1. Тождество Дайсона

Theorem 1.1 (Тождество Дайсона)**.** Если $a_1, \dots, a_n$ – неотрицательные целые числа, то

$$\text{С.Ч.} \prod_{k \neq l}^{n} \left(1 - \frac{z_k}{z_l}\right)^{a_k} = \frac{(a_1 + \dots + a_n)!}{a_1! \dots a_n!}. \tag{1}$$

где "С.Ч." обозначает "свободный член".

Theorem 1.2 (q-аналог тождества Дайсона)**.** Если $a_1, \dots, a_n$ – неотрицательные целые числа, переменная q независима от $z_1, \dots, z_n$, то свободный член полинома Лорана

$$f_q(\boldsymbol{z}) = f_q(z_1, \dots, z_n) = \prod_{k<l}^{n} \left(\frac{x_k}{x_l}\right)_{a_k} \left(\frac{qx_l}{x_k}\right)_{a_l} \in \mathbb{Q}(q)[\boldsymbol{z}, \boldsymbol{z}^{-1}]$$

равен

$$\frac{(q)_{a_1+\dots+a_n}}{(q)_{a_1} \dots (q)_{a_n}},$$

где $(t)_n = (1-t)(1-qt)\dots(1-q^{n-1}t)$ и $(t)_0 = 1$.

1.1. **Связь с полиномами Макдональда.** Пусть V – конечномерное векторное пространство, R – неприводимая система корней в V. Для каждого корня α определим двойственный корень $a^\vee = \frac{2\alpha}{(\alpha,\alpha)}$. Положим $P = \{\lambda \in V \colon (\lambda, \alpha^\vee) \in \mathbb{Z}\}$ – решетка весов.

На пространстве $\mathbb{C}[P]^W$ задано скалярное произведение: $\langle f, g \rangle_0 = \frac{1}{|W|}[f\overline{g}]_0$, где $\overline{e^\lambda} = e^{-\lambda}$, а $[]_0$ – свободный член. Пусть для каждого корня $\alpha \in R$ задана переменная t_α, такая что $t_\alpha = t_{w(\alpha)}$ для всех $w \in W$. Также задана независимая переменная q. Рассмотрим поле рациональных функций $\mathbb{C}_{q,t} = \mathbb{C}(q, t_\alpha)$. Определим скалярное произведение на $\mathbb{C}_{q,t}[P]^W$ следующим образом:

$$\langle f, g \rangle_{q,t} = \frac{1}{|W|}[f\overline{g}\Delta_{q,t}]_0,$$

где

$$\Delta_{q,t} = \prod_{\alpha \in R} \prod_{i=0}^{\infty} \frac{1 - q^{2i}e^\alpha}{1 - t_\alpha^2 q^{2i} e^\alpha}.$$

Будем считать, что $t_\alpha = q^{k_\alpha}$ для всех $\alpha \in R$. Тогда

$$\Delta_{q,t} = \prod_{\alpha \in R} \prod_{i=0}^{k_\alpha - 1} (1 - q^{2i}e^\alpha).$$

Пусть P_λ – полиномы Макдональда. Тогда

(1) $\langle P_\lambda, P_\mu \rangle = 0$ для всех $\lambda \neq \mu$;

(2) $\langle P_\lambda, P_\lambda \rangle = q^{\sum_{\alpha \in R_+} k_\alpha(k_\alpha - 1)} \prod_{\alpha \in R_+} \prod_{i=1}^{k_\alpha - 1} \frac{[(a^\vee, \lambda + \rho_k) + i]}{[(a^\vee, \lambda + \rho_k) - i]}$, где $\rho_k = \frac{1}{2}\sum_{\alpha \in R_+} k_\alpha \alpha$, $[n] = \frac{q^n - q^{-n}}{q - q^{-1}}$

Для $\lambda = 0$ полином $P_\lambda = 1$, и равенство для нормы может быть (нетривиально) переписано следующим образом:

$$\prod_{\alpha \in R_+} \prod_{i=0}^{k_\alpha - 1} (1 - q^{2i}e^\alpha)(1 - q^{2i+2}e^{-\alpha}) = \prod \left[\frac{kd_i}{k}\right].$$

Для системы корней A_{n-1} степени группы Вейля равны $2, 3, \dots, n$, поэтому

$$\prod \begin{bmatrix} kd_i \\ k \end{bmatrix} = \frac{[nk]!}{[k]!^n},$$

что эквивалентно q-аналогу Дайсона для $a_1 = \dots = a_n = k$.

