Неразложимые модули Зёргеля и категория $\mathcal{O}$

1 Крулль-Шмидт

1.1 Категория $\mathcal{O}$

Теорема 1. *В блоке категории $\mathcal{O}_{[0]}$ любой объект разлагается в прямую сумму неразложимых причем единственным образом с точностью до перестановки слагаемых.*

Доказательство ниже работает для любого блока $\mathcal{O}_{[\lambda]}$ в категории $\mathcal{O}$. Из этого в частности следует, это свойство для всей категории $\mathcal{O}$.

Доказательство. Любой морфизм $\varphi\colon M \to N$ в блоке $\mathcal{O}_{[0]}$ задается своим действием на "важном"подрострастве веса $\oplus_{w\in W} M[w\cdot 0]$. Поэтому пространство морфизмов конечномерно, также из этого следует нетеровость и артиновость любого объекта в категории.

Пуст MЁ— неразложимый модуль в $\mathcal{O}_{[0]}$, обозначим через A алгебр его эндоморфизом. Эта алгебра имеет свойства

Лемма 2. *Любой элемент $x \in A$ является или нильпотентным или обратимым*

Доказательство. Рассмотрим подмодули $\operatorname{Ker} x^k$. Это возрастающая последовательность подмодулей, которая должна стабилизироватся всилу нетеровости. Аналогично подмодули $\operatorname{Im} x^k$ стабилизируются. После того как они стабилизиуются $\operatorname{Ker} x^k \cap \operatorname{Im} x^k = 0$. Значит $M = \operatorname{Ker} x^k \oplus \operatorname{Im} x^k$. Отсюда и из неразложимости M следует утверждение леммы. □

Лемма 3. *Если $x \in A$ нильпотентный, то для любого $y \in A$ элементы xy и yx тоже нильпотентные.*

Доказательство. Образ xy не совпадает M, а ядро yx ненулевое, поэтому они не могут быть обратимыми. □

Лемма 4. *Если $x, y \in A$ оба нильпотентные то $x+y$ тоже нильпотентный*

Доказательство. От противного, пусть $x+y=a$ обратим. Тогда $xa^{-1} = 1 - ya^{-1}$, но ya^{-1} нильпотентный, а значит $1 - ya^{-1}$ обратим. □

Можно сказать что доказано, что все нильпотентные элементы образуют (двусторонний) идеал, этот идеал в данном случае является радикалом Джекобсона. Фактор по нему является конечномерной алгеброй с делением, так как поле $\mathbb{C}$ алгебраически замкнуто, то фактор просто $\mathbb{C}$. В частности мы получили, что алгебра A называется локальной.

Теперь если есть произвольный модуль $M \in \mathcal{O}_\chi$, то его можно разложить в конечную прямую сумму неразложимых (это можно выводит как из нетеровости так и из артиновости M). Теперь пусть есть два разложения $M = \oplus_{i=1}^r M_i = \oplus_{j=1}^s N_j$, тогда обозначим $\phi_{ji}\colon M_i \to N_j$ и $\psi_{ij}\colon N_j \to M_i$ естественную композицию вложения и проекции. Тогда $1_{M_i} = \sum \psi_{ij}\phi_{ji}$. Значит элементы $\psi_{ij}\phi_{ji} \in \mathrm{End}(M_i)$ не могут все быть нильпотентными и кто-то из них является изоморфизмом. При этом если $\psi_{ij}\phi_{ji}$ изоморфизм, то композиция в обратном порядке $\phi_{ji}\psi_{ij}$ не может быть нильпотнтной, значит тоже является изоморфизмом. Значит для каждого M_i существует j такое, что $M_i \simeq N_j$. Дальше их можно по одному отщеплять пользуюсь разложением вида

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -CA^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -A^{-1}B \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D - CA^{-1}D \end{pmatrix},$$

где A, B, C, D какие-то операторы, и A обратим. □

1.2 Общие контекст

Определение 1. Аддитивная категория обладает *свойством Крулля-Шмидта* если любой объект разлагается в прямую сумму объектов имеющих локальную алгебру эндоморфизмов.

