Введение

А. Ильин

19.09.2018

1 Веса, корни, группа Вейля

Основной объект изучения семинара – это категория $\mathcal{O}$(будет определена через неделю) представлений конечномерной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ над полем $\mathbb{C}$. Такая алгебра допускает *корневое разложение*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha,$$

где $\Phi \subset \mathfrak{h}^*$ таково, что *корневое подпространство*

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{x \in \mathfrak{g} \,|\, [h, x] = \alpha(h)x \ \forall\ h \in \mathfrak{h}\}$$

ненулевое. Известно, что $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$. Конченое множество Φ называют системой корней. Известно, что в Φ можно выбрать подмножество *простых корней* $\Delta = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\} \subset \Phi$ такое, что любой элемент $\alpha \in \Phi$ представляется в виде

$$\alpha = \sum_i a_i \alpha_i, \text{ где либо все } a_i \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}, \text{ либо все } a_i \in \mathbb{Z}_{\leqslant 0}.$$

Это позволяет определить подмножества $\Phi^+, \Phi^- \subset \Phi$ положительных и отрицательных корней, а так же треугольное разложение

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{n} \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^-,$$

где $\mathfrak{n} = \bigoplus_{\alpha \in \Phi^+} \mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{n}^- = \bigoplus_{\alpha \in \Phi^-} \mathfrak{g}_\alpha$.

Отображение $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ задает *присоединённое представление* алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Форма Киллинга на $\mathfrak{g}$ определяется как

$$(x, y) = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{ad}\, x \circ \mathrm{ad}\, y).$$

Известно, что ограничение формы Киллинга на $\mathfrak{h}$ невырождено. Это задаёт отождествление $\mathfrak{h} \simeq \mathfrak{h}^*$. Для каждого $\alpha \in \Phi$ выберем $e_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ и $f_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ такие, что для $\alpha \in \Delta$ имеем $\alpha(h_\alpha) = 2$, где $h_\alpha = [e_\alpha, f_\alpha]$. Заметим, что $\mathrm{span}(e_\alpha, f_\alpha, h_\alpha) \simeq \mathfrak{sl}_2$.

Абстрактной системой корней в евклидовом E называется конечный набор векторов без 0, удовлетворяющий следующим свойствам:

1) Если $\alpha \in \Phi$, то $\mathbb{R}\alpha \cap \alpha = \{\pm\alpha\}$;
2) $s_\alpha : \lambda \to \lambda - \frac{2(\lambda,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\lambda$ отображает Φ в Φ;
3) $\langle \alpha, \beta \rangle = \frac{2(\beta,\alpha)}{(\beta,\beta)} \in \mathbb{Z}$ для всех $\alpha, \beta \in \Phi$.

Для алгебры Ли $\mathfrak{g}$ рассмотрим $\mathbb{Q}$-линейную оболочку системы корней E_0. Ограничение формы Киллинга на E_0 невырождена. Тогда $E = E_0 \otimes \mathbb{R}$ – евклидово пространство, а $\Phi \subset E$ – абстрактная система корней. Абстрактные системы корней можно классифицировать, таким образом получается классификация всех (полу)простых алгебр Ли, так как любая полупростая алгебра является суммой простых.

Определим решётку корней Λ_r как $\mathbb{Z}$ — линейную оболочку системы корней.

Опредлеим двойственную систему корней $\alpha^\vee = \frac{2\alpha}{(\alpha,\alpha)}$. (Это то, что соответсвует h_α при изоморфизме $\mathfrak{h} \simeq \mathfrak{h}^*$). Определим решётку весов

$$\Lambda = \{x \in E \mid \langle x, \alpha \rangle \in \mathbb{Z} \ \forall \ \alpha \in \Delta\}.$$

Заметим, что $\Lambda_r \subset \Lambda$. На самом деле – подрешётка конечного индекса, который равен определителю матрицы Картана. Определим фундаментальные веса ω_i как двойственные к $\alpha_i^\vee$, то есть $\langle \omega_i, \alpha_j \rangle = \delta_{ij}$. Фундаментальные веса образуют базис решётки весов. Подмножество $\Lambda^+ = \mathbb{Z}_{\geqslant 0}\omega_1 + \ldots + \mathbb{Z}_{\geqslant 0}\omega_n \subset \Lambda$ назаывается множеством *доминантных весов*. Определим специальный вес

$$\rho = \omega_1 + \ldots + \omega_n = \frac{1}{2}\sum_{\alpha \in \Phi^+} \alpha.$$

Ясно, что $s_\alpha \rho = \rho - \alpha$ для любого $\alpha \in \Delta$. Определим так же частичный порядок на Λ следующим образом: $\mu \leqslant \lambda \iff \lambda - \mu$ есть сумма простых корней с положительными коэффициентами. Известно, что число доминантных весов $\leqslant \lambda$ для некоторого $\lambda \in \Lambda^+$ конечно и что $w\lambda \leqslant \lambda$ для любого $w \in W$.

