L_{l,k}$

Общий модуль Верма  $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$  имеет размеры как три бозона (свободно порожден тремя токами  $e(z), h(z), f(z)$ ). Размеры интегрируемых представлений меньше, в случае уровня 1 представление построено при помощи  $\widehat{1}$  бозона, в случае уровня 2 из 1.5 бозонов. Вообще, интегрируемое представление  $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$  имеет размеры как  $\frac{3k}{k+2}$  бозонов.

Другой класс примеров — это так называемые представления вычисления (устоявшегося русского термина нет, иногда еще говорят представления эвалюации). Пусть  $V$  — представление  $\mathfrak{g}$ , выберем  $a \in \mathbb{C}$ . Тогда представление  $V(a)$  алгебры  $\widehat{\mathfrak{g}}$  определено тем что элемент  $x_n$  действует как  $xa^n$ ,  $K$  действует нулем. Отметим, что нельзя определить действие  $d$  на этом пространстве, т.е. это представление не является представлением  $\widehat{\mathfrak{g}}$ . Также это представление не является представлением старшего веса относительно  $\widehat{\mathfrak{b}}^+$ .

Можно поступить иначе и рассмотреть  $a$  как формальный параметр. Тогда пространство представления является множество полиномов Лорана со значениями в  $V: V[a, a^{-1}]$ . На этом представлении  $d$  уже действует.

### 2.3 Токовая реализация

В физической литературе по конформной теории поля алгебру  $\widehat{\mathfrak{g}}$  обычно описывают через токи. Сопоставим каждому элементу  $J \in \mathfrak{g}$  ток  $J(z) = \sum J_n z^{-n-1}$ . Если коммутационные соотношения алгебры Ли  $\mathfrak{g}$  имеют вид  $[J^a, J^b] = \sum f_c^{a,b} J^c$ , то в

терминах токов мы имеем

$$J^a(z)J^b(w) = k \frac{(J^a, J^b)}{(z-w)^2} + \sum_c f_c^{a,b} \frac{J_c(w)}{z-w} + \text{reg.} .$$

Выберем ортонормированный относительно формы Киллинга базис  $J^a$  в  $\mathfrak{g}$ . Формула Сугавары имеет вид

$$T_{\text{Sug}}(z) = \sum L_n z^{-n-2} = \frac{1}{2(k+h^\vee)} \sum_{a \in B} : J^a(z) J^a(z) : . \quad (2.1)$$

Можно написать формулу через два двойственных базиса как выше мы писали элемент Казимира. Операторы  $L_n$  образуют алгебру Вирасоро

$$[L_n, L_m] = (n-m)L_{n+m} + \delta_{n+m} \frac{n^3-n}{12} c,$$

где центральный заряд равен  $c = \frac{k \dim \mathfrak{g}}{k+h^\vee}$ .

**Задача 2.3.** а) Найдите значение коммутатора  $[L_n, J_k]$  для любого  $J \in \mathfrak{g}$ .  
б) Найдите значение  $L_0$  на старшем векторе  $v_{\lambda, k}$ .

## 3 Пространства конформных блоков

### 3.1 Коинварианты

Пусть  $V$  — представление алгебры Ли  $\mathfrak{a}$ . Через  $V/\mathfrak{a}$  мы будем обозначать пространство коинвариантов — фактор по подпространство состоящему из элементов вида  $av$ ,  $a \in \mathfrak{a}$ ,  $v \in V$ .

**Пример 3.1.** Пусть  $\mathfrak{a}$  простая алгебра Ли,  $V$  ее неприводимое представление. Тогда  $V/\mathfrak{a} = 0$  если  $V$  нетривиальное представление и  $V/\mathfrak{a} = V$  в случае если  $V$  тривиальное.

**Задача 3.1.** Докажите, что пространство коинвариантов  $V/\mathfrak{a}$  двойственно пространству инвариантов в двойственном пространстве  $(V^*)^{\mathfrak{a}}$ .

**Предложение 3.1.** Пусть  $V_1$  — какое-то представление алгебры  $\mathfrak{a}$ ,  $V_2 = U(\mathfrak{a}) \otimes U$  индуцированное представление. Тогда  $(V_1 \otimes V_2)/\mathfrak{a} \simeq V_1 \otimes U$

*Доказательство.* Пусть  $v_1, v_2, \dots$  базис в  $V_1$ ,  $u_1, u_2, \dots$ , базис в  $U$ ,  $y_1, y_2 \dots$  базис в  $\mathfrak{a}$ . Докажем, что любой элемент  $(V_1 \otimes V_2)$  может быть однозначно записан как линейная комбинация элементов вида  $y_1^{a_1} \dots y_m^{a_m} (v_i \otimes u_j)$ .

Это достаточно доказать для базиса в  $V_1 \otimes V_2$ , т.е. для элементов вида  $v_i \otimes y_1^{a_1} \dots y_m^{a_m} u_j$ . Это делается индукцией по  $\sum a_j$ . Для векторов вида  $v_i \otimes u_j$  это очевидно. Для векторов вида  $v_i \otimes y_k u_j$  можно написать:

$$v_i \otimes y_k u_j = y_k (v_i \otimes u_j) - y_k v_i \otimes u_j.$$

Далее

$$v_i \otimes y_l y_k u_j = y_l(v_i \otimes y_k u_j) - y_l v_i \otimes y_k u_j,$$

и далее оба слагаемых преобразуются к нужному виду по предыдущему шагу. И так далее.

В пространстве с базисом  $y_1^{a_1} \cdot \dots \cdot y_m^{a_m}(v_i \otimes u_j)$  пространство коинвариантов имеет базис состоящий из (классов)  $v_i \otimes u_j$ .  $\square$

Аналогично доказывается некоторое обобщение этого предложения, которые мы и будем использовать.

**Предложение 3.2.** Пусть  $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2 \subset \mathfrak{a}$  две подалгебры в алгебре Ли  $\mathfrak{a}$ , причем  $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1 \oplus \mathfrak{a}_2$  как векторное пространство. Пусть  $V_1$  — представление алгебры  $\mathfrak{a}$ ,  $U$  — представление алгебры  $\mathfrak{a}_1$ ,  $V_2 = U(\mathfrak{a}_2) \otimes U$  индуцированное представление. Тогда  $(V \otimes V_2)/\mathfrak{a} \simeq (V_1 \otimes U)/\mathfrak{a}_1$ .

### 3.2 Пространство конформных блоков через коинварианты

Пусть  $C$  риманова поверхность (или комплексная кривая),  $p_1, \dots, p_m$  различные точки на этой кривой.

Через  $\mathcal{O}(C - \vec{p})$  мы обозначим алгебру мероморфных функций на  $C$  регулярных вне  $p_1, \dots, p_m$ . Через  $\mathfrak{g}(C - \vec{p}) = \mathfrak{g} \otimes \mathcal{O}(C - \vec{p})$  мы будем обозначать алгебру Ли мероморфных функций на  $C$  регулярных вне  $p_1, \dots, p_m$  со значениями в  $\mathfrak{g}$ .

Для любого  $1 \leq j \leq n$  есть отображение алгебр Ли  $\gamma_j: \mathfrak{g}(C - \vec{p}) \rightarrow \mathfrak{g}[[t, t^{-1}]]$  — разложение элемента  $x \in \mathfrak{g}(C - \vec{p})$  в ряд в окрестности точки  $p_j$ . Отметим, что тут нет центрального расширения.

Центральное расширение можно восстановить учитывая все точки. Через  $U(\widehat{\mathfrak{g}})_k$  мы обозначим фактор алгебры  $U(\widehat{\mathfrak{g}})$  по идеалу порожденному  $K - k$  (здесь  $K$  — элемент  $\widehat{\mathfrak{g}}$ ,  $k$  — комплексное число). Тогда отображение  $\vec{\gamma}$

$$\vec{\gamma}: \mathfrak{g}(C - \vec{p}) \rightarrow U(\mathfrak{g})_k \otimes \dots \otimes U(\mathfrak{g})_k, \quad \vec{\gamma}(x) = \sum_{j=1}^n \gamma_j(x).$$

является гомоморфизмом алгебр Ли. Для этого надо проверить, что

$$[\vec{\gamma}(x), \vec{\gamma}(y)] - \vec{\gamma}([x, y]) = 0.$$

Легко видеть, что разница между левой и правой частью равно  $k \sum_j \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{p_j}} (x, dy)$ , что равно нулю как сумма всех вычетов на кривой.

Теперь можно определить модулярный функтор (другой термин — пространство конформных блоков). Пусть каждой точке  $p_j$  сопоставлено представление  $V_j$ , обозначим через  $V = V_1 \otimes \dots \otimes V_n$ . Алгебра  $\mathfrak{g}(C - \vec{p})$  действует на  $V$  посредством отображения  $\vec{\gamma}$ . Тогда модулярный функтор зависящий от  $C, \vec{p}, \vec{V}$  является пространством двойственным к  $V/(\mathfrak{g}(C - \vec{p}))$ .

**Пример 3.2.**  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ ,  $p_1 = 0$ ,  $V_1 = V_{\lambda,k}$ . Тогда  $\mathfrak{g}(C - \vec{p}) = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t^{-1}] = \mathfrak{g} \oplus (\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t^{-1}]t^{-1})$ . Так как модуль Вейля  $V_{\lambda,k}$  свободно порожден  $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t^{-1}]t^{-1}$  с  $L_\lambda$ , то по переложению выше имеем, что пространство конформных блоков двойственно  $L_\lambda/\mathfrak{g}$ . Согласно примеру выше это равно  $\delta_{\lambda,0}$ .

Это можно интерпретировать как то, что пространство одноточечных блоков на сфере не равно нулю только в случае единичного оператора, и в этом случае оно одномерно.

**Пример 3.3.**  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ ,  $p_1 = 0, p_2 = \infty$   $V_1 = V_{\lambda_1,k}, V_2 = V_{\lambda_2,k}$ . В этом случае  $\mathfrak{g}(C - \vec{p}) = \mathfrak{g} \otimes [t, t^{-1}]$ . Аналогично показывается, что пространство конформных блоков двойственно к  $(L_{\lambda_1} \otimes L_{\lambda_2})/\mathfrak{g}$ , что опять же по примеру выше равно  $\delta_{\lambda_1, \lambda_2^*}$ , где звездочка переход к двойственному представлению:  $L_{\lambda^*} = L_\lambda^*$ .

Обобщением рассуждения из этого примера является следующая лемма.

**Лемма 3.3.** Пусть  $q \in C$  точка отличная от точек  $\vec{p}$ . Тогда

$$(V \otimes V_{\lambda,k})/\mathfrak{g}(C - \vec{p} - q) \simeq (V \otimes L_\lambda)/\mathfrak{g}(C - \vec{p})$$

*Доказательство.* Воспользуемся следствием из теоремы Римана-Роха:

**Теорема 3.4.** Пусть на кривой  $C$  рода  $g$  отмечены точки  $p_1, \dots, p_n$  и выбраны целые числа  $a_1, a_2, \dots, a_n$  такие, что  $\sum a_i > 2g - 2$ . Тогда пространство мероморфных функций имеющих регулярных на  $C - \vec{p}$  и имеющих полюса в  $p_i$  степени не более  $a_i$  равно  $\sum a_i - g + 1$ .

Из этого следует, что на кривой  $C$  существует мероморфная функция  $z^{-1}$  которая имеет полюс в точке  $q$  первого порядка и регулярная на  $C - \vec{p} - q$  (возьмем большие  $a_i$  в точках  $p_i$ , а потом добавим точку  $q$  с  $a = 1$ , тогда размерность пространства функций увеличится ровно на 1, новая функция как раз будет иметь полюс первого порядка в точке  $q$ ). Таким образом мы получаем, что

$$\mathfrak{g}(C - \vec{p} - q) = \mathfrak{g}(C - \vec{p}) \oplus \left( \bigoplus_{j=1}^{\infty} \mathfrak{g}z^{-j} \right).$$

Применяя предложение выше мы получаем нужный изоморфизм.  $\square$

**Следствие 3.5.** Если  $C = \mathbb{C}\mathbb{P}^1$  и  $V_i = V_{\lambda_i,k}$ , то пространство конформных блоков равно  $(L_{\lambda_1^*} \otimes \dots \otimes L_{\lambda_n^*})^{\mathfrak{g}}$ .

Если какие-то представления еще меньше (скажем интегрируемые), то пространство конформных блоков не увеличится, в частности будет конечномерным.

Это следствие просто доказывается по индукции.

**Задача 3.2.** Пусть  $C = \mathcal{E}$  кривая рода 1, с одной точкой  $p_1$ . точка одна, представление  $V_1$  является модулем Вейля  $V_{0,k}$ . Докажите, что пространство конформных блоков является бесконечномерным.

В операторном формализме, (который мы еще вспомним ниже), 1-точка на торе это след оператора соответствующего  $V_1$  в пространстве состояний. Канал конформного блока — это класс неприводимого представления в котором берется след. Бесконечномерность пространства конформных блоков связана с тем, что существует бесконечно много неприводимых представлений (промежуточных каналов) в которых берется след.

**Задача 3.3.** *Сколько существует интегрируемых представлений  $\widehat{\mathfrak{so}}_{2n}$  уровня 1? Постройте их все явно при помощи фермионов. Что у этих представлений на "верхнем уровне"?*

## 4 Конформные блоки для интегрируемых представлений. Топологические теории

### 4.1 Конечномерность пространства конформных блоков

В прошлый раз мы обсуждали определение пространства конформных блоков для общего уровня  $k$ . В этой лекции если не оговорено обратное  $k \in \mathbb{Z}_{>0}$  и представления  $V_i$  интегрируемые.

**Теорема 4.1.** *Пусть  $V_{n+1} = L_{\lambda_{n+1},k}$  интегрируемое представление,  $V = \otimes_{j=1}^n V_{\lambda_j,k}$  произведение модулей Вейля,  $L = \otimes_{j=1}^n L_{\lambda_j,k}$  произведение интегрируемых представлений. Тогда*

$$(V \otimes L_{\lambda_{n+1},k})/\mathfrak{g}(C - \vec{p} - q) = (L \otimes L_{\lambda_{n+1},k})/\mathfrak{g}(C - \vec{p} - q).$$

Мы не будем доказывать эту теорему. Смысл в том, что если одно интегрируемое, то остальные тоже можно считать интегрируемыми.

**Теорема 4.2.** *Пусть  $C$ ,  $\vec{p}$  как выше,  $V_i = L_{\lambda_i,k}$  интегрируемые представления. Тогда пространства конформных блоков конечномерны.*

Эту размерность мы будем обозначать  $N(C, k, \vec{p}, \vec{\lambda})$ .

*Доказательство.* По предыдущей лемме, можно считать, что  $V_1$  интегрируемо, а все остальные  $V_i$  есть модули Вейля. Тогда по лемме из прошлой лекции пространство конформных блоков совпадает с  $(L_{\lambda_1,k} \otimes L_{\lambda_2} \otimes \dots \otimes L_{\lambda_n})/\mathfrak{g}(C - p_1)$ . Поскольку тензорное произведение  $L_{\lambda_2} \otimes \dots \otimes L_{\lambda_n}$  конечномерное, то достаточно доказать конечномерность коинвариантов  $L_{\lambda_1,k}/\mathfrak{g}(C - p_1)$ , т.е. доказать конечномерность пространства одноточечных конформных блоков.

Теперь применим теорему Римана-Роха. Из нее (даже из следствия которое было на прошлой лекции) следует, что существует  $M$ , такое, что для любого  $N \geq M$  существует мероморфная функция на  $C$  регулярная вне  $p_1$  и имеющая в точке  $p_1$  полюс порядка  $N$ . Например можно взять  $M = 2g - 1$ . Значит алгебра  $\mathfrak{g}(C - p_1)$  (точнее ее образ под действием  $\gamma_0$ ) содержит подалгебру  $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t^{-1}]t^{-M}$ . Докажем,

что коинварианты уже относительно этой подалгебры конечномерны. На этом пространстве  $L_{\lambda_1, k}^M = L_{\lambda_1, k}/\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t^{-1}]t^{-M}$  действует фактор алгебра

$$\mathfrak{n}_M = \mathfrak{n}_- \oplus (\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t^{-1}]t^{-1}/(t^{-M})).$$

Алгебра  $\mathfrak{n}_M$  конечномерная и порождена образующими Шевалле  $f_0, \dots, f_r$ .

Теперь нам понадобятся понятия аннулятора модуля для универсальной обертывающей алгебре Ли. В большей общности про это можно почитать например в [4].

Пусть есть конечнопорожденный модуль  $V$  над какой-то алгеброй Ли  $\mathfrak{a}$ . Обозначим порождающие подпространство (конечномерное подпространство содержащее все образующие) через  $V_0$ . Введем на пространстве  $V$  так называемую PBW фильтрацию: пусть  $V_1 = V_0 + \mathfrak{a}V_0$ ,  $V_2 = V_1 + \mathfrak{a}V_1$  и так далее. Другими словами  $V_i$  порождено векторами которые получаются из  $V_0$  применением не более  $i$  элементов  $\mathfrak{a}$ .

Присоединенное градуированное пространство мы обозначим  $\text{gr } V = \bigoplus V_i/V_{i-1}$ . На нем уже действует не универсальная обертывающая  $U(\mathfrak{a})$ , а симметрическая алгебра  $S(\mathfrak{a})$ . Действие определено так: пусть  $v \in V_i$ , тогда  $v + V_{i-1} \in V_i/V_{i-1}$ , тогда для любого  $x \in \mathfrak{a}$  определим  $x(v + V_{i-1}) = xv + V_i \in V_{i+1}/V_i$ .

Обозначим через  $I \subset S(\mathfrak{a})$  идеал который действует нулем на  $\text{gr } V$ . Через  $\sqrt{I}$  мы обозначим его радикал, множество  $f \in S(\mathfrak{a})$  таких, что  $f^m \in I$  для некоторого натурального  $m$ . Можно доказать, что хотя идеал  $I$  может зависеть от выбора начального пространства  $V_0$ , но  $\sqrt{I}$  уже не зависит.

На алгебре  $S(\mathfrak{a})$  есть скобка Пуассона, на образующих она определена как  $\{x, y\} = [x, y]$ , где  $x, y \in \mathfrak{a}$ . Если отождествить  $S(\mathfrak{a})$  с функциями на  $\mathfrak{a}^*$ , то это скобка называется скобкой Костанта–Кириллова на  $\mathfrak{a}^*$ .

**Теорема 4.3** (Габбер). *Для любых двух функций  $f, g \in \sqrt{I}$  верно  $\{f, g\} \in \sqrt{I}$ .*

Это непростая теорема и доказывать ее мы не будем. Доказательство написано например в приложении к лекциям 4,5 курса Этингофа [5].