Аккуратное определение аддитивной категории можно посмотреть в учебнике, грубо говоря, это означает, что морфизмы являются абелевыми группами, есть нулевой объект и есть прямые суммы объектов.

Теорема 5. *В категориях со свойством Крулля-Шмидта любой объект разлагается в прямую сумму неразложимых, причем это разложение единственно с точностью до перестановки слагаемых.*

Эта теорема доказывается приблизительно также как и теорема 1. В примерах ниже можно провести доказательство непосредственно.

Пример 1. Категория конечно порожденых модулей над конечномерной алгеброй A обладает свойством Крулля-Шмидта.

Пример 2. Абелева категория являющаяся одновременно нетеровой и артиновой обладает свойством Крулля-Шмидта.

Пример 2 является обобщением примера 1

Пример 3. Категория градуированных конечно порожденых модулей над алгеброй многочленов от конечного числа образующих обладает свойством Крулля-Шмидта. В качестве морфизмов берутся морфизмы модулей степени 0.

Пример 4. [2] Категория когеретных пучков на проективном многообразии обладает свойством Крулля-Шмидта.

Пример 4 является обобщением примера 3. Теперь приведем пару примеров категорий не обладающих свойством Крулля-Шмидта.

Пример 5. Рассмотрим алгебру A порожденная двумя образующими x, ∂ с соотношением $x\partial - \partial x = 1$. Эта алгебра называется алгеброй Вейля. Рассмотрим ее как левый модуль над собой. В ней есть два свободных подмодуля Ax и $A\partial$, то, что модули свободные следут из того, что в алгебре A нет делителей нуля. Обозначим через N пересечение $Ax \cap A\partial$. Так как сумма модулей $Ax + A\partial = A$ то мы имеем короткую точную последовательность.

$$0 \to N \to Ax \oplus A\partial \to A \to 0$$

Поскольку A свободный модуль над собой, то эта последовательность является расщепимой, т.е. есть изоморфизм $A \oplus A \simeq A \oplus N$.

С другой стороны, модуль N не является свободным. Это следует из того, что на алгебре A есть фильтрация по степени, и старшая степень произведения равна сумме степеней. В модуле N нет никаких элементов степени $0, 1, 2$, но есть два линейно независимых элемента степени 3:

$$x^2\partial = x\partial x - x \in N, \quad \partial^2 x = \partial x \partial + \partial \in N.$$

При этом модуль A является неразложимым (можно увидеть например сравнением размеров, что подмодули натянутые на любые два элемента Af и Ag пересекаются). Поэтому, изоморфизм $A \oplus A \simeq A \oplus N$ противоречит однозначности разложения в сумму неразложимых. То есть, категория модулей на алгеброй Вейля не обладает свойством Крулля-Шмидта.

Модуль N является не свободным, но является стабильно свободным. Можно доказать, что такой модуль существует для любой алгебры вида $U(\mathfrak{g})$, где $\mathfrak{g}$ — произвольная неабелева алгебра Ли, см. [3].

Пример 6. Пусть $A = \mathbb{C}[x, y]/(y^2 - x^3 - px - q)$ — алгебра функций на эллиптической кривой $\mathcal{E}$ без одной точки ∞. Пусть эта точка это ноль группового закона, p_1, p_2 две точки

$\mathcal{E}$ такие, что $p_1 + p_2 = 0$. Тогда есть короткая точная последовательность

$$0 \to A(-p_1 - p_2) \to A(-p_1) \oplus A(-p_1) \to A \to 0,$$

где $A(-p_1)$ — это функции на $\mathcal{E}$ зануляющиеся в точке p_1 и регулярные на $\mathcal{E} - \infty$ и аналогично остальные обозначения.

Модуль $A(-p_1)$ не является свободным, поскольку на $\mathcal{E} - \infty$ не функции имеющей простой ноль в точке p_i и более нигда. Аналогично модуль $A(-p_1)$ не является свободным. С другой стороны, модуль $A(-p_1 - p_2)$ уже свободен, он порождается функцией имеющей простой ноль в точках p_1, p_2 и более нигде.