Определим (конечную) группу Вейля W, как группу, порожденную всеми $s_\alpha, \alpha \in \Delta$. Определим длину элемента $l(w)$ в группе Вейля как минимальную длину выражения $w = s_1 \ldots s_n$ ($s_1, \ldots, s_n$ это $s_{\alpha_1}, \ldots, s_{\alpha_n}$ соответственно). Известно, что

- $l(w)$ совпадает с числом элементов $\alpha \in \Phi^+$ таких, что $w\alpha < 0$
- $l(w) = l(w^{-1})$
- Существует единственный элемент $w_\circ$ максимальной длины $|\Phi^+|$. Более того, $l(w_\circ w) = l(w_\circ) - l(w)$.

2 Универсальная обёртвающая алгебра

Определим унверсальную обёртываюую алгебру как

$$U(\mathfrak{g}) = T(\mathfrak{g})/(x \otimes y - y \otimes x - [x, y]), \ \forall x, y \in \mathfrak{g}$$

Универсальная обёртвыющая алгебра обладает универсальным свойством и категории представлений $U(\mathfrak{g})$ и $\mathfrak{g}$ эквиваленты.

Если $(x_1, \ldots, x_n)$ – упорядоченный базис $\mathfrak{g}$, то мономы $x_1^{t_1} \cdots x_n^{t_n}$ — базис $U(\mathfrak{g})$. В частности, $\mathfrak{g}$ вкладывается в $U(\mathfrak{g})$. Эквивалентно, $\operatorname{gr} U(\mathfrak{g}) = S(\mathfrak{g})$.

Если $\mathfrak{g}$ — полупроста, $\mathfrak{g} = \mathfrak{n} \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^-$, то будем записывать базис в следующем *стандартном порядке*

$$(f_1, \ldots, f_m, h_1, \ldots, h_n, e_1, \ldots, e_m).$$

(Левым) Правым нётеровым кольцом называется кольцо, в котором любой (левый) правый идеал конечно порождён. Универсальная обёртывающая алгебра является (левой) правой нётеровой и не содержит делителей нуля. Это следует из того, что присоединённая градуированная алгебра нётерова и не содержит делителей нуля. Определим элемент Казимира как $\Omega = \sum x_i x^i \in Z(U(\mathfrak{g}))$, где x^i – двойственный относительно формы Киллинга базис.

3 Модули старшего веса, модули Верма, конечномерные модули

Пусть M – произвольный $\mathfrak{g}$ -модуль. Определим весовое подпространство как
$$M_\lambda = \{v \in M | h \cdot v = \lambda(h)v \ \forall\, h \in V\}.$$

Если $M_\lambda \neq 0$, будем называть λ весом модуля V. Крастностью веса будем называть $\dim M_\lambda$ Обозначим через $\Pi(M)$ множество весов модуля M. Ясно, что сумма $\sum_\lambda M_\lambda$ — прямая. Мы будем изучать те случаи, когда $M = \bigoplus_{\lambda \in M} M_\lambda$. То есть, такие модули, где $\mathfrak{h}$ действует полупросто.

Определение 3.1. *Модуль M называется модулем страшего веса λ, если существует ненулевой циклический вектор (максимальный вектор) $v \in M$ такой, что $\mathfrak{n} \cdot v = 0$ и $h \cdot v = \lambda(h)v$ для любого $h \in \mathfrak{h}$.*

Таким образом, $M = U(\mathfrak{g}) \cdot v = U(\mathfrak{n}^-) \cdot v$.

Теорема 3.2. *Пусть M — модуль старшего веса λ порождённый максимальным вектором v. Зафиксируем та же порядок положительных корней $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ и выберем f_i в каждом $\mathfrak{g}_{\alpha_i}$. Тогда*

1. *M является линейной оболчкой векторов вида $y_1^{i_1} \ldots y_m^{i_m} v, i_j \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, имеющих веса $\lambda - \sum i_j \alpha_j$ соответсвтенно*

2. *Все веса μ удовлетворяют $\mu \leqslant \lambda$*

3. *Для любого веса μ модуля M верно, что $\dim M_\mu < \infty$, при этом $\dim M_\lambda = 1$. Более того, $\mathfrak{n}$ действует локально-нильпотентно на M.*

4. *Любой фактор-модуль модуля M является модулем старшего веса λ*

5. *Любой подмодуль модуля M — весовой (то есть $\mathfrak{h}$ действует полупросто). Подмодуль, порождённый максимальным вектором веса $\mu < \lambda$ является собственным, в частности если M — простой, то все максимальные вектора имеют вид $cv, c \in \mathbb{C}$.*

6. *M содержит единственный максимальный подмодуль и единственный простой фактор, в частности, M неразложим.*

7. *Все простые модули старшего веса λ изоморфны. Если M — простой, то $\dim \operatorname{End} M = 1$*

Опредлеим левый идеал I как порожденный $\mathfrak{n}$ и элементами вида $h - \lambda(h) \cdot 1, h \in \mathfrak{h}$. Определим *модуль Верма* как

$$M(\lambda) = U(\mathfrak{g})/I.$$

Для любого модуля старшего веса λ существует гомомофризм $M(\lambda) \to M$, таким образом, $M(\lambda)$ является универсальным модулем веса λ. Обозначим через $L(\lambda)$ — единственный простой фактор, а через $N(\lambda)$ — единственный максимальный подмодуль модуля Верма.

