Лекция 4. Разные конструкции

В начале лекции дадим еще некоторое число новых понятий, а потом, по ходу разберем несколько задач из домашнего задания.

Определение 1. Даны две группы G, H. Отображение $\varphi\colon G \to H$ называется *гомоморфизмом* групп, если $\forall a, b \in G$, $\varphi(a \cdot_G b) = \varphi(a) \cdot_H \varphi(b)$.

Предложение 1. При любом гомоморфизме а) $\varphi(e) = e$; б) $\varphi(g^{-1}) = \varphi(g)^{-1}$;

Определение 2. Пусть дан гомоморфизм групп $\varphi\colon G \to H$. *Ядром* гомоморфизма (обозначается $\operatorname{Ker}\varphi$) называется $\{g \in G | \varphi(g) = e\}$. *Образом* гомоморфизма (обозначается $\operatorname{Im}(\varphi)$ называется $\{h \in H | \exists g \in G \varphi(g) = h\}$.

Предложение 2. а). $\operatorname{Ker}\varphi$ является нормальной подгруппой в G. б) $\operatorname{Im}\varphi$ является подгруппой в H.

Предложение 3. $\varphi(g_1) = \varphi(g_2) \Leftrightarrow g_1 \in g_2 \operatorname{Ker}\varphi$. В частности гомоморфизм φ инъективен тогда и только тогда, когда $\operatorname{Ker}\varphi = \{e\}$.

Примеры

1. Отображение взятия остатка по модулю n из $\mathbb{Z}$ в $\mathbb{Z}_n$ является гомоморфизмом. Ядро — это подгруппа $n\mathbb{Z}$.

2. Отображение четности определяет гомоморфизм из группы перестановок S_n в группу C_2. Ядро — это подгруппа четных перестановок, она обозначается A_n.

3. Вычисление определителя задает гомоморфизм из группы матриц $GL(N, \mathbb{C})$ в группу $\mathbb{C}^*$. Ядро это матрицы с определителем 1, эта группа обозначается $SL(N, \mathbb{C})$.

4. Действия группы G на множестве $\{1, 2, \ldots, n\}$ находятся в биекции с гомоморфизмами $G \to S_n$.

Теорема 4 (Теорема о гомоморфизме). Пусть $\varphi\colon G \to H$ гомоморфизм групп. Тогда $G/\operatorname{Ker}(\varphi) \simeq \operatorname{Im}(\varphi)$.

Краткое доказательство. Изоморфизм устроен так: каждому элементу $h = \varphi(g) \in \operatorname{Im}\varphi$ ставится в соответствии класс $g \operatorname{Ker}\varphi$. Корректность следует из доказанных выше свойств, свойство гомоморфизма проверяется напрямую. ∎

Предложение 5 (Следствие). Если группа G конечна, то $|G| = |\operatorname{Ker}\varphi| \cdot |\operatorname{Im}\varphi|$.

Теорема 6 (Теорема Кэли). Любая конечная группа изоморфна подгруппе в симметрической группе S_n для какого-то n.

Краткое доказательство Пусть $n = |G|$. Группа G действует на себе умножением слева. Значит, по примеру выше есть гомоморфизм $G \to S_n$, элемент $g \in G$ переходит в перестановку $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ gx_1 & gx_2 & \ldots & gx_n \end{pmatrix}$. ∎

Разберем несколько задач из прошлого домашнего задания и дадим нужный для них контекст.

Задача 2. а) Пусть G — группа движений сохраняющих правильный тетраэдр. Докажите, что действие G на множестве вершин тетраэдра задает изоморфизм G и

S_4. Опишите геометрически (как вращения, симметрии или зеркальные повороты) все перестановки. Найдите классы сопряженности.
б) Пусть G_0 это подгруппа собственных движений сохраняющих правильный тетраэдр. Является ли она нормальной? Найдите классы сопряженности в G_0.