Отметим теперь, что эта точная последовательность расщепима, так как справа стоит свободный модуль. Таким образом есть изоморфизм A модулей $A \oplus A \simeq A(-p_1) \oplus A(-p_1)$, который тоже противоречит единственности разложения в сумму неразложимых.

Мы сейчас строили контрпример к единственности разложения работая в категории A модулей, но все эти модули были $\mathbb{C}[x, y]$-модулями. Таким образом свойство Крулля-Шмидта не выполняется в категории $\mathbb{C}[x, y]$ неградуированных модулей.

2 Модули и бимодули Зёргеля

2.1 Бимодули

Пусть (W, S) — группа Кокстера. Пусть V — ее точное представление на котором все отражения действуют отражениями. Пусть $R = \mathbb{C}[V]$. Будем считать, что $V^* \subset R$ имеет градуировку 2. Через $M(k)$ будем обозначать модуль M в котором градуировка *уменьшена* на k.

Определение 2. Для любой последовательности $\underline{w} = (s_{i_1}, \dots, s_{i_k})$ обозначим через $BS_{\underline{w}}$ *R бимодуль Ботта-Самельсона* равный:

$$BS_{\underline{w}} = R \otimes_{R^{s_{i_1}}} \otimes_{R^{s_{i_2}}} \cdots \otimes_{R^{s_{i_k}}} R(k). \tag{1}$$

Категория бимодулей Зёргеля — это полная подкатегория в катеории градуированных R бимодулей, объекты которых есть прямые суммы (возможно сдвинутых) прямых слагаемых бимодулей Ботта-Самельсона. Морфизмы — морфизмы R бимодулей имеющие степень 0. Будем обозначать эту категорию $\mathcal{SB}im$.

Напомним, что R бимодули это тоже самое $R \otimes R^{op}$ модули — пространства снабженные одновременно левым и правым действием R так, что эти действия коммутируют. Как было показано выше, в категории градуированных $R \otimes R^{op}$ модулей есть свойство Крулля-Шмидта: любой модуль однозначно разлагается в сумму неразложимых.

Определение бимодулей Ботта-Самельсона можно еще переписать как

$$BS_{\underline{w}} = B_{s_{i_1}} \otimes_R \cdots \otimes_R B_{s_{i_k}}. \tag{2}$$

Замечание 7. Легко видеть, что бимодуль Ботта-Самельсона $BS_{\underline{w}}$ как левый R-модуль является свободным модулем ранга 2^k. Аналогично как правый R-модуль. Левое и правое действие инвариантов R^W на $BS_{\underline{w}}$ совпадает, из этого следует, что носитель $BS_{\underline{w}}$ сосредоточен на объединении диагоналей $h_w = \{(x, wx)\} \subset V \oplus V$, где $w \in W$.

Через $K_0(\mathcal{SB}im)$ обозначим расщепимую группу Гротендика категории $\mathcal{SB}im$, она порождена классами всех объектов $[M]$ фактор по соотношениям $[M_1 \oplus M_2] - [M_1] - [M_2]$. Не следует путать с нерасщепимой группой Гротендика (иногда обозначаемой G_0), где факторизация берется по всем точным тройкам.

Через $\mathrm{H}(W)$ будем обозначать алгебру Гекке построенную по W.

Теорема 6 (Зёргель)**.** *Существует изоморфизм $\mathbb{Z}[v]$ алгебр $\mathrm{H}(W)$ и $K_0(\mathcal{SB}im)$, который переводит $v + H_{s_i}$ в $[B_{s_i}]$, и умножение на v в сдвиг градуировки на $K_0(\mathcal{SB}im)$.*

В этой теореме есть (относительно) легкая и сложная часть. Легкая — это проверить, что данное отображение является гомоморфизмом, для этого надо проверить, что $[B_{s_i}]$ удовлетворяют соотношениям на $v + H_{s_i}$. Это квадратичное соотношение

$$B_{s_i} \otimes B_{s_i} \simeq B_{s_i}(1) \oplus B_{s_i}(-1)$$

и соотношения происходящие из соотношений группы кос. Например в случае простой связи между вершинам i, j должно выполнятся соотношение

$$B_{s_i} \otimes B_{s_j} \otimes B_{s_i} \oplus B_{s_j} \simeq B_{s_j} \otimes B_{s_i} \otimes B_{s_j} \oplus B_{s_i}.$$

Эту проверку достаточно проводить для группы диэдра Dih_n, это в общем явное, конкретное вычисление.