В нашем случае представление  $L_{\lambda_1, k}^M$  алгебры  $\mathfrak{n}_M$  порождено одним старшим вектором  $v_{\lambda_1, k}$ . Значит и присоединенное градуированное пространство будет порождено одним вектором, т.е. имеет виде  $S(\mathfrak{n}_M)/I$ , где идеал  $I$  является аннулятором. Из интегрируемости представления  $L_{\lambda_1, k}$  следует, что образующие  $f_0, \dots, f_r$  алгебры  $\mathfrak{n}_M$  действуют на  $v_{\lambda_1, k}$  нильпотентно, поэтому все они будут лежать в  $\sqrt{I}$ . Тогда, по теореме Габбера получаем, что все алгебра  $\mathfrak{n}_M \subset \sqrt{I}$ . Обозначим  $y_1, \dots, y_D$  — базис в  $\mathfrak{n}_M$ , тогда для любого  $j$  существует натуральное  $m_j$  такое, что  $y_j^{m_j} v_{\lambda_1, k} = 0$  в  $\text{gr } L_{\lambda_1, k}^M$ . Значит вектора вида

$$y_1^{a_1} \cdot \dots \cdot y_D^{a_D} v_{\lambda_1, k}, \quad 0 \leq a_j < m_j$$

порождают все пространство  $\text{gr } L_{\lambda_1, k}^M$ , значит, это пространство конечномерно. Отсюда следует, что  $L_{\lambda_1, k}^M$  конечномерно.  $\square$

**Задача 4.1.** *Найдите  $\sqrt{I}$  для случае простой алгебры  $\mathfrak{g}$  и представлений  $L_\lambda$  и  $M_\lambda$ , где  $\lambda$  целочисленный доминантный.*

**Задача 4.2.** Пусть  $\mathfrak{g}$  — алгебра Вирасоро,  $V$  — ее модуль старшего веса (модуль Верма или его фактор). Докажите, что для  $\sqrt{I}$  возможны три варианта  $(C, L_0, L_1, L_2, \dots)$ ;  $(L_{-1} \cdot C, L_0, L_1, L_2, \dots)$ ;  $(\dots, L_{-2}, L_{-1}, C, L_0, L_1, L_2, \dots)$ .

**Теорема 4.4.** В условиях предыдущей теоремы, размерность пространства конформных блоков не зависит от выбора кривой и точек  $p_i$ , то есть  $N(C, k, \vec{p}, \vec{\lambda}) = N_{g,n}(k, \vec{\lambda})$ .

**Задача 4.3.** а) Найдите по определению размерность пространства конформных блоков для случая  $C = \mathcal{E}$  эллиптическая кривая с одной точкой  $p_1$ , алгебра  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$ ,  $k = 1$  и представление  $V_1 = L_{0,1}$ .

б)\* Попробуйте обобщить результат предыдущего пункта на случай общего  $k \in \mathbb{Z}_{>0}$ .

в) Попробуйте обобщить результат предыдущих пунктов на случай произвольной алгебры Ли.

## 4.2 Топологические теории

Напомним определение топологических теорий по Атье. Под многообразием мы будем понимать гладкое, ориентируемое, компактное многообразие с краем. Через  $\partial M$  мы будем обозначать границу многообразия  $M$ .

$d + 1$ -мерной топологической квантовой теорией поля называется набор следующий набор данных.

- а)  $d$ -мерному многообразию  $N$  без края сопоставляется конечномерное векторное пространство  $Z(N)$ .
- б)  $d + 1$ -мерному многообразию  $M$  сопоставляется вектор  $Z(M) \in Z(\partial M)$ .
- в) Для любого гомеоморфизма  $f: N \rightarrow N'$  есть изоморфизм  $f_*: Z(N) \rightarrow Z(N')$ .
- г) Функториальные изоморфизмы  $Z(\bar{N}) \simeq Z(N)^*$ ,  $Z(\emptyset) \simeq \mathbb{C}$ ,  $Z(N_1 \sqcup N_2) \simeq Z(N_1) \otimes Z(N_2)$ , где  $\bar{N}$  обозначает многообразие с обращенной ориентацией,  $\sqcup$  обозначает несвязное объединение.

Эти данные должны удовлетворять набору аксиом:

1. Для гомеоморфизма  $d + 1$  мерных многообразий  $f: M \rightarrow M'$  мы имеем

$$Z(M') = (f|_{\partial M})_* Z(M).$$

2. (Склейка) Пусть  $\partial M = N_1 \sqcup N_2 \sqcup N_3$ , и  $f: N_3 \rightarrow \bar{N}_2$  гомеоморфизм,  $M' = M/f$  многообразие полученное из  $M$  склейкой  $N_2$  и  $N_3$ . Тогда  $Z(M')$  равно образу  $Z(M)$  под действием композиции

$$Z(N_1) \otimes Z(N_2) \otimes Z(N_3) \xrightarrow{id \otimes f} Z(N_1) \otimes Z(N_2) \otimes Z(N_2)^* \rightarrow Z(N_1).$$

3. Пусть  $I = [0, 1]$  отрезок, тогда  $Z(N \times I) = id \in Z(N) \otimes Z(N)^*$ .

**Замечание 4.1.** Из этих аксиом легко следует, что  $Z(S^1 \times N) = \dim Z(N)$ . Для этого в частности нужна конечномерность  $Z(N)$ .

**Замечание 4.2.** О  $d + 1$ -мерном многообразии  $M$  можно думать как о эволюции  $d$ -мерного многообразия: есть какое-то многообразие  $N_0$  при времени  $t = 0$ , потом что-то происходит, и в момент времени  $t = 1$  у нас другое многообразие  $N_1$ . Тогда  $\partial M = \bar{N}_0 \sqcup N_1$  и  $Z(M)$  может рассматриваться как отображение из  $Z(N_0)$  в  $Z(N_1)$ .

Таким образом,  $Z(N)$  может рассматриваться как (гильбертово) пространство состояний системы. Причем, так как  $Z(N \times I) = id$ , то гамильтониан системы тривиален  $H = 0$ . Но сама теория может быть нетривиальной, то есть лагранжиан  $L \neq 0$ .

**Задача 4.4.** Докажите, что если  $f, g: N_1 \rightarrow N_2$  два изотопных гомеоморфизма, то отображения  $f_*, g_*: Z(N_1) \rightarrow Z(N_2)$  совпадают.

Эта задача в частности говорит, что пространство  $Z(N)$  является представлением группы классов отображений.

Сейчас мы будем говорить о частном случае —  $d = 1$ , т.е. двумерной топологической теории поля. Тогда  $N$  одномерное, единственное связное компактное одномерное многообразие это окружность, обозначим  $R = Z(S^1)$ .

**Теорема 4.5.** Двумерная топологическая теория поля задается структурой коммутативной, ассоциативной алгебры со скалярным произведением на пространстве  $R$ .

Такие алгебры еще называют фробениусовыми алгебрами.

*Схема доказательства.* Так как  $\bar{S}^1 \simeq S^1$ , то мы получаем изоморфизм между  $R$  и  $R^*$  который и задает скалярное произведение. Умножение на  $R$  происходит из сферы с тремя дырками (штанов). Коммутативность следует из того, что есть гомеоморфизм сферы переставляющий дырки, ассоциативность следует из эквивалентности двух разрезов сферы с четырьмя дырками на две пары штанов.

Обратно, любое двумерное многообразие с краем можно разрезать на диски, цилиндры и штаны. Дальше доказывается, что любые два таких разрезания переводятся друг в друга элементарными преобразованиями.  $\square$

Каждой поверхности рода  $g$  с  $n$  дырками соответствует отображение  $N_g: R^{\otimes n} \rightarrow \mathbb{C}$ . Если выбрать в  $R$  базис  $v_1, \dots, v_N$ , то для любых  $1 \leq j_1, \dots, j_n \leq N$  мы получаем число  $N_g(i_1, \dots, i_n)$ . Эти числа, конечно, содержат всю информацию о топологической теории поля.

Обычно считается, что в теории есть единичное поле  $1 \in R$ , обладающее свойством, что добавление одной дырки в которой расположена единица не меняет значение  $N_g$ . Обозначим через  $\epsilon: R \rightarrow \mathbb{C}$  отображение соответствующее сфере с одной дыркой. Тогда скалярное произведение переписывается через умножение и  $\epsilon$ , а именно  $(x, y) = \epsilon(xy)$ .

Следующая теорема является частным случаем утверждения: по двумерной конформной теории поля можно построить двумерную топологическую теорию поля. Так как мы работаем для теорий с симметрией аффинная алгебра Ли, то для них мы и формулируем.

**Теорема 4.6.** Числа  $N_{g,n}(k, \vec{\lambda})$  определенные в Теореме 4.4 задают двумерную топологическую теорию поля.

В качестве базиса в  $R$  (т.е. того, что нумерует индексы у  $N$ ) в данном случае выступают  $[\lambda]$ , где  $\lambda \in P_k^+$ . Кольцо  $R$  в данном случае называется кольцом (или алгеброй) Верлинде.

**Пример 4.3.** Посмотрим, что будет в случае общего уровня  $k$ . Тогда в качестве  $R$  можно взять пространство с базисом  $[\lambda]$ , где  $[\lambda] \in P^+$ . На кривых большого рода топологическая теория определена не будет, но в роде ноль все хорошо.

Пространства конформных блоков на сфере мы вычисляли на прошлой лекции. Спаривание  $N_0(\lambda, \mu) = \delta_{\lambda, \mu^*}$ , где  $L_{\mu^*} = L_{\mu}^*$  двойственное представление. Трехточка  $N_0(\lambda, \mu, \nu^*)$  имеет такие же размерности как размерность  $\mathfrak{g}$  инвариантов в  $L_{\lambda} \otimes L_{\mu} \otimes L_{\nu^*}$ , что равно кратности вхождения  $L_{\mu}$  в  $L_{\lambda} \otimes L_{\mu}$ . Т.е. структурные константы  $R$  есть коэффициенты Клебша-Гордона из (1.4). Таким образом  $R$  есть кольцо характеров конечномерных представлений  $\mathfrak{g}$ .

Отображение  $\epsilon$  имеет вид  $\epsilon([\lambda]) = \delta_{\lambda, 0}$ .

## 5 Вычисление алгебры Верлинде

### 5.1 Сравнение с операторным подходом к конформным блокам

Подход к конформным блокам при помощи коинвариантов является одним из математических. Другой способ, хорошо работающий в роде 0 и 1 основан на сплетающих операторах и операторном разложении.

Пусть есть конечномерное представление  $L_{\lambda}$ , выберем в нем базис  $u_j$ , и пусть действие алгебры Ли в этом базисе задано формулой  $J^a u_j = f_j^{a,j'} u_{j'}$ . Каждому вектору  $u_j$  отвечает примарное поле  $\Phi_{j,\lambda}$  с операторным произведением

$$J^a(z) \Phi_{\lambda}^j(w) = - \sum f_j^{a,j'} \frac{\Phi_{\lambda}^{j'}(w)}{z-w} + :J^a(z) \Phi_{\lambda}^j(w):. \quad (5.1)$$

Здесь использовано понятие нормального упорядочения токов (формальный рядов со значением в операторах). Для токов  $A(z) = \sum A_{(-n-1)} z^n$ ,  $B(w) = \sum B_{(-m-1)} w^m$  оно равно

$$:A(z)B(w): = A(z)_+ B(w) + B(w) A(z)_-,$$

где  $A(z)_+ = \sum_{n \geq 0} A_{(-n-1)} z^n$ ,  $A(z)_- = \sum_{n < 0} A_{(-n-1)} z^n$ . Нормальное упорядочение является регулярным при  $z = w$  (при условии гладкости токов  $A(z)$  и  $B(w)$ ).

Сингулярная часть в формуле (5.1) берется из соответствия между операторами и состояниями, поля  $\Phi^j$  соответствуют векторам  $w^j$  рассматриваемым как старшие

векторам в верху модуля Вейля  $V_{\lambda^*,k}$ . Тогда  $J^a(z)u^j = -\frac{1}{z} \sum f_{j'}^{a,j} u^{j'}$  +регулярные члены, напомним, что  $J^a(z) = \sum J^a[n]z^{-n-1}$  и  $\lambda^*$  — старший вес представления  $L_\lambda^*$  двойственного к  $L_\lambda$ .

**Задача 5.1.** Рассмотрим сплетающий оператор  $\Phi_\lambda(w): V_1 \rightarrow V_2 \otimes L_\lambda(w)$ , здесь  $L_\lambda(w)$  — представление вычисления см. параграф 2.2. Используя базис в пространстве  $L_\lambda$  запишем оператор в виде

$$\Phi_\lambda(w)v = \sum \Phi_\lambda^j(w)v \otimes u_j \quad \text{или} \quad \Phi_\lambda v = \sum \Phi_\lambda^j[k]v \otimes u_j w^k,$$

вторая формула имеет смысл если  $w$  это формальный параметр представления. Докажите, что  $\Phi_\lambda^j(w)$  удовлетворяют операторному разложению (5.1).

**Задача 5.2.** Пусть  $C = \mathbb{CP}^1$ ,  $p_1 = 0$ ,  $p_m = \infty$ ,  $V_i = V_{\lambda_i,k}$  — модули Вейля  $1 < i < m$  (на  $V_1$  и  $V_m$  условий не налагается). Тогда пространство коинвариантов двойственно пространству сплетающих операторов

$$V_1 \rightarrow L_{\lambda_2}^*(p_2) \otimes \dots \otimes L_{\lambda_{m-1}}^*(p_{m-1}) \otimes (V_m')^* \quad (5.2)$$

Здесь  $L_\mu(z)$  это представления вычисления построенные по неприводимым представлениям  $L_\mu$

Здесь  $V^*$  обозначает двойственное представление, а  $V'$  обозначает представление в котором действие генераторов  $x[n]$  заменено на  $x[-n]$ ,  $K$  на  $-K$ . Отметим, что представление  $(V')^*$  имеет тот же центральный заряд  $k$ , что и исходное  $V$ .

*Указание.* Используя Лемму 3.3 пространство коинвариантов сводится к

$$(V_1 \otimes L_{\lambda_2}(p_2) \otimes \dots \otimes L_{\lambda_{m-1}}(p_{m-1}) \otimes V_m') / (\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}]).$$

Это пространство двойственно пространству сплетающих отображений (в духе задачи 3.1).

## 5.2 Вычисление алгебры Верлинде для случая $\mathfrak{sl}_2$

**Предложение 5.1.** Пусть  $C = \mathbb{CP}^1$ . Тогда пространство конформных блоков двойственно

$$(L_{\lambda_1} \otimes \dots \otimes L_{\lambda_m}) / (\mathfrak{g} + T^{k+1}), \quad (5.3)$$

где  $T$  оператор действующий по формуле

$$T(v_1 \otimes \dots \otimes v_j \otimes \dots \otimes v_m) = \sum_{j=1}^m p_j^{-1} v_1 \otimes \dots \otimes f_\theta v_j \otimes \dots \otimes v_m.$$

*Доказательство.* Пусть все точки  $p_i$  отличны от нуля. Добавим в точку ноль единичное поле и перепишем пространство коинвариантов используя теорему 4.1 и лемму 3.3:

$$\begin{aligned}
& (L_{\lambda_1, k} \otimes \dots \otimes L_{\lambda_m, k}) / (\mathfrak{g}(C - \vec{p})) = (V_{0, k} \otimes L_{\lambda_1, k} \otimes \dots \otimes L_{\lambda_m, k}) / (\mathfrak{g}(C - \vec{p} - 0)) \\
& = (L_{0, k} \otimes L_{\lambda_1, k} \otimes \dots \otimes L_{\lambda_m, k}) / (\mathfrak{g}(C - \vec{p} - 0)) = (L_{0, k} \otimes V_{\lambda_1, k} \otimes \dots \otimes V_{\lambda_m, k}) / (\mathfrak{g}(C - \vec{p} - 0)) \\
& = (L_{0, k} \otimes L_{\lambda_1} \otimes \dots \otimes L_{\lambda_m}) / (\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[z^{-1}]) \quad (5.4)
\end{aligned}$$

Теперь заметим, что как  $(\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[z^{-1}])$  модуль  $L_{0, k}$  есть  $U((\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[z^{-1}])) / (\mathfrak{g}, e_\theta[-1]^k)$  (напомним, что  $e_\theta[-1] = f_0$  — генератор соответствующий дополнительному корню, здесь мы используем интегрируемость представления). Отсюда следует утверждение теоремы, оператор  $T$  как раз соответствует аффинному корню  $e_\theta[-1]^k$ .  $\square$

В терминах операторного формализма это можно переговорить следующим образом. Конформные блоки соответствуют матричным элементам вида  $\langle \emptyset | \Phi_{\lambda_1}(p_1) \cdots \Phi_{\lambda_m}(p_m) | \emptyset \rangle$ . Условие факторизации по образу  $T^k$  происходит из того, что  $e_\theta[-1]^k | \emptyset \rangle = 0$  — зануление сингулярного вектора.

В принципе вычисление пространства (5.3) уже является задачей про обычные, конечномерные алгебры Ли. Для того, чтобы описать ответ как алгебру Верлинде, надо, прежде всего, найти трехточку  $N_{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3}$ .

**Предложение 5.2.** Пусть  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$ ,  $\lambda_i = l_i$ . Тогда  $N_{l_1, l_2, l_3} = 1$  если  $l_1 + l_2 + l_3 = 2l$  чётно,  $l_i \leq l$  и  $l \leq k$ ,  $N_{l_1, l_2, l_3} = 0$  иначе.

*Доказательство.* Нам нужно найти размерность пространства коинвариантов (5.3). Удобнее перейти к двойственному пространству, так представления  $\mathfrak{sl}_2$  самодвойственны то, надо найти размерность пространства  $\mathfrak{sl}_2$  инвариантов в  $L_{l_1} \otimes L_{l_2} \otimes L_{l_3}$  которые зануляются оператором  $T^k$ .

Наличие  $\mathfrak{sl}_2$  инварианта в тензорном произведении  $L_{l_1} \otimes L_{l_2} \otimes L_{l_3}$  равносильно существованию вложения  $L_{l_3} \subset L_{l_1} \otimes L_{l_2}$ . Такое вложение существует, если выполнено условие Клебша-Гордана, а именно  $l_1 + l_2 + l_3 = 2l$  чётно,  $l_i \leq l$ . При этих условиях вложение единственно с точностью до умножения на число.

Соответствующий инвариантный элемент в  $L_{l_1} \otimes L_{l_2} \otimes L_{l_3}$  можно предъявить явно. А именно, отождествим пространство  $L_{l_1}$  с пространством однородных многочленов степени  $l_1$  от переменных  $x_1, y_1$ . Генераторы  $e, h, f$  действуют на этом пространстве по стандартным формулам:

$$e = x_1 \frac{\partial}{\partial y_1}, \quad h = x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} - y_1 \frac{\partial}{\partial y_1}, \quad f = y_1 \frac{\partial}{\partial x_1}.$$

Аналогично пространства  $L_{l_2}$  и  $L_{l_3}$  отождествятся с пространствами однородных многочленов от переменных  $x_2, y_2$  и  $x_3, y_3$  степеней  $l_2$  и  $l_3$  соответственно. Тензорное произведение  $L_{l_1} \otimes L_{l_2} \otimes L_{l_3}$  тогда отождествляется с пространством однородных многочленов от переменных  $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3$ . При выполнении условия Клебша-Гордана инвариантный элемент единственен и с точностью до скаляра равен

$$P(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3) = (x_1 y_2 - x_2 y_1)^{l-l_3} (x_1 y_3 - x_3 y_1)^{l-l_2} (x_2 y_3 - x_3 y_2)^{l-l_1}.$$

Видно, что в конструкции  $P$  явно используется и целочисленность  $l$  и неравенства  $l_i \leq l$ . Инвариантность следует из того, что каждый множитель вида  $x_i y_j - x_j y_i$  является инвариантным относительно диагонального действия  $\mathfrak{sl}_2$ .