1.2. **Доказательство через интерполяционный многочлен Лагранжа.** Если $P(z)$ – многочлен, степень которого меньше n, и $z_1, \dots, z_n$ – различные точки вещественной прямой, то выполняется равенство

$$P(z) = \sum_{k=1}^{n} P(z_k) \prod_{l \neq k} \frac{z - z_l}{z_k - z_l} \text{ (интерполяционный многочлен Лагранжа).} \tag{2}$$

Рассмотрим многочлен $P(z) \equiv 1$. Применив для него тождество 2, получаем

$$1 = \sum_{k=1}^{n} \prod_{l \neq k}^{n} \frac{z - z_l}{z_k - z_l}.$$

Подставив $z = 0$, получаем

$$1 = \sum_{k=1}^{n} \prod_{l \neq k}^{n} \left(1 - \frac{z_k}{z_l}\right)^{-1}. \tag{3}$$

Рассмотрим

$$F_n(\boldsymbol{z}; a_1, \dots, a_n) = \prod_{k \neq l}^{n} \left(1 - \frac{z_k}{z_l}\right)^{a_k}$$

Умножив $F_n(\boldsymbol{z}; a_1, \dots, a_n)$ на равенство 3, придем к реккурентному соотношению:

$$F_n(\boldsymbol{z}; a_1, \dots, a_n) = \sum_{k=1}^{n} F_n(\boldsymbol{z}; a_1, \dots, a_{k-1}, a_k - 1, a_{k+1}, \dots, a_n).$$

Очевидно, С.Ч.$F_n(\boldsymbol{z}; a_1, \dots, a_n)$ должен удовлетворять такому же соотношению:

$$\text{С.Ч.} F_n(\boldsymbol{z}; a_1, \dots, a_n) = \sum_{k=1}^{n} \text{С.Ч.} F_n(\boldsymbol{z}; a_1, \dots, a_{k-1}, a_k - 1, a_{k+1}, \dots, a_n).$$

Кроме того, С.Ч.$F_n(\boldsymbol{z}; 0, \dots, 0) = 1$, и если $a_k = 0$, то

$$\text{С.Ч.} F_n(\boldsymbol{z}; a_1, \dots, a_n) = \text{С.Ч.} F_{n-1}(\boldsymbol{z}; a_1, \dots, a_{k-1}, a_{k+1}, \dots, a_n).$$

Положим $M_n(a_1, \dots, a_n) = (a_1 + \dots + a_n)!/(a_1! \dots a_n!)$. Проверим, что $M_n(a_1, \dots, a_n)$ удовлетворяет тем же реккурентным соотношениям, что и С.Ч.$F_n(\boldsymbol{z}; a_1, \dots, a_n)$. Равенства $M_n(0, \dots, 0) = 1$ и $M_n(a_1, \dots, a_n) = M_{n-1}(a_1, \dots, a_{k-1}, a_{k+1}, \dots, a_n)$ при $a_k = 0$ тривиально следуют из определения. Остается проверить формулу

$$M_n(a_1, \dots, a_n) = \sum_{k=1}^{n} M_n(a_1, \dots, a_{k-1}, a_k - 1, a_{k+1}, \dots, a_n).$$

Заметим, что $M_n(a_1, \dots, a_n)$ – это количество слов длины $a_1 + \dots + a_n$, составленных из символов алфавита $\{1, \dots, n\}$, в которых символ k встречается a_k раз, а $M_n(a_1, \dots, a_{k-1}, a_k - 1, a_{k+1}, \dots, a_n)$ – это количество тех из них, в которых первый символ равен k. Отсюда сразу следует реккурентное соотношение.