Сложная часть — это доказать, что это отображение является изоморфизмом.

2.2 Модули Зёргеля

Определение 3. Модулем Ботта-Самельсона называется $BSmod_{\underline{w}} = BS_{\underline{w}} \otimes_R \mathbb{C}$.

Категория модулей Зёргеля — это полная подкатегория в катеории градуированных R модулей, объекты которых есть прямые суммы (возможно сдвинутых) прямых слагаемых модулей Ботта-Самельсона. Морфизмы — морфизмы R модулей имеющие степень 0. Будем обозначать эту категорию SMod.

Замечание 8. Как следует из замечания 7 любой модуль Зёргеля является конечномерным векторным пространством. Более того, любой модуль Зёргеля является модулем над фактором $S(\mathfrak{h})/S(\mathfrak{h})^W_+$, который мы будем обозначать C (от слова коинварианты).

Теорема 7. *Для любых двух бимодулей Зёргеля B_1, B_2 каноническое отображение*

$$\mathsf{Hom}_{R\otimes R}(B_1, B_2) \otimes_R \mathbb{C} \to \mathsf{Hom}_R(B_1 \otimes_R \mathbb{R}, B_2 \otimes_R \mathbb{C})$$

является изоморфизмом.

Следствие 8. *а) Если бимодуль Зёргеля B неразложим если и только если, модуль Зёргеля $B \otimes_R \mathbb{C}$ тоже неразложим.б) Бимодули Зёргеля B_1, B_2 изоморфны если и только если, модули $B_1 \otimes_R \mathbb{C}$ и $B_2 \otimes_R \mathbb{C}$ изоморфны.*

Доказательство. а) Неразложимость модуля равносильна отсутствию в его алгебре эндоморфизмов нетривиальных идемпотентов. По теореме, алгебры эндоморфизмов у B и $B \otimes_R \mathbb{C}$ совпадают. б) Очевидно. □

Замечание 9. По теореме 6 категория бимодулей Зёргеля $\mathcal{SB}im$) есть категорификация алгебры Гекке $H(W)$. О категории модулей Зёргеля SMod) следует думать как о категорификации регулярного модуля $H(w)$.

2.3 Неградуированные модули Зёргеля

Определение 4. Определим категорию $\mathrm{SMod}_{\mathrm{ungr}}$ как подкатегорию в категории неградуированных C модулей объекты которой это модули SMod, но морфизмы теперь не обязаны сохранять градуировку.

Лемма 9. *Пусть A конечномерная $\mathbb{Z}$ градуированная алгебра над $\mathbb{C}$, M — конечномернй градуированный A-модуль. Тогда M является неразложимым как градуированный модуль если только если M неразложим как A модуль.*

Доказательство. Утверждение нетривиально только в одну сторону, будем доказывать от противного — предположим, что M неразложим как градуированный модуль, но разложим как A модуль. Обозначим через E алгебру эндморфизмов M, $E = \mathsf{End}_A(M)$, она является градуированной $E = \oplus_{d\in\mathbb{Z}} E_d$. Так как как M является неразложимым как градуированный модуль, то алгебра E_0 является локальной, в ней есть идеал $\mathrm{rad}\, E_0$ состоящий из нильпотентных элементов фактор по которому является конечномерной алгеброй с делением над $\mathbb{C}$, т.е. просто $\mathbb{C}$.

Обозначим через $\mathrm{rad}(E)$ радикал алгебры E. Фактор $E/\,\mathrm{rad}(E)$ будет полупростой алгеброй. Поскольку поле $\mathbb{C}$ является алгебраически замкнутым, фактор $E/\,\mathrm{rad}(E)$ будем суммой матричных алгебр. Так как $\mathbb{C}^*$ действует на E автоморфизмами, радикал $\mathrm{rad}(E)$

является градуированным идеал. Значит фактор по радикалу $E/\operatorname{rad}(E)$ будет градуированной алгеброй.