Теперь подействуем на многочлен  $P$  оператором  $T^k = (\sum z_i x_i \frac{\partial}{\partial y_i})^k$ . Если  $k > l$  то так как каждое слагаемое в  $T$  заменяет одну букву  $y$  на букву  $x$ , а всего степень по  $y$  у многочлена  $P$  равна  $l$ , мы получаем, что  $T^k P = 0$ . Если же  $k \leq l$  то мы получаем ненулевой многочлен (здесь еще важно, что коэффициенты  $z_i$  различны).  $\square$

Из этого предложения следует явное описание умножения в кольце Верлинде. Напомним (см. конец параграфа 4.2), что базис в кольце нумеруется интегрируемыми представлениями. В данном случае мы его обозначаем через  $[l]$ ,  $0 \leq l \leq k$ , тогда умножение имеет вид

$$[l_1] \cdot [l_2] = \sum_{\substack{|l_1 - l_2| \leq l_3 \leq \min(l_1 + l_2, 2k - l_1 - l_2), \\ l_3 \equiv l_1 + l_2 \pmod{2}}} [l_3] \quad (5.5)$$

В принципе это уже дает полное описание алгебры, но в следующем параграфе мы обсудим немного другой способ смотреть на нее.

**Задача 5.3 (\*).** *Используя алгебру Верлинде найдите размерность пространства одноточечных  $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$  конформных блоков на торе с одной отмеченной точкой представление в которой равно  $L_{l,k}$ .*

### 5.3 Спектр алгебры Верлинде $\mathfrak{sl}_2$

Обозначим алгебру Верлинде для  $\mathfrak{sl}_2$  на уровне  $k$  через  $R_k(\mathfrak{sl}_2)$ , через  $R(\mathfrak{sl}_2)$  обозначим кольцо всех представлений алгебры  $\mathfrak{sl}_2$  (см. пример 4.3).

**Предложение 5.3.** *Алгебра  $R_k(\mathfrak{sl}_2)$  является фактором алгебры  $R(\mathfrak{sl}_2)$  по соотношению  $[k + 1] = 0$ .*

*Доказательство.* В алгебре  $R(\mathfrak{sl}_2)$  верно  $[1] \cdot [l] = [l - 1] + [l + 1]$  при любом  $l \geq 1$ , поэтому  $R(\mathfrak{sl}_2)$  свободно порождено  $[1]$ .

С другой стороны это соотношение выполняется только при  $l < k$ . Из этого следует, что все  $[l]$ ,  $l \leq k$  можно выразить через  $[1]$ . Из этого следует, что естественное отображение из  $R(\mathfrak{sl}_2)$  в  $R_k(\mathfrak{sl}_2)$  переводящее  $[1]$  в  $[1]$  является сюръекцией. Так как в образе  $[1] \cdot [k] = [k - 1]$  (по формуле (5.5)), то ядро порождено  $[k + 1]$ .  $\square$

**Задача 5.4.** *Найдите образ произвольного  $[l] \in R(\mathfrak{sl}_2)$  при этом отображении.*

Мы хотим интерпретировать  $R_k(\mathfrak{sl}_2)$  как алгебру функций на некотором конечном множестве. При этом алгебру  $R(\mathfrak{sl}_2)$  можно отождествить с алгеброй характеров  $\mathfrak{sl}_2$ , напомним, что характеры можно вычислять на диагональных матрицах  $\begin{pmatrix} e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi} \end{pmatrix}$  и характер  $l+1$ -мерного представления равен  $\chi_l(\varphi) = \frac{e^{i(l+1)\varphi} - e^{-i(l+1)\varphi}}{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}$ . Можно записать этот характер и через тригонометрию как  $\chi_l(\varphi) = \frac{\sin(l+1)\varphi}{\sin \varphi}$ .

Нам нужны точки  $\varphi$  такие, что выполнено условие  $\chi_{k+1}(\varphi) = 0$ , на таких точках алгебра  $R(\mathfrak{sl}_2)$  факторизуется до  $R_k(\mathfrak{sl}_2)$ . Это условие верно при  $\varphi = \pm \frac{(m+1)\pi}{(k+2)}$ , где  $0 \leq m \leq k$ . Поскольку матрицы соответствующие  $\varphi$  и  $-\varphi$  сопряжены, то значение характеров на таких точках всегда будет одинаково. Поэтому достаточно ограничиться  $\varphi = \frac{(m+1)\pi}{(k+2)}$ , где  $0 \leq m \leq k$ .

**Теорема 5.4.** *Алгебра  $R_k(\mathfrak{sl}_2)$  изоморфна алгебре функций на множестве точек  $\{\frac{(m+1)\pi}{(k+2)} | 0 \leq m \leq k\}$ . Элемент  $[l] \in R_k(\mathfrak{sl}_2)$  при этом изоморфизме переходит в  $\chi_l$ .*

*Доказательство.* Выше мы показали, что отображение  $[l] \mapsto \chi_l$  задает гомоморфизм. Докажем, что он является сюръективным. В пространстве функций на множестве  $\{\frac{(m+1)\pi}{(k+2)} | 0 \leq m \leq k\}$  есть естественный базис дельта функций

$$\delta_m \left( \frac{(m'+1)\pi i}{(k+2)} \right) = \delta_{m,m'}, \quad 0 \leq m, m' \leq k.$$

Разложим характеры по этому базису:

$$\chi_l = \sum_{m=0}^k \left( \frac{e^{\frac{i(l+1)(m+1)\pi}{(k+2)}} - e^{\frac{i(l+1)(m+1)\pi}{(k+2)}}}{e^{\frac{i(m+1)\pi}{(k+2)}} - e^{\frac{i(m+1)\pi}{(k+2)}}} \right) \delta_m. \quad (5.6)$$

Нам достаточно показать, что матрица переход от  $\chi_l$  к  $\delta_m$  невырожденная. Знаменатели в формуле (5.6) не зависят от  $l$ , поэтому достаточно смотреть на невырожденность матрицы из числителей. Образует из них матрицу  $S$ :

$$S_{l,m} = \sqrt{\frac{2}{k+2}} \sin\left(\frac{(l+1)(m+1)\pi}{k+2}\right). \quad (5.7)$$

Нормировка  $\sqrt{\frac{2}{k+2}}$  перед матрицей (и еще  $2i$  в знаменателе синуса) опять же не существенны для вопроса невырожденности, но удобны, как мы увидим ниже. Вообще, нам эта матрица  $S$  понадобится и за пределами данного доказательства.

Заметим, во первых, что матрица  $S$  является симметричной. Докажем теперь, что  $S$  является ортогональной, т.е.  $S^2 = 1$ . Из этого, конечно, будет следовать невырожденность  $S$ . Действительно

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^k S_{l,m} S_{l',m} &= \frac{1}{2} \sum_{m=-k-2}^{k+1} S_{l,m} S_{l',m} = \\ &= \frac{1}{4(k+2)} \sum_{m=-k-2}^{k+1} \left( e^{\frac{i(l-l')(m+1)\pi}{(k+2)}} + e^{\frac{i(l'-l)(m+1)\pi}{(k+2)}} - e^{\frac{i(l+l'+2)(m+1)\pi}{(k+2)}} - e^{\frac{i(-l'-l-2)(m+1)\pi}{(k+2)}} \right) = \\ &= \frac{1}{4(k+2)} (2(k+2)\delta_{l,l'} + 2(k+2)\delta_{l,l'}) = \delta_{l,l'}. \end{aligned}$$

Здесь мы сначала воспользовались тем, что  $S_{l,m}$  можно считать определенным при любых  $m$ , но  $S_{l,-m-2} = -S_{l,m}$  и  $S_{l,k+1} = S_{l,-1} = 0$ . Далее мы воспользовались тем,

что сумма корней из единицы  $\sum_{m=-k-2}^{k+1} e^{\frac{ia(m+1)\pi}{(k+2)}}$  равна  $2(k+2)$  при  $a$  кратном  $2(k+2)$  и нулю иначе.  $\square$

Следствием последней теоремы является то, что в алгебре  $R_k(\mathfrak{sl}_2)$  появляется новый базис состоящий из дельта функций  $\delta_m$ .

**Замечание 5.1.** На самом деле можно доказать, что алгебра Верлинде для любой рациональной конформной теории изоморфна алгебре функций на конечном множестве точек.

Вспомним теперь, что на алгебре  $R_k(\mathfrak{sl}_2)$  есть скалярное произведение, а именно  $([l], [l']) = \delta_{l,l'}$  (так как любое конечномерное представление  $\mathfrak{sl}_2$  изоморфно двойственному). Это скалярное произведение можно переписать как в параграфе 4.2 через отображение  $\epsilon: R_k(\mathfrak{sl}_2) \rightarrow \mathbb{C}$  по формуле

$$([l], [l']) = \epsilon([l] \cdot [l']), \text{ где } \epsilon([l]) = \delta_{l,0}.$$

Помимо базиса  $\delta_m$  будем также рассматривать базис  $\tilde{\delta}_m$  связанный с  $[l]$  по формуле

$$[l] = \sum_{m=0}^k S_{l,m} \tilde{\delta}_m. \quad (5.8)$$

Тогда по формуле (5.6) имеем

$$\delta_m = \sqrt{\frac{2}{k+2}} \sin\left(\frac{(m+1)\pi}{k+2}\right) \tilde{\delta}_m = S_{0,m} \tilde{\delta}_m. \quad (5.9)$$

Так как базис  $[l]$  является ортонормированным и матрица  $S$  ортогональна, то базис  $\tilde{\delta}_m$  также является ортонормированным. Так как  $S^{-1} = S$ , то

$$\tilde{\delta}_m = \sum_{l=0}^k S_{l,m} [l]. \quad (5.10)$$

В частности из этого следует, что  $\epsilon(\tilde{\delta}_m) = S_{0,m}$ . Базис  $\delta_m$ , в свою очередь, удобен тем, что в нем легко умножать — разные дельта функции в произведении дают ноль и  $\delta_m \cdot \delta_m = \delta_m$ .

Найдем теперь явную формулу для структурных констант алгебры в базисе  $[l]$ . Точнее говоря новую формулу, отличную от доказанной в предложении 5.2. Имеем

$$\begin{aligned} N_{l_1, l_2, l_3} &= ([l_1] \cdot [l_2], [l_3]) = \epsilon\left([l_1] \cdot [l_2] \cdot [l_3]\right) = \epsilon\left(\sum_{m_1, m_2, m_3=0}^k \frac{S_{l_1, m_1}}{S_{0, m_1}} \delta_{m_1} \frac{S_{l_2, m_2}}{S_{0, m_2}} \delta_{m_2} \frac{S_{l_3, m_3}}{S_{0, m_3}} \delta_{m_3}\right) = \\ &= \epsilon\left(\sum_{m=0}^k \frac{S_{l_1, m} S_{l_2, m} S_{l_3, m}}{S_{0, m}^3} \delta_m\right) = \sum_{m=0}^k \frac{S_{l_1, m} S_{l_2, m} S_{l_3, m}}{S_{0, m}}. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Эта формула называется формулой Верлинде.

Другая формула Верлинде выражает размерность  $N_g$  — пространства конформных блоков на поверхности рода  $g$  без дырок. Это определено при  $g \geq 2$  и вычисляется при помощи аксиом топологической теории. А именно, поверхность рода  $g$  может быть разрезана на  $2g - 2$  штанов (сфер с тремя дырками). Для этого нужно сделать  $3g - 3$  разрезов по окружностям. Для каждого штана  $\Sigma_k$  обозначим через  $a_k, b_k, c_k$  соответствующие граничные окружности (может статься, что какие-то из этих окружностей совпадают — штаны склеены по штанинам). Так как мы знаем чему равно любое  $N_0[l_1, [l_2], [l_3]] = N_{l_1, l_2, l_3} = \epsilon([l_1] \cdot [l_2] \cdot [l_3])$ , то по аксиоме склейки  $N_g$  находится суммированием по всем возможным значениям  $l_i$  на окружностях разреза:

$$N_g = \sum_{l_1, \dots, l_{3g-3}=0}^k \prod_{k=1}^{2g-2} \epsilon([l_{a_k}] \cdot [l_{b_k}] \cdot [l_{c_k}]). \quad (5.12)$$

Но имея другой ортогональный базис  $\tilde{\delta}_m$  гораздо удобнее расставлять эти элементы на граничных окружностях. Тогда

$$\begin{aligned} N_g &= \sum_{m_1, \dots, m_{3g-3}=0}^k \prod_{k=1}^{2g-2} \epsilon(\tilde{\delta}_{m_{a_k}} \cdot \tilde{\delta}_{m_{b_k}} \cdot \tilde{\delta}_{m_{c_k}}) = \sum_{m=0}^k \epsilon(\tilde{\delta}_m \cdot \tilde{\delta}_m \cdot \tilde{\delta}_m)^{2g-2} = \\ &= \sum_{m=0}^k \left( S_{0,m}^{-3} \epsilon(\delta_m \cdot \delta_m \cdot \delta_m) \right)^{2g-2} = \sum_{m=0}^k S_{0,m}^{2-2g}. \quad (5.13) \end{aligned}$$

Заметим, что из этой формулы не очевидно что  $N_g \in \mathbb{Z}$ , что было ясно выше.

**Задача 5.5** (\*). ([7]) *Докажите, что  $N_g$  является полиномом от  $k$  степени  $3g - 3$ .*

Причина этого в том что  $N_g$  на самом деле является размерностью пространства сечений некоторого линейного расслоения  $\mathcal{L}^k$  на некотором многообразии модулей, а эта размерность должна считаться по теореме Римана-Роха.

**Задача 5.6** (\*). *Матрица  $S$  связана с действием группы  $SL(2, \mathbb{Z})$  на пространстве  $R_k(\mathfrak{sl}_2)$ . А именно, определим матрицу  $(T_{l,m}) = \left( \exp \left( 2\pi i \left( \frac{l(l+2)}{4(k+2)} - \frac{3k}{24(k+2)} \right) \right) \delta_{l,m} \right)$ . Тогда  $(ST)^3 = 1$ , то есть матрицы  $S, T$  порождают представление  $PSL(2, \mathbb{Z})$ .*

*Указание.* Удобно проверять соотношение в виде  $(ST)^2 = (ST)^{-1}$ . При вычислении может пригодиться формула для гауссовой суммы.

## 5.4 Обобщение на случай других алгебр Ли

Проговорим схематично как обобщаются результаты прошлых двух параграфов на случай произвольной  $\mathfrak{g}$ , прежде всего концентрируясь на случай  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$ . Будем обозначать алгебру Верлинде на уровне  $k$  через  $R_k(\mathfrak{g})$ , через  $R(\mathfrak{g})$  обозначим кольцо всех представлений алгебры  $\mathfrak{g}$  (см. пример 4.3).

Элемент  $f_\theta$  (который встречался в предложении 5.1) вкладывается в  $\mathfrak{sl}_2$  тройку  $e_\theta, h_\theta, f_\theta$ . Эта подалгебра называется *главной*  $\mathfrak{sl}_2$  подалгеброй. Любое представление  $L_\lambda$

разлагается в сумму  $\oplus L_\lambda^p$ , по неприводимым  $p + 1$  мерным представлениям главной  $\mathfrak{sl}_2$  подалгебры, при этом встречаются только  $p$  удовлетворяющие неравенствам  $0 \leq p \leq (\lambda, \theta^\vee)$ , возможно с кратностями.

Удобно сразу формулировать ответ в терминах пространства двойственного к (5.3). Следующее предложение следует из предложений 5.1 и 5.2.

**Предложение 5.5.** *Пространство трехточечных конформных блоков на сфере изоморфно пространству  $\mathfrak{g}$  инвариантных отображений из  $L_{\lambda_1} \otimes L_{\lambda_2} \otimes L_{\lambda_3}$  которые зануляются на всех произведениях изотипических компонент  $L_{\lambda_1}^{(p_1)} \otimes L_{\lambda_2}^{(p_2)} \otimes L_{\lambda_3}^{(p_3)}$  таких, что  $p_1 + p_2 + p_3 > 2k$ .*

**Замечание 5.2.** Отметим, что по условию Клебша-Гордона этот инвариант может не зануляться только в случае четного  $p_1 + p_2 + p_3$ , то есть условие в предложении на самом деле означает  $p_1 + p_2 + p_3 \geq 2k + 2$ .

Перейдем теперь к случаю  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$ . Напомним, что представления  $\mathfrak{sl}_n$  нумеруются диаграммами Юнга из  $n - 1$  строк  $\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_{n-1})$ .<sup>1</sup> Скалярное произведение  $(\lambda, \theta^\vee)$  равняется  $\lambda_1$ . Условие, что  $\lambda \in P_k^+$  превращается в  $\lambda_1 \leq k$ .

**Задача 5.7.** *Сколько существует интегрируемых представлений  $\mathfrak{sl}_n$  на уровне  $k$ ?*

Как мы уже говорили в лекции 1 тензорное произведение произвольных представлений это довольно сложно, но все упрощается если ограничиться строками или столбцами. Фундаментальные веса  $\omega_j$  соответствуют диаграммам  $(1)^j$ , то есть столбцам длины  $j$ . Умножение на  $[\omega_j]$  в кольце  $R(\mathfrak{g})$  задается формулами Пиери умножения на  $e_j$  (1.5), с одной разницей, что теперь мы хотим чтобы в правой части стояли только диаграммы из не более чем  $n - 1$  строки. Поэтому если при добавлении  $j$  клеточек получилась диаграмма из  $n$  строк, то мы вычитаем из всех длин строк  $\lambda_n$  (так как у нас  $\mathfrak{sl}_n$ , а не  $\mathfrak{gl}_n$ ), а если получилась диаграмма из более чем  $n$  строк, то мы ее просто выкидываем. Например:

$$[(1)] \cdot [(1)^{n-1}] = [(2, 1^{n-2})] + [(1)^n] = [(2, 1^{n-2})] + [\emptyset].$$

Заметим, что согласно правилу Пиери при умножении на  $[\omega_j]$  число  $\lambda_1$  увеличивается не более чем на 1.

**Теорема 5.6.** *а) Умножение на  $[\omega_j]$  в кольце  $R_k(\mathfrak{g})$  задается той же формулой, что и умножение в кольце  $R(\mathfrak{g})$  где выброшены все диаграммы с  $\lambda_1 > k$ .*

*б) Алгебра  $R_k(\mathfrak{g})$  порождена  $[\omega_j]$ .*

*в) Ядро отображения из  $R(\mathfrak{sl}_n)$  в  $R_k(\mathfrak{sl}_n)$  порождено  $[\lambda]$  такими, что  $\lambda_1 = k + 1$ .*

Теорема 5.6 является аналогом предложения 5.3 выше.