Таким образом, по индукции проверяется, что

$$\text{С.Ч.} F_n(\boldsymbol{z}; a_1, \dots, a_n) = M_n(a_1, \dots, a_n)$$

для всех целых неотрицательных $a_1, \ldots, a_n$, что завершает доказательство тождества Дайсона.

1.3. **q-аналог тождества Дайсона.** При $q = 1$ из q-аналога следует классический Дайсон. Рассмотрим однородный многочлен

$$F_q(z_1, \ldots, z_n) = \prod_{k<l} \left(\prod_{t=0}^{a_k-1} (z_l - z_k q^t) \prod_{t=1}^{a_l} (z_k - z_l q^t) \right) \in \mathbb{Q}(q)[\boldsymbol{z}].$$

Тождество из 1.2 эквивалентно следующему:

$$[z_1^{\sigma-a_1} z_2^{\sigma-a_2} \ldots z_n^{\sigma-a_n}] F_q(z_1, \ldots, z_n) = \frac{(q)_{a_1+\cdots+a_n}}{(q)_{a_1} \ldots (q)_{a_n}},$$

где $\sigma = a_1 + \cdots + a_n$. Для нахождения данного коэффициента воспользуемся комбинаторной теоремой о нулях:

Лемма 1.3. Пусть $\mathbb{F}$ – произвольное поле, и $F(z_1, \ldots, z_n)$ – многочлен над полем $\mathbb{F}$, причем $\deg(F) \leq d_1 + \cdots + d_n$. Если $A_1, \ldots, A_n$ – произвольные подмножества поля F, такие что $|A_k| = d_k + 1$, то выполняется равенство

$$[z_1^{d_1} \ldots z_n^{d_n}] F(z_1, \ldots, z_n) = \sum_{c_1 \in A_1} \cdots \sum_{a_n \in A_n} \frac{F(c_1, \ldots, c_n)}{\varphi_1'(c_1) \ldots \varphi_n'(c_n)},$$

где $\varphi_k(z) = \prod_{c \in A_k} (z - c)$.

Основная идея состоит в том, чтобы применить 1.3 для таких специально подобранных подмножеств $A_1, \ldots, A_n$, чтобы $F(\boldsymbol{c}) = 0$ для всех элементов $\boldsymbol{c} \in A_1 \times \cdots \times A_n$, кроме одного.

Положим $A_k = \{1, q, \ldots, q^{\sigma - a_k}\}$, тогда $|A_k| = \sigma - a_k + 1$. Кроме того, обозначим $\sigma_k = a_1 + \cdots + a_{k-1}$. В частности, $\sigma_1 = 0$ и $\sigma_{n+1} = \sigma$.

Лемма 1.4. Если $F(\boldsymbol{c}) \neq 0$ для некоторого $\boldsymbol{c} \in A_1 \times \cdots \times A_n$, то $c_k = q^{\sigma_k}$ для всех $k = 1, \ldots, n$.

Proof. Предположим, что $F(\boldsymbol{c}) \neq 0$ для набора $c_k = q^{\alpha_k} \in A_k$. Во-первых, $\alpha_k \neq \alpha_l$ для всех $k \neq l$, т.к. в определении функции F присутствует множитель $(z_k - z_l)$. Предположим, что $\alpha_k > \alpha_l$ для некоторых $k \neq l$. Тогда из 1.3 следует, что если $k < l$, то $\alpha_k - \alpha_l \geq a_l + 1$, т. к. в противном случае занулится множитель $\prod_{t=1}^{a_l} (z_k - q^t z_l)$. Кроме того, если $k > l$, то $\alpha_k - \alpha_l \geq a_l$, иначе занулится множитель $\prod_{t=0}^{a_l-1} (z_k - z_l q^t)$.