Более того, любое действие $\mathbb{C}^*$ автоморфизмами матричной алгебры является внутренним, отсюда следует, что неподвижная часть $(E/\operatorname{rad}(E))_0$ также будет суммой матричных алгебр, причем того же суммарного ранга.

С другой стороны, так модуль M является разложимым, то существуют два идемпотента $x, y \in E$, такие, что $x + y = 1$. Никакая их линейная комбинация не лежит в радикале $\operatorname{rad}(E)$, поэтому фактор $E/\operatorname{rad}(E)$ является хотя бы двумерным, значит и его нулевая часть $(E/\operatorname{rad}(E))_0$ хотя бы двумерна. Значит, найдутся два идемпотента $x_0, y_0 \in (E/\operatorname{rad}(E))_0$, такие, что $x_0 + y_0 = 1$. Поднимем их произвольным образом до элементов $\tilde{x}_0, \tilde{y}_0 \in E_0$, тогда какая-то их линейная комбинция $\alpha\tilde{x}_0 + \beta\tilde{y}_0$ будет нильпотетной, что противоречит свойствам x_0, y_0. Мы пришли к противоречию. $\square$

Это предложение означает что категория $\mathrm{SMod}_{\mathrm{ungr}}$ состоит из прямых сумм прямых слагаемых модулей Ботта-Самельсона $BSmod_{\underline{w}}$.

2.4 Функтор Зёргеля

Будет теперь считать, что W — группа Вейля простой алгебры Ли $\mathfrak{g}$, $V = \mathfrak{h}^*$, $R = \mathbb{C}[\mathfrak{h}^*] = S(\mathfrak{h})$. В этом случае мы сможем связать информацию о (би) модулях Зёргеля и категории $\mathcal{O}$ при помощи функтора Зёргеля. Напоминим, что этот функтор $\mathbb{V}\colon \mathcal{O}_{[0]} \to C-\mathrm{mod}$ определен как $M \mapsto \mathsf{Hom}(P_{\min}, M)$. Напомним некоторые свойства.

Предложение 10. *а)* $\mathbb{V}(P_{\min}) = C$. *б)* $\mathbb{V}(M_{w\cdot 0}) = C$. *в)* $\mathbb{V}(L_{w\cdot 0}) = 0$ *при* $w \neq w_0$, $\mathbb{V}(L_{w_0\cdot 0}) = \mathbb{C}$.

Предложение 11. *а) У функтора* $\mathbb{V}$ *есть правый и левый сопряженный функторы* $\mathbb{V}^*$ *и* $\mathbb{V}^!$. *б)* $\mathbb{V}^*(C) \simeq \mathbb{V}^!(C) \simeq P_{\min}$. *в)* $\mathbb{V}^!(\mathbb{C}) = M_0$. *г)* $\mathbb{V}^*(\mathbb{C}) = M_0^\vee$.

Из этих предложений следует, что для любого C модуля N есть изоморфизм $\mathbb{V}\mathbb{V}^! N \simeq N$. В самом деле, возьмем правую резольвенту $C^{\oplus n} \to C^{\oplus m} \to N \to 0$, функтор $\mathbb{V}\mathbb{V}^!$ сохраняет ее точность и переводит отображение $C^{\oplus n} \to C^{\oplus m}$ в себя, значит переводит N в себя. Аналогично $\mathbb{V}\mathbb{V}^* N \simeq N$, то есть $\mathbb{V}$ является существенно сюръективным на объектах.

Мы собирамся доказать следующую теорему.

Теорема 12. *Функтор* $\mathbb{V}$ *задает эквивалентность между подкатегорией* $\mathcal{O}_{[0]} - proj$ *и категорией* $\mathrm{SMod}_{\mathrm{ungr}}$.

Доказательство. Напомним, что проективные модули для функтора Зёргеля выделены следующим свойством

Теорема 13. *Для любых проективных модулей* P_1, P_2 *функтор Зёргеля осуществляет изоморфизм между* $\mathsf{Hom}_{\mathcal{O}}(P_1, P_2)$ *и* $\mathsf{Hom}_{A-\mathrm{mod}}(P_1, P_2)$.