<sup>1</sup>Здесь  $\lambda_i$  обозначает не старший вес, а число, длину строки в диаграмме Юнга, это не должно привести к недоразумению

*Доказательство.* Пункты б) и в) теоремы следуют из пункта а). Доказательство пункта а) следует из предложения 5.5. А именно, заметим, что условие на  $p_i$  в этом случае никак не играет, так как значение  $p_1$  соответствующее представлению  $\omega$  не превышает 1, а значение  $p_2, p_3$  соответствующие двум другим весам из  $P_k^+$  не превышают  $k$ , поэтому  $p_1 + p_2 + p_3 < 2k + 2$ .  $\square$

Следующая задача — это описать алгебру  $R_k(\mathfrak{g})$  как алгебру функций на конечном множестве. Алгебру  $R(\mathfrak{g})$  можно рассматривать как алгебру характеров, каждому  $[\lambda]$  отвечает функция на множестве  $\{(x_1, \dots, x_n) \mid \prod x_j = 1\}$  равная полиному Шура  $s_\lambda(x_1, \dots, x_n)$ , см. формулу 1.3. По теореме 5.6 нам нужно найти точки  $(x_1, \dots, x_n)$  такие, что  $s_\lambda(x_1, \dots, x_n) = 0$  при  $\lambda_1 = k + 1$ .

**Пример 5.3.** Рассмотрим  $\mathfrak{sl}_3$  на уровне 1. Тогда на  $(x_1, x_2, x_3)$  возникают такие условия:

$$\begin{cases} x_1 x_2 x_3 = 1 \\ s_{(2)}(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - x_1 x_2 - x_1 x_3 - x_2 x_3 = 0 \\ s_{(2,1)}(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3)(x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3) - x_1 x_2 x_3 = 0. \end{cases}$$

Решение этой системы уравнений (с точностью до перестановки) имеют вид

$$(e^{\frac{5}{12}i\pi}, e^{\frac{-1}{12}i\pi}, e^{\frac{-4}{12}i\pi}), \quad (e^{\frac{3}{12}i\pi}, e^{\frac{0}{12}i\pi}, e^{\frac{-3}{12}i\pi}), \quad (e^{\frac{4}{12}i\pi}, e^{\frac{1}{12}i\pi}, e^{\frac{-5}{12}i\pi}).$$

В общем случае легко понять, что при выполнении условий

$$x_1^{n+k} = x_2^{n+k} = \dots = x_n^{n+k}, \quad \prod x_j = 1, \quad \prod_{j < j'} (x_j - x_{j'}) \neq 0. \quad (5.14)$$

верно  $s_\lambda(x_1, \dots, x_n) = 0$  при  $\lambda_1 = k + 1$ . В самом деле, так как все  $x_j$  различны, то достаточно проверить зануление числителя в формуле (1.3). Все слагаемые в числителе разбиваются на пары  $x_{j_1}^{\lambda_1+n-1} x_{j_2}^{\lambda_2+n-2} \dots x_{j_n}^{\lambda_n}$  и  $x_{j_n}^{\lambda_1+n-1} x_{j_2}^{\lambda_2+n-2} \dots x_{j_1}^{\lambda_n}$  отличающиеся перестановкой  $x_{j_1}$  и  $x_{j_n}$ . Так как  $\lambda_1 = k + 1$  и  $\lambda_n = 0$  эти слагаемые будут равны, но стоять с разными знаками, поэтому числитель будет равен нулю.

**Замечание 5.4.** Получить условие (5.14) можно таким образом. Обозначим  $x_i = \exp(2\pi i \theta_i)$ , тогда условие зануления числителя в  $s_\lambda(x)$  переписывается как

$$\sum_{w \in S_n} (-1)^{|w|} \exp\left(2\pi i(\theta, w(\lambda + \rho))\right) = 0, \quad \text{где } (\lambda + \rho)_1 - (\lambda + \rho)_n = k + n. \quad (5.15)$$

Заметим, что точные значения  $(\lambda + \rho)_1$  и  $(\lambda + \rho)_n$  не важны, а важна только разность  $\lambda_1 - \lambda_n$  так как мы находимся в случае  $\mathfrak{sl}_n$  и можем прибавлять ко всем  $\lambda_i$  одно число. Условие  $(\lambda + \rho)_1 - (\lambda + \rho)_n = k + n$  можно понимать как аффинную плоскость заданную скалярным произведением с корнем  $\alpha_{1n} = \epsilon_1 - \epsilon_n$ .

Условие (5.15) будет выполняться, если  $(\theta, \alpha) \in \frac{1}{k+n}\mathbb{Z}$ , для любого корня  $\alpha \in R$ . Действительно, из этого следует, что  $(w(\theta), \alpha_{1n}) \in \frac{1}{k+n}\mathbb{Z}$  для любого  $w \in S_n$ ,

а, значит, все слагаемые в формуле (5.15) разобьются на пары взаимно обратных отличающихся на отражение  $s_{\alpha_{1n}}$ .

Множество  $\theta$  удовлетворяющих условию  $(\theta, \alpha) \in \frac{1}{k+n}\mathbb{Z}, \forall \alpha \in R$  есть просто сжатая решетка весов  $\frac{1}{k+n}P$ . Взятие экспоненты имеет ядром решетку корней, поэтому решения уравнения (5.15) можно отождествить с фактор группой  $(\frac{1}{k+n}P)/Q$ .

**Лемма 5.7.** *Все решения уравнений (5.14) (с точностью до перестановки) имеют вид*

$$x_j = \exp\left(\frac{2\pi i}{n+k}(\mu_j + n - j - \theta_\mu)\right) \quad (5.16)$$

где  $\mu$  — диаграмма Юнга, такая что  $k \geq \mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_{n-1} \geq \mu_n = 0$  и  $\theta_\mu = \frac{1}{n}(\sum(\mu_j + n - j))$ .

*Доказательство.* Пусть  $x_i = \exp(2\pi i\theta_i)$ . Будем считать, что  $\theta_i$  упорядочены  $\theta_1 > \theta_2 > \dots > \theta_n$  и  $\sum \theta_j = 0$ . Далее, сдвигая  $\theta$  на целые числа (и перенумеруя если нужно) можно добиться того, что  $\theta_1 - \theta_n < 1$ . Заметим, что  $(k+n)(\theta_j - \theta_{j'}) \in \mathbb{Z}$ , поэтому можно ввести диаграмму Юнга  $\mu$  такую, что  $\theta_j - \theta_{j+1} = \frac{1}{k+n}(\mu_j - \mu_{j+1} + 1)$ ,  $\mu_n = 0, \mu_1 \leq k$ . Из этого следует утверждение леммы.  $\square$

**Теорема 5.8.** *Алгебра  $R_k\mathfrak{sl}_n$  эквивалентна алгебре функций на множестве (5.16). Элемент  $[\lambda]$  при этом изоморфизме переходит в  $s_\lambda$*

*Доказательство.* Рассуждение полностью аналогично доказательству теоремы 5.4. Вводится базис дельта функция  $\delta_\mu$ , надо проверить невырожденность матрицы перехода которая сводится к невырожденности матрицы

$$S_{\lambda,\mu} = i \sqrt{\frac{1}{n(k+n)^{n-1}}} \det(q^{(\lambda_i - i + 1 - \theta_\lambda)(\mu_j - j + 1 - \theta_\mu)}), \quad (5.17)$$

где  $q = \exp(\frac{2\pi i}{n+k})$ .

**Задача 5.8.** *Докажите, что  $\sum_\lambda S_{\lambda,\mu} S_{\lambda,\nu} = \delta_{\mu^*,\nu}$ .*

Из этого следует, что  $S$  ортогональная,  $S^2 = \delta_{\lambda,\lambda^*}, S^4 = 1$ .  $\square$

**Замечание 5.5.** Число  $\frac{1}{n(k+n)^{n-1}}$  в нормировке  $S$  матрицы является порядком группы  $(\frac{1}{k+n}P)/Q$ .

Из этой теоремы аналогично случаю  $\mathfrak{sl}_2$  выводятся формулы Верлинде (5.11) и (5.13).

**Задача 5.9 (\*)**. ([8]) а) *Докажите, что ядро отображения из  $R(\mathfrak{sl}_n)$  в  $R_k(\mathfrak{sl}_n)$  порождено  $[(k+1)], [k+2], \dots, [k+n-1]$ . Напомним, что точки зрения полиномов Шура  $[(j)]$  соответствует  $s_{(j)} = h_j$ .*

б) *Докажите, что  $h_{n+k-j} = \frac{(-1)^{j+1}}{n+k} \frac{\partial p_{n+k}}{\partial e_j}$ , где  $p_l = \sum x_j^l$  симметрический полином Ньютона. Это означает, что алгебра  $R_k(\mathfrak{sl}_n)$  является алгеброй Милнора, т.е.*

идеал порожден производными одного многочлена  $p_{n+k}$  по координатам  $e_1, \dots, e_{n-1}$ . Тогда носитель этой алгебры — особые точки функции  $p_{n+k}$

в) Покажите, что особые точки функции  $p_{n+k}$  как функции от  $x_1, \dots, x_n$  при условии  $\prod x_j = 1$  задаются уравнениями (5.14). Найдите, из этого особые точки  $p_{n+k}$  как функции от  $x_1, \dots, e_{n-1}$  при условии  $e_n = 1$ . Условие различности  $x_j$  возникает из матрицы переход от  $x_j$  к  $e_j$ :  $\det\left(\frac{\partial e_j}{\partial x_{j'}}\right) = \prod_{j < j'} (x_j - x_{j'})$ .

**Задача 5.10** (\*). ([9] и ссылки там) а) Часто  $S$  матрицу вычисляют не для  $SL(n)$ , а для  $GL(n)$ . Интегрируемые представления для  $GL(n)$  на уровне  $k$  нумеруются диаграммами Юнга  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$  такими, что  $\lambda_1 \leq k$ . Матрица  $S$  имеет вид

$$S_{\lambda, \mu} = i \sqrt{\frac{1}{(k+n)^n}} \det \left( q^{(\lambda_j + n - j)(\mu_{j'} + n - j')} \right)_{j, j'=1}^n, \quad (5.18)$$

где  $q = \exp\left(\frac{2\pi i}{n+k}\right)$ . Покажите, что  $S^2 = \delta_{\lambda, \lambda^*}$ ,  $S^4 = 1$ .

б) Докажите аналогичное свойство для рафинированной матрицы:

$$S_{\lambda, \mu}^{\text{ref}} / S_{\emptyset, \emptyset}^{\text{ref}} = P_\lambda(t^\rho q^\mu) P_\mu(q^\rho), \quad (5.19)$$

где  $t = q^\beta$ ,  $q = \exp\left(\frac{2\pi i}{(k+n\beta)}\right)$ ,  $P_\lambda$  это полиномы Макдональда. Разберитесь еще с чем-то про это рафинирование, например с симметричностью матрицы  $S$  или с наличием оператора  $T$ .

**Задача 5.11** (\*). ([10] и ссылки там) Другое обобщение — это эквивариантные формулы Верлинде, при этом полиномы Шура заменяется на полиномы Холла-Литтлвуда, есть описание через идеал (подобно теореме 5.6), а есть как множество функция на конечном числе точек (подобно теореме 5.8), при этом множество точек получается как решения уравнений Бете. Одной из задач могла быть эквивалентность этих описаний.

## 6 Свободная реализация

### 6.1 Алгебра $\mathfrak{sl}_2$

Будем использовать  $\beta, \gamma$  систему (комплексный бозон). Это значит, что есть два тока  $\beta(z) = \sum \beta_n z^{-n-1}$ ,  $\gamma(z) = \sum \gamma_m z^{-m}$ , генераторы  $\beta_n, \gamma_m$  удовлетворяют соотношениям:

$$[\beta_n, \beta_m] = [\gamma_n, \gamma_m] = 0, \quad [\beta_n, \gamma_m] = \delta_{m+n, 0}. \quad (6.1)$$

В терминах операторных разложений это означает, что

$$\beta(z)\gamma(w) = \frac{1}{z-w} + \bullet \beta(z)\gamma(w) \bullet.$$

Нормальное упорядочение здесь можно понимать как обычно для вертексных алгебр (см. пояснение после формулы (5.1)). Можно понимать и в терминах бозонного

нормального упорядочения определенного

$$*\gamma_m\beta_n* = *\beta_n\gamma_m* = \begin{cases} \beta_n\gamma_m, & \text{если } n < 0, \\ \gamma_m\beta_n, & \text{если } n \geq 0. \end{cases} \quad (6.2)$$

Алгебра с порожденная генераторами  $\beta_n, \gamma_n$  имеет Фоковское представление  $F^{bc}$  порожденное старшим вектором  $|\emptyset\rangle^{bc}$  таким, что

$$\beta_n|\emptyset\rangle^{\beta\gamma} = 0, \text{ при } n \geq 0 \quad \gamma_m|\emptyset\rangle^{\beta\gamma} = 0, \text{ при } m > 0.$$

Заметим, что нормально упорядочение (6.4) согласовано с таким определением старшего вектора, в смысле, что  $*\beta_n\gamma_m*|\emptyset\rangle^{\beta\gamma} = 0$ , если  $m + n \geq 0$

Нам также понадобится другая алгебра Гейзенберга (вещественный бозон) с образующим  $a_n, n \in \mathbb{Z}$  и соотношением  $[a_n, a_m] = n\delta_{m+n,0}$ . Фоковское представление  $F_\alpha^a$  этой алгебры порождается старшим вектором  $|\alpha\rangle$  таким, что

$$a_n|\alpha\rangle = 0, \text{ при } n > 0, \quad a_0|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle.$$

Часто удобно еще добавлять оператор  $\hat{Q}$  которые коммутирует с  $a_n$  по формуле  $[a_n, \hat{Q}] = \delta_{n,0}$ . Оператор  $\hat{Q}$  не действует на представлениях  $F_\alpha^a$ , но есть оператор  $e^{\beta\hat{Q}}: F_\alpha^a \rightarrow F_{\alpha+\beta}^a$  который коммутирует с генераторами  $a_n, n \neq 0$ . В частности, старший вектор должен переходить в старший вектор:  $|\alpha+\beta\rangle = e^{\beta\hat{Q}}|\alpha\rangle$ . Часто удобно упаковать генераторы в одно поле

$$\varphi(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus 0} \frac{1}{-n} a_n z^{-n} + a_0 \log z + \hat{Q}. \quad (6.3)$$

Нормально упорядочение для генераторов алгебры Гейзенберга определено как

$$*a_n a_m* = \begin{cases} a_n a_m, & \text{если } n < 0, \\ a_m a_n, & \text{если } n \geq 0. \end{cases} \quad (6.4)$$

Нужно также соглашение об упорядочении  $a_0$  и  $\hat{Q}$ , будем сначала действовать  $a_0$ , а потом  $\hat{Q}$ . На практике надо упорядочивать только экспоненты от них (групповые элементы), т.е.  $*e^{\alpha a_0} e^{\beta\hat{Q}}* = *e^{\beta\hat{Q}} e^{\alpha a_0}* = e^{\beta\hat{Q}} e^{\alpha a_0}$ .

Представления построенные в следующей теореме часто называются представлениями Вакимото, но наверное мы будем их просто называть фоковскими представлениями алгебры  $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ .

**Теорема 6.1.** *Тензорное произведение  $F_\alpha = F^{\beta\gamma} \otimes F_\alpha^a$  имеет структуру представления  $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$  заданную по формулам*

$$\begin{aligned} e(z) &= \beta(z), & h(z) &= -2*\gamma(z)\beta(z)* + \sqrt{2\kappa}\partial\varphi(z) \\ f(z) &= -*\gamma^2(z)\beta(z)* + \sqrt{2\kappa}\partial\varphi(z)\gamma(z) + k\partial\gamma(z). \end{aligned} \quad (6.5)$$

Здесь  $\kappa = k + 2$ ,  $k$  — уровень представления.

**Замечание 6.1.** В формуле (6.5) использовано бозонное нормальное упорядочение  $^* \cdots ^*$ , но легко видеть, что ничего не изменится, если взять нормальное упорядочение  $\bullet \cdots \bullet$  введенное в параграфе 5.1.

**Замечание 6.2.** Формулы (6.5) должны напоминать известную реализацию алгебры  $\mathfrak{sl}_2$  при помощи дифференциальных операторов на прямой:  $e = \partial_x$ ,  $h = -2x\partial_x$ ,  $f = -x^2\partial_x$ . Есть поправка вида  $e = \partial_x$ ,  $h = -2x\partial_x + \lambda$ ,  $f = -x^2\partial_x + \lambda x$ . Это можно воспринимать как действие дифференциальных операторов на формах вида  $f(x)dx^{-\lambda/2}$  или псевдодифференциальных операторах вида  $f(x)\partial_x^{\lambda/2}$ .

**Замечание 6.3.** Заметим, что в специальном случае  $k = -2$  в формулах (6.5) пропадает зависимость от поля  $\varphi$ . Получается, что представление строится при помощи только генераторов  $\beta_n, \gamma_n$  то есть два поля вместо трех.

**Замечание 6.4.** Тензор энергии импульса (2.1) при реализации (6.5) принимает вид

$$\begin{aligned} T_{\text{Sug}}(z) &= \frac{1}{2(k+2)} \left( \bullet e(z)f(z) \bullet + \bullet f(z)e(z) \bullet + \frac{1}{2} \bullet h(z)h(z) \bullet \right) \\ &= \frac{1}{2} \bullet \partial\varphi(z)\partial\varphi(z) \bullet - \frac{1}{\sqrt{2\kappa}} \partial^2\varphi(z) + \bullet \beta(z)\partial\gamma(z) \bullet. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Можно вычислять по определению из параграфа 5.1, например член с  $\partial^2\varphi(z)$  возникает из того, что

$$\bullet (\partial\varphi(z)\gamma(z))\beta(z) \bullet = \partial\varphi(z) \bullet \gamma(z)\beta(z) \bullet + \partial^2\varphi(z).$$

Может быть удобнее использовать «физическое» определение нормального произведения  $:A(z)B(w): = \frac{1}{2\pi i} \oint A(z)B(w) \frac{dz}{z-w}$ .

Ответ (6.6) есть сумма двух слагаемых — обычного, удлиненного тензора энергии импульса для свободного поля и тензора энергии импульса  $\beta, \gamma$  системы в котором  $\beta(z)$  имеет размерность 1, а  $\gamma(z)$  имеет размерность 0. Суммарный центральный заряд равен  $2 + (1 - 12\frac{1}{2\kappa}) = \frac{3\kappa}{\kappa+2}$ .

**Теорема 6.2.** В случае общего значения параметров  $k, \alpha$  модуль  $F_\alpha$  изоморфен модулю Верма  $M_{\lambda,k}$ , где  $\lambda = \sqrt{2\kappa}\alpha$

*Доказательство.* Легко видеть, что вектор  $|\emptyset\rangle \otimes |\alpha\rangle$  является старшим относительно  $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ . Старший вес представления  $F_\alpha$  находится вычислением

$$h_0(|\emptyset\rangle \otimes |\alpha\rangle) = \sqrt{2\kappa}\alpha(|\emptyset\rangle \otimes |\alpha\rangle).$$

Из наличия старшего вектора в модуле  $F_\alpha$  следует существование сплетающего оператора  $M_{\lambda,k} \rightarrow F_\alpha$ . При общих значениях  $\lambda, k$  модуль Верма  $M_{\lambda,k}$ , поэтому требуемый изоморфизм следует из равенства размеров представлений  $M_{\lambda,k}$  и  $F_\alpha$ . Под словом «размер» здесь имеется ввиду характер представления  $\text{Tr } q^{L_0} z^{h_0}$ .

