Категория $\mathcal{O}$ и бимодули Зёргеля

11-12 марта 2019

1 Общие определения

Определение 1. *Категория $\mathcal{O}$ для алгебры $U(\mathfrak{g})$ это полная подкатегория в $U(\mathfrak{g})$-модулях. Её объекты — это модули удовлетворяющие следующим условиям*

1. *подалгебра Картана $\mathfrak{h}$ действует полупросто*
2. *$\mathfrak{n}_+$ действует локально нильпотентно*
3. *модуль конечно порождён над $U(\mathfrak{g})$.*

Пример 1. Примерами объектов в категории $\mathcal{O}$: модули Верма M_λ, неприводимые L_λ, контргградиентные к модулям Верма $M_\lambda^\vee$ (определены ниже).

Определение 2. *Для модуля $M \in \mathcal{O}$ определим $U(\mathfrak{g})$-модуль $M^\vee$ следующим образом. Как векторное пространство это $\oplus_\mu M[\mu]^*$, где $M[\mu]$ — весовая компонента M. Действие определено формулой $\langle v, Xw\rangle = \langle \tau(X)v, w\rangle$; антиинволюция τ определена*

$$\tau(e_i) = f_i \qquad \tau(f_i) = e_i \qquad \tau(h_i) = h_i \tag{1}$$

Теорема 1 (Хариш-Чандры)**.** *Центр $U(\mathfrak{g})$ изоморфен $S[\mathfrak{h}]^W$.*

Давайте немного уточним теорему Хариш-Чандры. Пусть z — элемент центра $U(\mathfrak{g})$, а f соответствующий по Хариш-Чандре элемент в $\mathbb{C}[\mathfrak{h}]^W$. Тогда z действует на $M(\lambda)$ умножением на число $f(\lambda - \rho)$.

Заметим, что характеры $\mathbb{C}[\mathfrak{h}^*]^W$ определяются W-орбитами в $\mathfrak{h}^*$. Для $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ мы обозначим за χ_λ характер, соответствующий W-орбите λ.

Определение 3. *Для каждого характера $\chi_\lambda \colon S(\mathfrak{h})^W \to \mathbb{C}$ категория $\mathcal{O}_\lambda$ — это подкатегория в $\mathcal{O}$ на объектах которой $(z - \chi_\lambda(z))^n = 0$.*

Пример 2. Для $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$ центр порождён элементом Казимира $c = ef + fe + \frac{1}{2}h^2$. На представлении $L_{-1} \otimes \mathbb{C}^2$ элемент Казимира действует нильпотентно (точнее c^2 действует нулём). При этом сам c нулём не действует.

Предложение 1. *Категория $\mathcal{O}$ раскладывается в прямую сумму категорий $\mathcal{O}_\lambda$.*

Для общего λ категория $\mathcal{O}_\lambda$ эквивалентна $\mathtt{Vect}^W$. Ещё одно простое, но важное наблюдение $\mathcal{O}_{-\rho} = \mathtt{Vect}$.

Определение 4. *Для абелевой категории $\mathcal{C}$ группа Гротендика $K_0(\mathcal{C})$ – абелева группа, порождённая классами изоморфизма объектов из $\mathcal{C}$ с соотношением $[B] = [A] + [C]$ для точной последовательности $0 \to A \to B \to C \to 0$.*

Предложение 2. *Модули $M_{w\cdot\lambda}$ и $L_{w\cdot\lambda}$ образуют базис $K_0(\mathcal{O}_\lambda)$.*

Если в W-орбите есть доминантный вес, переход между этими базисами соответствует переходу от базиса H_w к базису C_w^-. В качестве λ надо взять λ_{min}. В частности,

$$L_{\lambda_{min}} = M_{\lambda_{min}} \qquad C_e^- = H_e \tag{2}$$

$$L_{s_i\lambda_{min}} = M_{s_i\lambda_{min}} - M_{\lambda_{min}} \qquad C_i^- = H_i - v^{-1} \tag{3}$$

Это часть гипетезы Каждана-Люстига (её обсуждал в своей лекции М. Берштейн).

2 Проективные объекты

Определение 5. *Объект P в абелевой категории $\mathcal{C}$ называется проективным если для любого морфизма $f\colon M \to P$ и сюрьекции $g\colon M \to N$, существует морфизм $\tilde{f}$ такой, что следующая диаграмма коммутативна*

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[dr, "g"'] & M \arrow[d, "f"] \\ & N \end{tikzcd}$$

Предложение 3. *Любой проективный объект в категории $\mathcal{O}_\lambda$ раскладывается в прямую сумму неразложимых проективных $P(w\cdot\lambda)$. Объекты $P(w\cdot\lambda)$ характеризуются следующими свойствами: это неразложимые проективные, допускающие сюрьективное отображение $P(w\cdot\lambda) \to L(w\cdot\lambda)$.*

