Группы Кокстера и алгебры Гекке

1 Группы Кокстера

Источником про группы Кокстера может быть книги [1], [5].

Группа Кокстера W определяется по набору образующий $S = \{s_1, \dots . s_n\}$ и соотношений которые зависят от целых чисел $m_{i,j} \in \{2, 3, \dots, \infty\}$, $i \neq j$. Соотношения имеют вид:

$$s_i^2 = e, \tag{1}$$

$$\underbrace{s_i s_j s_i \cdots}_{m_{ij}} = \underbrace{s_j s_i s_j \cdots}_{m_{ji}}. \tag{2}$$

Второе соотношение называют *соотношением кос*. Если $m_{i,j} = \infty$, то на s_i, s_j нет соотношений. Элементы s_i называются *простыми отражениями*

Замечание 1. Учитывая, что $s_i^2 = e$ соотношение кос может записано в виде $(s_i s_j)^{m_{i,j}} = e$. Но запись соотношения в виде (2) удобна тем, что она сохраняется в группе кос и в алгебре Гекке ниже.

Можно доказать, что произведение $s_i s_j$ имеет порядок ровно $m_{i,j}$, для этого можно построить представление группы Костера, см. например [1, Sec. 4.1].

Пример 2. Группа перестановок $\mathfrak{S}_n$. Она порождена элементарными транспозициями $s_i = (i, i+1)$. При этом $m_{i,j} = 2$ при $|i - j| > 1$ и $m_{i,j} = 3$ при $|i - j| = 1$.

Пример 3. Группа Вейля простой алгебры Ли. Образующие s_i соответствуют простым корням. Числа $m_{i,j}$ определяются по матрице Картана, если $a_{i,j} a_{j,i} = 0$, то $m_{i,j} = 2$, если $a_{i,j} a_{j,i} = 1$, то $m_{i,j} = 3$, если $a_{i,j} a_{j,i} = 2$, то $m_{i,j} = 4$, если $a_{i,j} a_{j,i} = 3$, то $m_{i,j} = 6$.

Пример 4. Диэдральная группа Dih_n — группа симметрий правильного n-угольника. Порождается двумя отражениям s_1, s_2 с соотношением $(s_1 s_2)^n = e$.

Любой элемент $w \in W$ может быть представлен в виде произведения простых отражений $w = s_{i_1} \dots s_{i_k}$. Минимальное k называется *длиной* элемента w и обозначается $l(w)$. Разложение w в произведение $l(w)$ простых отражений называется *приведенным.*

У группы W есть знаковое представление, которое переводит все простые отражения s_i в -1. Из этого следует, что $l(w_1 w_2) \equiv l(w_1) + l(w_2) \bmod 2$.

Теорема 1 (Мацумото, [1, Th. 3.3.1])**.** *а) Любое разложение $w = s_{i_1} \dots s_{i_k}$ может быть приведено к приведенному в виду при помощи соотношений кос* (2)*, а также* сокращений *выражений $s_i^2 = e$.*
б) Любое приведенное разложение w может быть приведено к другому приведенному разложению только при помощи соотношений кос.

Пример 5. В примере $W = \mathfrak{S}_n$ для любой перестановки w длина $l(w)$ равно числу инверсий (беспорядков), т.е. числу пар $i < j$ таких, что $w(i) > w(j)$.

В случае произвольной группы Вейля $l(w)$ равно числу положительных корней $\alpha \in \Delta_+$ таких, что $w(\alpha) \in \Delta_-$.

Обобщить предыдущее описание можно следующим образом. Пусть $T = \{s_{i_1} \cdots s_{i_k} s_i s_{i_k} \cdots s_1\}$ — множество всех элементов сопряженных простым отражениям. Эти элементы мы будет называть просто отражениями.

Теорема 2 (Сильное свойство обмена, [1, Th. 1.4.3])**.** *Пусть $w = s_{i_1} \dots s_{i_k}$, $t \in T$ и $l(tw) < l(w)$. Тогда существует $1 \leq l \leq k$ такое, что*

$$t = s_{i_1} \dots s_{i_{l-1}} s_{i_l} s_{i_{l-1}} \dots s_{i_1}, \quad \textit{что равносильно} \quad tw = s_{i_1} \dots \widehat{s_{i_l}} \dots s_{i_k}$$

В частности, если разложение $w = s_{i_1} \dots s_{i_k}$ является приведенным, то мы построили k отражений $t_1, \dots, t_k$, где $t_l = s_{i_1} \dots s_{i_{l-1}} s_{i_l} s_{i_{l-1}} \dots s_{i_1}$. Из приведенности разложения следует, что $t_1, \dots, t_k$ попарно различны. Это множестве отражений не зависит от выбора приведенного разложения, так как по теореме характеризуется свойством — умножения на них слева уменьшает длину w.