По формуле (6.5) оператор  $h_0 = -2 \sum_n^* \beta_n \gamma_{-n}^* + \sqrt{2\kappa} a_0$ , по формуле (6.6) оператор  $L_0 = \sum_n^* n \beta_n \gamma_{-n}^* + \frac{1}{2} \sum_n^* a_n a_{-n}^* + \frac{1}{\sqrt{2\kappa}} a_0$ . Легко видеть, что

$$\begin{aligned} [h_0, \beta_n] &= 2\beta_n, & [h_0, a_n] &= 0, & [h_0, \gamma_n] &= -2\gamma_n, \\ [L_0, \beta_n] &= -n\beta_n, & [L_0, a_n] &= -na_n, & [L_0, \gamma_n] &= -n\gamma_n. \end{aligned}$$

Из этого (используя теорему Пуанкаре-Биркгофа-Витта) следует, что характер  $F_\alpha$  равен

$$\frac{z^\lambda q^{\lambda(\lambda+2)/4\kappa}}{\prod_{n=1}^{\infty} (1 - z^{-2} q^{n-1})(1 - q^n)(1 - z^2 q^n)}.$$

Общий множитель  $z^{\dots} q^{\dots}$  возник из действия на старшем векторе  $|\emptyset\rangle \otimes |\alpha\rangle$ . Так как генераторы  $e, h_n, f_n$  удовлетворяют соотношениям аналогичным соотношениям с  $L_0$  и  $h_0$  мы получаем равенство характеров  $M_{\lambda,k}$  и  $F_\alpha$ , что и требовалось доказать.  $\square$

Как обычно, сплетающие операторы между фоковскими модулями строятся при помощи скринингов. Определим скрининговский ток по формуле

$$S(t) = e^{-\sqrt{2/\kappa}\varphi(t)} \beta(t). \quad (6.7)$$

**Теорема 6.3.** а)  $[e(z), S(t)] = 0$ , б)  $[h(z), S(t)] = 0$ , в)  $[f(z), S(t)] = \frac{d}{dt}(\dots)$

Из этой теоремы следует, что скрининговский оператор  $S = \oint S(t) dt: F_\alpha \rightarrow F_{\alpha - \sqrt{2/\kappa}}$  коммутирует с действием  $\widehat{\mathfrak{g}}$

**Задача 6.1.** Проверьте формулу (6.5) или теорему про скрининг.

**Пример 6.5.** Покажем, что вообще говоря фоковские модули  $F_\alpha$  отличаются от модулей Верма  $M_{\lambda,k}$ .

Рассмотрим пример  $k = 1, \lambda = 0$ . Тогда в модуле  $M_{\lambda,k}$  есть два сингулярных вектора  $f_0 v_{0,1}$  и  $e_{-1}^2 v_{0,1}$ . Найдем их в фоковском модуле  $F_0$  используя формулы 6.5

$$\begin{aligned} f_0 \left( |\emptyset\rangle \otimes |\alpha\rangle \right) &= \sqrt{2\kappa} a_0 \gamma_0 \left( |\emptyset\rangle \otimes |\alpha\rangle \right) = 0, \\ e_{-1}^2 \left( |\emptyset\rangle \otimes |\alpha\rangle \right) &= \beta_{-1}^2 \left( |\emptyset\rangle \otimes |\alpha\rangle \right) \neq 0. \end{aligned}$$

Таким образом мы видим, что один сингулярный вектор занулился, а второй нет. Но, вместо занулившегося сингулярного вектора есть вектор «на его месте»  $\gamma_0 \left( |\emptyset\rangle \otimes |\alpha\rangle \right)$ , этот вектор не является потомком старшего, но, наоборот старший получается из него действием  $e_0$ .

По другому можно увидеть разницу между модулем Верма  $M_{\lambda,k}$  и фоковским модулем  $F_\alpha$  если переходить от них к неприводимому модулю  $L_{\lambda,k}$ . По теореме 2.1 неприводимое представление  $L_{0,1}$  получается из модуля Верма  $M_{0,1}$  факторизацией по двум сингулярным векторам. Это является началом, так называемой, БГГ резольвенты:

$$\dots \rightarrow M_{-2,1} \oplus M_{4,1} \rightarrow M_{0,1} \rightarrow L_{0,1} \rightarrow 0.$$

Резольвента бесконечная влево, каждый член начиная со второго есть сумма двух модулей Верма, вообще члены нумеруются элементами аффинной группы Вейля. Гомологии этого комплекса нулевые, если убрать  $L_{0,1}$ , то получится, что гомологии нетривиальны только в одном месте и равны  $L_{0,1}$ .

Для фоковских модулей БГГ ситуация становится другой и БГГ резольвента как бы разворачивается и становится бесконечной в обе стороны:

$$\dots \rightarrow F_{2\sqrt{2/3}} \xrightarrow{S^2} F_0 \xrightarrow{S} F_{-\sqrt{2/3}} \rightarrow \dots$$

Сплетающие операторы в этой резольвенте задаются скринингами. Число  $\sqrt{2/3}$  есть просто  $2/\sqrt{2\kappa}$  в данном случае.

Иногда удобно дополнительно бозонизировать  $\beta, \gamma$  систему. Для этого введем еще две алгебры Гейзенберга с образующим  $b_{1,n}, b_{2,n}, n \in \mathbb{Z}$  соотношениями

$$[b_{1,n}, b_{1,m}] = n\delta n + m, 0, \quad [b_{2,n}, b_{2,m}] = -n\delta n + m, 0, \quad [b_{1,n}, b_{2,m}] = 0.$$

Как и выше удобно добавить операторы сдвигающие нулевую моду  $\hat{Q}_1, \hat{Q}_2$ , которые удовлетворяют соотношениям  $[b_{i,n}, \hat{Q}_j] = (-1)^{i+1} \delta_{i,j} \delta_{n,0}$ . Обозначим через  $F_{\beta_1, \beta_2}^b$  фоковский модуль порожденный вектором  $|\beta_1, \beta_2\rangle$  удовлетворяющим соотношениям

$$b_{1,n}|\beta_1, \beta_2\rangle = \delta_{n,0}\beta_1|\beta_1, \beta_2\rangle, \quad b_{2,n}|\beta_1, \beta_2\rangle = -\delta_{n,0}\beta_2|\beta_1, \beta_2\rangle.$$

Как обычно, экспонента  $\exp(\mu_1\hat{Q}_1 + \mu_2\hat{Q}_2)$  действует из одного фоковского представления в другое  $\exp(\mu_1\hat{Q}_1 + \mu_2\hat{Q}_2): F_{\beta_1, \beta_2}^b \rightarrow F_{\beta_1+\mu_1, \beta_2+\mu_2}^b$ . Мы будем упаковывать моды введенных алгебр Гейзенберга в поля

$$\phi_i(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus 0} \frac{1}{-n} b_{i,n} z^{-n} + b_{i,0} \log z + \hat{Q}_i.$$

Соответственно мы будем использовать вертексные операторы которые являются экспонентами  $* \exp(\mu_1\phi_1 + \mu_2\phi_2) *$ , нормальное упорядочение определено как в формуле (6.4).

**Теорема 6.4.** *а) Для  $\gamma \in \mathbb{C}$ , пусть  $\Pi_\gamma = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} F_{\gamma+n, \gamma+n}$ . Тогда формулы*

$$\beta(z) = * e^{\phi_1(z)+\phi_2(z)} *, \quad \gamma(z) = * \partial\phi_1(z) e^{-\phi_1(z)-\phi_2(z)} * \quad (6.8)$$

*задают представление  $\beta, \gamma$  системы на  $\Pi_\gamma$ . б) В этом представлении токи  $\beta, \gamma$  коммутируют со скринингом*

$$S^{\beta\gamma} = \oint S^{\beta\gamma}(t) dt, \quad S^{\beta\gamma}(t) = e^{\phi_1(z)}. \quad (6.9)$$

Это называется бозонизацией Фридана-Мартинеса-Шенкера. Отметим также, что ток  $S^{\beta\gamma}(t)$  является фермионом, двойственный к нему фермион задается формулой  $\exp(-\phi_1(z))$ .

**Замечание 6.6.** Пункт б) можно усилить сказавши, что вертексная алгебра  $\beta, \gamma$  — является ядром скрининга  $S^{\beta, \gamma}$ .

**Замечание 6.7.** Тензор энергии импульса  $\beta, \gamma$  системы при этой бозонизации имеет вид

$$:\beta(z)\partial\gamma(z): \mapsto \frac{1}{2} (\partial\phi_1(z)^2 - \partial^2\phi_1 - \partial\phi_2(z)^2 + \partial^2\phi_2).$$

Скомбинировав теорему 6.4 и теорему 6.1 мы можем ввести структуру  $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$  модуля на тензорном произведении  $F_\alpha^a \otimes \Pi_\gamma$ . Благодаря новой бозонизации мы теперь можем ввести еще один скрининг.

$$\tilde{S} = \oint \tilde{S}(t)dt, \quad \tilde{S}(t) = * \exp\left(\sqrt{2\kappa}\varphi(t) - \kappa(\phi_1(t) + \phi_2(t))\right) *$$

Отметим, что формально, мы имеем соотношение  $\log \tilde{S}(t) = -\kappa \log S(t)$ , где  $S(t)$  определен в формуле (6.7). Верен аналог теоремы 6.3

**Теорема 6.5.** а)  $[e(z), S(t)] = 0$ , б)  $[h(z), S(t)] = 0$ , в)  $[f(z), S(t)] = \frac{d}{dt}(\dots)$

Пункты а) и б) тут по сути очевидны, а именно для пункта а) можно заметить, что  $\tilde{S}$  не зависит от  $\gamma(z)$ , а пункт б) следует из пункта б) теоремы 6.3 и замечания выше, что это экспонента от того же самого Гейзенберга.

## 6.2 Общий случай в терминах функций на клетке

Как уже говорилось в замечании 6.2 свободная реализация  $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$  происходит из (аффинизации) действия на функциях на открытой клетке  $\mathbb{C} \subset \mathbb{CP}^1$ . Естественно спросить — какое обобщение этой конструкции на случаи более общей алгебры  $\mathfrak{g}$ ? В случае  $\mathfrak{sl}_n$  можно взять действие на  $\mathbb{C}^{n-1} \subset \mathbb{CP}^{n-1}$ , но это дает маленькое представление, как многочлены от  $n-1$  переменной в то время как модуль Верма для  $\mathfrak{sl}_n$  имеет размеры как многочлены от  $n(n-1)/2 = \dim \mathfrak{n}_-$  переменных. Чтобы строить общие представления нужно рассматривать действие на открытой клетке внутри многообразия флагов. Основные источники в этом параграфе это статья [11] и курс лекций [13].

Будем работать в более общей ситуации. Пусть алгебра Ли разложена в сумму  $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_- \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_+$ . Мы будем предполагать, что такое разложение построено по полупростому элементу  $h \in \mathfrak{h}$ , при этом

$$\mathfrak{g}_+ = \bigoplus_{\alpha, \alpha(h) > 0} \mathfrak{g}_\alpha, \quad \mathfrak{g}_- = \bigoplus_{\alpha, \alpha(h) < 0} \mathfrak{g}_\alpha, \quad \mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha, \alpha(h) = 0} \mathfrak{g}_\alpha.$$

**Пример 6.8.** Если  $h$  — общий элемент картановской подалгебры, то  $\mathfrak{g}_\pm = \mathfrak{n}_\pm$ ,  $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$ .

**Пример 6.9.** Если  $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n$ ,  $n = n_1 + \dots + n_k$ ,  $h = \text{diag}(a_1, \dots, a_1, a_2, \dots, a_2, \dots)$ , где каждое  $a_i$  встречается  $n_i$  раз. Тогда  $\mathfrak{g}_0$  состоит из блочно диагональных матриц с блоками размера  $n_1, \dots, n_k$ ,  $\mathfrak{g}_+, \mathfrak{g}_-$  состоят из верхне и нижне треугольных блочных матриц.

Из разложения алгебр Ли  $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_- \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_+$  следует, что в группе  $G$  есть открытое множество заданное разложением  $G_- \cdot G_0 \cdot G_+ \subset G$ .

**Пример 6.10.** Примером такого разложения для случая матриц  $n \times n$  является разложение Гаусса

$$g = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ x_{i,j} & & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 & & \\ & \ddots & \\ & & y_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & & z_{i,j} \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}. \quad (6.10)$$

Более того, для элементов  $x_{i,j}, y_i, z_{i,j}$  есть явная формула. Через  $\begin{bmatrix} i_1 & \dots & i_k \\ j_1 & \dots & j_k \end{bmatrix}$  обозначим определитель минора матрицы  $g$  составленного из строк  $i_1, \dots, i_k$  и столбцов  $j_1, \dots, j_k$ . Обозначим через  $\Delta_k$  главный минор  $\Delta_k = \begin{bmatrix} 1 & \dots & k \\ 1 & \dots & k \end{bmatrix}$ . Тогда

$$x_{i,j} = \frac{1}{\Delta_j} \begin{bmatrix} 1 & \dots & j-1 & i \\ 1 & \dots & j-1 & j \end{bmatrix}, \quad y_k = \frac{\Delta_k}{\Delta_{k-1}}, \quad z_{i,j} = \frac{1}{\Delta_i} \begin{bmatrix} 1 & \dots & i-1 & i \\ 1 & \dots & i-1 & j \end{bmatrix}. \quad (6.11)$$

В частности из этих формул следует, при каком условии матрица  $g$  представима в виде (6.10): для этого необходимо и достаточно того, что  $\Delta_k \neq 0, \forall 1 \leq k \leq n$ .

Обозначим через  $P$  подгруппу  $G_0 \cdot G_-$ . Группа  $G$  действует справа на однородном пространстве  $P \backslash G$ . Поэтому алгебра Ли  $\mathfrak{g}$  вкладывается в векторные поля на  $P \backslash G$ . Векторные поля можно ограничить на «большую клетку» — на классы элементов представимых в виде  $g_- g_0 g_+$ . Это называется клеткой потому, что как многообразие это просто  $G_+$ , это также называют клеткой Брюа.

Теперь алгебра Ли  $\mathfrak{g}$  действует на пространстве функций на клетке на  $P \backslash G$ . Как в предыдущем параграфе это пространство функций можно «подкрутить» сделав пространством сечения расслоения. Удобно это сделать еще на самой группе  $G$ , пусть  $\lambda: G_0 \rightarrow \mathbb{C}^\times$  характер, тогда алгебра Ли  $\mathfrak{g}$  действует на пространстве функций на  $G_- \cdot G_0 \cdot G_+$  со свойством  $f(g_- g_0 g_+) = \lambda(g_0) f(g_+)$ . Будем обозначать пространство таких функций как  $F_\lambda$ . Более явно действие имеет вид

$$x f(g_+) = \left. \frac{d}{dt} f(g_+ e^{tx}) \right|_{t=0}. \quad (6.12)$$

То есть вычислительно надо умножить справа на экспоненту  $e^{tx}$ , а потом разложить  $g_+ e^{tx} = g_-^\circ g_0^\circ g_+^\circ$ . При этом формула на самом деле зависит не от  $\lambda$  а от его дифференциала, который является характером  $\mathfrak{g}_0 \rightarrow \mathbb{C}$ .

В конкретных примерах это конечно можно довести до явных формул.

**Предложение 6.6.** Пусть  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n, \mathfrak{g}_\pm = \mathfrak{n}_\pm, \mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$ . Характер определен по формуле  $\lambda(g_0) = \prod y_i^{\lambda_i}$ , где  $g_0 = \text{diag}(y_1, \dots, y_n)$ . Тогда действие простых генераторов  $\mathfrak{sl}_n$  в пространстве многочленов от координат  $z_{i,j}, i < j$  введенных в формуле (6.10)

имеет вид:

$$\begin{aligned}
e_i &\mapsto \frac{\partial}{\partial z_{i,i+1}} + \sum_{j \leq i-1} z_{j,i} \frac{\partial}{\partial z_{j,i+1}} \\
h_i &\mapsto (\lambda_i - \lambda_{i+1}) - 2z_{i,i+1} \frac{\partial}{\partial z_{i,i+1}} + \sum_{j \leq i-1} \left( z_{j,i} \frac{\partial}{\partial z_{j,i}} - z_{j,i+1} \frac{\partial}{\partial z_{j,i+1}} \right) + \\
&\quad + \sum_{j \geq i+2} \left( z_{i+1,j} \frac{\partial}{\partial z_{i+1,j}} - z_{i,j} \frac{\partial}{\partial z_{i,j}} \right) \\
f_i &\mapsto (\lambda_i - \lambda_{i+1}) z_{i,i+1} + \sum_{j \leq i-1} z_{j,i+1} \frac{\partial}{\partial z_{j,i}} - \sum_{j \geq i+2} z_{i,j} \frac{\partial}{\partial z_{i+1,j}} - \\
&\quad - z_{i,i+1} \left( \sum_{j \geq i+1} z_{i,j} \frac{\partial}{\partial z_{i,j}} - \sum_{j \geq i+2} z_{i+1,j} \frac{\partial}{\partial z_{i+1,j}} \right)
\end{aligned} \tag{6.13}$$

**Замечание 6.11.** Можно взять алгебру  $\mathfrak{gl}_n$ , тогда формула для  $h_i = E_{i,i} - E_{i+1,i+1}$  разобьется в сумму двух слагаемых

$$E_{i,i} \mapsto \lambda_i + \sum_{j \leq i-1} z_{j,i} \frac{\partial}{\partial z_{j,i}} - \sum_{j \geq i+1} z_{i,j} \frac{\partial}{\partial z_{i,j}}. \tag{6.14}$$

Можно написать формулы вроде (6.13) не только для простых корней, но и для произвольных генераторов  $E_{i,j}$ . Например при  $i < j$  мы получим

$$E_{ij} \mapsto \frac{\partial}{\partial z_{i,j}} + \sum_{l \leq i-1} z_{l,i} \frac{\partial}{\partial z_{l,j}} \tag{6.15}$$

Старший вектор в этом представлении  $F_\lambda$  это 1, старший вес это  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ . Как представление это модуль контраградиентно двойственный к модулю Верма, при общих  $\lambda_i$  модуль  $F_\lambda$  изоморфен модулю Верма  $M_\lambda$ .

**Задача 6.2.** Докажите формулы (6.13)

*Указание.* Можно действовать по определению, а можно использовать формулы для миноров (6.11).

Рассмотрим другой пример, частный случай примера 6.9 для разложения  $n = (n-1) + 1$ . Общая матрица  $n \times n$  имеет разложение

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & w \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{6.16}$$

где  $w$  — число,  $y$  — матрица размера  $(n-1) \times (n-1)$ ,  $z$  — вектор столбец размера  $n-1$ ,  $x$  — вектор строка размера  $n-1$ . Пространство  $P \setminus G$  в этом случае есть проективное пространство  $\mathbb{CP}^{n-1}$ . Общий характер группы  $G_0$  имеет вид  $\lambda(g_0) = (\det y)^{\lambda_1} (\det g_0)^\lambda$ .

