Категория O и Зёргель (окончание лекции 2)

10-17 октября 2018

1 Стандартная фильтрация

Предложение 1. *Если λ достаточно общий то модуль Верма $M(\lambda)$ будем неприводим.*

Доказательство. Если есть какой-то собственный подмодуль $N \subset M(\lambda)$, то в нем есть старший вектор, скажем веса μ. Тогда по теореме Хариш-Чандры существует $w \in W$ такой, что $w.\lambda = \mu$. Но для того, чтобы вес μ был в модуле $M(\lambda)$ необходимо чтобы $\lambda - \mu \in \oplus \mathbb{Z}_{\geq 0}\alpha_i$. Получилось объединение счетного числа гиперплоскостей, т.е. для любого λ не лежащем в этих гиперплоскостях модуль $M(\lambda)$ неприводим. $\square$

Замечание 1. На самом деле необходимое и достаточно условие на λ имеет вид $(\lambda + \rho, \alpha^\vee) \notin \mathbb{Z}_{>0}$, $\forall \alpha \in \Phi^+$.

Пример 1. Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3$. Пусть вес λ равен $(\lambda 1, \lambda_2, \lambda_3)$, $\sum \lambda_i = 0$. Тогда $\lambda + \rho = (\lambda 1 + 1, \lambda_2, \lambda_3 - 1)$. Веса $\lambda + \rho - w(\lambda + \rho)$ имеют вид

$$(\lambda_1 - \lambda_2 + 1, \lambda_2 - \lambda_1 - 1, 0),\ (0, \lambda_2 - \lambda_3 + 1, \lambda_3 - \lambda_2 - 1),\ (\lambda_1 - \lambda_3 + 2, 0, \lambda_3 - \lambda_1 - 2),$$
$$(\lambda_1 - \lambda_2 + 1, \lambda_2 - \lambda_3 + 1, \lambda_3 - \lambda_1 - 2),\ (\lambda_1 - \lambda_3 + 2, \lambda_2 - \lambda_1 - 1, \lambda_3 - \lambda_2 - 1).$$

Для того чтобы кто-то из них выражался через положительные корни нужно или $\lambda_1 - \lambda_2 + 1$ или $\lambda_2 - \lambda_3 + 1$ или $\lambda_1 - \lambda_3 + 2$ лежал в $\mathbb{Z}_{>0}$.

Определение 1. *Будем говорить, что модуль M из категории $\mathcal{O}$ имеет стандартную фильтрацию если существует последовательность подмодулей $0 = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_n = M$, такая, что все последовательные факторы M_i/M_{i+1} являются модулями Верма.*

Не надо путаться стандартную фильтрацию с рядом Жордана-Гельдера и с разложением на неразложимые.

Из соображений характеров ясно, что n независит от фильтрации, также набор факторов M_i/M_{i+1} не зависит от самой фильтрации. Кратность вхождения модуля Верма $M(\lambda)$ в набор факторов модуля M обозначается $(M : M(\lambda)$. Это коэффициент разложение в K группе: $[M] = \sum_\lambda (M : M(\lambda)[M(\lambda)]$. Не надо путать с обозначениями $[M : L(\lambda]$ для кратности вхождения неприводимого представления.

Предложение 2. *а) Пусть λ максимальный вес в M, тогда $M(\lambda) \subset M$ и $M/M(\lambda)$ имеет стандартную фильтрацию.*
б) Модуль M имеет стандартную фильтрацию, если и только если он является свободным относительно $U(\mathfrak{n}_-)$ с градуированным по $\mathfrak{h}$ образующими.

Теорема 1. *Пусть M конечномерный $\mathfrak{g}$ модуль, тогда $M \otimes M(\lambda)$ имеет стандартную фильтрацию с факторами вида $M(\lambda + \mu)$, где μ пробегает все веса M и встречается с кратностью $\dim M_\mu$.*

Пример 2. Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$. $M = L(1)$ — двумерное представление.

$M(\lambda) \otimes L(1) = M(\lambda+1) \oplus M(\lambda-1)$, при $\lambda \neq -1$ (из гоморфизма Харич-Чандры).

$M(-1) \otimes L(1)$ — новый модуль который не является модулем старшего веса. Лежит в категории $\mathcal{O}_{\chi_0}$.

Вообще категория $\mathcal{O}_{\chi_\lambda}$ распадается на два блока при $\lambda \notin \mathbb{Z}$. Иначе интересно.

2 Гомологическая алгебра

Определение 2. *Пусть есть $A, C \in \mathcal{O}$. Тогда $\mathrm{Ext}^1(C, A)$ это множество точных троек*

$$0 \to A \to B \to C \to 0$$

по отношению эквивалентности.

Пример 3. Примеры для $\mathfrak{sl}_2$:

1. Для конечномерных расширений нет. Вообще между разными блоками нет.
2. Есть расширение $M(-l-2)$ при помощи $L(l)$, это получается $M(l)$.
3. Выше было $L(1) \otimes M(-1)$, это расширение $M(0)$ при помощи $M(-2)$.
4. Есть разница между $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}}$ и $\mathrm{Ext}^1_{U(\mathfrak{g})}$ (дело в полупростоте действия $\mathfrak{h}$).

Функториальность, если есть $C \to C'$, то есть $\mathrm{Ext}^1(C', A) \to \mathrm{Ext}^1(C, A)$, если есть $A \to A'$, то есть $\mathrm{Ext}^1(C, A) \to \mathrm{Ext}^1(C, A')$.

Определение суммы по Бэру. Ext^1 – абелева группа.

Теорема 2. *Если есть короткая точная последовательность*

$$0 \to A \to B \to C \to 0$$

то есть две длинные последовательности

$$0 \to \mathrm{Hom}(D, A) \to \mathrm{Hom}(D, B) \to \mathrm{Hom}(D, C) \to \mathrm{Ext}^1(D, A) \to \mathrm{Ext}^1(D, B) \to \mathrm{Ext}^1(D, C) \to \dots,$$

и

$$0 \to \mathrm{Hom}(C, D) \to \mathrm{Hom}(B, D) \to \mathrm{Hom}(A, D) \to \mathrm{Ext}^1(C, D) \to \mathrm{Ext}^1(B, D) \to \mathrm{Ext}^1(A, D) \to \dots$$

Замечание 2. На самом деле дальше стоят Ext^i, $i \geq 0$. Их тоже можно определить через расширения. Проще через резольвенты, но для этого нужны проективные (или инъектинвые объекты). Сейчас это будет.

Самое low-tech изложение есть в книжке Маклейна гомология, видимо сейчас надо читать Weibel.