Предложение 3.3. *Пусть $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ и $\alpha \in \Delta$. Предположим, что $n := \langle \lambda, \alpha \rangle \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$. Тогда если v — максимальный вектор веса λ в $M(\lambda)$, то $y_\alpha^{(n+1)} v$ — максимальный вектор веса $\mu = \lambda - (n+1)\alpha < \lambda$. Следовательно, существует ненулевой гомоморфизм $M(\mu) \to M(\lambda)$.*

Доказательство. 1) $[e_j, f_i^{k+1}] = 0$, при $j \neq i$;
2) $[h_j, f_i^{k+1}] = -(k+1)\alpha_i(h_j) f_i^{k+1}$
3) $[e_i, f_i^{k+1}] = -(k+1) f_i^k (k \cdot 1 - h_i)$. Пункт 1) следует из того, что $\alpha_j - \alpha_i$ — не корень. Пункты 2) и 3) по индукции. □

Следствие 3.4. *Пусть v — максимальный вектор веса λ в модуле $M(\lambda)$, α простой. Тогда $y_\alpha^{n+1} \cdot v = 0$.*

Теперь классифицируем все конечномерные моудли. Во-первых, используя элемент Казимира можно доказать, что любое представление $\mathfrak{g}$ вполне приводимо (теорема Вейля). Во-вторых, используя абстрактное разложение Жордана можно показать, что $\mathfrak{h}$ действует полупросто на любом конечномерном модуле. Таким образом, любой конечномерный модуль является модулем старшего веса. В-третьих, отсюда следует, что любой конечномерный модуль изоморфен $L(\lambda)$.

Возникает естественный вопрос: когда $L(\lambda)$ конечномерен?

Теорема 3.5. *Следующие условия на элемент $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ эквивалентны:*
1) Простой модуль $L(\lambda)$ — конечномерен;
2) $\lambda \in \Lambda^+$;
3) $\dim L(\lambda)_\mu = \dim L(\lambda)_{w\mu}$.

4 Гомоморфизм Хариш-Чандры

Пусть M — модуль старшего веса, v — максимальный вектор веса λ. Тогда

$$h(zv) = z(hv) = \lambda(h)zv.$$

Так как $\dim M_\lambda = 1$, то $zv = \chi_\lambda(z)v$. Очевидно, что z действут скаляром на всём модуле. Таким образом, получаем гомоморфизм $\chi_\lambda : Z(\mathfrak{g}) \to \mathbb{C}$. На самом деле, зависит только от $\mathfrak{h}$. Определим $pr : U(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{h})$. Очевидно, что ограничение на центр — гомоморфизм. Ограничение pr на $Z(\mathfrak{g})$ называется гомоморфизмом Хариш-Чандры.
Естественные вопросы: он инъективен? каков его центр?

Ясно, что $\chi_\lambda = \chi_\mu$ если $M(\lambda)$ содержит максимальный вектор веса μ. Из Предложения 3.3 получаем, что это так в случае $\mu = \lambda - (n+1)\mu$, где $n = \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle$. Заметим, что $s_\alpha(\lambda + \rho) = \mu$.

Определение 4.1. *Определим сдвинутое действие W на $\mathfrak{h}^*$ через*

$$w \cdot \lambda = w(\lambda + \rho) - \rho.$$

Будем говорить, что веса λ и μ linked, если $\lambda = w \cdot \mu$ для некоторого $w \in W$. Linckage задаёт отношение эквивалентности на $\mathfrak{h}^*$. Орбита λ под действием W это linkage класс.

Предложение 4.2. *Если $\lambda \in \Lambda$, то $\chi_\lambda = \chi_\mu$.*

Определим сдвинутый гомоморфизм Хариш-Чандра.

Предложение 4.3. *1) Если λ, μ — W-linked, $\chi_\lambda = \chi_\mu$.*
2) Образ сдвинутого гомоморфизма Хариш-Чандры лежит в $S(\mathfrak{h})^W$.

Теорема 4.4. *Пусть $\psi : Z(\mathfrak{g}) \to S(\mathfrak{h})^W$ — сдвинутый гомоморфизм Хариш-Чандры. Тогда:*

- *Гомоморфизм ψ является изоморфизмом между центром и $S(\mathfrak{h})^W$.*
- *Для любых $\lambda, \mu \in \mathfrak{h}^*$, $\chi_\lambda = \chi_\mu$ тогда и только тогда, когда $\mu = w \cdot \lambda$ для некоторого $w \in W$.*
- *Любой центральный характер имеет вид χ_λ для некоторого $\lambda \in \mathfrak{h}^*$.*