Проективные объекты тоже образуют базис в $K_0(\mathcal{O}_\lambda)$. Если орбита содержит доминантный элемент, опять же, есть связь с теорией Каждана-Люстига. Переход между базисами $M(w\cdot\lambda_{max})$ к базису $P(w\cdot\lambda_{max})$ соответствует переходу от базиса H_w к базису C_w^+.

$$P_{\lambda_{max}} = M_{\lambda_{max}} \qquad C_e^+ = H_e \tag{4}$$

$$P_{s_i\lambda_{max}} = M_{s_i\lambda_{max}} + M_{\lambda_{max}} \qquad C_i^+ = H_i + v \tag{5}$$

3 Стандартная фильтрация и гомологическая алгебра

Определение 6. *Фильтрация* $0 \subset \dots \subset F^i M \subset F^{i+1} M \subset \dots \subset F^n M$ *модуля* $M = F^n M \in \mathcal{O}$ *называется стандартной, если факторы* $F^{i+1}M/F^i M$ *изоморфны некоторым модулям Верма* M_{λ_i}.

Всякий проективный модуль имеет стандартную фильтрацию.

Предложение 4. $\mathrm{Ext}^1(M(\lambda), M(\nu)^\vee) = 0$.

Доказательство. Надо доказать, что всякая точная последовательность $0 \to M_\nu^\vee \to ? \to M_\lambda \to 0$ расщепляется. Если λ не меньше μ, то очевидно. Иначе перейдём к двойственной последовательности. $\square$

На следующей лекции мы докажем и будем использовать следующий критерий.

Предложение 5. *Модуль* M *имеет стандартную фильтрацию тогда и только тогда, когда* $\mathrm{Ext}^1(M, M_\nu^\vee) = 0$ *для всех* ν.

Легко видеть, что всякий стандартно-фильтрованный удовлетворяет свойству $\mathrm{Ext}^1(M, M_\nu^\vee) = 0$. В другую сторону докажет И. Перунов.

4 Пример $\mathfrak{sl}_2$

Категория $\mathcal{O}_0$ эквивалентна категории модулей над некоторой конечномерной $\mathbf{A}$ алгеброй размерности 5

$$\begin{pmatrix} \mathbb{C}[x]/x^2 & x\left(\mathbb{C}[x]/x^2\right) \\ \mathbb{C}[x]/x & \mathbb{C}[x]/x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{Hom}(P_{-2}, P_{-2}) & \mathrm{Hom}(P_{-2}, P_0) \\ \mathrm{Hom}(P_0, P_{-2}) & \mathrm{Hom}(P_0, P_0) \end{pmatrix} \tag{6}$$

Другими словами, умножение в этой алгебре задано формулой

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 + \beta_1 x & \gamma_1 x \\ \delta_1 & \epsilon_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_2 + \beta_2 x & \gamma_2 x \\ \delta_2 & \epsilon_2 \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=}$$
$$= \begin{pmatrix} \alpha_1\alpha_2 + (\gamma_1\delta_2 + \beta_1\alpha_2 + \beta_2\alpha_1)x & (\alpha_1\gamma_2 + \gamma_1\epsilon_2)x \\ \delta_1\alpha_2 + \epsilon_1\delta_2 & \epsilon_1\epsilon_2 \end{pmatrix} \tag{7}$$

В этой категории имеется 5 неразложимых модулей

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{C}[x]/x & \mathbb{C}[x]/x & \mathbb{C}[x]/x & 0 & \mathbb{C}[x]/x^2 \\ {\scriptstyle 0}\big\downarrow\big\uparrow{\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 0}\big\downarrow\big\uparrow{\scriptstyle 0} & {\scriptstyle 1}\big\downarrow\big\uparrow{\scriptstyle 0} & {\scriptstyle 0}\big\downarrow\big\uparrow{\scriptstyle 0} & {\scriptstyle 1}\big\downarrow\big\uparrow{\scriptstyle x} \\ \mathbb{C}[x]/x & 0 & \mathbb{C}[x]/x & \mathbb{C}[x]/x & \mathbb{C}[x]/x \end{array} \tag{8}$$

Они соответствуют следующим следующим объектом в $\mathcal{O}_0$

$$P_0 = M_0, \qquad L_{-2}, \qquad M_0^\vee, \qquad L_0, \qquad P_{-2}. \tag{9}$$

5 Сопряженные функторы

Определение 7. *Пусть* $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ *Функтор* F^* *и* $F^!$ *называются правым и левыми сопряжёнными если*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(FX,Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,F^*Y), \quad \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M,FN) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F^!M,N) \tag{10}$$