Следствие 14. *а) Для любого неразложимого проективного $P \in \mathcal{O}_{[0]}$ его образ $\mathbb{V}(P)$ тоже неразложим. б) Если P_1, P_2 — два неизоморфные проективные объекты в $\mathcal{O}_{[0]}$, то их образы $\mathbb{V}(P_1)$ и $\mathbb{V}(P_2)$ также неизоморфны.*

Поэтому нам достаточно доказать, что функтор $\mathbb{V}$ переводит проективные модули в $\mathrm{SMod}_{\mathrm{ungr}}$, и что так получаются все объекты $\mathrm{SMod}_{\mathrm{ungr}}$.

Самый простой проективный это $P_0 = M_0$, по свойствам выше $\mathbb{V}(P_0) = \mathbb{C}$. Напомним еще, что на категории $\mathcal{O}_{[0]}$ действуют еще функторы отражения $\mathcal{P}_i$. Мы доказывали следующие их свойства

Предложение 15. *а) Функтор $\mathcal{P}_i$ переводит проективные модули в проективные. б) Для любого $w \in W$ $[\mathcal{P}_i(M_{w\cdot 0})] = [M_{w\cdot 0}] + [M_{s_i w\cdot 0})]$, где $[M]$ — это класс модуля M в группе Гротендика. в) Функторы отражения переставляются с функторами Зёргеля следующим образом $\mathbb{V}(\mathcal{P}_i M) = R \otimes_{R^{s_i}} \mathbb{V}(M)$.*

Из последнего свойства следует, что для любого $\underline{w} = (s_{i_1}, \dots, s_{i_k})$ верно

$$BSmod_{\underline{w}} = \mathbb{V}(\mathcal{P}_{i_1} \dots \mathcal{P}_{i_k}(P_0))$$

. Так у нас есть изоморфизм алгебр эндоморфизмов, то есть соответствие между прямыми слагаемым в $BSmod_{\underline{w}}$ и прямыми слагаемым в $\mathcal{P}_{i_1} \dots \mathcal{P}_{i_k}(P_0)$. Значит любой неразложимый модуль (а, значит и любой модуль) из $\mathrm{SMod}_{\mathrm{ungr}}$ получается как образ проективного.

Покажем, теперь что образы всех проективных лежат в $\mathrm{SMod}_{\mathrm{ungr}}$. Напомним, что все неразложимые проективные объекты в категории $\mathcal{O}_{[0]}$ имеют вид $P_{w\cdot 0}$, $w \in W$. Зафиксируем приведенное разложение $w = s_{i_1} \cdot \ldots s_{i_k}$, будем обозначать $P_w = \mathcal{P}_{i_1} \dots \mathcal{P}_{i_k}$. Тогда, из свойств функторов отражения следует, что группе Гротендинка

$$[\mathcal{P}_{i_1} \dots \mathcal{P}_{i_k}(P_0)] = [M_{w\cdot 0}] + \sum_{u<w} c_{u,w}[M_{u\cdot 0}].$$

С другой стороны, в группе Гротендинка $\mathcal{O}[0]$ мы имеем $[P_{w\cdot 0}] = [M_{w\cdot 0}] + \sum_{u<w} c'_{u.w}[M_{u\cdot 0}]$. Поэтому,

$$[\mathcal{P}_{i_1} \dots \mathcal{P}_{i_k}(P_0)] = [P_{w\cdot 0}] + \sum_{u<w} c''_{u,w}[P_{u\cdot 0}]. \tag{3}$$

Значит $\mathbb{V}P_{w\cdot 0}$ будем прямым слагаемым в $BSmod_{\underline{w}}$, т.е. лежать в категории $\mathrm{SMod}_{\mathrm{ungr}}$. □

Следствие 16 (Из доказательства)**.** *Неразложимые модули в категории $\mathrm{SMod}_{\mathrm{ungr}}$ занумерованы группой Вейля, и неразложимый модуль $Bmod_w$ — это единственный неразложимый модуль который лежит в модуле $BSmod_{\underline{w}}$, но не лежит в модулях $BSmod_{\underline{u}}$ при $u < w$.*