Рассмотрим перестановку $\pi \in S_n$, такую что $\alpha_{\pi(1)} < \alpha_{\pi(2)} < \cdots < \alpha_{\pi(n)}$. Из сказанного выше следует, что $\alpha_{\pi(k+1)} - \alpha_{\pi(k)} \geq a_{\pi(k)}$ для всех $k = 1, \ldots, n-1$, при этом если $\pi(k+1) < \pi(k)$, то неравенство строгое. Сложив эти неравенства по всем k, получаем

$$\alpha_{\pi(n)} - \alpha_{\pi(1)} \geq a_{\pi(1)} + \cdots + a_{\pi(n-1)} = a_1 + \cdots + a_n - a_{\pi(n)} = \sigma - a_{\pi(n)}.$$

С другой стороны, $\alpha_{\pi(n)} \leq \sigma - a_{\pi(n)}$ и $\alpha_{\pi(1)} \geq 0$. Значит, все неравенства обращаются в равенства: $\alpha_{\pi(n)} = \sigma - a_{\pi(n)}$, $\alpha_{\pi(1)} = 0$ и $\alpha_{\pi(k+1)} - \alpha_{\pi(k)} = a_k$ для всех $k = 1, \ldots, n-1$. Из этого следует, что $\pi(k+1) > \pi(k)$ для всех k, а значит $\pi(k) = k$ для всех $k = 1, \ldots, n$. Тогда мы получаем, что $\alpha_1 = 0$ и $\alpha_{k+1} - \alpha_k = a_k$ для всех $k = 1, \ldots, n-1$. Следовательно, $\alpha_k = \sum_{i=1}^{k-1} a_i = \sigma_k$, что и требовалось доказать. □

Таким образом, выполняется равенство

$$[z_1^{d_1} \ldots z_n^{d_n}] F(z_1, \ldots, z_n) = \frac{F(q^{\sigma_1}, \ldots q^{\sigma_n})}{\varphi_1'(q^{\sigma_1}) \ldots \varphi_n'(q^{\sigma_n})},$$

где $\varphi_k(z) = \prod_{t=0}^{\sigma-a_k}(z - q^t)$. Вычислим полученное выражение:

$$\varphi'_k(q^{\sigma_k}) = \prod_{t=0}^{\sigma_k-1}(q^{\sigma_k} - q^t)\prod_{t=\sigma_k+1}^{\sigma-a_k}(q^{\sigma_k} - q^t) = \prod_{t=0}^{\sigma_k-1}(-1)q^t(1 - q^{\sigma_k-t})\prod_{t=\sigma_k+1}^{\sigma-a_k}q^{\sigma_k}(1 - q^{t-\sigma_k})$$
$$= (-1)^{\sigma_k}q^{\tau_k}(q)_{\sigma_k}(q)_{\sigma-\sigma_{k+1}}$$

где $\tau_k = \sigma_k(\sigma_k - 1)/2 + \sigma_k(\sigma - \sigma_{k+1})$, а также

$$F(q^{\sigma_1}, \ldots, q^{\sigma_n}) = \prod_{k<l}\left(\prod_{t=0}^{a_k-1}q^{\sigma_k+t}(q^{\sigma_l-\sigma_k-t} - 1)\prod_{t=1}^{a_l}q^{\sigma_k}(1 - q^{\sigma_l+t-\sigma_k})\right)$$
$$= (-1)^u q^v\prod_{k<l}\left(\frac{(q)_{\sigma_l-\sigma_k}}{(q)_{\sigma_l-\sigma_{k+1}}}\frac{(q)_{\sigma_{l+1}-\sigma_k}}{(q)_{\sigma_l-\sigma_k}}\right) = (-1)^u q^v\prod_{k=1}^{n}\frac{(q)_{\sigma_k}(q)_{\sigma-\sigma_k}}{(q)_{\sigma_{k+1}-\sigma_k}},$$