Предложение 6. *Пусть* $B_1 \subset B_2$ *— вложение алгебр (алгебры с единицей; однако мы не предполагаем, что* 1_{B_1} *переходит в* 1_{B_2}*). Рассмотрим забывающий функтор* $\mathbf{Res}\colon B_2 - mod \to B_1 - mod \in B_2 - mod$*, который переводит* M *в* $1_{B_1}M \in B_1 - mod$*. Для этого функтора есть правый и левый сопряжённые, задаваемые формулами*

$$\mathbf{Res}^* = \mathrm{Hom}_{B_1}(B_2,-), \quad \mathbf{Res}^! = B_2 \otimes_{B_1} - \tag{11}$$

Пример 3. Давайте применим эту науку для вложения $C \subset A$. Для выписывания ответа мы применим композицию забывающего функтора и эквивалентности категорий A-модулей и $\mathcal{O}_0$. Эта композиция называется функтором Зёргеля и обозначается $\mathbb{V}$. Итак

$$\mathbb{V}^*(\mathbb{C}[x]/x) = M_0 \qquad \mathbb{V}^*(\mathbb{C}[x]/x^2) = P_{-2} \tag{12}$$

$$\mathbb{V}^!(\mathbb{C}[x]/x) = M_0^\vee \qquad \mathbb{V}^!(\mathbb{C}[x]/x^2) = P_{-2} \tag{13}$$

5.1 Отступление о функторе Зёргеля

Описанный выше функтор $\mathbb{V} = \mathrm{Hom}(P_{-2},-)$. В общем случае, $\mathbb{V} = \mathrm{Hom}(P_{min},-)$.

Предложение 7. $\mathrm{End}(P_{min}) = \mathbb{C}[\mathfrak{h}]/\left(\mathbb{C}[\mathfrak{h}]^W_+\right)$

Обозначим $C := \mathbb{C}[\mathfrak{h}]/\left(\mathbb{C}[\mathfrak{h}]^W_+\right)$. Таким образом $\mathbb{V}\colon \mathcal{O}_0 \to C$-mod. Ещё одну (может быть, самую важную) интерпретацию функтора $\mathbb{V}$ мы дадим в Секции 7

Предложение 8. *В общем случае функтор Зёргеля обладает следующими свойствами*

- $\mathbb{V}(M_\lambda) = \mathbb{C}$
- $\mathbb{V}(L_\lambda) = 0$ *для* $\lambda \neq \lambda_{min}$
- $\mathbb{V}^!(C) = \mathbb{V}^*(C) = P_{min}$.
- $\mathbb{V}^*(\mathbb{C}) = M_0$; $\mathbb{V}^!(\mathbb{C}) = M_0^\vee$

5.2 Единица и коединица

Мы имеем следующее следствие из определения сопряжённых функторов

$$\mathrm{Hom}(FX, FX) = \mathrm{Hom}(X, F^*FY) \tag{14}$$

$$\mathrm{Hom}(F^!X, F^!X) = \mathrm{Hom}(X, FF^!X) \tag{15}$$

Образы id_{FX} и $\mathrm{id}_{F^!X}$ при этих отображениям переходят в некоторые морфизмы $X \to F^*FX$ и $X \to FF^!X$. Эти отображения называются единицей. В примере функтора **frg**

$$M \to \mathrm{Hom}_{B_1}(B_2, M), \qquad m \mapsto (1 \mapsto m) \tag{16}$$

$$N \to 1_{B_1}B_2 \otimes_{B_1} N, \qquad n \mapsto 1 \otimes n \tag{17}$$

Мы можем проверить в примере $\mathfrak{sl}_2$

$$\mathbb{V}^*\mathbb{V}P_0 = \mathbb{V}^*\mathbb{C}[x]/x = P_0 \tag{18}$$

$$\mathbb{V}^*\mathbb{V}P_{-2} = \mathbb{V}^*\mathbb{C}[x]/x^2 = P_{-2} \tag{19}$$

$$\mathbb{V}\mathbb{V}^!\mathbb{C}[x]/x = \mathbb{V}M_1^\vee = \mathbb{C}[x]/x \tag{20}$$

$$\mathbb{V}\mathbb{V}^!\mathbb{C}[x]/x^2 = \mathbb{V}P_0 = \mathbb{C}[x]/x^2 \tag{21}$$

В следующий раз мы докажем

Предложение 9. *Отображение единицы $P \mapsto \mathbb{V}^*\mathbb{V}P$ — изоморфизм для проективных P.*

Следовательно, $\mathbb{V}$ строго полный функтор на проективных.