Если разложение не приведенное, то среди $t_1, \dots, t_k$ построенных таким образом будут одинаковые, например $t_l = t_p$. Из этого следует, что $w = s_{i_1} \dots \widehat{s_{i_l}} \dots \widehat{s_{i_l}} \dots s_{i_k}$. Рассуждая далее таким же образом, получаем, что приведенное разложение является подсловом любого разложения w (так называемое свойство удаления).

Определим теперь порядок Брюа. Будем писать, что $u \to w$, если существует $t \in T$ такой, что $u = tw$ и $l(u) < l(w)$. Определим *порядок Брюа* $u \leq w$ если существует последовательность $u = u_0 \to u_1 \to \dots \to u_k = w$.

Теорема 3. *Пусть $w = s_{i_1} \dots s_{i_k}$ приведенное разложение w. Тогда $u \leq w$ если и только если существуют $1 \leq j_1 < \dots < j_l \leq k$ такие, что $u = s_{i_{j_1}} \dots s_{i_{j_l}}$ приведенное разложение u.*

Заметим, что эта теорема верна для любого приведенного разложения w. В одну сторону теорема сразу следует из сильного свойства обмена. В другую сторону нужно еще применить свойство удаления.

Пример 6. Пусть $W = \mathrm{Dih}_n$. Произвольный элемент $w \in W$ имеет вид $\underbrace{s_j s_i s_j \cdots}_{l}$, при $l \leq n$. Тогда элементы меньшие его в порядке Брюа, имеют вид $\underbrace{s_2 s_1 s_2 \cdots}_{l'}$ или $\underbrace{s_1 s_2 s_1 \cdots}_{l'}$, при $l' < l$

2 Алгебра Гекке

Источником может быть [5, Ch. 7], [2], [3].

Алгеброй Гекке $\mathrm{H}(W)$ построенной по группе Кокстера W называется алгебра с образующими H_i и соотношениями

$$H_i^2 = (v^{-1} - v)H_i + 1 \tag{3}$$

и соотношением кос. Параметр v можно воспринимать как комплексное число, а можно и как формальный параметр, тогда алгебра Гекке есть алгебра над $Z[v, v^{-1}]$. Квадратичное соотношение на H_i разлагается на множители $(H_i + v)(H_i - v^{-1}) = 0$.

Замечание 7. Часто образующие перескалируют $T_i = v^{-1}H_i$, $q = v^{-2}$ так, что соотношения имеют вид $T_i^2 - (q-1)T_i + q = 0$.

Для любого $w \in W$ можно определить H_w как $H_{i_1} \dots H_{i_k}$, где $w = s_{i_1} \dots s_{i_k}$ приведенное разложение w. По теореме Мацумото это определение корректно, т.е. H_w не зависит от выбора приведенного разложения.

Теорема 4. *Элементы H_w при $w \in W$ свободно порождают $H(W)$ как $\mathbb{Z}[v, v^{-1}]$ модуль.*

Доказательство этой теоремы (в несколько большей общности) можно посмотреть в [5, Sec. 7.1–7.3]. Из этой теоремы следует, что соотношения группы кос могут быть записаны в виде

$$H_{ww'} = H_w H_{w'}, \quad \text{если } l(ww') = l(w) + l(w'). \tag{4}$$

Замечание 8. В случае когда W есть группа Вейля простой алгебр Ли и q — степень простого числа алгебра Гекке изоморфна алгебре функций на двойных классах смежности на $B \backslash GL(n, \mathbb{F}_q)/B$ относительно операции свертки. Из этого можно вывести, что H_w образуют базис при общем значении q.

Теорема 5. *Если $|W| < \infty$ и параметр $v \in \mathbb{C}$ общий, то алгебра $H(W)$ изоморфна группой алгебре $\mathbb{C}[W]$.*

Определим *инволюцию Каждана-Люстига* по формуле

$$\overline{v} = v^{-1}, \quad \overline{H_w} = H_{w^{-1}}^{-1}. \tag{5}$$

Надо проверить, что эта инволюция хорошо определена, т.е. все H_w обратимы. Это следует из того, что $H_i^{-1} = H_i - (v^{-1} - v)$. Во вторых, надо проверить, что инволюция является гомоморфизмом, для этого прямо проверяется, что соотношения сохраняются.