**Предложение 6.7.** Действие генераторов  $\mathfrak{gl}_n$  в пространстве многочленов от координат  $z_1, \dots, z_{n-1}$  имеет вид

$$\begin{aligned}
E_{i,j} &\mapsto -z_j \frac{\partial}{\partial z_i} \text{ при } 1 \leq i \neq j < n, & E_{i,n} &\mapsto \frac{\partial}{\partial z_i} \text{ при } 1 \leq i < n, \\
E_{i,i} &\mapsto \lambda + \lambda_1 - z_i \frac{\partial}{\partial z_i} \text{ при } 1 \leq i < n, & E_{n,n} &\mapsto \lambda + \sum_{i=1}^{n-1} z_i \frac{\partial}{\partial z_i}, \\
E_{n,i} &\mapsto \lambda_1 z_i - z_i \sum_{j=1}^{n-1} z_j \frac{\partial}{\partial z_j} \text{ при } 1 \leq i < n.
\end{aligned} \tag{6.17}$$

**Задача 6.3.** Докажите формулы (6.17). Найдите старший вес получившегося представления.

До сих пор в этом параграфе мы говорили только о представлениях неаффинных алгебр Ли. В работах Фейгина и Френкеля доказывается, что аффинизация существует (см. курс лекций [13] и ссылки там).

Для того чтобы писать формулы для аффинизации (а после и для скринингов) удобно чуть сменить обозначения. Вместо оператора умножения на  $z$  будем писать  $\gamma$ , вместо оператор дифференцирования по  $z$  будет писать  $\beta$ . Тогда  $[\beta, \gamma] = 1$ . Координат  $z$  у нас может быть несколько поэтому операторы  $\beta, \gamma$  будут иметь индексы. Для каждого параметра  $\lambda$  введем оператор  $\hat{p}$  который действует на представлении числом  $\lambda$  и оператор  $\hat{q}$  который коммутирует с ним как  $[\hat{p}, \hat{q}] = 1$ . Как обычно, на практике будет использоваться только экспонента от оператор  $\hat{q}$ , которая сдвигает собственное значение оператора  $\hat{p}$ , точнее  $e^{\mu \hat{q}}: F_\lambda \rightarrow F_{\lambda+\mu}$ .

При аффинизации операторы  $\beta, \gamma$  заменяются на токи  $\beta(z)$  и  $\gamma(z)$  удовлетворяющие соотношениям (6.1), можно смотреть на  $\beta$  и  $\gamma$  как на нулевые моды соответствующих токов. Операторы  $\hat{p}, \hat{q}$  заменяются бозонным полем  $\varphi(z)$ , при этом  $\hat{p}, \hat{q}$  являются аналогами  $a_0, \hat{Q}$ , см (6.3). Токи  $\beta(z), \gamma(z), \varphi(z)$  будут иметь индексы, так как у нас было несколько координат  $z$  и параметров характера  $\lambda_i$ .

**Теорема 6.8.** Рассмотрим алгебру Гейзенберга с образующими  $\beta_{i,j}[k], \gamma_{i,j}[k]$ ,  $1 \leq i < j \leq n$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  и  $a_i[k]$ ,  $1 \leq i \leq n$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Рассмотрим фокковское представление  $F_{\vec{\lambda}}$  этой алгебры порожденное вакуумом

$$\beta_{i,j}[k-1]|\vec{\lambda}\rangle = \gamma_{i,j}[k]|\vec{\lambda}\rangle = a_i[k]|\vec{\lambda}\rangle = 0, \text{ при } k > 0, \quad a_i[0]|\vec{\lambda}\rangle = \lambda_i|\vec{\lambda}\rangle$$

Тогда следующие формулы задаются действие  $\widehat{\mathfrak{sl}}_n$  на  $F_{\chi}$ :

$$\begin{aligned}
e_i(z) &\mapsto \beta_{i,i+1} + \sum_{j \leq i-1} \gamma_{j,i} \beta_{j,i+1} \\
h_i(z) &\mapsto \sqrt{\kappa}(\partial\varphi_i - \partial\varphi_{i+1}) + \sum_{j \leq i-1}^* (\gamma_{j,i} \beta_{j,i} - \gamma_{j,i+1} \beta_{j,i+1})^* - \\
&\quad - 2^* \gamma_{i,i+1} \beta_{i,i+1}^* + \sum_{j \geq i+2} (\gamma_{i+1,j} \beta_{i+1,j} - \gamma_{i,j} \beta_{i,j}) \\
f_i(z) &\mapsto \sqrt{\kappa}(\partial\varphi_i - \partial\varphi_{i+1}) \gamma_{i,i+1} + (k+i-1) \partial\gamma_{i,i+1} + \sum_{j \leq i-1} \gamma_{j,i+1} \beta_{j,i} - \\
&\quad - \sum_{j \geq i+2} \gamma_{i,j} \beta_{i+1,j} - \gamma_{i,i+1}^* \left( \sum_{j \geq i+1} \gamma_{i,j} \beta_{i,j} - \sum_{j \geq i+2} \gamma_{i+1,j} \beta_{i+1,j} \right)^*,
\end{aligned} \tag{6.18}$$

где  $\kappa = k+n$  и, для краткости, мы не пишем зависимости от  $z$  у токов  $\beta_{i,j}(z), \gamma_{i,j}(z), \varphi_i(z)$ .

**Замечание 6.12.** Эти формулы легко списываются из (6.13), за исключением члена с  $\partial\gamma_{i,i+1}$ , коэффициент при этом члене фиксируется из требования того, что  $e_i(z)f_i(w) = \frac{\kappa}{(z-w)^2} +$  менее сингулярные члены. Собственно из аналогичного условия на  $h_i$  фиксируется нормировка  $\sqrt{\kappa}$  перед  $\partial\varphi$ . Сложная часть этой теоремы это проверка соотношений Серра, проще вместо этого написать явные формулы для всех токов, не только для соответствующих простым корням.

**Замечание 6.13.** Можно написать аналог формулы (6.14), но тут потребуется некоторая сдвигка:

$$E_{i,i}(z) \mapsto \sqrt{\kappa} \partial\varphi_i + \sum_{j \leq i-1}^* \gamma_{j,i} \beta_{j,i}^* - \sum_{j \geq i+1}^* \gamma_{i,j} \beta_{i,j}^* + \mu \partial\varphi,$$

где  $\varphi = \sum \varphi_i$  и  $\mu$  — решение квадратного уравнения  $n\mu^2 + 2\sqrt{\kappa}\mu + 1 = 0$ .

Естественно теперь спросить об аффинизации формулы (6.17). Наивной аффинизации (при помощи токов  $\beta_i, \gamma_i, 1 \leq i \leq n-1, \varphi, \varphi_1$ ) нет. Но есть некоторая версия ([14, Пример 5.3])

**Задача 6.4.** Пусть токи  $\tilde{E}_{i,j}(z), 1 \leq i, j \leq n-1$  удовлетворяют соотношениям алгебры  $\widehat{\mathfrak{sl}}_{n-1}$  на уровне  $k+1$  (в частности  $\sum \tilde{E}_{i,i} = 0$ ). Пусть токи  $\beta_i(z), \gamma_i(z), 1 \leq i \leq n-1$  и  $\varphi(z)$  коммутируют с  $\tilde{E}_{i,j}(z)$  и удовлетворяют соотношениям алгебры Гейзенберга, причем  $\varphi$  нормирован так, что  $\partial\varphi(z)\partial\varphi(w) = \frac{(n-1)\kappa}{n} \frac{1}{(z-w)^2} + \text{reg}$ . Тогда следующие формулы

$$\begin{aligned}
E_{i,j} &\mapsto \tilde{E}_{i,j} - \gamma_j \beta_i, \text{ при } 1 \leq i \neq j \leq n-1; \quad E_{i,n} \mapsto \beta_i, \text{ при } 1 \leq i \leq n-1; \\
E_{i,i} &\mapsto \tilde{E}_{i,i} - \gamma_i \beta_i^* - \frac{1}{n-1} \partial\varphi, \text{ при } 1 \leq i \leq n-1; \quad E_{n,n} \mapsto \partial\varphi + \sum^* \gamma_i \beta_i^*; \\
E_{n,j} &\mapsto - \gamma_j \beta_j^* + k \partial\gamma_j - \frac{n}{n-1} \partial\varphi \gamma_j + \sum \tilde{E}_{i,j} \gamma_i, \text{ при } 1 \leq j \leq n-1
\end{aligned} \tag{6.19}$$

задают представление алгебры  $\widehat{\mathfrak{sl}}_n$  на уровне  $k$

Эта задача дает способ получать явные формулы для реализации  $\widehat{\mathfrak{sl}}_n$  по индукции, по сути это те же формулы, что и (6.18). То, что речь идет об алгебре  $\mathfrak{sl}_n$ , а не  $\mathfrak{gl}_n$  это немного существенно, см. замечание 6.13.

### 6.3 Скрининги

В предыдущем параграфе представления алгебры Ли были написаны при помощи правого действия на открытой клетке в  $P \setminus G$ . В этом параграфе будем обозначать соответствующие операторы как  $r(x)$ ,  $x \in \mathfrak{g}$ , они определяются по формуле (6.12).

С другой стороны, открытая клетка отождествляется с  $G_+$  на котором группа  $G_+$  действует умножениями слева. Формула аналогична (6.12) и имеет вид:

$$l(x)f(g_+) = \left. \frac{d}{dt} f(e^{-tx} g_+) \right|_{t=0}. \quad (6.20)$$

Ясно, что левое действие  $G_+$  на  $G_+$  коммутирует с правым действием  $G_+$ .

**Предложение 6.9.** *Для любого  $x \in \mathfrak{n}_+$ ,  $h \in \mathfrak{h}$  имеем  $[r(h), l(x)] = l([x, h])$ .*

*Доказательство.* Разница в вычислении  $l(x)r(h)$  и  $r(h)l(x)$  в том, что во втором операторе мы проносим  $e^{t_2 h}$  через  $e^{t_1 x}$ , а в первом нет. Можно это записать формулами. Пусть  $g_+ e^{t_2 h} = e^{t_2 h} \tilde{g}_+(t_2)$ . Тогда

$$\begin{aligned} l(x)r(h)f(g_+) &= \left. \frac{d}{dt_1} \frac{d}{dt_2} \lambda(e^{t_2 h}) f(e^{t_1 x} \tilde{g}_+(t_2)) \right|_{t_1=t_2=0} \\ r(h)l(x)f(g_+) &= \left. \frac{d}{dt_1} \frac{d}{dt_2} \lambda(e^{t_2 h}) f(e^{-t_2 h} e^{t_1 x} e^{t_2 h} \tilde{g}_+(t_2)) \right|_{t_1=t_2=0} \end{aligned}$$

При дифференцировании из второго члена получается лишний коммутатор  $e^{[x, h]}$  действующий слева, что и равно действию оператора  $l([x, h])$ .  $\square$

Ограничимся теперь случаем  $\mathfrak{g}_{\pm} = \mathfrak{n}_{\pm}$ . Выберем в  $\mathfrak{n}_+$  корневой базис  $e_{\alpha} : [h, e_{\alpha}] = \alpha(h)e_{\alpha}$ . Предложение 6.9 может быть переписано как

$$\left( r(h) - \alpha_i(h) \right) l(e_i) = l(e_i) r(h) \quad (6.21)$$

На группе  $G_+$  есть координаты  $g_+ = \exp(\sum z_{\alpha} e_{\alpha})$ . Эти координаты являются однородными, при сопряжении  $g_+ \mapsto e^{tx} g_+ e^{-tx}$ , при  $x \in \mathfrak{h}$  они преобразуются  $z_{\alpha} \mapsto t^{\alpha(x)} z_{\alpha}$ . Будем обозначать  $\gamma_{\alpha}$  оператор умножения на  $z_{\alpha}$  и  $\beta_{\alpha}$  оператор дифференцирования по  $z_{\alpha}$ . Характер  $\lambda$  можно рассматривать как элемент  $\mathfrak{h}^*$ , можно разложить его по фундаментальным весам  $d\lambda = \lambda_i \omega_i$ . Как и в прошлом параграфе введем операторы  $\hat{p}_i$  которые действуют на  $F\lambda$  числом  $\lambda_i$ . Для любого  $h \in \mathfrak{h}$  будем писать  $(\hat{p}, h) = \sum \hat{p}_i \omega_i(h)$ .

Легко видеть, что в этих координатах мы имеем

$$r(h) = (\hat{p}, h) + \sum_{\alpha} \alpha(h) \gamma_{\alpha} \beta_{\alpha} \quad (6.22)$$

Аналогичная формула будет и для любого другого выбора однородных координат. Для любого  $\mu \in \mathfrak{h}^*$  оператор  $e^{(\mu, \hat{q})}$  действует  $e^{(\mu, \hat{q})}: F_\lambda \rightarrow F_{\lambda-\mu}$  коммутируя с  $\beta_\alpha, \gamma_\alpha$ . Для каждого простого корня  $e_i$  определим оператор

$$s_i = l(e_i)e^{(-\alpha_i, \hat{q})}: F_\lambda \rightarrow F_{\lambda-\alpha_i} \quad (6.23)$$

Очевидно, что  $s_i$  коммутирует с  $r(x)$ ,  $x \in \mathfrak{n}_+$ , из формул (6.21), (6.22) следует, что  $s_i$  коммутирует с  $r(h)$ ,  $h \in \mathfrak{h}$ . Осталось разобраться с  $\mathfrak{n}_-$ . Аналогично предложению 6.9 доказывается, что

$$[r(f_j), s_i] = \delta_{i,j} e^{(-\alpha_i, \hat{q})}(\hat{p}, h_i). \quad (6.24)$$

**Предложение 6.10.** Пусть  $\lambda(h_i) = m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ . Тогда оператор  $s_i^{m+1}: F_\lambda \rightarrow F_{\lambda-(m+1)\alpha_i}$  коммутирует с действием алгебры  $\mathfrak{g}$ .

Это предложение легко выводится из формулы (6.24). Оно является по сути переформулировкой утверждения про сингулярные вектора в задаче 1.2.

Как обычно, в случае  $\mathfrak{gl}_n$  все можно посчитать явно. В тех же координатах, что и формулы (6.13) мы имеем

$$s_i = -e^{\hat{q}_{i+1}-\hat{q}_i} \left( \frac{\partial}{\partial z_{i,i+1}} + \sum_{j \geq i+2} z_{i+1,j} \frac{\partial}{\partial z_{i,j}} \right) \quad (6.25)$$

**Задача 6.5.** Докажите формулу (6.24) или напрямую или при помощи явных формул (6.13), (6.25).

Выше в этом параграфе мы говорили только про конечномерное алгебру  $\mathfrak{g}$ . Перейдем теперь к аффинной алгебре. В принципе можно аффинизировать все рассуждение с левым действием на клетке, но можно просто аффинизировать явные формулы (6.25). В обозначениях формул (6.18) имеем:

$$S_i(t) = - \left( \beta_{i+1,i}(t) - \sum_{j \geq i+2} \gamma_{j,i+1}(t) \beta_{j,i}(t) \right) e^{(\alpha_i, \varphi(t))/\sqrt{\kappa}} \quad (6.26)$$

Интегралы  $S_i = \oint S_i(t) dt$  являются скринингами, они коммутируют с действием алгебры  $\widehat{\mathfrak{sl}}_n$ .

Посмотрим какие перестановочные соотношения на скрининги. Заметим, что токи  $\beta(z)$  и  $\gamma(w)$  формально коммутируют. Поэтому вся монодромия при перестановке  $S_i(z)$  и  $S_j(w)$  возникает из-за экспонент от  $\varphi$ . Эта монодромия такая же как и для скринингов  $W$  алгебры, поэтому аналогично тому как доказывалось в прошлом году [12] (или см. [11]) доказывается, что  $S_i$  формально удовлетворяют соотношениям нильпотентной алгебры для квантовой  $U_q \mathfrak{sl}_n$ , при  $q = \exp(i\pi/\kappa)$ .

## 6.4 В терминах гамильтоновой редукции

Напомним, что в параграфе 6.2 представления алгебры  $\mathfrak{g}$  строились через реализацию этой алгебры как векторных полей на открытой клетке  $G_+ \subset P \backslash G$ . Как

следствие, универсальная обертывающая  $U(\mathfrak{g})$  вкладывается в алгебру дифференциальных операторов на  $G_+$ . Можно спросить себя о классическом пределе этой конструкции, вложении пуассоновой алгебры  $S(\mathfrak{g})$  в алгебру функций на кокасательном расслоении  $T^*G_+$ . Основным источником в этом параграфе это статья [14].

Основным инструментом конструкции будет гамильтонова редукция. Напомним необходимые определения в достаточной для нас общности. Пусть связная группа  $A$  действует на многообразии  $X$ . Это действие индуцирует действие группы  $A$  на кокасательном расслоении  $T^*X$ .

Можно это сказать в координатах. Пусть  $q^1, \dots, q^n$  локальные координаты на  $X$ , через  $p_1, \dots, p_n$  обозначим координаты в слое  $T^*X$  соответствующие  $dq^1, \dots, dq^n$ . Тогда, для любого преобразования  $\tilde{q} = g(q)$  координаты  $p$  преобразуются по формуле  $\tilde{p} = \left(\frac{d\tilde{q}}{dq}\right)^{-1} p$ . Из этого следует, что симплектическая форма  $\omega = \sum dp_i \wedge dq^i$  сохраняется при заменах координат и при действии группы  $A$ . Из первого следует, что многообразие  $T^*X$  является симплектическим, из второго следует, что действие является симплектическим. Почему-то мы взяли нестандартный знак симплектической формы, в терминах скобки Пуассона  $\{p_i, q^j\} = \delta_{i,j}$ .

Любому  $J \in \mathfrak{a}$  соответствует векторное поле  $v_J$  на  $X$ . Тогда определим функция  $H_J$  на  $X$  по формуле  $H_J(q, p) = -(v_J, p)$ , где справа стоит спаривание между вектором и ковектором. В координатах

$$v_J = \sum v_J^i \frac{\partial}{\partial q^i}, \quad H_J = - \sum v_J^i p_i. \quad (6.27)$$

Функция  $H_J$  является гамильтонианом для векторного поля  $v_J$  как видно из формулы

$$\{q^i, H_J\} = v_J^i(q), \quad \{p_i, H_J\} = - \left(\frac{\partial v_J^i}{\partial q^i}\right) p_i.$$

Более того, легко видеть, что  $\{H_{J_1}, H_{J_2}\} = H_{[J_1, J_2]}$ ,  $\forall J_1, J_2 \in \mathfrak{a}$ . Если проинтегрировать элемент алгебры Ли  $J_1$  до элемента группы  $g \in A$ , то условие будет означать  $g_* H_J = H_{\text{Ad}_g J}$ . Это условие означает, что действие группы  $A$  на  $X$  является не просто симплектическим, а гамильтоновым.

При помощи гамильтонианов  $H_J$  строится отображение моментов  $\mu: T^*X \rightarrow \mathfrak{a}^*$ , такое, что  $(J, \mu(q, p)) = H_J(q, p)$ . Это отображение является эквивариантным, действие группы  $A$  на  $T^*X$  соответствует коприсоединенному действию группы  $A$  на  $\mathfrak{a}^*$ .