Предложение 10. *Отображение единицы $M \to \mathbb{V}\mathbb{V}^!M$ является изоморфизмом.*

Для доказательства этих предложений нам понадобится следующая лемма

Лемма 11. *Отображение $FX \to FF^*FX$ — инъективно.*

6 Функторы трансляциий и отражений

Определение 8. *Пусть $\nu - \mu$ — доминантный вес (на всякий случай ещё потребулем, чтобы $\mu+\rho$ и $\nu+\rho$ были доминантными). Определим функтор трансляции $T_{\mu\to\mu+\eta}\colon \mathcal{O}_\mu \to \mathcal{O}_\nu$ по формуле*

$$T_{\mu\to\nu}(M) = pr_\nu(M \otimes L(\nu-\mu)) \tag{22}$$

$$T_{\nu\to\mu}(M) = pr_\mu(M \otimes L(\nu-\mu)^*) \tag{23}$$

где pr_μ, pr_ν — проекции на блок $\mathcal{O}_\mu$ и $\mathcal{O}_\nu$ соответственно.

Предложение 12. *$T_{\mu\to\nu}$ сопряжён слева и справа к $T_{\nu\to\mu}$. Оба функтора точные.*

Следствие 1. *Функторы трансляции переводят проективные в проективные.*

Предложение 13 (транзитивность функторов трансляции)**.** *Если $\mu_3-\mu_2$ и $\mu_2-\mu_1$ доминантные, то*

$$T_{\mu_2\to\mu_3}\circ T_{\mu_1\to\mu_2}=T_{\mu_1\to\mu_3} \tag{24}$$
$$T_{\mu_2\to\mu_1}\circ T_{\mu_3\to\mu_2}=T_{\mu_3\to\mu_1} \tag{25}$$

Определение 9. *Для каждого простого корня α_i определим функтор отражения $\mathcal{P}_i\colon \mathcal{O}_0\to\mathcal{O}_0$ как композицию $T_{-\omega_i\to 0}\circ T_{0\to-\omega_i}$.*

Теорема 2. *$\mathbb{V}(\mathcal{P}_iM)=S(\mathfrak{h})\otimes_{S(h)^{s_i}}\mathbb{V}(M)$.*

На категории $\mathcal{O}_0$ нет умножения. Но её K_0 — это модуль над $\mathbb{C}[W]$ (а если мы добавим градуировку, то алгеброй Гекке). Функторы отражения соответствуют C_i^+. Более того, $K_0(\mathcal{O}_0)$ — это свободный модуль над $\mathbb{C}[W]$. Поэтому он может быть отождествлён с алгеброй $\mathbb{C}[W]$, если выбрать, куда переходит единица.

Выражаясь, научно, функторы трансляции задают *категорификацию* алгебры $\mathbb{C}[W]$.

7 Расширенная категория $\mathcal{O}$

Пусть $\tilde{U}=U(\mathfrak{g})\otimes_{U(\mathfrak{h})^W}U(\mathfrak{h})$. Пусть λ — характер $Z(\tilde{U})=S(\mathfrak{h})$. Обозначим за $\tilde{U}\text{-}mod_\lambda$ подкатегорию в $\tilde{U}$-модулях, для которых $(z-\lambda(z))^n$ действуют нулём для достаточно большого n (cf. Определение 3). Наконец, категория $\tilde{\mathcal{O}}_\lambda$ — это подкатегория в $\tilde{U}\text{-}mod_\lambda$, состоящая из модулей, которые при ограничении на $U(\mathfrak{g})$ лежат в $\mathcal{O}_\lambda$.

Предложение 14. *$\tilde{\mathcal{O}}_\lambda\cong\mathcal{O}_\lambda$ для регулярного $\lambda+\rho$.*

Предложение 15. *$\tilde{\mathcal{O}}_{-\rho}\cong C\text{-}mod$.*

Теорема 3. *Имеется расширенный функтор трансляции $\tilde{T}_{\lambda\to\mu}\colon\tilde{\mathcal{O}}_\lambda\to\tilde{\mathcal{O}}_\mu$, который "поднимает"обычный функтор трансляции на расширенные категории.*

Теорема 4. *$\mathbb{V}=\tilde{T}_{0\to-\rho}$ с учётом изоморфизма из Предложения 15.*

8 Teaser

На следующей лекции мы определим функтор $\mathbb{V}_\mu\colon\mathcal{O}_\mu\to C^{W_\mu}$. Обозначим за $\mathbf{frg}\colon C-mod\to C^{W_\mu}-mod$ — функтор ограничения.

Имеется равенство $\mathbb{V}_\mu \circ T_{0\to\mu} = \mathbf{frg} \circ \mathbb{V}$ (можно про него думать как про транизитивность функторов трансляции... хотя там будут технические детали). Возьмём левый сопряженный к обеим частям равенства $T_{\mu\to 0} \circ \mathbb{V}^!_\mu = \mathbb{V}^! \circ \mathbf{frg}^!$. Согласно Предложению 6, $\mathbf{frg}^! = \mathbb{C}[\mathfrak{h}] \otimes_{\mathbb{C}[\mathfrak{h}]^{s_i}}$ Из этих наблюдений на следующей лекции мы докажем Теорему 2.