Краткое решение. а). Действие группы G на множестве вершин задает гомоморфизм в группу S_4. То, что это изоморфизм, следует из того, что любое преобразование однозначно задается перестановкой вершин и любая перестановка вершин получается из движении трехмерного пространства. Геометрическая интерпретация указана в следующей таблице:

Геометрическая интерпретация.	Циклический тип.
Тождественное преобразование,	e,
Отражение относительно плоскости проходящей через ребро и центр противоположного ребра,	Цикл длины 2 $(1,2)$.
Поворот вокруг оси проходящей через вершину на угол $2\pi/3$ или $4\pi/3$.	Цикл длины 3 $(1,2,3)$.
Зеркальный поворот относительно плоскости проходящей черех середины 4 ребер и на угол $\pi/2$.	Цикл длины 4 $(1,2,3,4)$.
Поворот вокруг оси проходящей через середины противоположных граней на угол π.	Произведение двух независимых циклов длины 2 $(1,2)(3,4)$.

На прошлой лекции было доказано, что класс сопряженности в группе S_n определяется циклической структурой, т.е. всего будет 5 классов сопряженности. Геометрически это тоже понятно, при сопряжении отражение переходит в отражение, вращение вокруг оси переходит в поворот на тот же угол и т.д. Повороты на углы $2\pi/3$ или $4\pi/3$ сопряжены посредством несобственного преобразования.

б). Как видно из таблицы выше собственным движениям соответствуют четные перестановки (причем все), значит группа $G_0 \simeq A_4$. Она состоит из полных классов сопряженности в S_4 поэтому она нормальна.

Ясно, что если элементы не были сопряжены в S_4, то они и не будут сопряжены в A_4. Однако обратное неверно и класс состоящий из тройных циклов распадается на два: повороты на угол $2\pi/3$ и повороты на угол $4pi/3$, один в другой не переводится посредством сопряжения собственным движением.

Это же можно увидеть и алгебраически. А именно, покажем, что тройные циклы $(1,2,3)$ и $(1,3,2)$ не сопряжены в A_4. Действительно, так как $\alpha(1,2,3)\alpha^{-1} = (\alpha(1),\alpha(2),\alpha(3))$, то в качестве α могут выступать $\begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 1\,3\,2\,4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 2\,1\,3\,4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 3\,2\;\;4 \end{pmatrix}$ которые все являются нечетными. ■

Задача 3. а) Через D_{nh} обозначим группу симметрий прямоугольной призмы с основанием правильный n угольник. Найдите порядок группы D_{nh}.

Другое описание группы D_{nh} — группа движений трехмерного пространства, сохраняющих правильный многоугольник с n сторонами в плоскости .

б) Изоморфны ли группы D_{3h} и D_6?

Доказательство. Внутри D_{nh} есть подгруппа D_n движений переводящих верхнее основание в себя. И есть подгруппа C_2 состоящая из тождественного преобразования и отражения переставляющего верхнее и нижнее основания (плоскость проходит через середины вертикальных ребер). Легко видеть, что любой элемент D_{nh} представим в виде произведения элемента из D_n и C_2. Теперь, чтобы доказать изоморфизм достаточно применить следующее предложение.

Предложение 7. Пусть группа G содержит две подгруппы A, B, такие, что A, B коммутируют (для любых $a \in A$, $b \in B$, $ab = ba$), $A \cap B = \{e\}$, $G = A \cdot B$ (т.е. $\forall g \in G, \exists a \in A, b \in B \colon g = ab$). Тогда $G \simeq A \times B$.

Доказательство. Построим гомоморфизм из $A \times B$ в G, который переводит пару (a, b) в их произведение. То, что это гомоморфизм следует из того подгруппы A, B коммутируют. Далее, из того $A \cap B = \{e\}$ следует, что это инъекция, а из $G = A \cdot B$ то, что это сюрьекция. Значит это изоморфизм. ■

Докажем теперь, что $D_6 \simeq D_3 \times C_2$. Три вершины шестиугольника стоящие через один образуют правильный треугольник. Подгруппа группы D_6 переводящая этот треугольник в себя изоморфна D_3. Подгруппа D_6 состоящая из тождественного преобразования и центральной симметрии изоморфна C_2. Эти две подгруппы коммутируют, не пересекаются, и любой элемент D_6 может быть записан как их произведение. Значит, по предложению выше $D_6 \simeq D_3 \times C_2 \simeq D_{3h}$. ■

Определение 3. Центром группы G называется множество $Z(G) = \{g \in G | \forall x \in G, xg = gx\}$.