Для любого элемента  $\alpha \in \mathfrak{a}^*$  можно рассмотреть его прообраз относительно отображения моментов  $\mu^{-1}(\alpha)$ . Пусть  $A_\alpha$  — стабилизатор  $\alpha$  в группе  $A$  при коприсоединенном действии  $A$  на  $\mathfrak{a}^*$ . Гамильтоновой редукцией называется фактор  $\mu^{-1}(\alpha)/A_\alpha$ . Можно брать прообраз всей коприсоединенной орбиты  $\alpha$  по действию группы  $A$ .

Перейдем теперь к нужному нам примеру. Будем работать в обозначениях параграфа 6.2,  $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_- \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_+$ , и т. д. В качестве многообразия  $X$  возьмем саму группу  $G$ . В качестве группы действующей на  $T^*G$  возьмем группу  $P$ , действующую слева. Тогда, гамильтонова редукция приводит (приблизительно) к  $T^*G_+ \subset T^*(P \backslash G)$ , на котором группа  $G$  действует справа. Отображение моментов для этого правого

действия дает формулы для вложения алгебры Ли  $\mathfrak{g}$  в функции на  $T^*G$ , то есть классическую свободную реализацию. По формуле (6.27) легко перейти и к явному виду векторных полей на  $G_+$ , то есть к формуле для квантовой свободной реализации.

Напишем теперь это более явно. Обозначим через  $\mu_L: T^*G \rightarrow \mathfrak{g}^*$  отображение моментов для левого действия  $G$  на  $T^*G$ . Левое действие группы  $G$  на себе не имеет стабилизатора в каждой точке, поэтому матрица  $(v_{J_a}^i)$  из формулы (6.27) является невырожденной. Поэтому функции  $\mu_L$  могут быть рассмотрены как координаты на  $T^*G$ , вместо координат  $p_i$ . То есть точку в  $T^*G$  можно задавать как  $(g, \mu_L)$ . В этих обозначениях левое и правое действие элемента  $x \in G$  имеет вид:

$$L_x(g, \mu_L) = (xg, \text{Ad}^*x(\mu_L)), \quad R_x(g, \mu_L) = (gx, \mu_L). \quad (6.28)$$

В первой формуле использована эквивариантность отображения моментов. Во второй формуле использовано, то что левое и правое действия коммутируют, поэтому гамильтонианы левого действия инвариантны относительно умножения справа. Из условия отображения моментов следуют формулы для скобок этих координат

$$\{(J_1, \mu_L), (J_2, \mu_L)\} = ([J_1, J_2], \mu_L), \quad \{(J, \mu_L), g\} = L_{v_L(J)}g, \quad (6.29)$$

здесь  $L_v$  — производная Ли относительно векторного поля  $v$ .

Аналогично можно ввести отображение моментов  $\mu_R: T^*G \rightarrow \mathfrak{g}^*$  для правого действия группы  $G$ . Оно удовлетворяет аналогичным свойствам.

$$L_x(g, \mu_R) = (xg, \mu_R), \quad R_x(g, \mu_R) = (gx^{-1}, \text{Ad}^*x(\mu_R)).$$

Используя эти свойства и формулу  $\mu_R(e, \mu_L) = -\mu_L$  легко вывести формулу связи  $\mu_R(g, \mu_L) = -\text{Ad}^*(g^{-1})(\mu_L)$ .

Зафиксируем элемент  $\lambda \in \mathfrak{g}_0^*$  и рассмотрим гамильтонову редукцию для левого действия группы  $P$  на  $T^*G$ . Представим  $\mu_L$  в виде суммы  $\mu_L = \mu_{L,-} + \mu_{L,0} + \mu_{L,+}$  элементов из  $\mathfrak{g}_-^*, \mathfrak{g}_0^*, \mathfrak{g}_+^*$ . Тогда прообраз  $\lambda$  внутри большой клетки имеет вид  $(g_-g_0g_+, \lambda + \mu_{L,+})$ . Теперь надо отфакторизовать по группе  $P$ . Ее действием мы можем привести элемент к виду  $(g_+, \alpha_0 + \alpha_+)$ , где

$$\alpha_0 = g_0^{-1}\lambda g_0, \quad \alpha_+ = g_0^{-1}g_-^{-1}(\lambda + \mu_{L,+})g_-g_0 - g_0^{-1}\lambda g_0.$$

Элемент  $\alpha_0 \in \mathfrak{g}_0^*$  — элемент коприсоединенной орбиты  $\lambda$  и  $\alpha_+ \in \mathfrak{g}_+^*$ . В случае если  $\lambda$  является характером алгебр  $\mathfrak{g}_0$  (случай который обсуждался в прошлых параграфах) имеем  $\alpha_0 = \lambda$ .

Можно сказать, что  $g_+, \alpha_+, \alpha_0$  — это  $P$ -инвариантные функции на прообразе коприсоединенной орбиты  $\mu_L^{-1}(\text{Ad}(G_0)\lambda)$ . Поэтому  $g_+, \alpha_+$  будут коммутировать с  $\alpha_0$ . Между собой  $(g, \alpha_+)$  будут удовлетворять соотношениям (6.29), то есть они являются координатами на  $T^*G_+$  и  $\alpha_+$  есть отображение моментов для левого действия  $G_+$ . Скобка на координатах  $\alpha_0$  совпадает со скобкой на коприсоединенной орбите.

В ограничении на это множество отображение моментов для правого действия задается формулой

$$\mu_R = -g_+^{-1}(\alpha_+ + \alpha_0)g_+. \quad (6.30)$$

Для того чтобы писать формулы в координатах  $q, p$  (или потом формулы для в терминах дифференциальных операторов  $(q, \frac{\partial}{\partial q})$ ) надо выразить  $\alpha_+$  в этих терминах. Удобно при этом отождествить  $\mathfrak{g}^*$  и  $\mathfrak{g}$ , то есть рассматривать  $\alpha_+$  и  $\alpha_0$  как элементы  $\mathfrak{g}_-$  и  $\mathfrak{g}_0$  соответственно.

**Пример 6.14.** Рассмотрим пример группы  $G = GL(2)$ . Запишем  $g_+ = \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Векторное поле касательное к левому действию  $G_+$  на себе имеет вид  $\frac{\partial}{\partial z}$ . Гамильтониан равен  $H = -p$ , отождествляя  $\mathfrak{g}_+^*$  с  $\mathfrak{g}_-$  имеем  $\alpha_+ = \begin{pmatrix} 0 & -p \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ . В качестве  $\alpha_0$  возьмем общий элемент, отождествляя  $\mathfrak{g}_0^*$  с  $\mathfrak{g}_0$  имеем  $\alpha_0 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ . Тогда

$$\begin{pmatrix} E_{1,1} & E_{2,1} \\ E_{1,2} & E_{2,2} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ -p & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.31)$$

Перемножая матрицы получаем  $e = p$ ,  $h = -2zp - (\lambda_1 - \lambda_2)$ ,  $f = -z^2p - (\lambda - \lambda_2)z$ . Если взять квантовый аналог формулы:

$$\begin{pmatrix} E_{1,1} & E_{2,1} \\ E_{1,2} & E_{2,2} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ -\frac{\partial}{\partial z} & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (6.32)$$

то получаем  $e = \frac{\partial}{\partial z}$ ,  $h = -2z\frac{\partial}{\partial z} - (\lambda_1 - \lambda_2 + 1)$ ,  $f = -z^2\frac{\partial}{\partial z} - (\lambda_1 - \lambda_2 + 1)z$ .

**Пример 6.15.** Аналогично можно посмотреть на случай  $G = GL(n)$ . Единственное нетривиальное место это формула для  $\alpha_+$ . Для этого надо явно задать действие  $G_+$  на себе, для простых корней формулы на самом деле написаны в формулах для скринингов (6.25) выше. Например для  $GL(3)$  имеем

$$\begin{pmatrix} E_{1,1} & E_{2,1} & E_{3,1} \\ E_{1,2} & E_{2,2} & E_{3,2} \\ E_{1,3} & E_{2,3} & E_{3,3} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 & z_{1,2} & z_{1,3} \\ 0 & 1 & z_{2,3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ -p_{1,2} - z_{2,3}p_{1,3} & \lambda_2 & 0 \\ -p_{1,3} & -p_{2,3} & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & z_{1,2} & z_{1,3} \\ 0 & 1 & z_{2,3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.33)$$

Аналогично можно написать и квантовую формулу, см например [15, Утв. 7].

**Пример 6.16.** Пусть  $G = GL(n)$ ,  $G_0 = GL(n-1) \times GL(1)$  — группа блочно диагональных матриц,  $G_+, G_-$  группы соответствующих блочно верхнетреугольных и нижнетреугольных матриц, см. пример 6.9 выше. Группа  $G_+$  является абелевой изоморфной  $C^{n-1}$ , обозначим координаты на ней через  $\vec{z} = (z_{1,2}, \dots, z_{1,n})$ . Левоинвариантные векторные поля являются просто  $\partial/\partial z_{1,i}$ . Тогда формула (6.30) принимает вид

$$\mu_R = - \begin{pmatrix} 1 & (\vec{z})^t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \vec{p} & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & (\vec{z})^t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (6.34)$$

Здесь  $\alpha$  — матрица состоящая из генераторов  $\mathfrak{gl}_{n-1}$ . При  $\alpha = 0$  формула (6.34) есть классический аналог формулы (6.17).

**Задача 6.6** (\*). [14] В аффинном случае формула для классической свободной реализации (6.30) превращается в

$$-g_+^{-1}(\alpha_0 + \alpha_+)g_+ + Kg_+^{-1}\partial g_+. \quad (6.35)$$

Есть аналогичные квантовые формулы. Например для алгебры  $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$  имеет место такое разложение

$$\begin{pmatrix} E_{1,1}(z) & E_{2,1}(z) \\ E_{1,2}(z) & E_{2,2}(z) \end{pmatrix} = -\begin{matrix} * \\ * \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & \gamma(z) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \partial\varphi_1(z) & 0 \\ -\beta(z) & \partial\varphi_2(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \gamma(z) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{matrix} * \\ * \end{matrix} + \\ + k \begin{pmatrix} 1 & \gamma(z) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \partial \left( \begin{pmatrix} 1 & \gamma(z) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right). \quad (6.36)$$

Для того чтобы результат удовлетворял соотношениям  $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$  надо еще правильно нормировать  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ .

Квантовый аффинный аналог формул (6.34) есть индуктивные формулы (6.19).

## 7 Уравнения Книжника-Замолотчикова

### 7.1 Конформные блоки

Пространство конформных блоков было определено как двойственное пространство к пространству коинвариантов  $V/(\mathfrak{g}(C - \vec{p}))$ . Было сказано, что размерность этого пространства не зависит от комплексной структуры на кривой  $C$  и положения точек  $p_i$ . Получается расслоение на пространстве модулей  $\mathcal{M}_{g,m}$  кривых рода  $g$  с  $m$  отмеченными точками.

Оказывается, что в этом расслоении есть (проективно) плоская связность. *Конформные блоки* — это плоские сечения этой связности. Поскольку связность плоская, то, как минимум локально, сечения определяются по значению в одной точке, это объясняет термин «пространство конформных блоков» который мы использовали выше.

Для того, чтобы определить эту связность мы должны определить дифференцирование относительно векторов касательного пространства  $T_{C, \vec{p}}\mathcal{M}_{g,m}$ . Эти вектора соответствуют замене комплексной структуры и сдвигам точек. Начнем со сдвигов точек, сдвигу точки  $p_i$  сопоставляется оператор  $\frac{\partial}{\partial t_i} = (L_{-1})_i$  действующий на векторном пространстве соответствующем  $i$ -й точке.

Эти общие слова верны для любой конформной теории, но для теории Весса-Зумино многое можно явно посчитать. Пусть  $C = \mathbb{CP}^1$ , положения точек это  $z_i$ , пусть пространства  $V_i$  являются модулями Вейля  $V_{\lambda_i, k}$ . Пространство конформных блоков отождествим с  $\mathfrak{g}(C - \vec{p})$  инвариантными функционалами на  $V_{\lambda_1, k} \otimes \dots \otimes V_{\lambda_m, k}$ , по следствию 3.5 это пространство отождествляется с пространством  $\mathfrak{g}$ -инвариантных

функционалов на  $L_{\lambda_1} \otimes \dots \otimes L_{\lambda_m}$ . Выберем вектора  $v_i \in L_{\lambda_i} \subset V_{\lambda_i, k}$ , тогда для любого инвариантного функционала  $\langle \dots \rangle$  имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z_i} \langle v_1 \otimes \dots \otimes v_m \rangle &= \langle v_1 \otimes \dots \otimes (L_{-1} v_i) \dots \otimes v_m \rangle = \\ &= \frac{1}{2(k + h^\vee)} \langle v_1 \otimes \dots \otimes \left( \sum_{a,l} J_{-l}^a J_{1-l}^a v_i \right) \otimes \dots \otimes v_m \rangle = \\ &= \frac{1}{k + h^\vee} \langle v_1 \otimes \left( \sum_a J_{-1}^a J_0^a v_i \right) \otimes \dots \otimes v_m \rangle = \\ &= \frac{-1}{k + h^\vee} \sum_{a,j, j \neq i} \langle v_1 \otimes \dots \otimes \left( \frac{J_0^a}{z_j - z_i} v_j \right) \otimes \dots \otimes (J_0^a v_i) \otimes \dots \otimes v_m \rangle \quad (7.1) \end{aligned}$$

Второй переход основан на том, что  $J_l^a v_i = 0, l > 0$ . Третий переход основан на том, что функционал является инвариантным относительно элемента  $\frac{1}{z - z_i} J_a$ , который около  $i$ -й точки равен  $J_{-1}^a$ , около других точек  $z_j$  равен  $\frac{1}{z_j - z_i} J_0^a$ .

Получился ответ записанный просто в терминах  $\mathfrak{g}$ -инвариантных функционалов на  $L_{\lambda_1} \otimes \dots \otimes L_{\lambda_m}$ . Обозначим через

$$H_i = \sum_{j, j \neq i} \frac{(J_a)_i (J_a)_j}{z_i - z_j} \quad (7.2)$$

оператор действующий на векторном пространстве  $L_{\lambda_1}^* \otimes \dots \otimes L_{\lambda_m}^*$ . Тогда уравнение (7.1) (уравнение на плоское сечение) принимает вид

$$\kappa \frac{\partial}{\partial z_i} \Psi(z_1, \dots, z_m) = H_i \Psi(z_1, \dots, z_m), \quad (7.3)$$

где функция  $\Psi$  принимает значения в  $(L_{\lambda_1}^* \otimes \dots \otimes L_{\lambda_m}^*)^{\mathfrak{g}}$ . Это уравнение называется уравнением Книжника-Замолодчикова.

Если модули  $V_i$  являются какими-то факторами модулей Вейля (например интегрируемыми модулями), то формула для связности будет такой-же, но только пространство будет меньше чем  $(L_{\lambda_1}^* \otimes \dots \otimes L_{\lambda_m}^*)^{\mathfrak{g}}$

**Задача 7.1.** Докажите, что система Книжника-Замолодчикова является  $\mathfrak{g}$ -инвариантной, т.е.  $[J, H_i] = 0, \forall J \in \mathfrak{g}$ .

**Замечание 7.1.** Выше мы не обсуждали корректность определения, надо проверить что действие  $(L_{-1})_i$  сохраняет пространство инвариантов. Эта корректность следует из предыдущей задачи, так из нее следует, что оператор  $H_i$  действует на  $(L_{\lambda_1}^* \otimes \dots \otimes L_{\lambda_m}^*)^{\mathfrak{g}}$ .

На самом деле корректность можно проверять без вычислений, надо проверить, что  $(L_{-1})_i$  нормализует  $\mathfrak{g}(C - \vec{p})$ . Это следует из того, что  $(L_{-1})_i$  есть просто  $\frac{\partial}{\partial t_i}$ .

**Задача 7.2.** а) Пусть  $r_{ij}(z_i - z_j) = \frac{1}{z_i - z_j} \sum_a (J^a)_i (J^a)_j$ . Докажите, что

$$[r_{ij}(z_i - z_j), r_{jk}(z_j - z_k)] + [r_{ik}(z_i - z_k), r_{jk}(z_j - z_k)] + [r_{ij}(z_i - z_j), r_{ik}(z_i - z_k)] = 0. \quad (7.4)$$

Это уравнение называется классическим уравнением Янга-Бакстера.

б) Докажите, что связность Книжника-Замолодчикова является плоской. То есть докажите, что  $[\kappa \partial_i - H_i, \kappa \partial_j - H_j] = 0$ .

**Замечание 7.2.** При определении действия  $\mathfrak{g}(C - \vec{p})$  на векторном пространстве  $V_1 \otimes \dots \otimes V_m$  на векторном пространстве мы использовали локальные координаты  $t_i$  около каждой точки  $p_i$ . Далее, определяя действие алгебры Вирасоро мы тоже используем локальную координату. Поэтому формально мы получили расслоение не на  $\mathcal{M}_{g,m}$  а на пространстве  $\mathcal{M}_{g,m}^\infty$ , где каждой в каждой точке выбрана локальная координата.

Посмотрим на зависимость от выбора этой координаты, т.е. относительно действия группы преобразований  $t_i \mapsto c_{1,i}t + c_{2,i}t^2 + \dots$ , где  $c_{1,i} \neq 0$ . Эти  $c_{l,i}$  можно воспринимать как дополнительные локальные координаты на  $\mathcal{M}_{g,m}^\infty$  по сравнению с  $\mathcal{M}_{g,m}$ . Дифференцирование вдоль соответствующих направлений осуществляется при помощи действие генераторов Вирасоро  $\frac{\partial}{\partial c_{l,i}} = (L_{l-1})_i$ . Заметим, теперь, что аналогично вычислению (7.1)  $\frac{\partial}{\partial c_{l,i}} \langle \dots \rangle = 0$  при  $l \geq 2$ . Поэтому от координат  $c_{l,i}$ ,  $l \geq 2$  на самом деле ничего не зависит. Поэтому можно считать, что расслоение и связность определены на  $\mathcal{M}_{g,m}^1$  — многообразии кривых рода  $g$  с  $m$  отмеченными точками, таких, что в каждой отмеченной точке выбран ненулевой касательный вектор (это эквивалентно заданию значения  $c_{1,i}$ ). Можно еще этот переход к  $\mathcal{M}_{g,m}^1$  объяснить без вычислений: многообразием  $\mathcal{M}_{g,m}^\infty$  стягивается на  $\mathcal{M}_{g,m}^1$ .

Дифференцирование по  $c_{1,i}$  задается действием  $(L_0)_i$ . Вычисление (7.1) опять же показывает, что

$$\frac{\partial}{\partial c_{1,i}} \langle v_1 \otimes \dots \otimes v_m \rangle = \frac{(\lambda, \lambda + 2\rho)}{2(k + h^\vee)} \langle v_1 \otimes \dots \otimes v_m \rangle.$$

Таким образом действие вдоль  $c_{1,i}$  тоже по сути тривиально, после тензорного умножения на линейное расслоения связность вдоль этих направлений тоже становится тривиальной. Поэтому все сводится к расслоению на  $\mathcal{M}_{g,m}$ .