где

$$u = \sum_{k=1}^{n}a_k(n-k) = \sigma_1 + \cdots + \sigma_n,$$
$$v = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{n-k}{2}a_k(\sigma_k + \sigma_{k+1} - 1) + \sigma_k(a_{k+1} + \cdots + a_n)\right)$$
$$= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{n-k}{2}(\sigma_{k+1} - \sigma_k)(\sigma_k + \sigma_{k+1} - 1) + \sigma_k(\sigma - \sigma_{k+1})\right)$$
$$= -\frac{n-1}{2}\sigma_1^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}\sigma_k^2 + \frac{n-1}{2}\sigma_1 - \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}\sigma_k + \sum_{k=1}^{n}\sigma_k(\sigma - \sigma_k)$$
$$= \sum_{k=1}^{n}\sigma_k(\sigma_k - 1)/2 + \sum_{k=1}^{n}\sigma_k(\sigma - \sigma_k) = \sum_{k=1}^{n}\tau_k.$$

Таким образом,

$$\frac{F(q^{\sigma_1}, \ldots q^{\sigma_n})}{\varphi'_1(q^{\sigma_1})\ldots\varphi'_n(q^{\sigma_n})} = \frac{(-1)^{\sigma_1+\cdots+\sigma_n}q^{\tau_1+\cdots+\tau_n}\prod_{k=1}^{n}\frac{(q)_{\sigma_k}(q)_{\sigma-\sigma_k}}{(q)_{\sigma_{k+1}-\sigma_k}}}{\prod_{k=1}^{n}(-1)^{\sigma_k}q^{\tau_k}(q)_{\sigma_k}(q)_{\sigma-\sigma_{k+1}}}$$
$$= \frac{(q)_\sigma}{\prod_{k=1}^{n}(q)_{\sigma_{k+1}-\sigma_k}} = \frac{(q)_{a_1+\cdots+a_n}}{(q)_{a_1}\ldots(q)_{a_n}},$$

что завершает доказательство q-аналога тождества Дайсона.

1.4. **Комбинаторное доказательство Цейльбергера.** Перепишем тождество Дайсона в эквивалентной форме:

$$[z_1^{(n-1)a_1}\ldots z_n^{(n-1)a_n}]\prod_{k<l}(z_k - z_l)^{a_k+a_l} = (-1)^{a_2+2a_3+\cdots+(n-1)a_n}\frac{(a_1 + \cdots + a_n)!}{a_1!\ldots a_n!}.$$

Будем называть *турниром* строго верхнетреугольную матрицу $T = (t_{kl})_{1\le k<l\le n}$, в которой каждый элемент t_{kl} равен k или l. Если $t_{kl} = k$ (или, соответственно, l), мы будем говорить, что k *побеждает* l (или l побеждает k соответственно).

Если до начала турнира мы предполагали, что "1" является фаворитом, за ним идёт "2" и т.д., то результат $t_{ij} = j$ будет для нас неожиданным. Соответственно, будем называть *сюрпризом* элемент матрицы t_{ij}, для которого $t_{ij} = j$. Обозначим общее число сюрпризов в турнире за $\sigma(T)$. *Вес турнира* определим следующим образом:

$$w(T) = (-1)^{\sigma(T)} \prod_{1\le i<j\le n} z_{t_{ij}}$$

Турнир называется *транзитивным*, если существует перестановка игроков $\pi \in S_n$, такая что $\pi(1)$ победил всех остальных игроков, $\pi(2)$ победил всех, кроме $\pi(1)$ и т.д. В противном случае турнир будет называться *нетранзитивным.* Легко проверить, что для транзитивного турнира T выполняются равенства $\sigma(T) = \sigma(\pi)$ и $w(T) = (-1)^{\sigma(\pi)} z_{\pi(1)}^{n-1} z_{\pi(2)}^{n-2} \dots z_{\pi(n)}^{0}$.

Из определения веса турнира легко вывести следующее тождество:

$$\sum_T w(T) = \prod_{1\le k<l\le n} (z_k - z_l).$$

С другой стороны, из тождества для определителя Вандермонда следует равенство

$$\prod_{1\le k<l\le n} (z_k - z_l) = \det(z_k^{l-1}) = \sum_{\pi\in S_n} (-1)^{\sigma(\pi)} z_{\pi(1)}^{n-1} z_{\pi(2)}^{n-2} \dots z_{\pi(n)}^{0}.$$

В правой части равенства написана сумма весов по всем транзитивным турнирам. Из этого получаем, что сумма весов по всем нетранзитивным турнирам равна 0. Отсюда следует утверждение:

Предложение 1.5. Существует инволюция α на множестве нетранзитивных турниров, такая что $w(T) = -w(\alpha(T))$ для любого нетранзитивного турнира.