Легко видеть что $Z(G)$ является подгруппой. В задаче выше в разложении $D_6 \simeq D_3 \times C_2$ элементы C_2 должны лежать в центре, поэтому в качестве порождающей C_2 можно взять центральную симметрию, но *нельзя* брать никакую осевую симметрию.

Упомянем еще такую тему как задание группы образующими и соотношениями. Мы не будем давать аккуратного определения, а ограничимся одним примером.

Предложение 8. Группа D_n порождается одним поворотом на угол $2\pi/n$ который мы обозначим r и одним отражением, которое мы обозначим s. Соотношения имеют вид $r^n = s^2 = rsrs = e$.

Доказательство. Во первых, легко видеть, что любое вращение из D_n иеет вид r^b, $0 \leq b \leq n-1$, а любое отражение может быть получено как композиция s и вращения. Из этого следует, что группа D_n порождена s, r.

Во вторых, эти соотношения выполнены в группе D_n. Единственное, что не сразу очевидно, это $rsrs = e$, это происходит из того, что rs является несобственным преобразованием, а, значит, отражением.

Наконец, проверим, что другие соотношения налагать не надо. Любой элемент группы порожденной r, s может быть записан в виде $s^{a_1}r^{b_1} \cdots s^{a_k}r^{b_k}$, где $a_i \in \mathbb{Z}$. Пользуясь соотношением $rs = sr^{-1}$ мы можем пронести s влево и переписать слово в виде $s^a r^b$, где $a = 0, 1$, $b = 0, \ldots, n-1$. Значит группа с данными образующими и соотношениями содержит не более $2n$ элементов. С другой стороны, она содержит не менее $2n$ элементов так как из нее есть сюрьективный гомоморфизм в D_n. ■

Задача 4. а) Пусть G — группа симметрий прямоугольной (но не квадратной) решетки на плоскости, T — подгруппа состоящая из трансляций. Докажите, что T является нормальной подгруппой в G. Найдите факторгруппу G/T. Представьте G в виде полупрямого произведения.
б)* Найдите классы сопряженности в G.

Доказательство. Любое аффинное преобразование можно записать в виде $x \mapsto Ax + v$. Так как начало координат должно переходить в точку решетки, то вектор v — это вектор решетки. Кроме того, так как горизонтальные прямые решетки должны перейти в горизотнтальные прямые и тоже про вертикальные, то матрица A — диагональная. Так как A к тому же ортогональная, то всего есть 4 варианта преобразований в G:

$$\textbf{(i)}: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \qquad \textbf{(ii)}: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix},$$
$$\textbf{(iii)}: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \qquad \textbf{(iv)}: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}.$$

Геометрически, преобразования типа **(i)** — это трансляции, преобразования типа **(ii)** — это скользящие симметрии относительно горизонтальных осей, преобразования типа **(iii)** — это скользящие симметрии отражения относительно вертикальных осей, преобразования типа **(iv)** — это центральные симметрии.

Подгруппа T сотстоит из преобразований типа (1). Построим гомоморфизм из группы G в группу матриц вида

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

который переводит аффинное преобразование в соответствующую ему матрицу A. Легко проверить, что это действительно гомоморфизм.

Ядром этого говорфизма является группа трансляций T, значит, она являтеся нормальной. По теореме о гомоморфизме G/T изоморфно образу, то есть группе состоящей из матриц (1), эта группа изоморфна $C_2 \times C_2$. Значит $G/T \simeq C_2 \times C_2$.

Обозначим через G_0 подгруппу G сохраняющую начало координат (т.е. линейных преобразований в формуле выше). Отметим, что подгруппы G_0 и T *не коммутируют*. Например

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \left(\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \right) \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}.$$

Значит, нельзя сказать, что G является произведением G_0 и T. Но G является полупрямым произведением $G \simeq G_0 \ltimes T$, это можно увидеть как напрямую, так и из следующего общего предложения.