Теорема 6. *Найдется базис Каждана-Люстига C_w^- такой, что*

$$a)\ \bar{C_w^-} = C_w^-, \quad b)\ \bar{C_w^-} = H_w + v^{-1}\sum_{u<w}(-1)^{l(wu)}p_{u,w}(v^{-1})H_u, \tag{6}$$

где $p_{w,u}(v^{-1}) \in \mathbb{Z}[v^{-1}]$.

Пример 9. Пусть $W = S_3$. Тогда

$$C_{s_1}^- = H_1 - v^{-1}, \quad C_{s_2}^- = H_2 - v^{-1}, \tag{7}$$

$$C_{s_1s_2}^- = C_1^-C_2^- = H_{s_1s_2} - v^{-1}H_1 - v^{-1}H_2 + v^{-2}, \tag{8}$$

$$C_{s_1s_2s_1}^- = C_1^-C_2^-C_1^- - C_1^-. \tag{9}$$

Замечание 10. Аналогично можно ввести элементы C_w^+ с условиями

$$\text{a) } \bar{C_w^+} = C_w^+, \quad \text{b) } \bar{C_w^+} = H_w + v\sum_{u<w}p_{u,w}(v^)H_u, \tag{10}$$

где $p_{w,u}(v) \in \mathbb{Z}[v^{-1}]$. Они перегоняются в C_w^- при помощи автоморфизма $H_w \mapsto (-1)^{l(w)}H_w$, $v \mapsto v^{-1}$.

Доказательство. Для простоты в доказательстве будем просто писать $C_w = C_w^-$, т.е. не будем писать верхний индекс.

Единственность. Если предположить, что есть два таких базиса C_w и C'_w, то они должны быть связаны треугольной заменой $C'_w = C_w + v^{-1}\sum_{u<w}\alpha_u(v^{-1})C_u$. Применяя инволюцию Каждана-Люстига получаем, что $C'_w = C_w + v\sum_{u<w}\alpha_u(v)C_u$. Из этого следует, что все $\alpha_u = 0$, то есть $C_w = C'_w$.

Существование. Заметим, что для любого простого отражения s_i и $u \in W$ верно $l(s_iu) = l(u) \pm 1$. В алгебре Гекке,

$$H_iH_u = H_{s_iu}, \ \text{ если } \ l(s_iu) = l(u) + 1 \tag{11}$$

$$H_iH_u = (v^{-1} - v)H_u + H_{s_iu}, \ \text{ если } \ (s_iu) = l(u) - 1 \tag{12}$$

Построение будем вести по индукции по $l(w)$. В качестве базы мы знаем C_e и C_{s_i}. Предположим теперь, что C_w определены для всех $w \in W$ таких, что $l(w) < l(w')$, в качестве индукционного перехода определелим $C_{w'}$. Существует простое отражение s_i такой, что $w' = s_i w$, $l(w) = l(w') - 1$. Тогда

$$\begin{gathered} C_{s_i} C_w = (H_i - v^{-1}) C_w = H_{w'} + v^{-1} \sum_{u<w} (-1)^{l(wu)} p_{u,w}(v^{-1}) H_i H_u - v^{-1} C_w = \\ = H'_w - v^{-1} C_w + v^{-1} \sum_{u<w,\, u<s_i u} (-1)^{l(wu)} p_{u,w}(v^{-1}) H_{s_i u} + v^{-1} \sum_{s_i u<u<w} (-1)^{l(wu)} p_{u,w}(v^{-1}) H_i H_u \end{gathered} \tag{13}$$

Мы хотим связать это с $C_{w'}$. Далее вычислениях будем обозначать через $\Big(\dots\Big)$ сумму членов вида $v^{-l} H_u$, где $l > 0$, $u < w$. Имеем

$$\begin{aligned} C_{s_i} C_w = H_{w'} + \Big(\dots\Big) + v^{-1} \sum_{s_i u<u<w} (-1)^{l(wu)} p_{u,w}(v^{-1}) \big((v^{-1} - v) H_u + H_{s_i u}\big) = \\ = H_{w'} + \Big(\dots\Big) - \sum_{s_i u<u<w} (-1)^{l(wu)} p_{u,w}(v^{-1}) H_u = \\ = H_{w'} + \Big(\dots\Big) - \sum_{s_i u<u<w} (-1)^{l(wu)} p_{u,w}(0) C_u \end{aligned} \tag{14}$$

Таким образом, если мы определим

$$C_{w'} = C_{s_i} C_w + \sum_{s_i u<u<w} (-1)^{l(wu)} p_{u,w}(0) C_u, \tag{15}$$