Теперь предположим, что игрок k играет с игроком l ровно $a_k + a_l$ раз. Будем называть *мультитурниром* строго верхнетреугольную матрицу $M = (m_{kl})_{1\le k<l\le n}$, в которой каждый элемент m_{kl} –это слово длины $(a_k + a_l)$, состоящее из букв $\{k, l\}$. Как и до этого, обозначим через $\sigma(M)$ число сюрпризов на мультитурнире M, а именно суммарное число вхождений l в элементы m_{kl} для всех $1 \le k < l \le n$. *Весом мультитурнира* будем называть моном $(-1)^{\sigma(M)} z_1^{\alpha_1} \dots z_n^{\alpha_n}$, где α_u – суммарное число вхождений u в элементы m_{kl}.

Обозначим через $S(a_1, \dots, a_n)$ множество таких мультитурниров M, для которых $w(M) = \pm z_1^{(n-1)a_1} \dots z_n^{(n-1)a_n}$. Легко проверить, что выполняется равенство

$$[z_1^{(n-1)a_1} \dots z_n^{(n-1)a_n}] \prod_{1\le k<l\le n} (z_k - z_l)^{a_k+a_l} = \sum_{M\in S(a_1,\dots,a_n)} w(M).$$

Пусть $C(a_1, \dots, a_n)$ – множество слов из букв $\{1, \dots, n\}$, в которых буква k встречается a_k раз. Определим отображение $\varphi(C(a_1, \dots, a_n)) \mapsto S(a_1, \dots, a_n)$ следующим образом: для каждого слова $v \in C(a_1, \dots, a_n)$ элемент мультитурнира $(\varphi(v))_{kl}$ получается из v выкидыванием всех букв, кроме k и l. Например,

$$\varphi(412433) = \begin{pmatrix} m_{12} = 12 & m_{13} = 133 & m_{14} = 414 \\ & m_{23} = 233 & m_{24} = 424 \\ & & m_{34} = 4433 \end{pmatrix}.$$

Будем называть

$$S_g(a_1, \dots, a_n) = \varphi(C(a_1, \dots, a_n))$$

множеством *хороших мультитурниров*, а его дополнение S_b – множеством *плохих мультитурниров*. Заметим, что хороший мультитурнир $M = \varphi(v)$ обладает следующим свойством: множество начал элементов матрицы M образуют транзитивный турнир (если все $a_k > 0$; в противном случае ограничим мультитурнир на множество тех игроков $\{u_1, \dots, u_m\}$, для которых $a_{u_k} > 0$ для всех k). А именно, транзитивная перестановка игроков получается из слова v взятием первого вхождения в v каждой из букв алфавита $\{1, \ldots, n\}$.

Для каждого хорошего мультитурнира $M = \varphi(v)$ возможно однозначно дешифровать слово v. Первая буква слова v должна присутствовать $(n-1)$ раз среди первых букв каждого из элементов m_{kl}. Вычеркнем из мультитурнира эти $(n-1)$ букву. Повторив данную процедуру для оставшегося мультитурнира, мы найдем вторую букву слова v. Продолжая повторять данную процедуру, мы восстановим все буквы слова v. Если в какой-то момент среди первых букв элементов m_{kl} нет буквы, которая встречается $(n-1)$ раз, то исходный мультитурнир M был плохим. Приведем пример:

$$v = \ldots, \qquad M = \begin{pmatrix} m_{12} = 12 & m_{13} = 133 & m_{14} = \underline{4}14 \\ & m_{23} = 233 & m_{24} = \underline{4}24 \\ & & m_{34} = \underline{4}433 \end{pmatrix},$$

$$v = 4\ldots, \qquad M = \begin{pmatrix} m_{12} = \underline{1}2 & m_{13} = \underline{1}33 & m_{14} = \underline{1}4 \\ & m_{23} = 233 & m_{24} = 24 \\ & & m_{34} = 433 \end{pmatrix},$$