Доказательство. Это «треугольность» вытекает из аналогичного свойства проективных модулей $\mathcal{P}_{i_1} \dots \mathcal{P}_{i_k}(P_0)$ и $P_{w\cdot 0}$ в категории $\mathcal{O}_{[0]}$, см формулу (3). Заметим, что хотя модуль

Ботта-Самельсона $BSmod_{\underline{w}}$ зависит от выбора приведенного разложения данное своейство от этого выбора не зависит. $\square$

Если вернуться к градуированным модулям, то неразложимые модули в категории SMod будут нумероваться $W \times \mathbb{Z}$, так как есть еще сдвиг градуировки. Отсюда следует, что $\mathrm{rk}_{\mathbb{Z}[v,v^{-1}]}(K_0(\mathcal{SB}im)) = |W|$. Более того, неразложимые бимодули B_w однозначно определяются как прямые слагаемые в $BS_{\underline{w}}$, которых нет в $BS_{\underline{u}}$, при $u < w$. Из этого следует, что алгебра $K_0(\mathcal{SB}im)$ однозначно порождается $[B_{s_i}]$, см формулу (2). Таким образом мы доказали сюръективность в теореме 6.

Замечание 10. В категории C модулей бесконечное число неразложимых объектов. Это можно увидеть уже для случая $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3$, тогда

$$C = \mathbb{C}[x,y,z]/(x+y+z, xy+xz+yz, xyz) = \mathbb{C}[x,y]/(x^2+xy+y^2, xy(x+y))$$

У этой алгебры есть двумерные представления полученные факторизацией по $(x+\alpha y, x^2, xy, y^2)$ для любого $\alpha \in \mathbb{C}$. Эти представления являются неизоморфными и неразложимыми. В частности, мы увидели, что категория $\mathrm{SMod}_{\mathrm{ungr}}$ (в которой конечное число неразложимых) меньше чем категория C модулей.

С другой стороны, из того что функтор $\mathbb{V}$ являетя существенно сюръективным на объектах мы получаем, что и в категории $\mathcal{O}_{[0]}$ бесконечно много неразложимых объектов. Мы и так впрочем, знали, что неразложимых объектов в $\mathcal{O}_{[0]}$ больше чем неразложимых объектов в $\mathcal{O}_{[0]} - proj$, ведь есть еще например модули Верма и неприводимые модули.

2.5 Гипотеза Каждана-Люстига и сильная гипотеза Зёргеля

Результаты прошлого параграфа можно резюмировать в видем таблицы соответствия между $K_0(\mathcal{O}_{[0]})$, $H(w)$ и $K_0(\mathcal{SB}im)$. Поскольку на категории $\mathcal{O}_{[0]}$ градуировки нет, то надо подставить $v = 1$ в алгебре Гекке (т.е. рассмотреть групповую алгебру $\mathbb{C}[W]$) и забыть градуировку в $\mathcal{SB}im$.

$K_0(\mathcal{O}_{[0]})$	$[M_{w\cdot 0}]$	$P_0 = M_0$	$[\mathcal{P}_i(-)]$	$[P_{w\cdot 0}]$
$H_{v=1}[W]$	H_w	1	$(1+H_i)(-)$	C_w^+
$K_0(\mathcal{SB}im)$	комплексы Рукье	$[R]$	$[B_{s_i} \otimes_R (-)]$	$[B_w]$

Объектов отвечающих H_w в категории $\mathcal{SB}im$ буквально нет, но они есть в категории комплексов, это так называемые комплексы Рукье. Последняя колонка является с одной стороны гипотезой Каждана Люстига, с другой стороны сильной теоремой Зёргеля, которая говорит, что при гомоморфизме из теоремы 6 верхний базис Каждана Люстига переходит в неразложимые модули B_w. Таким образом, из сильной теоремы Зёргеля следует гипотеза Каждана-Люстига, можно вывести и наоборот [4].

Список литературы

[1] Пирс *Ассоциативные алгебры*

[2] M. Atiyah, *On the Krull-Schmidt theorem with application to sheaves*

[3] J.T. Stafford *Stably free, projective right ideals*

[4] W. Soergel *The combinatorics of Harish-Chandra bimodules*