то $C_{w'}$ будет удовлетворять свойствам (6). □

Замечание 11. Если внимательно посмотреть доказательство, то из него следует, что $\deg p_{u,w}(v^{-1}) \leq l(w) - l(u) - 1$, а если еще внимательнее, то следует, что степень ровно такая и старший коэффициент равен 1. Кроме того, из доказательства следует, что

$$P_{u,w} = v^{l(w)-l(u)-1} p_{u,w}(v^{-1}) \tag{16}$$

является на самом деле полиномом от $q = v^{-2}$. Полиномы $P_{u,w}(q)$, $u \leq w$ называются *полиномами Каждана-Люстига.*

Замечание 12 (Положительность)**.** Полиномы $p_{u,w}(v^{-1})$ удовлетворяют свойству положительности, их коэффициенты лежат в $\mathbb{Z}_{\geq 0}$. Кроме того, если $C^-_w C^-_{w'} = \sum p^u_{w,w'}(v) C_u$, то коэффициенты $p^u_{w,w'}(v)$ также лежать в $\mathbb{Z}_{\geq 0}$. Для случая W равной группы Вейля это следует из геометрической или теоретико-представленческой интерпретации $p_{u,w}$, в полной общености это было доказано относительно недавно Элаисом и Вильямсоном.

Предложение 7. *Если $l(s_i w) < l(w)$, то $C^+_{s_i} C_w = 0$.*

Доказательство. Доказательство осуществляется индукцией оп $l(w)$. База: $w = s_i$. Переход следует из формулы (15). □

Пусть теперь $|W| < \infty$. Тогда в группе W есть самый длинный элемент, обычно его обозначают w_0. Тогда для любого простого отражения s_i верно, что $C^+_{s_i} C_{w_0} = 0$. В терминах H_i это означает, что $H_i C_{w_0} = -v^{-1} C_{w_0}$. Таким образом вектор C^-_w порождает одномерное представление алгебры Гекке $H(W)$, это представления является аналогом знакового представления группы W (совпадает со знаковым при $v = 1$).

Предложение 8. *Пусть $|W| < \infty$. Тогда*

$$C^-_{w_0} = \sum_{u \in W} (-v)^{-l(w_0 u)} H_u. \tag{17}$$

Доказательство. Легко видеть, что условие $H_i \sum_{u\in W} a_u H_u = -v^{-1} \sum_{u \in W} a_u H_u$ равносильно тому, что $a_{s_i u} = -v^{-1} a_u$, при $l(s_i u) = l(u) - 1$. □

С точки зрения теоремы 5 элемент $C^-_{w_0}$ пропорционален идемпотенту отвечающему аналогу знакового представления. Аналогично, $C^+_{w_0} = \sum_{u \in W} v^{l(w_0 u)} H_u$ пропорционален идемпотенту отвечающему аналогу тривиального представления.

Пример 13. Пусть $W = \mathrm{Dih}_n$. Тогда для любого w верно $C^-_w = \sum_{u \leq w} (-v)^{-l(w_0 u)} H_u$. Это можно доказать по индукции используя формулу (15). Другой способ — это заметить, что любой элемент $w = \underbrace{s_j s_i s_j \cdots}_{l}$ является самым длинным элементом в группе Dih_l поэтому C^-_w задается формулой (17).

В терминах многочленов Каждана-Люстига можно сказать, что $P_{u,w}(q) = 1$. Заметим, что этот пример включает в себя группы Вейля простых алгебр Ли ранга 2, а именно: группа Вейля A_2 равна Dih_3, группа Вейля B_2 равна Dih_4, группа Вейля G_2 равна Dih_6, группа Вейля $A^{(1)}_1$ равна Dih_∞.

Конечно, не следует думать, что все многочлены Каждана=Люстига такие простые, есть даже теорема, что любой многочлен с целочисленным неотрицательным коэффициентам и единичным свободным членом может быть реализован как многочлен Каждана-Люстига [4].

3 Связь с категорией $\mathcal{O}$

Пусть $\mathfrak{g}$ — простая алгебра Ли, $\mathfrak{h}$ — ее картановская подалгебра, W — группа Вейля $\mathfrak{g}$. Для любого $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ можно рассмотреть следующие представления:

- L_λ — неприводимый модуль со старшим весом λ.
- M_λ — модуль Верма со старшим весом λ.
- P_λ — проективная накрывающая модуля L_λ в категории $\mathcal{O}$.