$$v = 41\ldots, \qquad M = \begin{pmatrix} m_{12} = \underline{2} & m_{13} = 33 & m_{14} = 4 \\ & m_{23} = \underline{2}33 & m_{24} = \underline{2}4 \\ & & m_{34} = 433 \end{pmatrix},$$

$$v = 412\ldots, \qquad M = \begin{pmatrix} m_{12} = \text{empty} & m_{13} = 33 & m_{14} = \underline{4} \\ & m_{23} = 33 & m_{24} = \underline{4} \\ & & m_{34} = \underline{4}33 \end{pmatrix},$$

$$v = 4124\ldots, \qquad M = \begin{pmatrix} m_{12} = \text{empty} & m_{13} = \underline{3}3 & m_{14} = \text{empty} \\ & m_{23} = \underline{3}3 & m_{24} = \text{empty} \\ & & m_{34} = \underline{3}3 \end{pmatrix},$$

$$v = 41243\ldots, \qquad M = \begin{pmatrix} m_{12} = \text{empty} & m_{13} = \underline{3} & m_{14} = \text{empty} \\ & m_{23} = \underline{3} & m_{24} = \text{empty} \\ & & m_{34} = \underline{3} \end{pmatrix},$$

$$v = 412433.$$

В частности, мы получили, что отображение φ инъективно. Легко проверить, что $w(\varphi(v)) = (-1)^{a_2+2a_3+\cdots+(n-1)a_n} z_1^{(n-1)a_1} \ldots z_n^{(n-1)a_n}$. Из инъективности φ получаем $|S_g(a_1, \ldots, a_n)| = (a_1 + \cdots + a_n)!/(a_1! \ldots a_n!)$. Следовательно,

$$\sum_{M \in S_g(a_1,\ldots,a_n)} w(M) = (-1)^{a_2+2a_3+\cdots+(n-1)a_n} \frac{(a_1 + \cdots + a_n)!}{a_1! \ldots a_n!} z_1^{(n-1)a_1} \ldots z_n^{(n-1)a_n}.$$

Таким образом, для доказательства тождества Дайсона достаточно проверить, что

$$\sum_{M \in S_b(a_1,\ldots,a_n)} w(M) = 0.$$

Для этого достаточно построить инволюцию ψ, на множестве плохих мультитурниров, для которой $w(\beta(M)) = -w(M)$.

Пусть M – плохой мультитурнир. Рассмотрим процесс, который восстанавливает слово v для хорошего мультитурнира. Так как M плохой, то в какой-то момент мы не сможем выбрать букву, которая встречается $(n-1)$ раз. Рассмотрим турнир, образованный первыми буквами элементов оставшегося турнира. Он будет нетранзитивным, т.к. в транзитивном турнире присутствует игрок, который победил всех оставшихся. Применим к этому турниру инволюцию α из 1.5. Вернем все зачеркнутые ранее буквы. Получится мультитурнир $\widehat{M}$. Тогда положим $\psi(M) = \widehat{M}$.

Так как α не меняет число вхождений каждой буквы в турнир, то $\widehat{M} \in S(a_1, \ldots, a_n)$. Для мультитурниров M и $\widehat{M}$ первые шаги процесса будут совпадать до тех пор, пока первые буквы оставшегося от M мультитурнира не образуют турнир T, а первые буквы для $\widehat{M}$ – турнир $\alpha(T)$. Так как $\alpha(T)$ нетранзитивный, то $\widehat{M} \in S_b(a_1, \ldots, a_n)$. Кроме того, так как $\alpha(\alpha(T)) = T$, мы получаем $\psi(\widehat{M}) = M$. Значит, ψ – инволюция на множестве $S_b(a_1, \ldots, a_n)$. $\in S_b(a_1, \ldots, a_n)$.

Так как α меняет четность числа сюрпризов в турнире, мы получаем $\sigma(\widehat{M}) = -\sigma(M)$. Построение данной инволюции завершает доказательство тождества Дайсона.