В общем случае касательное пространство к точке  $(C, \vec{p}) \in \mathcal{M}_{g,m}$  равно  $H^1(C, T(C) - \vec{p})$ . Здесь уже учтены не только сдвиги точек, но и деформации комплексной структуры. Обычно эти деформации реализуются при помощи дифференциалов Бельтрами  $\bar{\partial} \mapsto \bar{\partial} + \mu(z, \bar{z})d\bar{z}\partial$ , деформация комплексной структуры  $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \mapsto \frac{\partial}{\partial \bar{z}} + \mu(z, \bar{z})\frac{\partial}{\partial z}$ .

Считать эти когомологии можно при помощи комплекса Чеха. У кривой берется открытое покрытие  $U_1 = C - \vec{p}$ ,  $U_2$  — объединение малых окрестностей точек  $p_i$ :

$$0 \rightarrow \left( T(C - \vec{p}) \oplus \bigoplus_i \mathbb{C}[[t_i]]t \frac{\partial}{\partial t_i} \right) \rightarrow \bigoplus_i \mathbb{C}[[t_i, t_i^{-1}]] \frac{\partial}{\partial t_i} \rightarrow 0 \quad (7.5)$$

Элементом  $\mathbb{C}[[t_i, t_i^{-1}]] \frac{\partial}{\partial t_i}$  опять сопоставляем генератор алгебры Вирасоро действующий в  $i$ -м пространстве.

**Замечание 7.3.** Сопоставление элементам  $\mathbb{C}[[t_i, t_i^{-1}]] \frac{\partial}{\partial t_i}$  генераторов алгебры Вира-соры не учитывает центрального расширения. Это приводит к тому, что связность Книжника-Замолодчикова является не плоской, а *проективно плоской*.

Отметим, что операторы отвечающие сдвигам точек и замене локальной координаты лежат в подалгебре  $\text{Vir}_{\geq -1}$ , в которой центральное расширение зануляется. Поэтому в роде 0 связность является плоской.

**Задача 7.3 (\*).** *Посчитайте связность Книжника-Замолодчикова для какого-то примера рода больше 0.*

## 7.2 Интегральные формулы для решений

Уравнения (7.3) достаточно конкретны чтобы можно было изучать их и их решения забыв об их происхождении из конформной теории поля. Можно искать решения в  $\Psi(z)$  принимающие значения в  $L_{\lambda_1} \otimes \dots \otimes L_{\lambda_m}$ , здесь мы перестали переходить к двойственным пространствам и убрали условие  $\mathfrak{g}$  инвариантности. Последнее условие можно понимать, как то, что мы положили в бесконечность прямую сумму всех представлений  $\oplus_{\lambda} V_{\lambda}$ , это никак не повлияет на операторы  $H_i$ , но изменит квантовое пространство.

В силу  $\mathfrak{g}$  инвариантности, достаточно искать решения системы (7.3) которые являются старшими векторами относительно  $\mathfrak{g}$ . Остальные решения получаются из этих действием генераторов  $\mathfrak{n}_-$ .

Рассмотрим случай алгебры  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$ , тогда мы будем искать  $\Psi(z) \in L_{\lambda_1} \otimes \dots \otimes L_{\lambda_m}$  такие, что  $e\Psi(z) = 0$  и  $\Psi(z)$  решает систему (7.3). Также можно потребовать, чтобы  $\Psi$  был собственным относительно  $h_0$ :  $h_0\Psi(z) = (\sum \lambda_i - 2N)\Psi(z)$ .

Начнем со случая  $N = 0$ . Соответствующее весовое подпространство в  $L_{\lambda_1} \otimes \dots \otimes L_{\lambda_m}$  натянуто на старший вектор  $v = v_{\lambda_1} \otimes \dots \otimes v_{\lambda_m}$ . Заметим, что действие оператора  $\sum (J^a)_i \otimes (J^a)_j$  на старшем векторе  $v_{\lambda_i} \otimes v_{\lambda_j}$  равно  $\frac{1}{2}\lambda_i\lambda_j$ . Тогда решение имеет вид  $\Psi_0(z)v$ , где

$$\Psi_0(z) = \prod_{i < j} (z_i - z_j)^{\frac{\lambda_i \lambda_j}{2\kappa}} \quad (7.6)$$

Теперь напишем решения для случая  $N = 1$ , это должна быть линейная комбинация векторов вида  $v_{\lambda_1} \otimes \dots \otimes f v_{\lambda_i} \otimes \dots \otimes v_{\lambda_m}$ . Обозначим

$$\Psi_1(z; t) = \Psi_0(z) \prod (t - z_j)^{-\lambda_j/\kappa}, \quad F(t) = \sum_j \frac{(f)_j}{t - z_j}. \quad (7.7)$$

**Задача 7.4.** *Докажите, что вектор*

$$\Psi_1(z) = \oint_C \psi_1(t) F(t) v dt \quad (7.8)$$

*зануляется оператором  $e$  и решает систему (7.3).*

Контур в этой формуле предполагается любым таким, что функция  $\Psi_1(z)$  на нем однозначен, т.е. чтобы при обходе все монодромия (ветвление) сократилось. Для этого годятся петли вроде петли Похгаммера. Обобщение на случай произвольно  $N$  дается в следующей теореме.

**Теорема 7.1.** *Пусть*

$$\Psi_N(z, t) = \prod (z_i - z_j)^{\frac{\lambda_i \lambda_j}{2\kappa}} \prod_{p,j} (t_p - z_j)^{-\lambda_j/\kappa} \prod (t_p - t_q)^{2/\kappa} \quad (7.9)$$

Тогда вектора вида

$$\Psi_c(z) = \oint_C \Psi_N(z, t) F(t_1) \cdots F(t_N) v dt_1 \cdots dt_N. \quad (7.10)$$

зануляются оператором  $e$  и решает систему (7.3).

**Замечание 7.4.** Можно рассмотреть квазиклассический предел уравнений Книжника-Замолотчикова, когда  $\kappa \rightarrow 0$ . В терминах уровня  $k$  это означает, что  $k \rightarrow -h^\vee$ . Тогда асимптотика интегральной формулы (7.10) находится по методу перевала, интеграл высаживается на критические по  $t_i$  точки функции  $Y(z, t) = \kappa \log \Psi_N(z, t)$ , т.е. точки решающие уравнения вида

$$\sum_{j=1}^m \frac{\mu_i}{t_p - z_j} - \sum_{i, j \neq k} \frac{2}{t_p - t_q} = 0 \quad (7.11)$$

Эти уравнения называются уравнениями Бете для модели Годена. Теперь сами вектора имеют вид

$$e^{\frac{1}{\kappa} Y(z, t)} \det \left( \frac{\partial^2 Y(z; t)}{\partial z_i \partial z_j} \right)^{-1/2} F(t_1) \cdots F(t_N) v, \quad (7.12)$$

где  $\vec{t}$  удовлетворяет уравнениям Бете. Обозначим,  $B(\vec{t}) = F(t_1) \cdots F(t_N) v$ , тогда из уравнений Книжника-Замолотчикова следует, что собственное значение  $H_i$  на векторе  $B(\vec{t})$  равно  $\partial Y / \partial z_i$ . Кроме того, формула (7.12) говорит, что норма  $B(\vec{t})$  связана с  $\det \left( \frac{\partial^2 Y(z; t)}{\partial z_i \partial z_j} \right)$ , доказательство возможно написано в [16], можно разобрать в качестве задачи.

### 7.3 Вывод из свободной реализации

Напомним, что в случае сферы мы выше, в параграфе 5.1, обсуждали другой подход к конформным блокам, основанный на операторном формализме. Пространство конформных блоков при этом отождествляется с пространством матричных элементов вида

$${}_0 \langle \emptyset | \Phi_{\lambda_1}(z_1) \cdots \Phi_{\lambda_m}(z_m) | \emptyset \rangle_{\lambda_\infty} \quad (7.13)$$

Здесь, для простоты в точку 0 мы положили тривиальное представление, а в точку  $\infty$  мы положили сумму всех модулей Вейля чтобы не ограничиваться  $\mathfrak{g}$  инвариантами. Оператор  $\Phi_{\lambda_i}$  действует

$$\Phi_{\lambda_i}(z): V_{\mu_{i-1},k} \rightarrow V_{\mu_i,k} \otimes L_{\lambda'_i}(z) \quad (7.14)$$

Здесь мы считаем, что  $\mu_0 = 0$ ,  $\mu_m = \lambda_\infty$  — произвольное. Остальные числа  $\mu_i$  могут быть любыми, с точки общей формулы для конформного блока (7.13) они определяют «промежуточный канал», с точки зрения сплетающего оператора (5.2) они задают его факторизацию. На  $\mu_i$  есть ограничения — правила отбора, из задачи 5.2 следует, что пространство таких операторов изоморфно пространству инвариантов в  $L_{\mu_{i-1}}^* \otimes L_{\mu_i} \otimes L_{\lambda_i}$ . Можно тут не ссылаться на задачу, а доказать это непосредственно. В любом случае,  $\mu_i$  при данных  $\mu_{i-1}$  и  $\lambda_i$  принимает дискретное число значений, если  $\lambda_i$  доминантный вес, то просто, конечное, число значений.

Теперь нам нужно научиться дифференцировать по положениям точек  $z_i$ , для этого коммутировать с алгеброй Вирасоро.

**Предложение 7.2.** *Оператор  $\Phi_\lambda: V_{\mu_0,k} \rightarrow V_{\mu_1,k} \otimes L_\lambda(z)$  удовлетворяет соотношениям*

$$[L_n, \Phi_\lambda^j(z)] = -\frac{z^n}{k+h^\vee} \sum_{a,j'} f_j^{a,j'} : J^a(z) \Phi_\lambda^j(z) : + (n+1) \Delta_\lambda z^n \Phi_\lambda^j(z), \quad (7.15)$$

где  $\Delta_\lambda = \frac{(\lambda, \lambda + 2\rho)}{2(k+h^\vee \text{ec})}$

Это предложение вытекает из формулы (5.1). Мы хотим воспринимать это соотношение как соотношение на примарные операторы относительно алгебры Вирасоро.

**Предложение 7.3.** *Пусть  $\tilde{\Phi}_\lambda(z) = \Phi_\lambda(z)z^\Delta$ , где  $\Delta = \Delta_{\mu_1} - \Delta_\lambda - \Delta_{\mu_0}$ . Тогда оператор  $\tilde{\Phi}_\lambda$  удовлетворяется соотношению*

$$[L_n, \tilde{\Phi}_\lambda^j(z)] = z^{n+1} (\tilde{\Phi}_\lambda^j)'(z) + (n+1) \Delta_\lambda z^n \tilde{\Phi}_\lambda^j(z) \quad (7.16)$$

*Доказательство.* В силу соотношения (7.15) достаточно доказать равенство только для одного  $L_n$ , например для  $L_0$ . Если  $v \in L_{\mu_0} \subset V_{\mu_0,k}$  вектор на «верхнем этаже» модуля Вейля, то  $\tilde{\Phi}_\lambda^j v = v_1 \otimes u_j z^\Delta + \dots$ , где  $v_1$  лежит на «верхнем этаже» модуля  $V_{\lambda_1,k}$ , а многочлен означает следующие этажи.

Тогда  $L_0$  действует на  $v$  числом  $\Delta_{\mu_0}$ , а на  $v_1$  числом  $\Delta_{\mu_1}$ , поэтому левая часть соотношения (7.16) равна

$$\Delta_{\mu_1} - \Delta_{\mu_0} (v_1 \otimes u_j z^\Delta + \dots) = (\Delta + \Delta_\lambda) (v_1 \otimes u_j z^\Delta + \dots) = \left( z \frac{\partial}{\partial z} + \Delta_\lambda \right) (v_1 \otimes u_j z^\Delta + \dots).$$

Тем самым мы проверили соотношение (7.16) на «верхнем этаже», в силу градуированности всех представлений, легко видеть, что этого достаточно.  $\square$

Рассмотрим теперь матричные элементы

$${}_0\langle \emptyset | \tilde{\Phi}_{\lambda_1}(z_1) \dots \tilde{\Phi}_{\lambda_m}(z_m) | \emptyset \rangle_{\lambda_\infty}. \quad (7.17)$$

Для построения связности Книжника-Замолодчикова, нам нужно дифференцировать по  $z_i$ , но это можно сделать благодаря результатам показанным выше.

**Задача 7.5.** *Докажите, что матричные элементы (7.17) удовлетворяют уравнения Книжника Замолодчикова.*

Теперь для нахождения явных формул для решения уравнений Книжника-Замолодчикова нужно использовать явные формулы для вертексных операторов  $\tilde{\Phi}_\lambda$ . Чтобы написать их можно использовать свободную реализацию обсуждающуюся выше, см. формулу (6.5). Простейший пример оператора  $\tilde{\Phi}$  задается следующей теоремой.

**Теорема 7.4.** *Сплетающий оператор*

$$\tilde{\Phi}: V_{\mu,k} \rightarrow V_{\lambda+\mu,k} \otimes L_\lambda(z) \quad (7.18)$$

задается формулой (здесь  $v_{-\lambda}$  обозначает вектор младшего веса в  $L_\lambda$ )

$$\tilde{\Phi}^{(0)}(z)v = e^{\lambda/\sqrt{2\kappa}\varphi(z)} e^{-\gamma(z)\otimes e}(v \otimes v_{-\lambda}). \quad (7.19)$$

*Доказательство.* Выше мы использовали букву  $f$  и для обозначения генераторов в алгебре Ли  $\mathfrak{sl}_2$  и для обозначения матричных элементов в представлении. Чтобы обозначения не путались внутри одного доказательства сменим обозначения для генераторов следующим образом:  $J^+ = e$ ,  $J^- = f$ ,  $J^0 = h$ .

Выберем базис  $u_j = \frac{1}{j!}(J^+)^j v_{-\lambda}$  в модуле  $L_\lambda$ . В этом базисе матричные элементы  $f_j^{a,j'}$  генераторов  $J^+$ ,  $J^0$ ,  $J^-$  равны:

$$f_j^{+,j+1} = j + 1, \quad f_j^{0,j} = -\lambda + 2j, \quad f_j^{-,j-1} = \lambda - j + 1. \quad (7.20)$$

Формула (7.19) означает, что  $\tilde{\Phi}^j(z) = (-1)^j \gamma(z)^j e^{\lambda/\sqrt{2\kappa}\varphi(z)}$ .

Достаточно проверить соотношение (5.1) для токов  $J^-(z)$  и  $J^+(z)$ . Проверка устроена следующим образом:

$$\begin{aligned} J^+(w)\tilde{\Phi}^j(z) &= (-1)^j j \frac{\gamma(z)^{j-1} e^{\lambda/\sqrt{2\kappa}\varphi(z)}}{w-z} + \text{reg.} = -f_{j-1}^{+,j} \frac{\tilde{\Phi}^{j-1}(z)}{w-z} + \text{reg.} \\ J^-(w)\tilde{\Phi}^j(z) &= (-1)^j (\lambda - j) \frac{\gamma(z)^{j+1} e^{\lambda/\sqrt{2\kappa}\varphi(z)}}{w-z} + \text{reg.} = -f_{j+1}^{-,j} \frac{\tilde{\Phi}^{j+1}(z)}{w-z} + \text{reg.} \end{aligned}$$

□

При помощи таких операторов можно построить матричный элемент (7.17) только в случае  $\lambda_\infty = \sum_{i=1}^m \lambda_i$ . В более общей ситуации  $\lambda_\infty = \sum_{i=1}^m \lambda_i - 2N$  операторы строятся при помощи скринингов введенных в формуле (6.7):

$$\tilde{\Phi}(z): V_{\mu,k} \rightarrow M_{\mu+\lambda-2N,k} \otimes L_\lambda(z), \quad \tilde{\Phi}(z) = \oint_C \tilde{\Phi}^{(0)}(z) S(t_1) \cdots S(t_N) dt_1 \dots dt_N. \quad (7.21)$$

Можно смотреть на эту формулу как композицию операторов  $\tilde{\Phi}^{(0)}(z)$  и  $(\oint S(t) dt)^N$ , так как оба оператора были сплетающими, то и композиция будет сплетающим оператором. Более аккуратно, конечно, нужно еще определять контур  $C$  на котором интегральная функция становится однозначной.

**Задача 7.6.** Докажите, что матричные элементы операторов (7.21) приводят к интегральным формулам вида (7.10).

## Список литературы

- [1] В Bakalov, AA Kirillov *Lectures on tensor categories and modular functors*
- [2] PI Etingof, I Frenkel, AA Kirillov *Lectures on representation theory and Knizhnik-Zamolodchikov equations*
- [3] Ph. Di Francesco, P. Mathieu, D. Senechal *Conformal Field Theory* (1997)
- [4] Ginzburg *Lectures on D -modules*
- [5] Etingof *Algebraic D-modules* [материалы курса в MIT]
- [6] Beauville *Conformal blocks, fusion rules and the Verlinde formula*
- [7] A. Szenes, *The combinatorics of the Verlinde formula*
- [8] D. Gepner *Fusion rings and geometry*
- [9] M. Aganagic, S. Shakirov *Knot Homology from Refined Chern-Simons Theory*
- [10] Н. Kanno, К. Sugiyama, Y. Yoshida *Equivariant  $U(N)$  Verlinde algebra from Bethe/Gauge correspondence*
- [11] Bouwknegt, McCarthy, Pilch, *Quantum group structure in Fock space resolutions of  $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$  representations*
- [12] [Лекции 2017 года]
- [13] E. Frenkel *Lectures on Wakimoto modules, opers and the center at the critical level*
- [14] de Boer, Feher *Wakimoto Realizations of Current Algebras: An Explicit Construction*
- [15] Деркачёв, Манашов *Общее решение уравнения Янга–Бакстера с группой симметрии  $SL(n, \mathbb{C})$*

[16] N. Reshetikhin, A. Varchenko *Quasiclassical asymptotics of solutions to the KZ equations*

## Список задач

1.1	Задача . . . . .	3
1.2	Задача . . . . .	4
1.3	Задача . . . . .	4
1.4	Задача . . . . .	5
2.1	Задача . . . . .	7
2.2	Задача . . . . .	7
2.3	Задача . . . . .	9
3.1	Задача . . . . .	9
3.2	Задача . . . . .	11
3.3	Задача . . . . .	12
4.1	Задача . . . . .	13
4.2	Задача . . . . .	14
4.3	Задача . . . . .	14
4.4	Задача . . . . .	15
5.1	Задача . . . . .	17
5.2	Задача . . . . .	17
5.3	Задача (*) . . . . .	19
5.4	Задача . . . . .	19
5.5	Задача (*) . . . . .	22
5.6	Задача (*) . . . . .	22
5.7	Задача . . . . .	23
5.8	Задача . . . . .	25
5.9	Задача (*) . . . . .	25
5.10	Задача (*) . . . . .	26
5.11	Задача (*) . . . . .	26
6.1	Задача . . . . .	29
6.2	Задача . . . . .	33
6.3	Задача . . . . .	34
6.4	Задача . . . . .	35
6.5	Задача . . . . .	37
6.6	Задача (*) . . . . .	41
7.1	Задача . . . . .	42
7.2	Задача . . . . .	43
7.3	Задача (*) . . . . .	44
7.4	Задача . . . . .	44
7.5	Задача . . . . .	47
7.6	Задача . . . . .	48