Напомним, что помимо естественного действия группы W на $\mathfrak{h}^*$ есть еще *сдвинутое действие*: $w \cdot \lambda = w(\lambda + \rho) - \rho$. Из теоремы Хариш-Чандры выводится, что категория $\mathcal{O}$ разбивается на блоки $\mathcal{O}_{[\lambda]}$ порожденные $L_{w\cdot\lambda}$, $w \in W$. Между разными блоками нет ненулевых гомоморфизмов, поэтому можно изучать блоки по отдельности. Модули M_λ, P_λ лежат в блоке $\mathcal{O}_{[\lambda]}$.

Гипотеза 9 (Каждан-Люстиг)**.** *Пусть λ — целочисленный доминатный вес. Тогда справедливы следующие соотношения между характерами*

$$\mathrm{ch} L_{ww_0\cdot\lambda} = \sum_{u \leq w} (-1)^{l(wu)} P_{u,w}(1) \mathrm{ch} M_{uw_0\cdot\lambda} \tag{18}$$

$$\mathrm{ch} M_{w\cdot\lambda} = \sum_{u \geq w} P_{w,u}(1) \mathrm{ch} L_{u\cdot\lambda} \tag{19}$$

$$\mathrm{ch} P_{w\cdot\lambda} = \sum_{u \leq w} P_{u,w}(1) \mathrm{ch} M_{u\cdot\lambda} \tag{20}$$

Эта гипотеза была доказана Бейлинсоном-Бернштейном, Брылински-Кашиварой и еше Элаисом-Вильямсоном.

Замечание 14. Используя функторы трансляции $\mathcal{O}_{[\lambda]} \to \mathcal{O}_{[\mu]}$ можно увидеть, что достаточно доказать гипотезу 9 только для одного λ, например для $\lambda = 0$.

Замечание 15. Формулы (19) и (20) эквивалентны по БГГ взаимности. Формулы (18) и (19) на самом деле эквивалентны всилу соотношения верного при $|W| < \infty$

$$\sum_{w,\, u_1 \leq u \leq u_2} (-1)^{l(w_1 w)} P_{u_1,u_2}(q) P_{w_0 u_2, w_0 u}(q) = \delta_{u_1,u_2}. \tag{21}$$

Доказательство написано в [2, Th. 3.1] или [5, Sec. 7.13], оно использует, так называемые, R полиномы введенные по формуле $(H_w^{-1})^{-1} = \sum_{u<w} (-)^{l(w)-l(u)} R_{u,w}(q) H_u$.

Пример 16. В случае $w = e$ формулы (18), (19) приводят к равенству $L_{w_0 \cdot 0} = M_{w_0 \cdot 0}$ — модуль Верма соответствующий самому маленькому старшему весу в блоке является неприводимым.

В случае $w = w_0$ формула (18) приводит к соотношению

$$\mathrm{ch} L_\lambda = \sum_{u \in W} (-1)^{l(u)} \mathrm{ch} M_{u \cdot \lambda}, \tag{22}$$

где мы использовали, что $P_{u,w_0} = 1$, $\forall u \in W$, по формуле (17). Мы получили формулу Вейля для характера.

Замечание 17. Формулу (18) можно еще переформулировать как существование отображения абелевых групп:

$$H(W)\Big|_{v=1} \to K(\mathcal{O}_\lambda), \qquad H_w \mapsto M_{w_0 w \cdot \lambda}, \;\; C_w^- \mapsto L_{w_0 w \cdot \lambda}. \tag{23}$$

Аналогично, формула (20) означает существование отображения абелевых групп:

$$H(W)\Big|_{v=1} \to K(\mathcal{O}_\lambda), \qquad H_w \mapsto M_{w \cdot \lambda}, \;\; C_w^+ \mapsto P_{w \cdot \lambda}. \tag{24}$$

Список литературы

[1] A. Bjorner, F. Brenti, *Combinatorics of Coxeter Groups*, Graduate Texts in Mathematics, 231, Springer (2005).

[2] D. Kazhdan, G. Lusztig. *Representations of Coxeter Groups and Hecke Algebras* Inventiones Mathematicae, **53 (2)** (1979), 165—184.

[3] I. Losev *Kazhdan-Lusztig basis and categories* $\mathcal{O}$лекция доступна по ссылке [https://web.northeastern.edu/iloseu/RT/RT10.pdf]

[4] P. Polo *Construction of arbitrary Kazhdan-Lusztig polynomials in symmetric groups* , Representation Theory, **3 (4)** (1999) 90—104.

[5] J.E. Humphreys, *Reflection Groups and Coxeter Groups*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 29, Cambridge Univ. Press, Cambridge, (1990).