Предложение 9. Пусть группа G содержит две подгруппы A, B такие, что $A \cap B = \{e\}$, $A \cdot B = G$, $B \triangleleft G$. Тогда G является *полупрямым произведением* A и B.

Доказательство. Определим $\phi_a(b) = aba^{-1}$. Легко проверить, что сопоставление $a \mapsto \phi_a$ удовлетворяет условиям

$$\phi_a(b_1b_2) = \phi_a(b_1)\phi_a(b_2), \quad \text{и} \quad \phi_{a_1}(\phi_{a_2}(b)) = \phi_{a_1a_2}(b).$$

Поэтому мы можем определить полупрямое произведение $G = A \ltimes B$. Гомоморфизм $\varphi\colon A \ltimes B \to G$ строится по формуле $(a, b) \mapsto a \cdot b$. Инъективность и сюръективность этого отображения следует из того, что $A \cap B = \{e\}$, $A \cdot B = G$. То, что это действительно гомоморфизм проверяется напрямую

$$\begin{aligned}\varphi((a_1, b_1)) \cdot \varphi((a_2, b_2)) = a_1b_1a_2b_2 = a_1a_2(a_2^{-1}b_1a_2)b_2 = a_1a_2\phi_{a_1^{-1}}(b_1)b_2 = \\ = \varphi((a_1a_2, \phi_{a_1^{-1}}(b_1)b_2)) = \varphi((a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2)) \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Предложение 10. Если $G = A \ltimes B$, то $G/B \simeq A$.

Доказательство. Построим гомоморфизм из G в A по формуле $(a, b) \mapsto a$. Его ядро есть B, образ изоморфен A, по теореме о гомоморфизме получаем нужное.$\blacksquare$

Замечание. Аналогичное задаче утверждение верно и дле всей группы движений — она изоморфна полупрямому произведению ортогональной группы и группы трансляций $O(2) \ltimes \mathbb{R}^2$. Также для любой сигнатуры, например группа Пуанкаре есть полупрямое произведение группы Лоренца и группы трансляций $O(3, 1) \ltimes \mathbb{R}^4$.

Домашнее задание

Решения задач 3 и 4 надо прислать до начала лекции 6 марта. Задачи 1 и 2 надо прислать до начала лекции 13 марта. Помимо письменной сдачи надо быть готовым ответить на вопросы по решениям.

Задача 1. Постройте сюръективный гомоморфизм из группы S_4 в группу S_3. Найдите его ядро.

Указание: воспользуйтесь действием S_4 на пространстве многочленов от четырех переменных переставляя переменные. Точнее воспользуйтесь орбитой многочлена $P = x_1x_2 + x_3x_4$ для такого действия.

Задача 2. Через $\mathbb{C}^*$ обозначим группу ненулевых комплексных чисел с операцией множения, через $\mathbb{R}_+$ обозначим подгруппу положительных вещественных чисел. Найдите факторгруппу $\mathbb{C}^*/\mathbb{R}_+$.

Указание: представьте $\mathbb{C}^*$ в виде произведения $\mathbb{R}_+$ и другой подгруппы.

Определение 4. Подгруппа порожденная элементами вида $xyx^{-1}y^{-1}$ называется коммутантом группы G. Выражение $xyx^{-1}y^{-1}$ называется коммутатором элементов x, y. Коммутант группы G обозначается $[G, G]$.

Задача 3. а) Найдите классы сопряженности в группе D_n.
б) Найдите коммутант группы D_n.
Указание: используйте, то что любой элемент D_n может быть записан в виде r^b или sr^b и соотношения на r, s найденные на лекции
в)* Представьте группу D_n в виде нетривиального полупрямого произведения.

Задача 4. Пусть G — группа движений сохраняющих куб, G_0 —- подгруппа собственных движений.
а) Постройте нетривиальный гомоморфизм из G_0 в S_4 используя действие G на множестве диагоналей куба. Является ли он изоморфизмом?
б) Найдите классы сопряженности в группе G_0. Опишите эти классы геометрически как (как вращения, симметрии или зеркальные повороты).
в) Опишите G как произведение (прямое или полупрямое) Сколько существует классов сопряженности в G?